

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Trabajo de Diploma

Dinámica de Propagación del Daño
en un Modelo de Ising Bidimensional

Fernando F. Montani

Director Dr. Ezequiel V. Albano

La Plata, marzo de 1996

Índice

1	Resumen	3
1.1	Introducción	3
1.2	Objetivos	5
2	Dinámica de propagación del daño	7
2.1	Introducción	7
2.2	Propagación del daño	9
2.3	Un caso particular: el modelo de Ising	10
2.4	El Método Montecarlo y la propagación del daño	12
2.5	Una dinámica particular: Glauber	14
3	Resultados obtenidos y su interpretación	17
3.1	Introducción	17
3.2	Las cantidades medidas	18
3.3	$N_d(t)$: resultados y su interpretación	18
3.4	$P(t)$: resultados y su interpretación	25
3.5	$R^2(t)$: resultados y su interpretación	28
3.6	Calculo promedio del daño a T_c y su interpretación	29
3.7	Dimensión fractal de la región dañada	30
4	Conclusiones	33

5	Apéndice	35
5.1	Una breve introducción a la teoría de escaleo finito	35
5.2	La distribución de Probabilidad del parámetro de orden	39
5.3	Referencias	40
5.4	Agradecimientos	42

Capítulo 1

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de propagación de un pequeño daño inicial en un modelo de Ising bidimensional. Esta es estudiada a la temperatura crítica usando una dinámica particular llamada Glauber. Para caracterizar la propagación del daño se midieron: la densidad de espines dañados al tiempo t , $N_d(t)$, la probabilidad de sobrevivencia del daño a un tiempo t , $P(t)$, y la distancia cuadrática media a la cual se propagó el daño a un tiempo t , $R^2(t)$. A la temperatura crítica estas cantidades medidas cumplen leyes de potencias con los exponentes críticos dinámicos respectivos

$\eta \simeq 1.11 \pm 0.03$, $\delta \simeq 0.58 \pm 0.03$ y $z^* \simeq 1.19 \pm 0.03$. Se obtuvo la dimensión fractal de la región dañada a través de estos exponentes dinámicos, mediante la siguiente relación de escala : $d_f = 2\eta/z^*$. Se encuentra que esta relación nos da la dimensión fractal de las gotas de Ising (Ising drops). Además se propone la siguiente relación entre los exponentes críticos dinámicos y estáticos característicos del proceso de dispersión del daño: $d(1 - \eta/z^*) = \beta/\nu$, donde d es la dimensión del espacio, β el exponente del parámetro de orden y ν el exponente de la longitud de correlación.

1.1 Introducción

Como una perturbación se propaga a través de un sistema cooperativo compuesto por subunidades interactuantes, es una cuestión en la que centraremos nuestra

atención durante todo este trabajo. A esta perturbación se la conoce con el nombre de daño, y nuestro interés particular es estudiar la dinámica de propagación de un pequeño daño inicial en un modelo de Ising bidimensional. Para esto utilizaremos la técnica de propagación del daño. La idea básica de esta técnica consiste en medir la distancia Hamming, la cual se definirá posteriormente.

Para poder estudiar la dinámica de propagación de un pequeño daño inicial se genera una configuración de equilibrio σ^A y esta es replicada en un segundo sistema σ^B excepto por el espin central el cual tiene direcciones opuestas en ambas configuraciones. Luego el procedimiento Montecarlo es implementado de manera standard. Los sitios equivalentes en ambas configuraciones son visitados aleatoriamente (esto se explicará posteriormente) y se utiliza el mismo conjunto de números aleatorios de manera de actualizar los sistemas de acuerdo a la dinámica particular que se utilice. Durante todo este trabajo se utilizará, una dinámica llamada dinámica de Glauber, a una particular, la temperatura crítica. Esta temperatura presenta un interés muy especial ya que se define como la temperatura a la cual dar vuelta un solo espin causa un daño que se propaga indefinidamente.

A dicha temperatura se midieron las siguientes cantidades:

- (i) La densidad $\{N_d(t)\}$ de espines dañados a tiempo t (es decir el número promedio de espines dañados a tiempo t dividido L^2).
- (ii) la probabilidad $\{P(t)\}$ de que el daño aun sobreviva a un tiempo t
- (iii) la distancia cuadrática media $\{R^2(t)\}$ sobre el cual el daño se ha propagado, y es distinto de cero, al tiempo t .

Es de esperar que a la temperatura crítica dichas cantidades obedezcan, leyes de potencias, con los exponentes críticos dinámicos respectivos. La obtención de estos exponentes nos permitió caracterizar a la región dañada; mediante la dimensión fractal de la misma (esta será definida en el capítulo 3). Esto nos llevó a proponer una relación entre los coeficientes críticos dinámicos y los coeficientes críticos estáticos de las gotas de Ising (Ising droplets), a la temperatura estudiada.

1.2 Objetivos

- Familiarización con técnicas computacionales.
 - Familiarización con el idioma de programación OCCAM [1]
 - Estudio de la dinámica de propagación del daño en un modelo de Ising bidimensional mediante la dinámica de Glauber.
 - Interpretación de las cantidades medidas.
 - Obtención de los exponentes críticos dinámicos que caracterizan la dinámica de propagación del daño a la temperatura crítica.

Obtención a través de estos exponentes críticos dinámicos de la dimensión fractal que caracteriza a la región dañada.

- Comparación de la dimensión fractal obtenida con trabajos afines.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 2 damos una breve introducción teórica de la técnica de propagación del daño. En el capítulo 3 presentamos los resultados obtenidos y su interpretación. En el capítulo 4 damos a conocer las conclusiones alcanzadas en este trabajo. Finalmente el capítulo 5 (apéndice) es una breve introducción de la teoría de escaleo finito (a la temperatura crítica).

Capítulo 2

Dinámica de propagación del daño

2.1 Introducción

La segunda ley de la termodinámica implica que sistemas físicos aislados y microscópicamente reversibles evolucionan hacia estados de máxima entropía (máximo desorden). Sin embargo, sin profundizar en la teoría de automatas celulares podemos intentar introducir la idea que existen sistemas que pueden evolucionar desde un estado desordenado a uno más ordenado, a través de un ejemplo de automata celular determinístico. Para ello definiremos primero que es un automata celular: estos son idealizaciones de sistemas físicos en los cuales el espacio y el tiempo son discretos, y cualquier cantidad física toma un conjunto finito de valores discretos. Un autómata celular consiste en una red regular con una variable discreta por sitio. El estado del autómata está completamente determinado por los valores de las variables en cada sitio y evoluciona en el tiempo a pasos discretos de forma tal que, el valor de la variable en cada sitio resulta afectada por los valores en el paso previo de las variables en su vecindad. Se considera como vecindad de un sitio al sitio mismo y a todos los sitios inmediatamente adyacentes. Las variables en cada sitio son puestas al día simultaneamente, basados en los valores de las variables en su vecindad en el paso previo y acorde a un conjunto definido de reglas locales.

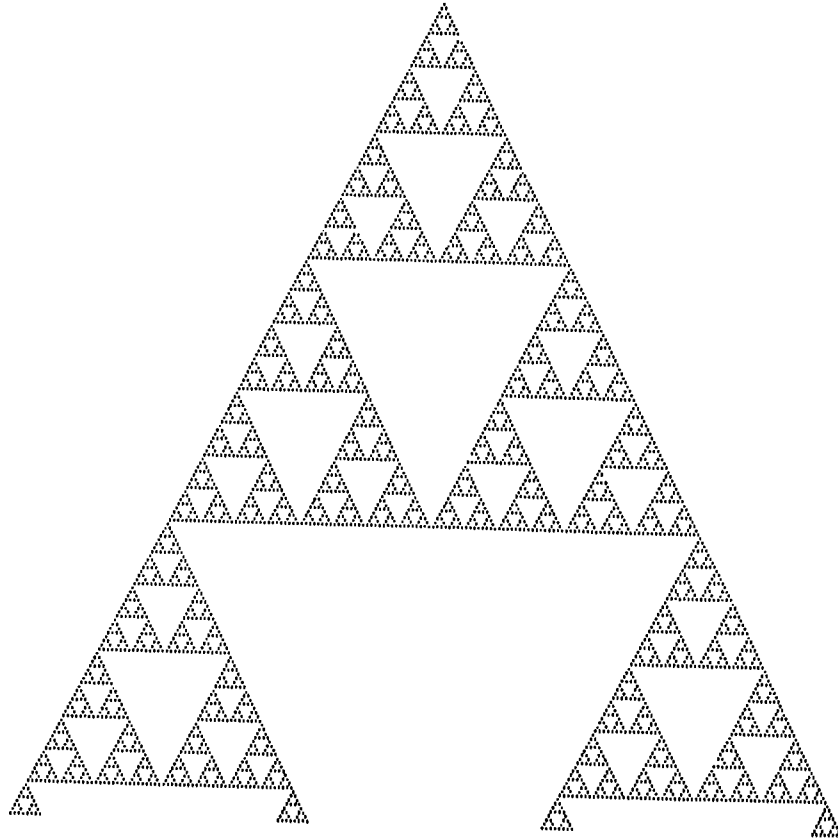


Figura 1 Esta muestra la propagación del daño para una regla unidimensional exclusiva OR. Para una distribución de espines inicial completamente aleatorio se observa como dar vuelta un espin del centro de la red afecta posteriormente a la misma. La línea superior corresponde a tiempo cero, cada paso temporal se corresponde con una nueva línea.

