Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemáticas

Álgebras y lógicas con implicación y fusión

Autor: Lic. Leonardo Manuel Cabrer

Director: Dr. Sergio Arturo Celani

Codirectora: Dra. Marta Sagastume

Tesis para optar por el título de
Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas especialidad Matemáticas

13 de febrero de 2008

Índice general

Introducción III

Agradecimientos VI

I Álgebras con Implicación y Fusión 1

1. Preliminares 2
1.1. Nociones generales . . . 2
1.1.1. Conjuntos y relaciones . . . 2
1.1.2. Conjuntos ordenados . . . 4
1.1.3. Retículos y retículos distributivos . . . 5
1.1.4. Topología . . . 6
1.1.5. Categorías . . . 7
1.2. Álgebras multitipadas, multi-retículos y álgebra universal . . . 8
1.3. Dualidad de Priestley . . . 12

2. Dualidad de Priestley para multi-retículos con operadores 15
2.1. Definiciones . . . 16
2.2. Dualidad . . . 18
2.3. Aplicaciones de la dualidad . . . 23
2.3.1. Congruencias y álgebras subdirectamente irreducibles . . . 23
2.3.2. Subálgebras . . . 27
2.4. Comparación con otras dualidades y representaciones . . . 30
2.4.1. Multiretículos y retículos con operadores . . . 31
2.4.2. Retículos distributivos con un operador . . . 31
2.5. Aplicación: Congruencias en algebras de Ockham . . . 37
2.5.1. El retículo $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ . . . 39

3. DLI, DLF y DLFI-álgebras 45
3.1. Definiciones y ejemplos . . . 45
3.1.1. Dualidad para **DLI DLF** y **DLFI**-álgebras . . . 50
3.2. Correspondencia . . . 54
3.3. Dualidad para subvariedades de Retículos Residuados . . . 62
3.4. Dualidad para subvariedades de **WH**-álgebras . . . 67
3.5. Comparación con otras dualidades . . . 68

3.5.1. Álgebras relevantes 68
3.5.2. Retículos implicativos I 71
3.5.3. Retículos Implicativos II 72
3.5.4. WH-álgebras 73

II Lógicas con implicación y fusión 75

4. Preliminares 76
4.1. Sistemas deductivos 76
4.2. Matrices y matrices generalizadas 77
4.2.1. Jerarquía de Leibniz 79
4.3. Sistemas deductivos basados en semiretículos 79

5. Sistemas deductivos asociados a DLFI, DLI y DLF 82
5.1. Definiciones 82
5.2. Propiedades 86
5.3. Marcos 88
5.3.1. Morfismos y submarcos 89
5.4. Secuentes, álgebras y marcos 92
5.4.1. Propiedades 93
5.4.2. Relaciones entre Fr, Seq, Alg y $\mathcal{S}$. 100
5.5. No canonicidad de MV-álgebras y BL-álgebras 103
5.5.1. Las extensiones canónicas del álgebra de Chang 105
5.5.2. Comparación de las extensiones 113
5.5.3. Canonicidad de subvariedades BL 117

6. Extensiones de $\mathcal{S}$(DLFI) y $\mathcal{S}$(DLI) 126
6.1. Correspondencia 126
6.1.1. I-marcos 127
6.1.2. F-marcos 134
6.1.3. FI-marcos 138
6.2. Secuentes y reglas son necesarios 141
6.3. Extensiones canónicas 144
6.3.1. Lógica Monoidal basada en T-normas 146
6.3.2. Lógica subintuicionista 148
6.4. Comparación con otras semánticas relacionales 148
6.4.1. Lógicas subintuicionistas 149
6.4.2. Lógicas Monoidales basadas en t-normas 150

Introducción

La Lógica Algebraica Abstracta estudia las estructuras algebraicas asociadas a los sistemas lógicos y las relaciones entre estos y aquellas. En general .la lógica algebraica abstracta es un enfoque que generaliza el proceso de Lindembaum-Tarski del Calculo Proposicional Clásico, y utiliza herramientas del Álgebra Universal para el estudio de propiedades de las lógicas. La monografía [4] puede considerarse como la obra que inaugura la disciplina. En ella Blok y Pigozzi investigaron el proceso de algebrización de un sistema lógico, llegando al concepto abstracto de lógica algebrizable. La metodología usualmente utilizada en esta disciplina podría sintetizarse en tres pasos:

1. Asociar a la lógica que se esta estudiando una clase de álgebras. No hay una única manera de hacer esto ni una única clase de álgebras asociada a cada lógica. Sin embargo, hay varias clases de álgebras usualmente utilizadas en el estudio de una lógica, que son: la clase de álgebras de matrices reducidas, la clase de álgebras de matrices generalizadas reducidas y la variedad obtenida por el método de Lindembaum-Tarski.

2. Traducir el problema a analizar en la lógica a su contrapartida algebraica. Para esto existen los llamados "Teoremas Puente", que permiten traducir algunas propiedades de la lógica en propiedades de las clases de álgebras asociadas a ella. La búsqueda, desarrollo y aplicación de este tipo de teoremas es uno de los principales objetivos de la lógica algebraica abstracta.

3. Resolver el problema, planteado ahora en términos algebraicos. Para esto se suelen utilizar herramientas del álgebra universal y teoría de modelos.

En esta última parte del proceso es donde la teoría de representaciones de álgebras nos brinda una importante herramienta para resolver estos problemas.Las representaciones de clases de álgebras asociadas a cálculos proposicionales permite enriquecer el estudio algebraico de las lógicas utilizando herramientas topológicas, de teoría de modelos y teoría de categorías. Estas representaciones suelen utilizarse como herramienta para caracterizar congruencias, determinar álgebras libres (que en su mayoría son justamente las álgebras obtenidas por el proceso de Lindembaum-Tarski), describir retículos de subvariedades, propiedades de amalgamación, de modelos finitos, de congruencia, definir semánticas alternativas a las semánticas algebraicas, etc. Brindando así ejemplos y contraejemplos que permiten probar propiedades de los cálculos proposicionales como finitud, interpolación, canonicidad, caracterización de sus extensiones, por nombras algunas.

Está tesis se centra en el estudio de estructuras algebraicas, llamadas retículos distributivos con fusión o y/o implicación $\rightarrow$, o **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras introducidas en [13]. Entre las

subvariedades de estas estructuras algebraicas se encuentran las álgebras asociadas a diversas lógicas como las Álgebras Relevantes, Retículos residuados, **MV**-álgebras, álgebras de Heyting, etc.

