# SOBRE LA CLIQUE COLORACIÓN DE LOS GRAFOS $[4, 2, 2]$

De Caria, Pablo Jesús†, Mazzoleni, María Pía† y Payo Vidal, María Guadalupe†

†*CONICET - Depto. de Matemática, Facultad de Cs. Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.**

Resumen: Un grafo de intersección por aristas de una familia de caminos en un árbol huésped es llamado grafo EPT. Cuando el grado máximo del árbol huésped es $4$, decimos que el grafo es $[4, 2, 2]$. En este trabajo, consideramos el problema de clique coloración en grafos $[4, 2, 2]$. Probamos que esta clase de grafos es $3$-clique coloreable y damos ejemplos de grafos en esta clase que no son $2$-clique coloreables. Además, estudiamos subclases de grafos en $[4, 2, 2]$ que tienen número clique cromático menor o igual a $2$.

Palabras clave: *grafos EPT, clique coloración, grafos de intersección*
2000 AMS Subject Classification: 05C15, 05C62

## 1. INTRODUCCIÓN Y PRELIMINARES

Una **representación $(h, s, t)$** de un grafo $G$ es un par $\langle \mathcal{T}, T \rangle$, siendo $T$ un árbol cuyos vértices tienen grado menor o igual que $h$, y $\mathcal{T}$ una familia $(T_v)_{v \in V(G)}$ de subárboles de $T$ con grado máximo menor o igual que $s$ satisfaciendo que dos vértices $v$ y $v'$ son adyacentes en $G$ si y sólo si sus correspondientes subárboles $T_v$ y $T_{v'}$ tienen al menos $t$ vértices en común. El árbol $T$ será llamado **árbol huésped**. Usamos $h = \infty$ o $s = \infty$ cuando no existen restricciones de grado. Diremos que $G$ es un **grafo $[h, s, t]$** si tiene una representación $(h, s, t)$. Cuando además el árbol huésped de la representación es una estrella, diremos que el grafo es $[h, s, t]$-estrella.

Se dice que un grafo es **EPT** si es el grafo de intersección por aristas de una familia $\mathcal{P}$ de caminos de un árbol. La clase de los grafos EPT fue investigada por primera vez en $1985$ por Golumbic y Jamison [7, 8]. Reconocer los grafos EPT es un problema NP-completo [7]. Usando la definición del párrafo anterior, surge que los grafos EPT son equivalentes a los grafos $[\infty, 2, 2]$, y los grafos $[h, 2, 2]$ son aquellos grafos EPT que poseen un árbol huésped de grado máximo menor o igual que $h$.

Los grafos EPT son usados en aplicaciones de redes, donde el problema de planificación de llamadas no dirigidas en una red que es un árbol es equivalente al problema de colorear un grafo EPT. La red de comunicación está representada como un grafo no dirigido de interconexión, donde cada arista es asociada con una conexión física entre nodos. Una llamada no dirigida es un camino en la red. Cuando la red es un árbol, este modelo es claramente una representación EPT. Colorear el grafo EPT de forma tal que dos vértices adyacentes tengan distintos colores significa que llamadas no dirigidas que comparten una conexión física tienen que planificarse en distintos momentos.

Un **completo** de un grafo $G$ es un subconjunto de vértices adyacentes de a pares. Un **clique** es un completo maximal. Llamaremos $C(G)$ a la familia de cliques de $G$. Dada una representación $EPT$ $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ y $e \in E(T)$, definimos $\mathcal{P}[e] = \{P \in \mathcal{P} | e \in \mathcal{P}\}$. Para cualquier $K_{1,3}$ digamos $T'$ en $T$, sea $\mathcal{P}[T'] = \{P \in \mathcal{P} | P$ contiene dos aristas de $T'\}$. Cada $\mathcal{P}[e]$ y $\mathcal{P}[T']$ corresponde a un completo de $G$. Un clique de la forma $\mathcal{P}[e]$ es llamado **clique arista** y uno de la forma $\mathcal{P}[T']$ **clique garra**. En [7] fue probado que en un grafo EPT todos los cliques son clique arista o clique garra. Notar que la condición de ser clique arista o clique garra depende de la representación dada.

Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos satisface la **Propiedad de Helly** cuando toda subfamilia de conjuntos de $\mathcal{F}$ mutuamente intersectantes tiene intersección no vacía. Diremos que un grafo es **EPT-Helly** si tiene una **representación EPT-Helly**, es decir, una representación EPT tal que la familia $(E(P))_{P \in \mathcal{P}}$ satisface la Propiedad de Helly. En una representación EPT-Helly todos los cliques son clique arista.

Para un entero $k > 2$, una **tarta** de tamaño $k$ en una representación EPT $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es un subgrafo estrella de $T$ con centro $q$ y vecinos $q_1$,...,$q_k$, y una subfamilia de caminos $P_1$,...,$P_k$ tal que $\{q_i, q, q_{i+1}\} \subseteq V(P_i)$ para $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ y $\{q_k, q, q_1\} \subseteq V(P_k)$. En [8] fue probado que, si $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es una representación EPT de $G$ y si $G$ contiene un ciclo inducido $C_k$, $k > 3$, entonces $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ contiene una tarta de tamaño $k$ cuyos caminos están en correspondencia uno a uno con los vértices de $C_k$.

*Mail: pdecaria@mate.unlp.edu.ar, pia@mate.unlp.edu.ar, gpayovidal@mate.unlp.edu.ar

Un grafo es **cordal** si no tiene ningún $C_n$ inducido, con $n \geq 4$. Un vértice $v$ de $G$ se dirá **simplicial** si $N_G[v]$ es un completo. Se sabe que si $G$ es cordal, tiene un vértice simplicial. Más aún, si $G$ no es completo, tiene dos vértices simpliciales no adyacentes (ver [6]).

Una **k-clique coloración** de un grafo $G$ es una función $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ tal que ningún clique de $G$ de tamaño al menos 2 es monocromático. Un grafo $G$ es **k-clique colorable** si tiene una $k$-clique coloración. El **número clique cromático** de $G$, denotado por $\chi_c(G)$, es el menor entero $k$ tal que $G$ es $k$-clique coloreable. La clique coloración tiene algunas similitudes con la coloración usual. Por ejemplo, toda $k$-coloración es también una $k$-clique coloración. Además, $\chi(G)$ y $\chi_c(G)$ coinciden si $G$ es libre de triángulos. Pero también existen grandes diferencias. Por ejemplo, una clique coloración de un grafo podría no inducir una clique coloración en algunos de sus subgrafos. Los subgrafos podrían tener número clique cromático mayor que el del grafo original. Otra diferencia importante es que un grafo que es 2-clique coloreable puede contener un clique arbitrariamente grande. Se sabe que el problema de 2-clique coloración es NP-completo, incluso bajo diferentes restricciones [1, 9]. Muchas familias de grafos son 3-clique coloreables, por ejemplo, grafos EPT-Helly, grafos de comparabilidad, grafos de co-comparabilidad, grafos arco circulares y $k$-potencias de ciclos [2, 3, 4]. Algunas familias de grafos conocidas con número clique cromático no acotado son: grafos EPT, grafos perfectos, grafos libres de triángulos y grafos de línea [1, 4, 5, 10]. Se sabe que los grafos cordales, y en particular los grafos de intervalos, son 2-clique coloreables [11].

En nuestro trabajo, consideraremos el problema de clique coloración en grafos $[4, 2, 2]$ con algún clique garra (es decir, no Helly) y con algún ciclo inducido de tamaño mayor o igual a 4 (no cordal). Hemos probado que la clase de grafos $[4, 2, 2]$ es 3-clique coloreable. En la Figura 1 damos ejemplos de grafos que están en esta clase y no son 2-clique coloreables minimales (es decir, si sacamos cualquier vértice se transforman en 2-clique coloreables).