Imaginemos ahora que tenemos una línea recta de espines es decir, de átomos que pueden tener sus momentos dipolares magnéticos hacia arriba o hacia abajo

(matemáticamente estos pueden ser representados por un número cero o uno). Inicialmente supongamos que los espines están ordenados aleatoriamente la mitad de estos apuntan hacia arriba y la otra mitad hacia abajo. Luego para cada paso de tiempo $t=0,1,2,3\dots$ cada espin depende de la orientación de sus vecinos, a la derecha y a la izquierda. Para una regla exclusiva OR (a veces abreviada como XOR o como regla 90), el espin apunta hacia arriba si en el paso previo los dos vecinos tuvieron orientaciones diferentes, y apuntan hacia abajo si tuvieron orientaciones paralelas. Esto completa la definición de este automata celular particular, el cual es determinístico (estamos ignorando el caso en el cual el automata sea probabilístico, es decir en donde la orientación del espin este determinada solamente con una cierta probabilidad).

La figura 1 no es una de tales líneas XOR para tiempos consecutivos. En lugar esto simulamos dos autómatas XOR diferentes (es decir que siguen la misma regla exclusiva OR) pero cuyas orientaciones de espines difieren en uno solo de ellos. La simulación comienza cambiando la orientación de un espin en una de las redes unidimensionales, dejando los demás sin perturbar. Podemos pensar a este cambio de orientación como un daño introducido en dicha red. Esta figura muestra la evolución temporal del daño (el conjunto de espines que difieren en su orientación al comparar la red dañada con la red de referencia) cuando inicialmente sólo el espin central difiere. Cada nueva línea representa un nuevo paso temporal. De la figura vemos que este orden a surgido del desorden, ya que las condiciones iniciales fueron completamente aleatorias y en ningún momento obedecieron alguna regularidad.

2.2 Propagación del daño

Desde años atrás la técnica de propagación del daño ha sido aplicada a una gran variedad de modelos, reflejando a través de ellos su relevancia. Aunque esta técnica fue originalmente introducida para estudiar la sensibilidad de las condiciones iniciales en sistemas complejos, esta técnica ha comprobado ser de gran utilidad en el estudio de sistemas magnéticos [2], [3] y [4]. Esta nos permite obtener información valiosa

acerca de la estructura de fase de modelos no resueltos, como una red de espines con interacción de corto rango [5], además ultimamente a sido utilizada para el estudio de transiciones de fase irreversibles en sistemas reactivos [6]. Por otro lado también nos provee un método poderoso para el calculo numérico de la susceptibilidad magnética de sistemas Isings [4]. La idea básica de esta técnica consiste en medir la distancia Hamming

$$D(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N | \sigma_i^A(t) - \sigma_i^B(t) | \quad (2.1)$$

entre dos configuraciones diferentes: $\sigma^A(t)$ y $\sigma^B(t)$, en donde N es el número de sitios del sistema, usando la misma secuencia de números aleatorios en una simulación Montecarlo. La dependencia de la distancia Hamming con la temperatura del sistema y algún otro parametro relevante, nos permite construir un diagrama de fase dinámica el cual depende del proceso estocástico específico (baño caliente, Metrópolis, Glauber etc). Cuando la distancia Hamming final no es cero, decimos que el sistema está en la fase caótica, ya que este desarrolló sensibilidad a las condiciones iniciales. Cuando la distancia Hamming es cero, decimos que el sistema está en la fase congelada. El problema de la propagación del daño consiste en una dada configuración estacionaria σ^A crear un daño inicial $D(0)$ a $t=0$, este procedimiento nos da una segunda configuración σ^B . Luego se mide la evolución temporal de la diferencia entre dos configuraciones de acuerdo con la ecuación (2.1). Físicamente el daño mide la fracción de sitios para la cual las dos configuraciones son diferentes.

2.3 Un caso particular: el modelo de Ising

Un sistema particularmente interesante es el modelo de Ising. Este es un modelo de sistemas cooperativos, donde cada sitio puede tomar solo dos valores: "espin hacia arriba" y "espin hacia abajo" Llamamos a estos grados de libertad "espin hacia abajo" y "espin hacia arriba", a pesar de que se trata de un lenguaje magnético, no estamos tratando con los aspectos mecánico-cuántico de estos espines. La magnetización es la diferencia entre el número de espines hacia arriba y el número de

espines hacia abajo dividido el número total de espines. Si $S_i = 1$ para espines hacia arriba y $S_i = -1$ para espines hacia abajo, luego $M = \sum_i S_i/N$. Dos espines paralelos (antiparalelos) tienen una energía de interacción $-(+)J_{ik}$ la cual depende de la distancia entre el sitio i y el sitio k (estos están localizados en sitios en una red regular). En presencia de un campo magnético H apuntando hacia arriba cada espin tiene energía adicional HS_i . El hamiltoniano para este caso será

$$H^* = - \sum_{i \neq j}^N J_{ij} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i \quad (2.2)$$

Como una perturbación se propaga a través de este sistema cooperativo compuesto por subunidades interactuantes es una cuestión en la que centraremos nuestra atención durante todo este trabajo. Para estudiar la propagación de una pequeña perturbación, llamada daño, en un sistema cooperativo Ising bidimensional primero se debe simular un sistema hasta que llegue al estado de equilibrio. Luego a tiempo $t=0$, hacemos una réplica de esta configuración de equilibrio y damos vuelta un espin (daño inicial) en el centro de la réplica. Desde luego, para el sistema original ("de control ") y para el dañado se utilizan la misma dinámica y el mismo conjunto de números aleatorios para ambos sistemas. A medida que el tiempo evoluciona, nuestro sitio inicial dañado generalmente resulta en una región de sistemas cooperativos en los cuales los espines difieren en la orientación con respecto a los espines del sistema de control. A esta región se le llama dañada y se mide este daño cuantitativamente contando el número de espines en el sistema que difieren del sistema de control (ecuación (2.1)). Se encuentra que algunas veces el daño permanece localizado en una pequeña porción de la red y que otras veces se propaga a través de todo el sistema cooperativo (ya que cada espin es interactuante con sus vecinos).

Para el caso particular del modelo de Ising, la dinámica de propagación del daño ha sido estudiada imponiendo diferentes condiciones iniciales y reglas dinámicas (baño caliente [7] y [8]; Glauber [2], [3] y [8]; Q2R [2]), o bien aplicando métodos analíticos los cuales revelan la relación entre el daño y las propiedades termodinámicas [4]. Si se desea estudiar con una dinámica particular la propagación del

daño para el modelo de Ising; se necesitan dos configuraciones σ_A y σ_B (en donde σ_B fue creada a partir de la configuración estacionaria σ_A pero con un daño inicial $D(0)$ a $t = 0$). Cada sitio i (de ambas configuraciones) a un dado tiempo t debe evolucionar, a un tiempo $t + 1$, a un nuevo estado determinado por la misma dependencia de los campos locales $h_i^A(t)$ y $h_i^B(t)$. Desde ya, se debe usar el mismo número aleatorio para actualizar los espines correspondientes, en las dos configuraciones.

Aun dado tiempo t , cada sitio i del modelo de Ising tiene un campo local dado por:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N K_{ij} S_j(t) + h \quad (2.3)$$

donde $K_{ij} \equiv J_{ij}/k_B T$ y $h = H/k_B T$ son las constantes adimensionales de acoplamiento de primeros vecinos y el campo magnético respectivamente.

Cabe aclarar que para obtener resultados estadísticos significativos uno debe promediar sobre secuencias diferentes de números aleatorios. Es importante también notar que, como en sistemas dinámicos determinísticos, si dos configuraciones se vuelven idénticas permanecerán siempre idénticas.

2.4 El Método Montecarlo y la propagación del daño

En 1953 Metropolis y colaboradores [12] describieron un algoritmo para el cálculo de promedio de conjuntos estadísticos por medio de computadoras.

Supongamos entonces que tenemos un sistema de N partículas a una temperatura dada T y con un volumen V . Describimos a cada partícula i por un conjunto de variables a_i ; el conjunto $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}\}$ describe una configuración o punto x del espacio de la fases del modelo. Si la interacción entre partículas esta descrita por un hamiltoniano $H_n(x)$ los valores medios de las magnitudes termodinámicas

$A(x)$ van a estar dados por

$$\langle A \rangle = \left(\int_{\Omega} dx A(x) \exp[-H_n(x)/k_B T] \right) / \left(\int_{\Omega} dx \exp[-H_n(x)/k_B T] \right) \quad (2.4)$$

donde la integral sobre el espacio de la fases Ω debe ser extendida como las sumas correspondientes.

La idea básica del Método Montecarlo es calcular estas integrales numericamente. Pero debido a la cantidad de puntos del espacio de la fases hace imposible evaluar esta suma, uno debe tomar aleatoriamente una determinada cantidad de puntos.