Estas estructuras algebraicas tienen en común el ser o admitir una estructura de retículo distributivo con operaciones adicionales y, en general, tienen como operaciones básicas una operación binaria de implicación o una operación binaria de fusión. Desde este punto de vista, en [13] S. Celani introduce las **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras. En ese mismo trabajo S. Celani desarrolla una dualidad categorial para estas estructuras basada en la dualidad de Priesltey para retículos distributivos.

El objetivo principal de esta tesis es profundizar el estudio de estas estructuras algebraicas y estudiar los diferentes sistemas deductivos asociados a estas álgebras. Dado que entre las subvariedades de las **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras se encuentran clases de álgebras asociadas a lógicas conocidas, estudiaremos la relación entre los sistemas deductivos asociados a estas álgebras y las lógicas asociadas a las subvariedades antes mencionadas.

Para esto estudiaremos la restricción de la dualidad dada en [13], para aplicarla a las variedades de Retículos residuados integrales conmutativos y acotados, **MTL**-álgebras **IMTL**-álgebras y **MV**-álgebras. Con este objetivo primero analizaremos la relación entre la satisfacción de ciertas ecuaciones en un álgebra dada y ciertas condiciones en su espacio dual.

A modo de introducción en la dualidad de las **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras dada en [13], dedicaremos un capítulo a dar una generalización de esta dualidad para los multi-retículos con operadores, que son un tipo particular de álgebras multitipada. Esta dualidad completa la representación dada por Sofronie-Stokkermans en [56]. Luego utilizaremos la aplicación de esta dualidad al caso de los retículos distributivos con operadores, para caracterizar congruencias, subálgebras, álgebras simples y subdirectamente irreducibles, de manera de tener un resultado general que engloba varios resultados particulares como el caso de las álgebras de Ockham [58], los retículos con un supremo homorfismo [47], los retículos con negación [12], entre otros.

Luego introduciremos los sistemas deductivos asociados a las variedades de **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras y profundizaremos en algunas de sus propiedades. Ubicaremos estos sistemas deductivos en la clasificación de las lógicas o jerarquía de Leibniz (protoalgebraicas, equivalenciales, débilmente algebrizables, algebrizables, etc.) según la teoría desarrollada por Blok-Pigozzi y Font-Jansana, y estudiaremos sus propiedades de congruencia. Daremos para estos sistemas deductivos semánticas relacionales correctas y completas que nos permitirán probar algunas de las propiedades antes mencionadas. A su vez, investigaremos algunas de las extensiones más conocidas de estas lógicas como las lógicas monoidales basadas en t-normas, la lógica básica y la lógica multivaluada de Łukasiewicz, retringiendo la semántica relacional a estas lógicas. Para esto realizaremos un profundo análisis de la relación entre las álgebras, los secuentes y los marcos relacionales

Esta tesis esta organizada en dos partes. En la primera parte nos centralizaremos en dar teoremas de representación para diferentes estructuras algebraicas, y aplicarlas al caso de las subvariedades de **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras. Esta primer parte esta dividida en tres capítulos. El primero de ellos es un capítulo de nociones preliminares donde introduciremos las definiciones notaciones y herramientas necesarias para el desarrollo de los otros dos capítulos. En el segundo capítulo desarrollaremos una dualidad categorial para los multi-retículos distributivos con operadores. Esta clase de álgebras multitipada generaliza el concepto de retículo distributivo con operadores. Luego utilizaremos esta dualidad categorial para dar caracterizaciones de con-

gruencias, álgebras simples y álgebras subdirectamente irreducibles. En el último capítulo de esta primer parte, estudiaremos la correspondencia entre la validez de ecuaciones en un álgebra y ciertas condiciciones de primer orden en su espacio dual. Utilizaremos estos resultados para restringir la dualidad desarrollada por Celani en [13] al caso de los Retículos residuados conmutativos distributivos e integrales, a las **MTL**-álgebras [24] y a las **MV**-algebras [17].

En la segunda parte el foco central de la tesis se traslada a las diferentes lógicas asociadas a las álgebras estudiadas en la primera parte. Esta parte también se encuentra dividida en tres capítulos con un primer capítulo de preliminares donde introduciremos las herramientas de la lógica algebraica abstracta que utilizaremos en el resto de la tesis. En el segundo capítulo de esta parte estudiaremos las lógicas o sistemas deductivos asociados a la **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras, definiendo para ellos una semántica mediante marcos ternarios correcta y completa. Luego veremos las diferentes relaciones entre las familias de secuentes, de álgebras y de marcos ternarios. Resaltamos aquí la definición del concepto de clase de álgebras canónica por marcos ternarios y el estudio de la relación de este concepto con el de clase canónica de álgebras ordenadas definido para el caso de álgebras de Boole con operadores en [38] y [39] y generalizado para retículos distributivos, retículos y conjuntos ordenados con diferentes tipos de operaciones internas en [29],[30], y [31].. En el último capitulo de esta tesis, estudiaremos las extensiones de los sistemas deductivos definidos en el capitulo anterior y daremos para ellos una restricción de la semántica desarrollada anteriormente. Finalmente compararemos estos resultados con algunas otras semánticas desarrolladas para estas extensiones por diferentes autores.

Agradecimientos

Mucha es la gente y las instituciones a las que debo agradecer por haberme acompañado y apoyado durante este período de mi vida académica. Es dificil, si no imposible, proponer un orden (total) entre ellas dado que el apoyo que he recibido ha tenido diferentes formas y no necesariamente se pueden comparar. Por ello los agradecimientos a continuación no tienen ningún orden de relevancia, sólo están escritos con la intención de no olvidarme de nadie.

Quiero agradecer a mi director. Sergio, muchas gracias por haberme tratado desde el comienzo como un compañero de trabajo, por haberme guiado y ayudado siempre, por haberme apretado las clavijas cuando fue necesario, y por sobre todas las cosas por brindarme el ejemplo del tipo de matemático que me gustaría ser algún día.

A mi co-directora. Marta, mil gracias por el constante apoyo y guía, por confiar en mi cuando aún no me conocías (espero no haberte defraudado), por la contención académica y personal que me brindaste mientras estaba cursando en La Plata, ambos sabemos que no estaría presentando mi tesis si vos no hubieses estado allí. Por eso a mi "mamá académica", muchísimas gracias.

Quiero agradecer a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires y a la Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de las nación Argentina por haber confiado en mi y en mis directores y haberme otorgado las becas que me permitieron realizar este doctorado.

También quiero agradecer al Núcleo Consolidado de Matemática Pura y Aplicado y al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro por brindarme el espacio para realizar mis investigaciones y mis tareas docentes.