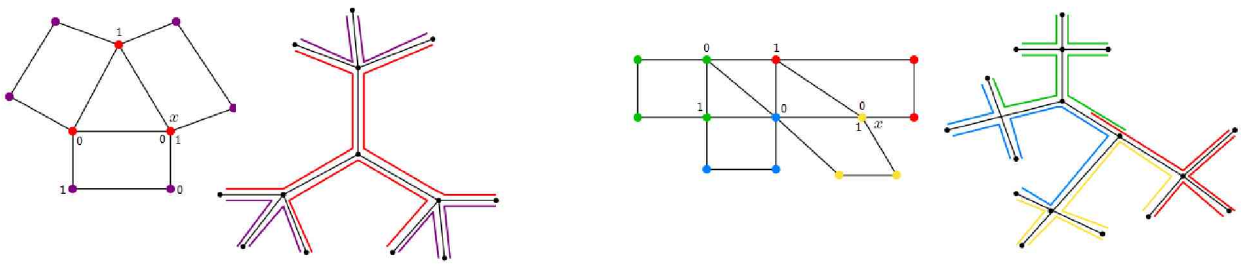


Figura 1: Notar que en ambos casos el vértice $x$ produce una contradicción.

## 2. Resultados Principales

Primero estudiaremos qué subclases de grafos en $[4, 2, 2]$ son 2-clique coloreables, para finalmente dar paso al resultado que dice que la clase de grafos $[4, 2, 2]$ es 3-clique coloreable.

**Lema 1** *Sea $G$ un grafo para el cual existe un árbol $T$ tal que para todo $C \in C(G)$ (con al menos dos vértices) $T$ contiene una arista de $C$. Entonces $\chi_c(G) = 2$.*

El siguiente lema es trivial para ciclos pares y para otros grafos puede probarse mediante el lema anterior.

**Lema 2** *Sea $G$ un grafo EPT-Helly-estrella. Si $G$ es distinto de un ciclo impar, entonces $\chi_c(G) = 2$.*

**Teorema 1** *Sea $G$ un grafo EPT-estrella distinto de un ciclo impar y tal que sus cliques garra son mutuamente disjuntos. Entonces, $\chi_c(G) = 2$.*

*Idea de la Prueba*: Si no hay cliques garra entonces $G$ es EPT-Helly-estrella y el resultado sale por Lema 2. Si hay cliques garra, suponemos que en la estrella no hay caminos gemelos, si los hubiera coloreamos cada uno de los gemelos con colores distintos y nos aseguramos que en todo clique al cual pertenecen haya al menos dos colores. Sea $G'$ subgrafo de $G$ obtenido de eliminar, por cada clique garra $C_c$, un vértice $v$ de él. Dado que $G$ no tiene caminos gemelos $G'$ no posee cliques garra y es por ende EPT-Helly. Si en cada clique garra eliminamos $v$ de manera que los caminos restantes compartan una arista con otro camino fuera del clique, nos aseguramos que $G'$ no es un ciclo.

Luego existe un árbol $T$ tal que, para todo clique $C$ de $G'$, $T$ contiene una arista de $C$. Por cada clique garra $C_c$ de $G$, a $T$ le agrego la arista con $v$ y otro vértice del clique garra como extremos. Así, cubro los clique garra de $G$. Luego, $T$ cubre todos los cliques de $G$ y por los lemas anteriores $\chi_c(G) = 2$. □

**Corolario 1** *Sea $G$ EPT-estrella, distinto de un ciclo impar y libre de diamantes. Entonces, $\chi_c(G) = 2$.*

El siguiente lema será usado en la demostración del Teorema 2.

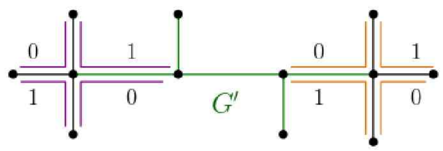
**Lema 3** *Sea $G$ un grafo $[4, 2, 2]$-estrella. Entonces, $G$ es 2-clique-coloreable.*

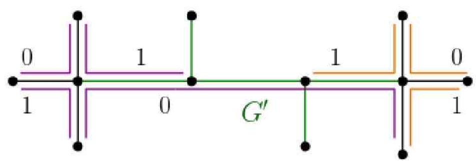
**Teorema 2** *Sea $G$ un grafo $[4, 2, 2]$ cuyo árbol huésped tiene a lo sumo dos vértices de grado $4$. Entonces, $\chi_c(G) = 2$.*

*Idea de la Prueba*: Puede demostrarse por inducción sobre la cantidad de vértices. Si $G$ posee no más de cuatro vértices, entonces es 2-clique-coloreable. Supongamos ahora que la propiedad vale para todo grafo de a lo sumo $k$ vértices y sea $G$ con $k + 1$ vértices. Si $G$ posee un vértice simplicial $v$, entonces $G - v$ es 2-clique coloreable por hipótesis inductiva y toda 2-clique coloración de $G - v$ se puede extender a $G$ dándole a $v$ un color ya usado y distinto al de un vértice particular de su clique (si lo hay). Supongamos de ahora en más que $G$ no posee vértices simpliciales. Consideramos dos casos.