Desafortunadamente, este método simple no es adecuado para resolver los problemas de mecánica estadística. La razón es que el integrando $\exp[-H_n(x)/k_B T]$ varia en varios ordenes de magnitud en la mayoría de las temperaturas interesantes. El método que introdujeron Metropolis y colaboradores, es utilizar un algoritmo llamado "muestreo diferenciado" Esto significa que los M puntos del espacio de la fases $\{x_j\}$ no se eligen completamente al azar, sino que son determinados segun la probabilidad $P(x_j)$. De esta forma la ecuación anterior es aproximada por:

$$\langle A \rangle \approx A = \frac{\sum_{j=1}^n A(x_j) P(x_j) \exp[-H_n(x_j)/K_B T]}{\sum_{j=1}^n P(x_j) \exp[-H_n(x_j)/K_B T]} \quad (2.5)$$

Es posible construir un camino aleatorio $\{x_j\}$ en el espacio de la fases vía un proceso de Markov tal que $P(\{x_j\})$ tiende a $P_{eq}(x_j) = a * \exp[-H_n(x_j)/K_B T]$ (donde P_{eq} es la distribución de equilibrio [12]). Este proceso de Markov se define especificando una probabilidad de transición $p_{flip}(x_j \rightarrow x_{j'})$ de un punto a otro del espacio de las fases. Es condición suficiente para que P tienda a P_{eq} (donde P_{eq} es la distribución de equilibrio), que se satisfaga la condición de balance detallado:

$$P(\{x_j\}) * p_{flip}(x_j \rightarrow x_{j'}) = P(\{x_{j'}\}) * p_{flip}(x_{j'} \rightarrow x_j) \quad (2.6)$$

lo que implica que el cociente de probabilidad de transición dependa unicamente del cambio de energía $\delta H = H_n(x_{j'}) - H_n(x_j)$. Esto no especifica $p_{flip}(x_j \rightarrow x_{j'})$ en forma única. Existen varias dinámicas cuyas probabilidades de transición satisfacen

la condición de balance detallado, a saber Glauber [2], [3] y [8]; baño caliente[7] y [8]; Metropolis [12], Kawasaki[13], etc. En nuestro caso particular solo estudiaremos la dinámica de Glauber.

Como la trayectoria recorrerá el espacio de las fases dependiendo de las condiciones iniciales, es la principal pregunta que surge de la teoría de sistemas dinámicos. Para ello se define la idea de distancia en el espacio de las fases, por la "distancia Hamming" (ecuación (2.1)).

2.5 Una dinámica particular: Glauber

Consideremos el caso en el que el campo magnético H es cero. El campo local se puede escribir ahora como:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N K_{ij} S_j(t) \quad (2.7)$$

La dinámica de Glauber selecciona, a un dado tiempo t en el sitio i un número aleatorio $0 \leq X_i \leq 1$, y determina el valor de un nuevo estado de la variable S_i , a un tiempo $t+1$ usando la regla:

$$S_i(t+1) = \begin{cases} 1, & X_i \leq p_i(t) \\ 0, & X_i > p_i(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

si $S_i = -1$.

$$S_i(t+1) = \begin{cases} 0, & X_i \leq 1 - p_i(t) \\ 1, & X_i > 1 - p_i(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

si $S_i(t) = 1$.

Específicamente si nuestro sistema consiste de L^2 espines situados en los vértices de una red cuadrada de $L * L$ cada par de primeros vecinos tiene una energía de intercambio $J_{ij} S_i S_j$ la cual es J_{ij} o $-J_{ij}$ dependiente de acuerdo a que los espines sean paralelos o antiparalelos. Para la dinámica de Glauber la probabilidad de que un espin de la red sea dado vuelta esta dada por:

$$p_{flip} = \exp(-\Delta E/k_B T) / (1 + \exp(-\Delta E/k_B T)) \quad (2.10)$$

donde ΔE es la la diferencia de energía entre la nueva configuración y la vieja

Se define [2] el punto critico o punto de propagación T_c como la temperatura por encima de la cual dar vuelta un solo espin causa (con probabilidad distinta de cero) un daño que se propaga indefinidamente. Se encuentra [2] que para la dinámica de Glauber que la temperatura de umbral o temperatura crítica coincide con el punto de Curie.

Capítulo 3

Resultados obtenidos y su interpretación

3.1 Introducción

Como ya hemos hecho notar nuestra atención esta centrada en el modelo de Ising. Recordemos que este es un ejemplo de sistemas cooperativos, donde cada uno de los sitios puede tomar solo dos valores.

Simulamos entonces un modelo de Ising bidimensional en una red cuadrada de lado L asumiendo condiciones de contorno periódicas, y ausencia de campo magnético. La dinámica a implementar es como hemos dicho la dinámica de Glauber.

Para poder estudiar la dinámica de propagación de un pequeño daño inicial se genera una configuración de equilibrio $\{\sigma^A\}$ y esta es replicada en un segundo sistema $\{\sigma^B\}$ excepto por el espin central el cual tiene direcciones opuestas en ambas configuraciones. De acuerdo con la ecuación (2.1) el daño inicial es $D(0) = 1/L^2$, puesto que tenemos L^2 sitios en la red. Luego el procedimiento Montecarlo es implementado de manera estandar, pero sitios equivalentes en ambas configuraciones son visitados aleatoriamente y el mismo número aleatorio es aplicado de manera de actualizar los sistemas de acuerdo a la ecuación (2.10). Las corridas fueron realizadas usando un sistema de multitransputadoras con cinco procesadores T-805

trabajando en paralelo.

Los resultados son promediados sobre $2 \cdot 10^5$ configuraciones para $L = 12$ y sobre $2 \cdot 10^4$ para $L=100$. Los datos obtenidos para $L=100$ requirieron alrededor de un mes de tiempo CPU.

3.2 Las cantidades medidas

Una vez que el daño inicial es creado en un espin en el centro de la muestra a tiempo $t = 0$ las siguientes propiedades dinámicas son evaluadas:

(i) La densidad $\{N_d(t)\}$ de espines dañados a tiempo t (es decir el número promedio de espines dañados a tiempo t dividido L^2).

(ii) la probabilidad $\{P(t)\}$ de que el daño aun sobreviva a un tiempo t .

(iii) la distancia cuadrática media $\{R^2(t)\}$ sobre el cual el daño se ha propagado, y es distinto de cero, al tiempo t .

A la temperatura crítica se espera que estas cantidades medidas obedezcan las siguientes leyes de potencias:

$$N_d(t) \propto t^\eta \tag{3.1}$$

$$P(t) \propto t^{-\delta} \tag{3.2}$$

$$R^2(t) \propto t^{z^*} \tag{3.3}$$

donde η, δ, z^* son los exponentes críticos.

3.3 $N_d(t)$: resultados y su interpretación

Se midió la densidad $\{N_d\}$ de espines dañados para redes de diferentes tamaños, a saber $L = 12$, $L = 25$, $L = 50$, $L = 75$ y $L = 100$.

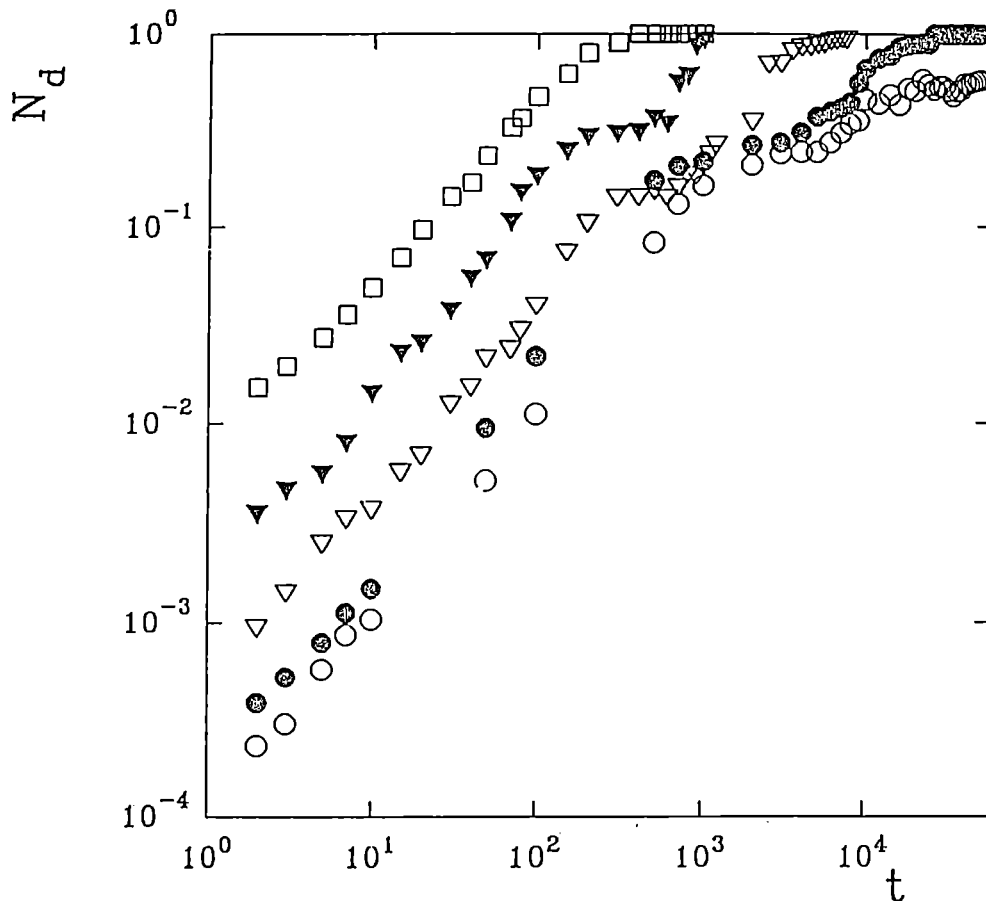


Figura 3.1 Gráfico log-log de $N_d(t)$ versus t , para diferentes longitudes de la red, (o) $L = 100$, (•) $L = 75$, (∇) $L = 50$, (∇) $L = 25$, (\square) $L = 12$

La figura 3.1 muestra en un gráfico log-log N_d versus t para dichas redes. Se observa que N_d crece desde el valor inicial $N_d(0) = 1/L^2$ hasta que alcanza una meseta, para $t \geq \tau$ en donde para $t = \tau$ el daño tiene su valor máximo (unitario). El número promedio de sitios dañados toma el valor $N_d(t \geq \tau) = 1$ cuando alcanza dicha meseta.