A mis amigas y amigos. Vasca, Ale, Tania, Yulo, Saulo, Paul, Diego y Esteban, gracias por bancarme siempre, desde cerca o lejos siempre estuvieron y siempre me lo hicieron saber, el tener la certeza de contar con el apoyo incondicional de un grupo inreíble como este, que aguantó mis desapariciones, mis malos humores y otros varios de mis defectos, fue una de las fuentes fundamentales de donde saqué energías para afrontar los momentos más difíciles de mi vida y de este período, saben que siempre les estaré agradecido por eso, nadie puede siquiera soñar con mejores amigos.

A mis amigos y amigas compañeros de trabajo. Alicia, Pato, Vero, Ana, Vicky, Pablo y Mauro, gracias por hacerme sentir parte de un grupo humano excelente y por hacer más ameno el ámbito de trabajo para que no me costara tanto levantarme todas (casi todas) las mañanas para ir a la oficina.

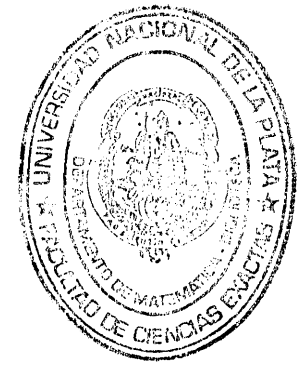
Estaré eternamente agradecido a mi mamá. Ma, gracias por cuidarme, por acompañarme y por apoyarme siempre en todo lo que he emprendido.

Quiero agradecer a mi papá. Pa, gracias por tu confianza y por el aguante durante esos meses que compartimos mientras estaba cursando en Buenos Aires, por siempre estar cuando lo necesito, un abrazo enorme y muchas gracias.

Finalmente, pero no al último a mi novia. Neri, ¿Cómo expresar mi agradecimiento en un sólo párrafo?, aunque es imposible, quiero agradecerte por ser mi compañera todos estos años, es difícil que yo sepa mejor que vos todo lo que me has aguantado, todo lo que me has cuidado, todo lo que me has ayudado y todo lo que me has querido, gracias por ser mi norte y el pilar en el que me apoyé todo este tiempo, siempre estuviste ahí para poner orden en mis días y para ayudarme en los momentos difíciles que no fueron pocos, muchas, muchas gracias, te amo.

Parte I

Álgebras con Implicación y Fusión



Capítulo 1

Preliminares

"Armoniosamente va la danza cuando la cítara está afinada;
afinamos la cítara, ni tan alto ni tan bajo,
la cuerda demasiado tensa se rompe, y la música vuela;
la cuerda demasiado floja enmudece y la música muere."

Refrán Hindú

Conseguir el justo equilibrio, para no excluir lo necesario y no aburrir terriblemente al lector, es un objetivo dificil de alcanzar. Hemos intentado en estos preliminares, aproximarnos a esto. Con el fin de hacer a esta tesis lo más auto contenida posible, hemos elegido una aproximación por exceso y no por defecto. Intentamos así evitar al lector la necesidad de tener que recurrir constantemente a diferente bibliografía, con los usuales problemas que esto conlleva, como los cambios de notación y las molestas perdidas de tiempo. Por ello en este capítulo introduciremos la notación y terminología básica de este trabajo, así como también los resultados y las definiciones que utilizaremos repetidamente con sus correspondientes referencias.

Este capítulo esta pensado sólo como un capítulo de referencia y por ello no es más que una lista de notaciones y definiciones. Por lo tanto recomendamos utilizarlo como consulta a través del índice de términos y símbolos o de las referencias en esta tesis y no su lectura completa cual capítulo usual.

Por otra parte, dado que esta tesis esta divida en dos partes, decidimos dividir también los preliminares en dos partes, evitando así el desarrollo de temas que no serán necesarios hasta bien avanzado este trabajo. Este capítulo esta dividido en tres secciones. En la primera de ellas estableceremos simplemente notaciones y definiciones básicas, así como citaremos algunos resultados que utilizaremos más adelante. En las otras dos secciones presentaremos un poco más detalladamente las herramientas básicas de álgebras multitipadas y álgebra universal, y la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados.

1.1. Nociones generales

1.1.1. Conjuntos y relaciones

Dado un conjunto X, con $\mathcal{P}(X)$ denotaremos al **conjunto de partes** de X.

Dada una función $f : X \to Y$, si $Z \subseteq X$, notaremos con $f \restriction Z$ a la restricción de la función f al conjunto Z,formalmente $f \restriction Z : Z \to Y$ y $f \restriction Z(z) = f(z)$, para cada $z \in Z$.

Los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales serán denotados con los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. A su vez, con $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$ denotaremos a los conjuntos de números enteros no negativos y no positivos respectivamente, es decir,

$$\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} : a \geq 0\},$$
$$\mathbb{Z}^- = \{a \in \mathbb{Z} : a \leq 0\}.$$

Un conjunto se dirá **numerable** si es biyectable con $\mathbb{N}$, y se dirá **unitario** si tiene un único elemento.

La unión de la familia disjunta de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, la unión disjunta será indicada con $\biguplus_{i \in I} A_i$.

Sea X un conjunto y θ una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) sobre X. La clase de equivalencia del elemento $x \in X$ será denotada por $[x]_\theta$ y el conjunto cociente se simboliza con X/θ.

Dado un conjunto X y $n \in \mathbb{N}$, como es usual, con X^n notamos al conjunto de uplas de longitud n o n-uplas, es decir,

$$X^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X, \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\},$$

y llamaremos $X^{<\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ al conjunto de todas la uplas de longitud finita sobre X.

Dada R una relación n-aria R sobre un conjunto X, es decir, $R \subseteq X^n$, si $n \geq 2$ y $x \in X$ notaremos

$$R(x) = \left\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in X^{n-1} : (x, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R\right\},$$
$$R^{-1}(x) = \left\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in X^{n-1} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, x) \in R\right\}.$$

Si $U_1, \ldots, U_{n-1} \subseteq X$ y $x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$, escribimos

$$R(U_1, \ldots, U_{n-1}) = \{x \in X : \text{ Existen } y_1 \in U_1, \ldots, y_{n-1} \in U_{n-1} \text{ tales que } (y_1, \ldots, y_{n-2}, x) \in S\},$$
$$R(x_1, \ldots, x_{n-1}) = R(\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}).$$

Si R es una relación binaria, denotaremos con R^{-1} a la relación inversa, definida por:

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Dadas S, T dos relaciones ternarias sobre un conjunto X definiremos

$$S \circ T = \left\{(x, y, z, t) \in X^4 : \text{Existe } u \in X, (x, y, u) \in S \text{ y } (u, z, t) \in T\right\},$$
$$T' = \left\{(x, y, z) \in X^3 : (y, x, z) \in T\right\},$$
$$S^2 = S \circ S,$$

y notaremos $S(a, V) = S(\{a\}, V)$.