Caso $1$): Hay un único vértice $v$ de grado $4$. Partimos $T$ en cuatro conjuntos de aristas formados por las cuatro ramas que salen de $v$. Sean $G_1$, $G_2$, $G_3$ y $G_4$ los grafos inducidos por los caminos que tienen aristas en cada uno de los conjuntos. Cada uno de los $G_i$ es un grafo cordal, y sabemos que los grafos cordales son completos o poseen dos vértices simpliciales no adyacentes. Si algún $G_i$ tiene dos simpliciales no adyacentes, al menos uno de ellos es simplicial en $G$ también, lo cual va en contra de nuestra suposición. Por lo tanto, todos los $G_i$ son completos, lo cual sumado a la ausencia de simpliciales nos permite reducir la representación quedándonos con un árbol huésped que es una estrella de grado $4$. Se deduce por el Lema 3 que $G$ es 2-clique-coloreable.

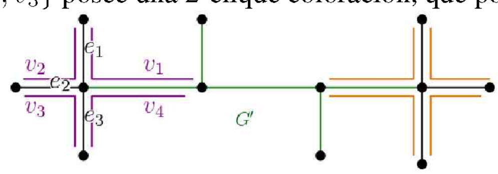
Caso $2$): Similarmente al caso anterior, podemos hacer reducciones de ser necesario y trabajar con un árbol huésped en el que cada uno de los vértices de grado cuatro es adyacente a tres hojas. Además, podemos suponer que cada vértice de grado cuatro tiene un $C_4$ inducido asociado. Consideremos el subárbol obtenido al remover las hojas vecinas a los vértices de grado cuatro y el subgrafo $G'$ inducido por los caminos de la representación que poseen aristas del subárbol. Luego, $G'$ es completo o posee dos simpliciales no adyacentes. Si es completo coloreamos los vértices de los $C_4$ primero, alternando los colores, y luego es posible extender la coloración al resto del grafo. Así, $\chi_c(G) = 2$.



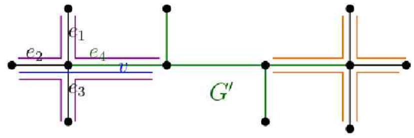




Si en $G'$ hay dos simpliciales no adyacentes, los caminos que los representan tienen un vértice de grado $4$ para cada uno, y tenemos dos subcasos:

Subcaso $2)a)$: Uno de los simpliciales tiene a $e_1$ (o a $e_3$). Supongamos que $v_1$ es el simplicial. Por hipótesis inductiva, $G - \{v_1, v_2, v_3\}$ posee una 2-clique coloración, que podemos extender a $G$.




Subcaso $2)b)$: Uno de los simpliciales tiene a $e_2$. Supongamos que no está el camino con aristas $e_1$ y $e_3$ (caso contrario se puede aplicar nuevamente el caso anterior). Llamemos $v$ al simplicial. Por hipótesis inductiva, $G - v$ posee una 2-clique-coloración, que podemos extender a $G$.




□

Finalmente, presentamos el Teorema sobre toda la clase $[4, 2, 2]$.