Un daño unitario para $t \geq \tau$ significa que la configuración de referencia σ^A es la imagen espejo de la configuración dañada σ^B . Esta es una evidencia dramática de un efecto macroscópico que puede ser causado por un pequeño daño inicial microscópico.

Para entender en toda su magnitud a este efecto podemos hacer el siguiente análisis. Ante la ausencia de campos (ver Apéndice) que rompan la simetría, el promedio térmico de la magnetización $\langle m \rangle_{T,L}$, en una red finita de tamaño L , es idénticamente cero a temperatura distinta de cero. Esto es cierto para temperaturas por encima y por debajo de T_c ya que en ambos la probabilidad de distribución de la magnetización $P_L(m)$ es simétrica en torno a $m = 0$: para el caso del modelo de Ising 2D [14] $P_L(m)$ tiene una estructura de doble pico para $T < T_c$, estando los picos centrados en dos valores ($\pm M_{sp}$) de magnetización espontánea. En realidad esos dos picos pueden ser escritos aproximadamente como suma de dos gaussianas,

$$P_L(m) \sim \exp[-(m - M_{sp})^2 L^2 / 2K_B T \chi'] + \exp[-(m + M_{sp})^2 L^2 / 2K_B T \chi'] \quad (3.4)$$

donde χ' es la susceptibilidad magnética debajo de la temperatura crítica. Para $T > T_c$ tiene una estructura Gaussiana de pico simple (ver Apéndice). A la temperatura crítica los picos están a una distancia del orden de $L^{-\beta/\nu}$ (donde β es el exponente del parámetro de orden y ν el de la longitud correlación). Es decir la magnetización espontánea tiene un valor $|M_{sp}| > 0$, para $T = T_c$. Esto explica el efecto espejo entre la configuración de referencia σ_A y la configuración dañada σ_B producido por el daño unitario para $t \geq \tau$. Es decir que para un sistema finito existe siempre una probabilidad distinta de cero de que el sistema pase de un estado cercano a $|M_{sp}|$ a otro cercano a $-|M_{sp}|$, en la dirección opuesta.

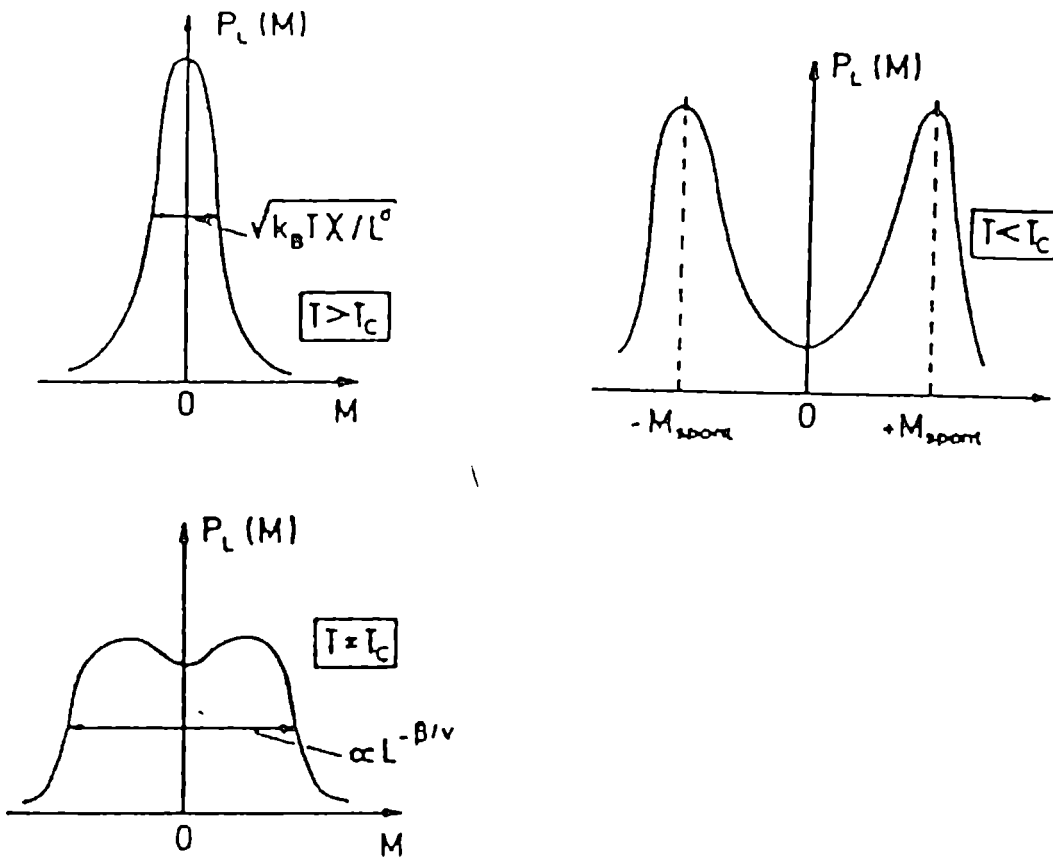


Figura 3.2 la figura muestra la evolución de la distribución de probabilidad del parámetro de orden desde $T < T_c$ hasta $T > T_c$.

La longitud de correlación ξ en el modelo de Ising es la distancia media a la cual existen espines que están correlacionados. Esta cerca del punto crítico [14] "diverge" (esta divergencia está limitada ya que las dimensiones lineales de del sistema son finitas e iguales a L) de acuerdo a :

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (3.5)$$

Esta escala de longitud macroscópica se incrementa a medida que nos acercamos a la temperatura crítica desde temperaturas mayores que T_c . Recordemos se define [2] el punto crítico o punto de propagación T_c como la temperatura por encima de la cual dar vuelta un solo espin causa (con probabilidad distinta de cero) un daño que se propaga por toda la red. Es decir que si estamos a la temperatura crítica la longitud de correlación ξ va ser del orden de la longitud lineal de red. Es decir que a la temperatura crítica es posible que los efectos de tamaño finito (ver Apéndice) sean controlados por comparación de longitudes, la dimensión lineal L y la longitud de correlación ξ . Sabemos que a la temperatura crítica los dos picos están a una distancia del orden de $L^{-\beta/\nu}$ (Apéndice). Por ende podemos afirmar que, a la temperatura crítica, el daño inicial puede inducir a la configuración σ_B a ser la imagen espejo de la configuración σ_A , después que el daño permanece unitario debido a la simetría de la dinámica de Glauber. Obviamente este límite no puede ser observado usando otra dinámica, por ejemplo la de baño caliente.

La figura 3.3 representa un gráfico log-log de τ versus L , en ella se incluyen dos tiempos: el tiempo necesario para que el daño se propague a la mitad de la red y el tiempo necesario para que se propague a toda la red.

El tiempo ergódico τ_e es el tiempo necesario para observar una incursión del parámetro de orden desde un estado cercano a $+M_{sp}$ hacia un estado cercano a $-M_{sp}$, en la dirección opuesta. Para un sistema de tamaño finito [15]:

$$\tau_e \propto \xi^z \quad (3.6)$$

donde z es el llamado exponente "dinámico" correspondiente al modelo de Ising bidimensional. Pero como tratamos con un sistema finito, y a la temperatura crítica ya sabemos (ver Apéndice) que $\xi \simeq L$ Por que podemos escribir:

$$\tau_e \propto L^z \quad (3.7)$$

Este límite coincide cuantitativamente con los resultados mostrados en la figura 3.3

Este gráfico log-log muestra el tiempo τ (requerido para que el daño se propague sobre la mitad de la red o sobre la red entera) versus L . Salvo por un factor de

proporcionalidad este gráfico es consistente con la ecuación (3.7) con $z = 2.16 \pm 0.02$ [16]. Podemos decir, entonces que el tiempo ergódico τ_e , dependerá del mismo exponente dinámico z .