1.1.2. Conjuntos ordenados

Definición 1.1 *Un **conjunto parcialmente ordenado** (**CPO** para abreviar) es un par $\langle X, \leq \rangle$, donde X es un conjunto y "$\leq$" es una relación reflexiva, simétrica y transitiva sobre X.*

Dado un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ utilizaremos las siguiente notación: $\langle X, \leq \rangle^1$ denotará el mismo conjunto parcialmente ordenado y $\langle X, \leq \rangle^{-1}$ denotara el conjunto parcialmente ordenado sobre el mismo conjunto X con el orden inverso, es decir, $\langle X, \leq \rangle^{-1} = \langle X, \geq \rangle$.

$\langle X, \leq \rangle$ se dirá **acotado** si existen elementos $1, 0 \in X$, tales que $0 \leq x \leq 1$, para cada $x \in X$.

Un subconjunto Y de X será **creciente** (**decreciente**), si siempre que $x \in X$ e $y \in Y$ cumplen que $y \leq x$ $(x \leq y)$, entonces $x \in Y$.

Denotaremos con $\mathcal{P}_c(X)$ y $\mathcal{P}_d(X)$ a las familias de partes crecientes y decrecientes de un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$, respectivamente.

Para cada $Y \subseteq X$ notaremos $[Y) = \{y \in X : \text{Existe } x \in Y \text{ tal que } x \leq y\}$ al menor conjunto creciente que contiene a Y. Y dualmente $(Y] = \{y \in X : \text{Existe } x \in Y \text{ tal que } y \leq x\}$. Escribiremos $[x) = [\{x\})$, y llamaremos a este conjunto el **conjunto creciente principal generado por** x, y dualmente $(x] = (\{x\}]$.

Entre los diferentes **CPO** podemos distinguir dos casos extremos, la cadena y la anti-cadena. Un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ es una **cadena**, o un **CPO** totalmente ordenado, si satisface la propiedad tricotómica, es decir, para cada $x, y \in X$

$$x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

Un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ es una **anti-cadena**, si para cada $x, y \in X$, $x \leq y$ implica $x = y$, es decir, cada elemento sólo es comparable con si mismo.

Dado un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ e Y un subconjunto de X, diremos que $x \in X$ es una **cota superior** de Y si $y \leq x$ para cada $y \in Y$ Dualmente, x es una **cota inferior** de Y si $x \leq y$ para cada $y \in Y$. Un elemento x se dirá **maximal** en Y si para cada $y \in Y$ si $x \leq y$ entonces $x = y$. Dualmente definimos el concepto de elemento **minimal**.

Definición 1.2 *Dado un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ e Y un subconjunto de X, diremos que $x \in X$ es el **supremo (ínfimo)** de Y, si x es una cota superior (inferior) de Y y para cada z cota superior (inferior) de Y tenemos que $x \leq z$ $(z \leq x)$.*

Es decir, el supremo de un conjunto es la menor de las cotas superiores, y en forma dual el ínfimo es la mayor de las cotas superiores. Si $Y = \{x, y\}$ notaremos al supremo de Y, con $x \vee y$ y al ínfimo con $x \wedge y$ siempre que estos existan.

Definición 1.3 *Sean $\langle X_1, \leq_1 \rangle$ y $\langle X_2, \leq_2 \rangle$ dos conjuntos ordenados, una función*

$$g : X_1 \longrightarrow X_2$$

*se dirá **creciente** si para cada $x, y \in X_1$ tal que $x \leq_1 y$, $g(x) \leq_2 g(y)$. Dualmente, diremos que g es **decreciente** si para cada $x, y \in X_1$ tal que $x \leq_1 y$, $g(y) \leq_2 g(x)$.*

*g es llamada **estrictamente creciente** si para cada $x, y \in X_1$, $x \leq_1 y$ si y sólo si $g(x) \leq_2 g(y)$.*

Claramente toda función estrictamente creciente es inyectiva.

1.1.3. Retículos y retículos distributivos

Definición 1.4 *Un* **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ *se llamará* ***retículo*** *si para todo par de elementos* $x, y \in X$ *existen* $x \wedge y$ *y* $x \vee y$.

Si $\langle X, \leq \rangle$ es un retículo, entonces, $\vee, \wedge$ son operaciones asociativas, conmutativas, idempotentes que satisfacen las leyes de absorción, a saber:

$$x \vee (x \wedge z) = x,$$
$$x \wedge (x \vee z) = x,$$

para cada $x, y, z \in X$. Las propiedades de estas operaciones caracterizan completamente a los retículos, es decir, dado $(X, \wedge, \vee)$ un conjunto no vacío dotado de dos operaciones binarias que son asociativas, conmutativas, idempotentes y que satisfacen las leyes de absorción, si definimos "$\leq$" mediante

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \vee y = y \text{ si y sólo si } x \wedge y = x,$$

entonces $\langle X, \leq \rangle$ es un retículo y el ínfimo y el supremo de cada par de elementos coincide con las operaciones $\wedge$ y $\vee$ respectivamente.

Por ello un retículo puede ser considerado como un **CPO** $\langle X, \leq \rangle$ donde para cada par de elementos $x, y \in X$ existe el supremo y el ínfimo o como un conjunto dotado de dos operaciones binarias internas cumpliendo las propiedades asociativas, conmutativas, idempotencia y de absorción. Durante la mayor parte de esta tesis un retículo será considerado desde este último punto de vista.

Definición 1.5 *Un retículo* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ *se dirá* ***completo*** *si existen el supremo y el ínfimo de* Y *para cada* $Y \subseteq L$.

Naturalmente todo retículo completo es acotado.

Dado $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ un retículo, de igual manera que para conjuntos ordenados, $\boldsymbol{L}^1$ y $\boldsymbol{L}^{-1}$ denotarán el mismo retículo y el retículo con el orden inverso respectivamente.

Un conjunto no vacío $F \subseteq L$ se llama **filtro** si es creciente y verifica que si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$. De manera dual se define el concepto de **ideal**. Un filtro F se dirá **primo** si $F \subsetneq L$ y siempre que $x \vee y \in F$ o bien $x \in F$ o bien $y \in F$. El concepto de **ideal primo** se define dualmente.