**Teorema 3** *Si $G$ es un grafo $[4, 2, 2]$, entonces $G$ es $3$-clique-coloreable.*

*Idea de la Prueba*: Lo probaremos por inducción sobre la cantidad de vértices. Si $G$ posee no más de $4$ vértices, entonces $G$ es 2-clique coloreable. Supongamos ahora que la propiedad vale para todo grafo con no más de $k$ vértices y sea $G$ con $k + 1$ vértices.
Supongamos sin pérdida de generalidad que $G$ es conexo. Sea $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ una $[4, 2, 2]$-representación de $G$ tal que la cantidad de aristas de $T$ es mínima. Si existieran vértices $x$ e $y$ tales que $N[x] \subseteq N[y]$, entonces por hipótesis inductiva podemos tomar una 3-clique-coloración de $G - x$ y extenderla a todo $G$ dándole a $x$ un color ya usado y distinto al de $y$. Supongamos de ahora en más que no existen vértices así. Esto en particular implica que no hay vértices simpliciales ni vértices gemelos.
Si $T$ es una estrella, tenemos por el Lema 3 que $G$ es 2-clique-coloreable. Supongamos ahora que $T$ no es una estrella. Entonces, existe una arista $e = vw$ en $T$ tal que los vecinos de $w$, excepto $v$, son hojas.
Consideremos $T'$ y $T''$ los subárboles de $T$ tal que $T'$ es inducido por $v$, $w$ y todos los vértices en $T$ que no son vecinos de $w$, y $T''$ es la estrella inducida por $w$ y sus vecinos en $T$. Sean $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$ los subconjuntos de $\mathcal{P}$ tal que $P$ está en $\mathcal{P}'$ si y sólo si $P$ tiene una arista en $T'$, y $P$ está en $\mathcal{P}''$ si y sólo si $P$ tiene una arista en $T''$. Sean $G'$ y $G''$ los grafos de intersección por aristas de $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}''$, respectivamente.
Por la minimalidad de $T$ y la suposición del segundo párrafo podemos afirmar que $T''$ es una estrella de cuatro puntas y que hay al menos dos vértices $x$ e $y$ en $G''$ pero no en $G'$, cuyos caminos son no idénticos y cada uno con dos aristas. Como $N[x]$ no está contenido en $N[y]$, existe un vértice $x'$ que es adyacente a x pero no a $y$. Similarmente, existe un vértice $y'$ adyacente a $y$ pero no a $x$. Vale que $x'$ e $y'$ son vértices de $G'$ y que $xyy'x'x$ es un $C_4$ inducido.
Por hipótesis inductiva, $G'$ es 3-clique-coloreable. Consideremos una clique coloración de $G'$ que usa los colores 0, 1 y 2. Para extenderla a $G$, consideramos dos casos.
Si $x'$ e $y'$ recibieron dos colores distintos, supongamos 0 para el primero y 1 para el segundo, le asignamos color 0 a $y$, color 1 a $x$ y cualquier color a todo vértice aún no coloreado, si lo hubiera.
Si $x'$ e $y'$ tienen el mismo color (supongamos que es 0), le asignamos color 1 a $x$, color 2 a $y$ y cualquier color en $\{1, 2\}$ a todo otro vértice aun no coloreado, si lo hubiera. □

## REFERENCIAS


[1] G. Bacsó, S. Gravier, A. Gyárfás, M. Preissmann and A. Sebő, *Coloring the maximal cliques of graphs*, SIAM J. Discr. Math. 17 (2004) 361–376.

[2] C. N. Campos, S. Dantas and C. P. de Mello, *Colouring clique-hypergraphs of circulant graphs*, Electron. Notes Discr. Math. 30 (2008) 189–194.

[3] M.R. Cerioli and A.L. Korenchendler, *Clique coloring circular-arc graphs*, Electron. Notes Discr. Math. 35 (2009) 287–292.

[4] M.R. Cerioli and P. Petito, *Clique coloring UE and UEH graphs*, Electron. Notes Discr. Math. 30 (2008) 201–206.

[5] P. Charbit, I. Penev, S. Thomassé and N. Trotignon, *Perfect graphs of arbitrarily large clique-chromatic number*, J. Combin. Theory, Series B. 116 (2016) 456–464.

[6] G. A Dirac, *On rigid circuit graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 25 (1961) 71–76.

[7] M.C. Golumbic, R.E. Jamison, Edge and vertex intersection of paths in a tree, Discr. Math. 55 (1985) 151–159.

[8] M.C. Golumbic, R.E. Jamison, The edge intersection graphs of paths in a tree, J. Combin. Theory Ser. B 38 (1985) 8–22.

[9] J. Kratochvíl and Zs. Tuza, *On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs*, J. of Algorithms 45 (2002), 40–54.

[10] J. Mycielski, *Sur le coloriage des graphes*, Colloquium Mathematicum. 3 (1955) 161–162.

[11] H. Poon, *Coloring Clique Hypergraphs*, Master's thesis, West Virginia University (2000).