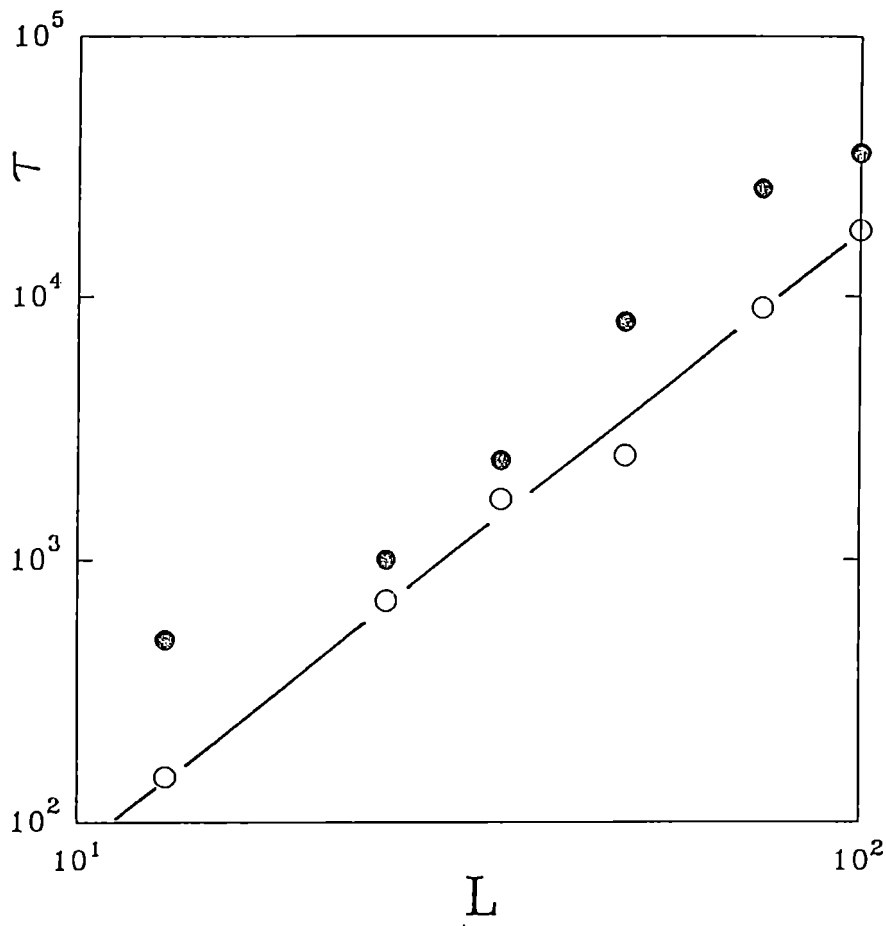


Figura 3.3 Gráfico log-log de τ versus L . (○) representa el tiempo necesario para que el daño se propague a la mitad de la red, (●) representa el tiempo necesario para que este se propague a toda la red. La recta mostrada tiene una pendiente $z = 2.16 \pm 0.02$.

En base a todo lo que discutimos hasta ahora es de esperar que en un gráfico log-log de N_d versus t/τ los datos obtenidos colapsen, o equivalentemente N_d versus t/L^z .

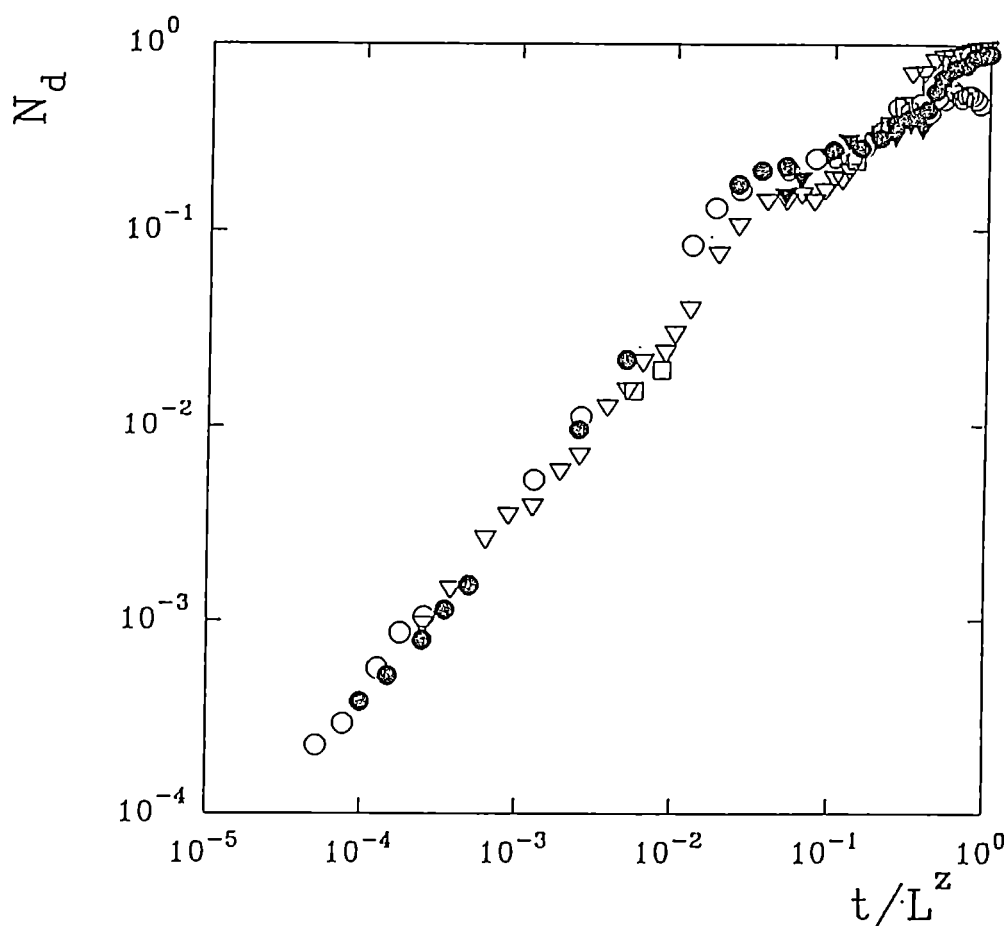


Figura 3.4 Gráfico log-log de $N_d(t)$ versus t/L^z , para diferentes longitudes de la red, (○) $L = 12$, (●) $L = 25$, (▽) $L = 50$, (▽) $L = 75$, (□) $L = 100$

La figura 3.4 muestra que los datos colapsan como esperabamos, y hasta con cierta "belleza" Para colapsar los datos hemos hecho uso de que $\tau \propto L^z$, como se

discutió anteriormente. El ajuste de una curva a través de cuadrados mínimos para $t < \tau$, y haciendo uso de la ecuación (3.1), obtenemos: $\eta \simeq 1.11 \pm 0.03$.

3.4 $P(t)$: resultados y su interpretación

Se midió la probabilidad de que sobreviva el daño a un tiempo t para las siguientes redes: $L=25$, $L=75$, y $L=100$.

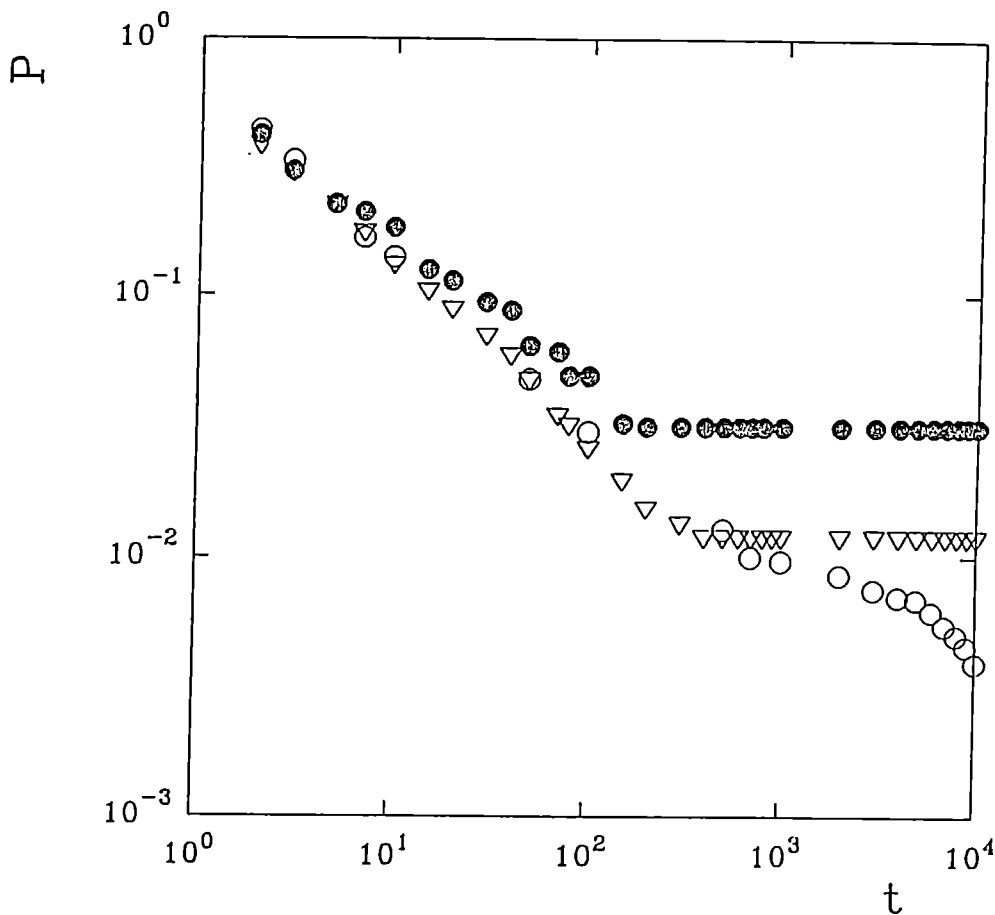


Figura 3.5 Gráfico log-log de $P(t)$ versus t , para diferentes tamaños de la red, (\bullet) $L = 25$, (∇) $L = 75$, (\circ) $L = 100$

La figura 3.5 muestra un gráfico log-log de la probabilidad de sobrevida del daño $P(t)$ versus t . En coincidencia con el límite discutido anteriormente para N_d cabe esperar que la probabilidad de sobrevida del daño sea decreciente con el tiempo para $t < \tau$, y que alcance una meseta una vez que supera el tiempo de relajación τ ($t > \tau$). La $P(t)$ debe permanecer constante para $t > \tau$ aún para $t \rightarrow \infty$, ya que la configuración espejo (de la configuración de referencia) seguirá siéndolo para cualquier tiempo por encima de τ . De acuerdo a lo esperado por la ecuación (3.2), y usando cuadrados mínimos para $t \ll \tau$ se encuentra que $\delta \simeq 0.58 \pm 0.03$.