Denotaremos

$$Fi(\boldsymbol{L}) = \{F \subseteq L : F \text{ es un filtro de } \boldsymbol{L}\},$$
$$Id(\boldsymbol{L}) = \{I \subseteq L : I \text{ es un ideal de } \boldsymbol{L}\},$$
$$X(\boldsymbol{L}) = \{P \subseteq L : P \text{ es un filtro primo de } \boldsymbol{L}\}.$$

Dado un conjunto $X \subseteq L$ notaremos $F(X)$ al menor filtro que contiene a X. Es conocido que:

$$F(X) = \{a \in L : \exists x_1, \ldots, x_n \in X, x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a\}$$

Notemos que dado $x \in L$ los conjuntos $[x)$ y $(x]$ son un filtro y un ideal respectivamente. A este tipo de filtros e ideales los llamaremos **principales**.

Definición 1.6 *Un retículo* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ *se dirá* ***distributivo*** *si verifica:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) .$$

Uno de los resultados más importantes, y a la vez simple de enunciar, en la teoría de retículos distributivos es el llamado Teorema del Filtro Primo de G. Birkhoff.

Teorema 1.7 *Sea* $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ *un retículo distributivo, y* F *e* I *un filtro y un ideal de* $\mathbf{L}$ *respectivamente. Si* $F \cap I = \emptyset$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$*.*

En la mayor parte de la bibliografía. el teorema anterior es conocido como el teorema del Ideal primo, pero si observamos que dado un filtro primo F, $L \setminus F$ es un ideal primo, vemos que ambas presentaciones son equivalentes. Elegimos esta versión porque será la que utilizaremos durante el resto de esta tesis.

Corolario 1.8 *Dados* x *e* y *dos elementos de un retículo distributivo tales que* $x \not\leq y$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $y \notin P$ *y* $x \in P$*.*

Varias veces durante esta tesis cuando observemos que una conclusión es consecuencia del teorema del filtro primo, en realidad estaremos haciendo uso de este corolario.

Dentro de los ret´ıculos distributivos es importante destacar las cadenas y los retículos Booleanos (reductos de retículos de las álgebras de Boole). Un retículo distributivo acotado $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$, se dirá **Booleano** cuando cada $x \in L$ es complementado, es decir, existe $y \in L$ tal que

$$x \wedge y = 0 \text{ y}$$
$$x \vee y = 1.$$

Para más referencias sobre conjuntos ordenados, retículos, y estructuras algebraicas ordenadas se recomienda al lector ver [22],[20] o [5].

1.1.4. Topología

Las nociones de topología general utilizadas en esta tesis se restringen a las definiciones básicas. Las introducimos aquí sólo para fijar la notación. Las propiedades más utilizadas en este trabajo sobre espacios topológicos pertenecen a la teoría de espacios de Priestley y las enunciaremos en la próxima sección.

Definición 1.9 *Una* ***topología*** *sobre un conjunto* X *es una familia de conjuntos* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$*, cerrado bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias, tal que* $\emptyset, X \in \tau$*. Un* ***espacio topológico*** *es un par* $\langle X, \tau \rangle$ *, donde* X *es un conjunto y* τ *una topología sobre* X*.*

Los elementos $U \in \tau$ son llamados **abiertos** del espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$. Un conjunto F se dirá **cerrado** si $X \setminus F = \{x \in X : x \notin F\}$ es abierto.

Dado un conjunto $Y \subseteq X$, al menor de los conjuntos cerrados que lo contiene se lo llama la **clausura** de Y y lo notaremos $Cl(Y)$. Al mayor conjunto abierto contenido en Y se lo denomina **interior** de Y y lo notaremos $Int(Y)$.

Existen siempre al menos dos topologías sobre un conjunto X la discreta y la indiscreta. La **topologia discreta** es aquella que coincide exactamente con $\mathcal{P}(X)$, es decir aquella en la que todo subconjunto de X es abierto. La **indiscreta** es justamente aquella donde los únicos abiertos son $\{\emptyset, X\}$.

Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un mismo conjunto X, diremos que τ_1 es **más fina** que τ_2, o que τ_2 es menos fina que τ_1, siempre que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Esta relación define un orden en el conjunto de todas las topologías sobre un conjunto X. Este orden resulta un reticulo completo. Por supuesto, las topologías discreta e indiscretas sobre un conjunto X son la más fina y menos fina de las topologías sobre X respectivamente.

Dado un conjunto $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ diremos que Y es una **base para la topología** τ siempre $Y \subseteq \tau$ y $U = \bigcup_{\substack{A \in Y \\ A \subseteq U}} A$ para cada $U \in \tau$. Un conjunto $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ diremos que Y es una **subbase** para la topología τ si y sólo si τ es la topología menos fina tal que $Y \subseteq \tau$. Puede probarse que Y es una subbase de τ siempre que el conjunto $Y' = \left\{ \bigcap_{A \in Z} A : Z \text{ un subconjunto finito de } Y \right\} \cup \{\emptyset, X\}$ es una base de τ.

Definición 1.10 *Dados dos espacios topológicos $\langle X_1, \tau_1 \rangle$ y $\langle X_2, \tau_2 \rangle$ una función $f : X_1 \to X_2$ se dirá **continua** si $f^{-1}(U) \in \tau_1$ para cada $U \in \tau_2$. f se dirá un **homeomorfismo** si es biyectiva continua y su inversa también es continua.*

Un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ es **compacto** siempre que para cada $A \subseteq \tau$ familia de abiertos tal que $\bigcup_{U \in A} U = X$, existe una subfamilia finita $A' \subseteq A$ tal que $\bigcup_{U \in A'} U = X$.

Un espacio topológico es llamado **Hausdorff** (o T_2) siempre que dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

1.1.5. Categorías

Los conceptos de categorías que utilizaremos durante esta tesis, se reducen a las definiciones básicas y las nociones mínimas necesarias para definir el concepto de categorías equivalentes.

Definición 1.11 *Una **categoría** $\mathfrak{C}$ consta de dos partes, una colección de **objetos** $Obj\mathfrak{C}$ y una colección de **flechas** $Fle\mathfrak{C}$ y ciertas operaciones entre estas partes, a saber,*

1. *dos operaciones dom y cod que que asignan a cada flecha f un objeto de la categoría,*
2. *una operación de composición asociativa que asigna a cada par de flechas (f, g) que cumplen que $dom\ f = cod\ g$, una flecha denotada $f \circ g$ tal que $dom\ f \circ g = dom\ g$ y $cod\ f \circ g = cod\ f$,*
3. *una asignación id que a cada objeto x le asigna una flecha id_x tal que $dom\ id_x = cod\ id_x = x$ y satisface la ley de identidad, es decir, si f y g son flechas tales que $dom\ f = x = cod\ g$, entonces $f \circ id_x = f$ y $id_x \circ g = g$.*

Usualmente, al hecho que $dom\ f = x$ y $cod\ f = y$ lo denotaremos con $f : x \to y$. Dada una categoría $\mathfrak{C}$ y dos objetos x e y en $\mathfrak{C}$ denotaremos $\mathfrak{C}(x,y)$ a la colección de flechas $f : x \to y$. Una categoría es llamada **pequeña** si para cada par de objetos la colección $\mathfrak{C}(x,y)$ es un conjunto. Todas las categorías que utilizaremos en esta tesis son pequeñas, así que usualmente, abusaremos de la notación y escribiremos $f \in \mathfrak{C}(x,y)$ para decir que f es una flecha con dominio x y codominio y.

Una flecha $f : x \to y$ se llamara una **mono-flecha** si es cancelable a izquierda, es decir, siempre que $f \circ g = f \circ h$, $g = h$. Dualmente, f se dirá que es una **epi-flecha** si es cancelable a derecha, es decir, si $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$. Si existe $g : y \to x$ tal que $f \circ g = id_y$ y $g \circ f = id_x$ entonces f se dirá una **iso-flecha**.

Dada una categoría $\mathfrak{C}$ denotaremos con $\mathfrak{C}^{op}$ a su **categoría dual**, es decir, a la categoría que tiene los mismos objetos pero que invierte el sentido de las flechas, si $f : x \to y$ es una flecha en $\mathfrak{C}$ $f^{op} : y \to x$ es una flecha en $\mathfrak{C}^{op}$.

Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ diremos que $\mathfrak{D}$ es una **subcategoría** de $\mathfrak{C}$ si todo objeto de $\mathfrak{D}$ es un objeto de $\mathfrak{C}$ y para cada par de objetos x e y en $\mathfrak{D}$ toda flecha de $\mathfrak{D}(x,y)$ es una flecha en $\mathfrak{C}(x,y)$. Como todas las categorías en esta tesis son pequeñas, esta última propiedad podría escribirse $\mathfrak{D}(x,y) \subseteq \mathfrak{C}(x,y)$. Una subcategoría $\mathfrak{D}$ de una categoría $\mathfrak{C}$ se dirá **plena** si $\mathfrak{D}(x,y) = \mathfrak{C}(x,y)$ para cada par de objetos x e y en $\mathfrak{D}$.

Definición 1.12 *Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ un **funtor** F de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ (notaremos $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$) es una asignación, que envia objetos de $\mathfrak{C}$ en objetos de $\mathfrak{D}$ y flechas de $\mathfrak{C}$ en flechas de $\mathfrak{D}$, y que satisface las siguientes propiedades:*

1. $F(f) : F(x) \to F(y)$ *siempre que f sea una flecha en $\mathfrak{C}$ y $f : x \to y$*
2. $F(id_x) = id_{F(x)}$ *para cada objeto x en $\mathfrak{C}$.*
3. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.*siempre que f y g sean flechas en $\mathfrak{C}$ y $dom\ f = cod\ g$.*

Dada una categoría $\mathfrak{C}$ notaremos con $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ al funtor identidad, es decir, al funtor tal que $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}}(x) = x$ para cada objeto en $\mathfrak{C}$ y $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}}(f) = f$ para cada flecha en $\mathfrak{C}$.

Dados dos funtores F,G : $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, **una transformación natural** ξ de F en G (notación $\xi : F \to G$) es una asignación tal que a cada objeto x de $\mathfrak{C}$ le asigna una flecha $\xi_x : F(x) \to G(x)$ en $\mathfrak{D}$, cumpliendo $\xi_y \circ F(f) = G(f) \circ \xi_x$ para cada $f : x \to y$ flecha en $\mathfrak{C}$. Si cada flecha $\xi_x : F(x) \to G(x)$ es una iso-flecha entonces diremos que ξ es un **isomorfismo natural** entre F y G.

Definición 1.13 *Dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son **equivalentes** si existen dos funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ y dos isomorfismos naturales $\xi : \mathbf{1}_{\mathfrak{D}} \to F \circ G$ y $\sigma : \mathbf{1}_{\mathfrak{C}} \to G \circ F$.*

Dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ se dirán **dualmente equivalentes** si y sólo si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}^{op}$ son equivalentes.

1.2. Álgebras multitipadas, multi-retículos y álgebra universal

A pesar de que el concepto de álgebra multi-tipada o multi-álgebra (many sorted álgebra) es bien conocido, la bibliografía sobre este tema no es tan extensa como lo es en álgebras

o álgebra universal y sólo hemos podido encontrarla en ingles. Por ello, daremos aquí todas las definiciones necesarias para la lectura de esta tesis. Remitimos al lector al compendio [57] y las citas allí presentadas. A su vez, pedimos disculpas al lector, dado que por la falta de bibliografía en castellano la mayor parte de las denominaciones son traducciones directas del ingles o introducidas por nosotros.

Un **multi-tipo algebraico** es una terna $\langle I, J, ar\rangle$ donde I es un conjunto no vacío, J es un conjunto de símbolos de operaciones (posiblemente vacío) y ar es una función $ar : J \to I^{<\infty}$.

Definición 1.14 *Dado un multi-tipo algebraico $\langle I, J, ar\rangle$, un **álgebra multi-tipada de tipo** $\langle I, J, ar\rangle$ es una estructura $\boldsymbol{A} = \langle \{A_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{A}}\rangle$ donde:*

1. *$\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos no vacíos indexados por I.*
2. *Para cada símbolo $f \in J$ existe una función $f^{\boldsymbol{A}}$ que cumple la siguiente condición*

$$f^{\boldsymbol{A}} : A_{ar(f)_1} \times \ldots \times A_{ar(f)_{n-1}} \to A_{ar(f)_n}$$

donde n es la longitud de la upla $ar(f)$ y con $ar(f)_i$ indicamos la i-esima coordenada de la upla $ar(f)$.

Toda álgebra multi-tipada será llamada **multi-álgebra** cuando no haga falta una referencia específica tipo. Cada upla $ar(f)$ es llamada la **aridad** del símbolo de función f.

Usualmente en la definición de un álgebra multitipada se hace una distinción entre la función aridad, que indica el dominio de cada operación, y la función objetivo o resultado, que indica el codominio de cada operación. Nuestra función aridad ar, resume la información de ambos el dominio y el codominio, y es facil comprobar que ambas definiciones son análogas. La elección de esa forma de introducir multi-álgebras simplificará las notaciones y demostraciones en la dualidad que desarrollaremos en siguiente capítulo.