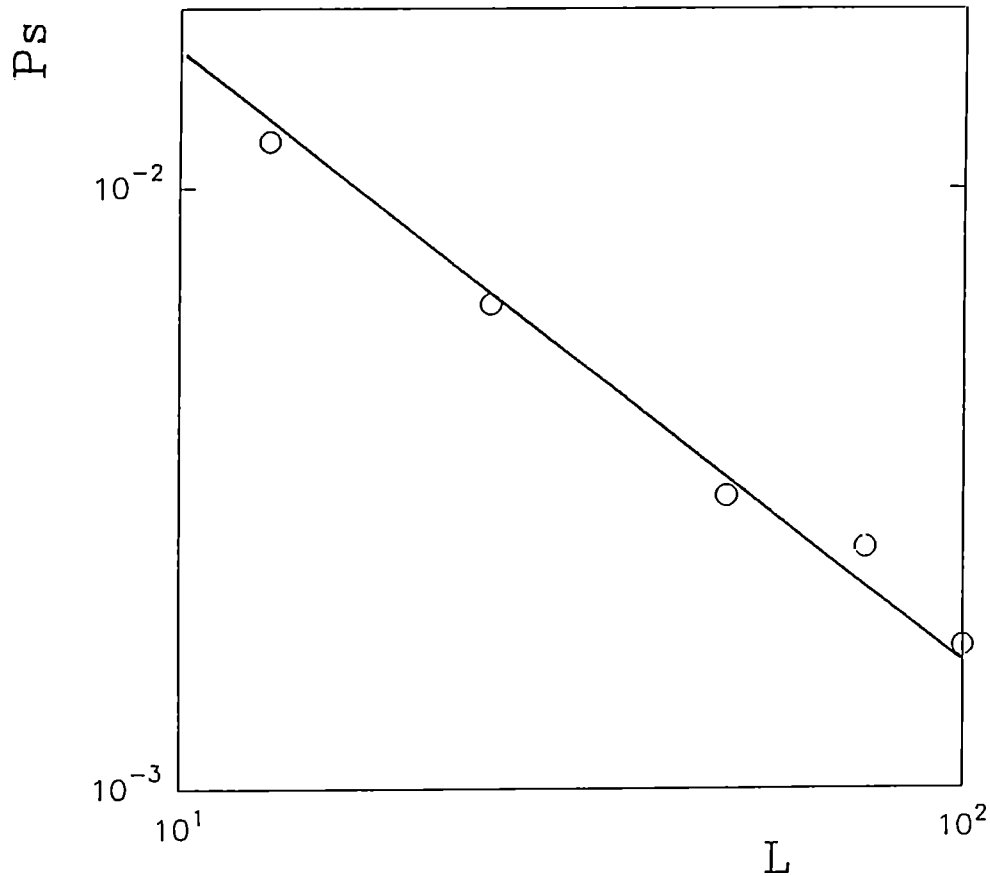


Figura 3.6 Gráfico log-log de $P(t \rightarrow \infty)$ versus L , la pendiente tiene un valor de $x = 0.93 \pm 0.05$.

La figura 3.6 muestra en un gráfico log-log la dependencia de la probabilidad de supervivencia del daño cuando el tiempo tiende a infinito $P_s = P(t \rightarrow \infty)$ versus L . Esta muestra una dependencia del tipo ley de potencias $P_s \propto L^{-x}$ con $x = 0.93 \pm 0.05$, en donde se usó nuevamente cuadrados mínimos.

3.5 $R^2(t)$ resultados y su interpretación

Se midió la distancia cuadrática media a la cual se propagó el daño a un tiempo t $R^2(t)$ para redes de diferentes tamaños, a saber $L = 12$, $L = 25$, $L = 50$, $L = 75$ y $L = 100$.

Las mesetas observadas para $t > \tau$ son consistentes con la inversión de espines, ya discutida en los casos anteriores. Por el método de cuadrados mínimos, y de acuerdo a lo esperado en la ecuación (3.3) se encuentra, que para $t < \tau$ $z^* \simeq 1.19 \pm 0.03$.

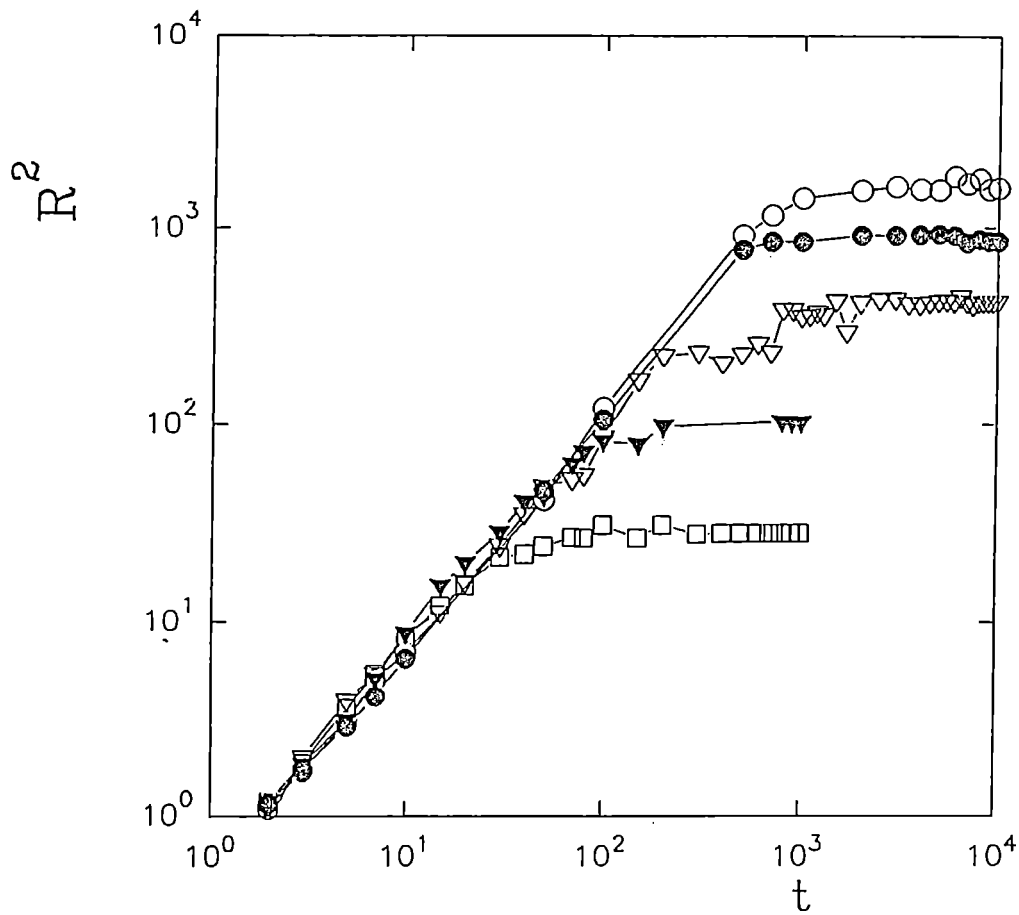


Figura 3.7 Gráfico log-log de $R^2(t)$ versus t , para diferentes longitudes de la red, (\square) $L = 12$, (∇) $L = 25$, (∇) $L = 50$, (\bullet) $L = 75$, (\circ) $L = 100$

3.6 Calculo promedio del daño a T_c y su interpretación

Sabemos, que $N_d(t)$ da la densidad de espines dañados por sitio de la red y que $P(t)$ la probabilidad de sobrevivencia del daño. Es decir que podemos calcular el promedio del daño para todas las muestras como:

$$D(t) = N_d(t)P(t) \quad (3.8)$$

y usando las ecuaciones (3.1) Y (3.2) vemos que $D(t)$ se incrementa de acuerdo a la siguiente ley de potencias:

$$D(t) \propto t^{\gamma'} \quad (3.9)$$

con $\gamma' = \eta - \delta \simeq 0.53 \pm 0.06$.

Este resultado muestra que a la temperatura crítica existe propagación del daño. Por el contrario hemos observado que el daño se cura para temperaturas levemente debajo de la temperatura crítica.

3.7 Dimensión fractal de la región dañada

La dimensión fractal de la región dañada puede ser definida como:

$$N_d \propto R^{d_f} \quad (3.10)$$

A través de las ecuaciones (3.1) y (3.3) uno tiene:

$$d_f = 2\eta/z^* \quad (3.11)$$

Haciendo uso de los exponentes obtenidos anteriormente: $d_f \simeq 1.87$. Este valor está de acuerdo con la dimensión fractal encontrada para las gotas de Ising (Ising droplets) a la temperatura crítica [17], en donde $d_f = d - \beta/\nu = 15/8 = 1.875$. Estas gotas (droplets) son formadas poniendo lazos entre primeros vecinos de un mismo dominio con una probabilidad $P(T) = 1 - \exp(2J/k_B T)$.