Definición 1.15 *Dadas dos multi-álgebras $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del mismo tipo $\langle I, J, ar\rangle$. Un **multi-homomorfismo** $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ será una familia de funciones $\{h_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ tales que para cada $f \in J$*

$$h_{ar(f)_n}\left(f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_{n-1})\right) = f^{\boldsymbol{B}}\left(h_{ar(f)_1}(a_1), \ldots, h_{ar(f)_{n-1}}(a_{n-1})\right)$$

Definición 1.16 *Un álgebra multi-tipada de tipo $\langle I, J, ar\rangle$, $\boldsymbol{A} = \langle \{A_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{A}}\rangle$ se dirá un **multi-retículo** si se verifican las siguientes condiciones para cada $i \in I$:*

1. *$J = \{\wedge_i, \vee_i, 0_i, 1_i : i \in I\}$*
2. *$ar(\wedge_i) = ar(\vee_i) = (i, i, i)$.*
3. *$ar(0_i) = ar(1_i) = i$.*
4. *$\langle A_i, \wedge_i^{\boldsymbol{A}}, \vee_i^{\boldsymbol{A}}, 0_i^{\boldsymbol{A}}, 1_i^{\boldsymbol{A}}\rangle$ es un retículo acotado.*

Usualmente notaremos los multi-retículos simplemente $\langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}\rangle$ donde cada $\boldsymbol{L}_i$ es un retículo acotado, obviando hacer referencia a ni a J ni a ar, que están implícitos por el hecho de ser un multi-retículo.

Si cada retículo $\boldsymbol{L}_i$ de un multi-retículo $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}\rangle$ es distributivo, $\boldsymbol{L}$ se dirá un **multi-retículo distributivo**.

Un **álgebra**, en el sentido usual, es un álgebra 1-tipada, es decir, un algebra I-tipada donde el conjunto I tiene sólo un elemento. Al tener un único tipo en un álgebra, la función aridad puede simplificarse, como es usual en los textos de álgebra universal, a una función

$$ar : J \to \mathbb{Z}^+,$$

tal que para cada $f \in J$, $f : A^{ar(f)} \to A$. Asumiremos esta notación cuando nos estemos refiriendo a álgebras. Dada un álgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, J_{\boldsymbol{A}}\rangle$ el conjunto A es llamado el **universo** o **conjunto subyacente** de $\boldsymbol{A}$. En el caso de álgebra a la función aridad ar se le llama **tipo algebraico**, y al par $\langle J, ar\rangle$ **lenguaje algebraico**. Si $J = \{f_1, \ldots f_n\}$ es un conjunto finito, observemos que la función ar puede expresarse mediante la n-upla $(ar(f_1), \ldots, ar(f_n))$, este será el caso de la mayor parte de esta tesis.

Un álgebra $\boldsymbol{A}$ se dirá **trivial** si su universo tiene un único elemento.

El concepto de **homomorfismo** entre dos álgebras es la restricción del concepto de multi-homorfismo al caso 1-tipado. Al conjunto de homomorfismos entre dos álgebras del mismo tipo lo notaremos $Hom(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Un **monomorfismo** es un homomorfismo inyectivo. Un **epimorfismo** es un homomorfismo sobreyectivo. Diremos que h es un **isomorfismo** si es inyectivo y sobreyectivo. Si existe un epimorfismo entre las álgebras $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ diremos que $\boldsymbol{B}$ es una **imagen homomórfica** de $\boldsymbol{A}$. Si existe un isomorfismo entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ diremos que ambas álgebras son isomorfas.

La colección de todas las álgebras de un mismo lenguaje $\mathcal{L} = \langle J, ar\rangle$ junto con sus homomorfismos forman un categoría llamada **categoría algebraica** en el lenguaje $\mathcal{L}$. Dada una clase de álgebras K del mismo lenguaje $\mathcal{L}$, su categoría algebraica asociada es la subcategoría plena de la categoría algebraica en el lenguaje $\mathcal{L}$, cuyos objetos son las álgebras en K.

Es importante destacar para cada lenguaje algebraico $\mathcal{L} = \langle J, ar\rangle$, la llamada **álgebra de términos, álgebra de fórmulas,** o **álgebra absolutamente libre** de tipo $\mathcal{L} = \langle J, ar\rangle$ sobre un conjunto X. El álgebra de términos o fórmulas $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X)$ tiene como elementos listas de símbolos que se obtienen inductivamente como sigue:

1. $X \subseteq Fm_{\mathcal{L}}(X)$,
2. Si $f \in J$ y $a_1, \ldots, a_{ar(f)} \in Fm_{\mathcal{L}}(X)$ entonces $f\left(a_1, \ldots, a_{ar(f)}\right) \in Fm_{\mathcal{L}}(X)$.
3. $Fm_{\mathcal{L}}(X)$ sólo contiene las secuencias de símbolos que se obtienen con finitas aplicaciones de los ítems 1 y 2.

Para cada $f \in J$, la operación $\overline{f} : Fm_{\mathcal{L}}(X)^{ar(j)} \to Fm_{\mathcal{L}}(X)$ definida por:

$$\overline{f}\left(a_1, \ldots, a_{ar(f)}\right) = f\left(a_1, \ldots, a_{ar(f)}\right),$$

es una operación de aridad $ar(f)$. Abusando de la notación, denotaremos a las operaciones $\overline{f}$ simplemente con el símbolo f. Por ende, $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X) = \langle Fm_{\mathcal{L}}(X), \{f : f \in J\}\rangle$ es un álgebra en el

lenguaje $\mathcal{L}$. Cuando el conjunto X es un conjunto numerable $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ denotaremos a $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X)$ simplemente con $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$.

El conjunto X es usualmente llamado conjunto de **variables** y los elementos de $Fm_{\mathcal{L}}(X)$ son llamados **fórmulas** o **términos** en las variables X. Dada una función $h : X \to \boldsymbol{A}$, donde $\boldsymbol{A}$ es un álgebra en el lenguaje $\mathcal{L} = \langle J, ar \rangle$, existe una única manera de extender h a un homomorfismo $\overline{h} : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X) \to \boldsymbol{A}$, esta propiedad es la que le otorga a $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X)$ el nombre de álgebra absolutamente libre de tipo $\mathcal{L} = \langle J, ar \rangle$ sobre el conjunto X.