También coincide con la determinación numérica de la dimensión fractal de la región dañada, a la temperatura crítica, en un modelo de Ising ferromagnético bidimensional [18]: $d_f \simeq 1.87 \pm 0.02$.

Es decir que hemos estudiado la dinámica de propagación de un daño inicial a la temperatura crítica. Encontramos las leyes de potencias que obbedecen: $N_d(t)$, $P(t)$ y $R^2(t)$ con los respectivos exponentes críticos: $\eta \simeq 1.11 \pm 0.03$, $\delta \simeq 0.58 \pm 0.03$ y $z^* \simeq 1.19 \pm 0.03$.

Encontramos que la relación $d_f = 2\eta/z^*$ da la dimensión fractal de las gotas de Ising (Ising droplets). Estos resultados nos llevan proponer la siguiente conjetura:

$$d(1 - \eta/z^*) = \beta/\nu; d = 2 \quad (3.12)$$

la cual relaciona los exponentes críticos estáticos β y ν con los exponentes dinámicos η y z^* característicos del proceso de dispersión del daño.

Capítulo 4

Conclusiones

Hemos estudiado la dinámica de propagación de un pequeño daño inicial a la temperatura crítica en un sistema cooperativo compuesto por subunidades interactuantes: el modelo de Ising. Se calcularon la densidad de espines dañados a tiempo t , $N_d(t)$, la probabilidad de que el daño sobreviva a un tiempo t , $P(t)$ y la distancia cuadrática media a la cual se propagó el daño, y es distinto de cero a tiempo t , $R^2(t)$; con sus exponentes críticos dinámicos respectivos: $\eta \simeq 1.11 \pm 0.03$, $\delta \simeq 0.58 \pm 0.03$ y $z^* \simeq 1.19 \pm 0.03$

La interpretación de $N_d(t)$ fue esencialmente la siguiente: partimos de un daño inicial $D(0) = 1/L^2$ y luego de un tiempo $t \geq \tau$ el daño se hizo unitario ($N_d(t \geq \tau) = 1$). Esto demostró ser una evidencia dramática de un efecto macroscópico causado por un pequeño daño inicial: la configuración de referencia σ^A resulta ser la imagen espejo de la configuración dañada σ^B . Esto es debido a: un efecto del tamaño finito de la red y a la simetría que posee la dinámica de Glauber. Como ya hemos hecho notar en un sistema de tamaño finito existe una probabilidad distinta de cero que el sistema pase de un estado con magnetización espontánea cercana a $+ |M_{sp}|$, a un estado con magnetización espontánea cercano a $- |M_{sp}|$.

Hemos calculado (a través de graficar log-log τ versus L) el exponente dinámico $z \simeq 2.16 \pm 0.02$ que caracteriza al tiempo ergódico τ_e y al tiempo que tarda el daño en propagarse sobre toda la red τ .

Las medidas de la probabilidad de sobrevida del daño están también de acuerdo con la interpretación que σ^B es la imagen espejo de la configuración σ^A . Esta decrece con el tiempo hasta alcanzar una meseta para $t \geq \tau$, en la cual $P(t)$ toma un valor fijo. La probabilidad de sobrevida del daño permanecerá constante para $t \geq \tau$ aún cuando $t \rightarrow \infty$. Se vio además que $P(t)$ depende también de la longitud de la red. Las medidas de la distancia cuadrática media, R^2 son también coherentes con la interpretación anterior que σ^B es la imagen espejo de la configuración de referencia σ^A . Esta es creciente hasta que, para cada una de las redes alcanza una meseta para tiempos τ diferentes, y permanecen constantes para todo tiempo t mayor que cada uno de los τ .

El cálculo del promedio del daño para todas las muestras indica, que este crece como: t^γ con $\gamma \simeq 0.53 \pm 0.06$, es decir que para $T = T_c$ existe propagación del daño. Por otro lado se observó que para temperaturas levemente por debajo de T_c el daño se cura rápidamente.

Los exponentes críticos dinámicos de propagación del daño nos permitieron obtener la dimensión fractal de la región dañada d_f , a través de: $d_f = 2\eta/\nu \simeq 1.87$. Este valor está en coincidencia con la dimensión fractal de las gotas de Ising [17] (Ising droplets). Además coincide muy bien con la determinación numérica de la región dañada en un modelo de Ising ferromagnético bidimensional [18].

Finalmente propusimos la siguiente relación entre los coeficientes críticos estáticos y los exponentes críticos dinámicos de las gotas de Ising (Ising droplets): $d(1 - \eta/z^*) = \beta/\nu$.

Capítulo 5

Apéndice

5.1 Una breve introducción a la teoría de escaleo finito

La teoría de escaleo finito intenta describir, a gran escala, los fenómenos colectivos asociados con fluctuaciones cercanas a puntos críticos. Esta teoría es de gran importancia en simulaciones con computadoras, ya que estas son realizadas en redes de tamaño finito.

La mecánica estadística nos dice que, una transición de fase, puede ocurrir solo en $N \rightarrow \infty$ ($N = L^d$). Es decir que en un sistema finito la energía es regular, y no hay transición de fase, pase lo que pase.

La teoría de escaleo finito [19] describe, como es que sucede una transición de fase después que el límite $N \rightarrow \infty$ es realizado, desde luego no hay transición de fase si N es finito o aún si es muy grande. Lo que sucede es que la transición en el sistema finito es redondeada y trasladada [20] sobre alguna región, tal que esta región tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$.

Consideraremos primero una transición de fase en un sistema infinito, como función de la temperatura T y con una temperatura crítica $T_c(\infty)$, y trataremos de solucionar el problema de una caja de dimensión finita d con todas sus longitudes lineales iguales a L . La transición estará redondeada sobre una región Δ (ver fig.

5.1):

$$\Delta T \sim L^{-\theta} \quad (5.1)$$

donde θ es un exponente crítico, que llamaremos exponente de redondeo (rounding).

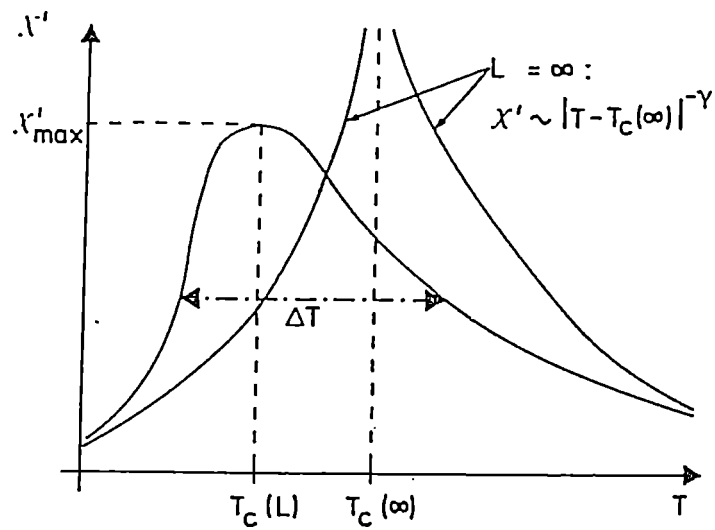


Figura 5.1 La figura muestra la susceptibilidad χ' de un sistema que tiene una transición de una fase ferromagnética a una fase paramagnética. Se muestra el límite termodinámico y un sistema finito.

5.1. UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ESCALEO FINITO 37

El centro de esta región ocurre a $T_c(L)$, entonces la temperatura puede ser cambiada por encima de $T_c(\infty)$:

$$T_c(L) - T_c(\infty) \sim L^{-\lambda} \quad (5.2)$$

donde λ es otro exponente crítico, que llamaremos de traslado (shift).

Queda claro entonces el interés en estimar esos exponentes, ya sea que se trate de una transición de primer o segundo orden. Estas últimas presentan un interés particular ya que la longitud de correlación ξ de los parametros de orden de fluctuación divergen de acuerdo, $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$. Desde ya que esta divergencia esta limitada si las dimensiones lineales del sistema son finitas.

Una cantidad que en el límite termodinámico muestra una divergencia crítica (de la transición del estado paramagnético al ferromagnético) es la susceptibilidad χ' :

$$\chi' = L^d / K_B T (\langle m^2 \rangle - \langle |m| \rangle^2) \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (5.3)$$

donde m es la magnetización. En cambio en un sistema finito esta cantidad solo alcanza un máximo χ'_{max} (ver fig. 5.1):

$$\chi'_{max} \sim \chi'(L, T = T_c) \sim L^{\gamma_c} \quad (5.4)$$

Similarmente el parametro de orden $\langle |m| \rangle$ no se anula a T_c , mas bien es del orden de:

$$\langle |m| \rangle_{T_c, L} \sim L^{-\beta_c} \quad (5.5)$$

Mediante estas ecuaciones hemos introducido varios exponentes críticos, tratando con la dependencia del tamaño de la región crítica: θ , λ , y los exponentes que describen la dependencia de tamaño a T_c para cantidades críticas, como β_c para la magnetización, γ_c para la susceptibilidad, etc. Primero de todo queremos entender esos exponentes.

A la temperatura crítica hay una sola longitud característica importante, la longitud de correlación ξ , luego es posible que los efectos de tamaño finito sean

controlados por L (longitud lineal de la red) y por ξ . La longitud de correlación de los parametros de orden diverge como:

$$\xi = \xi_{\pm} |1 - T/T_c|^{-\nu}; T \rightarrow T_c \quad (5.6)$$

donde ξ_{\pm} son las amplitudes críticas para $T > T_c$ o para $T < T_c$. La condición de "redondeo" y "traslado" cuando $L \approx \xi$ da

$$|\Delta T_{rod}/T_c| \approx L \rightarrow \Delta T_{rod} \sim L^{-1/\nu} \quad (5.7)$$

comparando las definiciones de las ecuaciones (5.1) y (5.2):

$$\theta = 1/\nu; \lambda = 1/\nu \quad (5.8)$$

Expresando las singularidades de χ (ec. 5.3) y de $\langle |m| \rangle_{T,L \rightarrow \infty} \equiv M_{sp}$, donde M_{sp} es la magnetización espontanea:

$$M_{sp} = B(1 - T/T_c)^{\beta}; T \rightarrow T_c \quad (5.9)$$

esto ultimo expresado en términos de ξ ,

$$\langle |m| \rangle \sim \xi^{-\beta/\nu}; \chi' \sim \xi^{\gamma/\nu} \quad (5.10)$$

la idea de que el crecimiento de ξ este limitado por L cerca de T_c implica:

$$\chi'_{max} \sim L^{\gamma/\nu}; \langle |m| \rangle_{T_c} \sim L^{-\beta/\nu} \quad (5.11)$$

comparando (5.4), (5.5) y (5.11) se concluye que :

$$\beta_c = \beta/\nu; \gamma_c = \gamma/\nu \quad (5.12)$$

Obviamente, este simple principio "L escala con ξ " no es toda la historia [14]. Pero para nuestro caso nos basta con con esta breve introducción , ya que para todo nuestro trabajo tomamos $T = T_c$, en una red cuadrada bidimensional de lado L .

5.2 La distribución de Probabilidad del parámetro de orden

La afirmación que en un sistema finito una transición de fase no puede ocurrir, es equivalente a decir que una ruptura espontánea de simetría no puede ocurrir en dicho sistema. Por esto ante la ausencia de un campo que rompa la simetría, el promedio térmico de la magnetización es idénticamente cero a todas las temperaturas distintas de cero,

$$\langle m \rangle_{T,L} \equiv 0 \quad (5.13)$$

Desde ya que no existe contradicción entre la ecuación (5.5) y la (5.13) porque en la ecuación (5.5) se utiliza el valor absoluto: el hecho de que $\langle m \rangle_{T,L}$ sea cero es tal como debe ser, ambos signos de la magnetización son igualmente probables. Esto es cierto por debajo y por encima de T_c : en ambos casos la distribución de probabilidad $P_L(m)$ de la magnetización m en un cubo de volumen L^d es simétrica en torno a $m = 0$ (ver fig. 3.2). Desde ya que $P_L(m)$ cambia su forma apreciablemente cuando T es tal que aumenta desde un valor menor que T_c a un valor tal que $T > T_c$: $P_L(m)$ para el modelo de Ising [14] tiene una estructura de doble pico, los picos están centrados en torno a los valores $(\pm M_{sp})$ de la magnetización espontánea. En realidad, cerca de esos picos $P_L(m)$ puede ser escrito [14] como dos gaussianas:

$$P_L(m) \sim \exp[-(m - M_{sp})^2 L^2 / 2K_B T \chi'] + \exp[-(m + M_{sp})^2 L^2 / 2K_B T \chi'] \quad (5.14)$$

donde χ' es la susceptibilidad por debajo de T_c y coincide con la definida en la ecuación (5.3) para $L \rightarrow \infty$. A medida que T se acerca a T_c , los dos picos descritos por la ecuación (5.14) se mueven uno hacia el otro, y como $M_{sp} \rightarrow 0$ para $T \rightarrow T_c$ (si $L \rightarrow \infty$), donde ξ alcanza la medida de L , los picos toman una forma no trivial de función distribución. Cuando T está muy lejos de T_c , con $T > T_c$, (ahora $L \gg \xi$ nuevamente) resulta una gaussiana de pico simple centrada en torno a la magnetización igual a cero ($m = 0$):

$$P_L(m) \sim \exp[-m^2 L^d / 2K_B T \chi]; T > T_c; L \gg \xi \quad (5.15)$$

Ahora veamos el límite de $P_L(m)$ cerca de T_c , (en el caso de un sistema infinito ξ debería superar a L), para este caso se propone [20] la siguiente suposición de escaleo:

$$P_l(m) = L^y P^*(mL^y, L/\xi); y = \beta/\nu \quad (5.16)$$

y para $\langle |m| \rangle_{T,L}$ se propone [20]:

$$\langle |m| \rangle = L^{-y} m^*(L/\xi) \quad (5.17)$$

Para $T = T_c$; $m^*(L/\infty) = m^*(0)$ es un factor de proporcionalidad lo cual lleva de (5.16) y (5.17) a la ecuación (5.5). Por otro lado, el valor de y citado en la ecuación (5.16) es fijo para (5.17) si se requiere que (5.17) cruce suavemente por encima de (5.9) como $L/\xi \rightarrow \infty$, luego L debe cancelarse de la ecuación (5.17), y entonces $m^*(L/\xi \rightarrow \infty) \rightarrow (L/\xi)^y$ y $\langle |m| \rangle_{T,L \rightarrow \infty} \sim \xi^{-y} = (1 - T/T_c)^{\nu y}$. Por lo cual y debe ser β/ν , como en la ecuación (5.12).

5.3 Referencias

- [1] G.Jones ,M. Goldsmith Programming in OCCAM 2, ed. por Car Hore N.York (1988).
- [2] H.E. Stanley, D. Stauffer, J. Kertész and H.J. Herrmann Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 2326;
- [3] U.M.S. Costa, J. Phys. A 20 (1987) L583;
- [4] A. Coniglio, L. de Arcangelis, H.J. Herrmann and N. Jan, Europhys. Lett. 8 (1989) 315.
- [5] B. Derrida and G. Weisbuch, Europhys. Lett. 4 (1987) 65;
H. da Cruz, U. Costa and E. Curado, J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989) L651.
- [6] E.V. Albano, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 108;
E.V. Albano, Phys. Rev. E., 50 (1994) 1129;
E.V. Albano, J. Stat. Phys., (1995) 78 (1995) 1147.
- [7] Derrida, B., and Weisbuch, G., Europhys. Lett. 4(1987) 657;

- Barner, M.N. and Derrida, B., J. Stat. Phys. 51 (1988) 877;
Golinelli, O. and Derrida, B., J. de Physique 10 (1988) 1663;
H. J Herrmann, Phys. A 168 (1990) 516.
- [8] H.J Herrmann, Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics II, edit. D.P. Landau, K.K Mon, H. B. Schüttler Berlin (1990).
- [9] Baxter, R.B., "Exactly solved models in Statistical mechanics", Academic Press, 1987.
- [10] Wolfram, S., Rev. Mod. Phys. 55(1983) 601
- [11] Bienenstock, E., Fogelman-Soulié, F. and Weisbuch, G.(editors), "Disorder Systems and Biological Organization", (Heidelberg: Spriger-Verlag) 1986
- [12] N. Metropolis , A. W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A. H. Teller & E. Teller, J. Chem. Phys. 21 , 1087 (1953)
- [13] K. W. Kehr and K. Binder , Applications of the Montecarlo Method in Statistical Physics, edit. K. Binder. (1987) pag. 198, Springer-Verlag, Meildelberg.
- [14] K. Binder, Finite size scaling and numerical simulation of statistical sistems, edit. V. Privman (1990) 181.
- [15] S. Wansleben and D. Landau, J. Apply. Phys. 61 (1987) 3968;
S. Miyashita and H.Takano, Phys. Lett. A 98 (1983) 426.
- [16] M. Lacasse, J. Viñals and M. Grant, Phys. Rev. B 47 (1993) 5643, y referencias que alli se encuentran.
- [17] A. Coniglio and W. Klein, J. Phys. A 13 (1980) 2775
- [18] A. Coniglio, L. de Arcangelis, H. J. Herrmann, and N. Jan, Europhys. Lett. 8 (1989) 315
- [19] M. E. Fisher, in Critical Phenomena , edit. M. S. Green, N. York and London (1971) 1;
M. E. Fisher and M.N. Barber, Phys. Rev. Lett. 28, 1516 (1972)
K. Binder, Z. Physik B43, 119 (1981)
K. Binder, Ferroelectrics 73, 43 (1987)
- [20] K. Binder, Z. Physik. B43, 119 (1981)

5.4 Agradecimientos

-Al Prof. Dr. Ezequiel V. Albano por la dirección, el estímulo y el constante respaldo en la realización del presente trabajo.

-Al Dr. Roberto Monetti por las útiles sugerencias que me aportó para el Trabajo de Diploma.

-Para Araceli por su afecto, su apoyo y su paciencia durante el lapso de tiempo que me llevó escribir este trabajo.

-Para Hugo por su preocupación constante.

-Para Martín, Ricardo, Marta y Angel por haberme permitido usar su oficina.

-Para el Prof. Dr. O. Civitarese por su cuidadosa lectura y sus valiosos comentarios, y el estímulo brindado en la continuación de mi carrera.