Dada $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}(X)$, denotaremos $Var(\varphi) \subseteq X$ al conjunto finito de elementos de X que aparecen en la lista de símbolos de φ. Si $Var(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ usualmente notaremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar esta dependencia. Notemos que no necesariamente $Var(\varphi)$ debe coincidir con el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dado un homomorfismo $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{A}$ sabemos que $h(\varphi)$ esta unívocamente determinado por lo valores de h en $Var(\varphi)$. Por lo tanto cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ induce una operación $\varphi^{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{A}$, determinada por $\varphi^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) = h(\varphi)$ siempre que h sea un homomorfismo que cumple que $h(x_i) = a_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. $\varphi^{\boldsymbol{A}}$ es llamada la **interpretación** de φ en $\boldsymbol{A}$.

Dadas $\boldsymbol{A} = \langle A, J_{\boldsymbol{A}} \rangle$ y $\boldsymbol{B} = \langle B, J_{\boldsymbol{A}} \rangle$ dos álgebras del mismo tipo. Diremos que $\boldsymbol{B}$ es una **subálgebra** de $\boldsymbol{A}$ si $B \subseteq A$ y toda operación $f^{\boldsymbol{B}}$ es la restricción de la correspondiente operación en A, es decir, $f^{\boldsymbol{B}} = f^{\boldsymbol{A}} \restriction B$.

Sea $\boldsymbol{A} = \langle A, J_{\boldsymbol{A}} \rangle$ un álgebra. Una **congruencia** sobre $\boldsymbol{A}$ es una relación de equivalencia $\theta \subseteq A^2$ tal que para todo símbolo de función $f \in J$ y para todo par $a_i, b_i \in A$, $(a_i, b_i) \in \theta$, siempre que $1 \leq i \leq ar(f)$, entonces se cumple la siguiente propiedad, llamada propiedad de **compatibilidad**:

$$\left(f^{\boldsymbol{A}}(a_1, ..., a_{ar(f)}), f^{\boldsymbol{A}}(b_1, ..., b_{ar(f)})\right) \in \theta.$$

Denotaremos con $\boldsymbol{A}/\theta$ al **álgebra cociente** y el conjunto ordenado por inclusión de las congruencias de un álgebra será denotado por $Con(\boldsymbol{A})$.

Un álgebra $\boldsymbol{A}$ se dirá **simple** si $Con(\boldsymbol{A}) = \{A^2, Id_A\}$, donde $Id_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

Dada $\{\boldsymbol{A}_i : i \in I\}$ una familia de álgebra del mismo tipo. El **producto directo** de $\{\boldsymbol{A}_i : i \in I\}$ es un álgebra $\boldsymbol{A}$ con conjunto soporte $A = \prod_{i \in I} A_i$ tal que para todo símbolo de función $f \in J$ y para todo $a_1, ..., a_{ar(f)} \in A$,

$$f^{\boldsymbol{A}}(a_1, ..., a_n)(i) = f^{\boldsymbol{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i)).$$

Si $I = \{1, ..., n\}$ entonces escribiremos $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{A}_n = \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j$. Si $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}$, para todo $i \in I$, entonces escribiremos $\boldsymbol{A}^I$.

Dada una clase de álgebras K de un mismo tipo algebraico denotaremos $\mathbb{H}(\mathsf{K})$, $\mathbb{I}(\mathsf{K})$, $\mathbb{S}(\mathsf{K})$ y $\mathbb{P}(\mathsf{K})$ a las clases de imágenes homomórficas, imágenes isomórficas, subálgebras y productos de álgebras en K.

Se dirá que una clase K de álgebras es una **variedad** si es cerrada bajo imágenes homomórficas, subálgebras y productos, es decir si $\mathbb{H}(\mathsf{K}) \subseteq \mathsf{K}$, $\mathbb{S}(\mathsf{K}) \subseteq \mathsf{K}$, y $\mathbb{P}(\mathsf{K}) \subseteq \mathsf{K}$.

Con $\mathbb{V}(\mathsf{K})$ denotaremos la menor variedad de álgebras que contiene a K. A: Tarski prueba que $\mathbb{V}(\mathsf{K}) = \mathbb{HSP}(\mathsf{K})$.

Una **ecuación** en el lenguaje $\mathcal{L}$ es un par $(s, t) \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, notaremos $s \approx t$. Un álgebra $\boldsymbol{A}$ satisface una ecuación $s \approx t$, si $h(s) = h(t)$, para cada homomorfismo $h \in Hom(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X), \boldsymbol{A})$,

es decir, si $s^{\boldsymbol{A}} = t^{\boldsymbol{A}}$, y lo denotaremos con $\boldsymbol{A} \models s \approx t$. Dada familia de ecuaciones Σ notaremos $\boldsymbol{A} \models \Sigma$ siempre que $\boldsymbol{A}$ satisfaga cada ecuación en Σ.

Una clase de álgebras K del mismo tipo se dirá **ecuacional** si existe una familia de ecuaciones Σ tal que $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ si y sólo si $\boldsymbol{A} \models \Sigma$. Un importante resultado de G. Birkhoff, y que utilizaremos repetidas veces durante esta tesis, establece que una clase de álgebra de un mismo tipo es una variedad si y sólo si es una clase ecuacional.

Un álgebra $\boldsymbol{A}$ es **producto subdirecto** de una familia de álgebras $\{\boldsymbol{A}_i : i \in I\}$ del mismo tipo si

1. existe un monomorfismo $\alpha : A \to \prod_{i \in I} A_i$, y
2. Las proyecciones $\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i$ son tales que $\pi_i \circ \alpha(A) = A_i$ para todo $i \in I$.

Un álgebra $\boldsymbol{A}$ es **subdirectamente irreducible** si $\boldsymbol{A}$ es producto subdirecto mediante el monomorfismo

$$\alpha : A \to \prod_{i \in I} A_i,$$

entonces existe un $i \in I$ tal que la composición $\pi_i \circ \alpha : A \to A_i$ es un isomorfismo.

El siguiente teorema es muy útil en la caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles.

Teorema 1.17 *Sea $\boldsymbol{A}$ un álgebra. Entonces $\boldsymbol{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es trivial o existe una congruencia minimal en $Con(\boldsymbol{A}) \setminus \{Id_A\}$.*

La importancia del estudio de las álgebras subdiretamente irreducibles recide en el resultado de G. Birkhoff que afirma que: toda álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles. El cual aplicado al caso del estudio de una variedad de álgebras en particular, afirma que: toda álgebra de una variedad es isomorfa al producto subdirecto de alguna familia de algebras subdirectamente irreducibles que se encuentran en la misma variedad.

Para más detalles y resultados sobre álgebra universal recomendamos al lector el libro [8].

1.3. Dualidad de Priestley

En esta sección describiremos brevemente la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados, desarrollada [48] y [49]. La presentación elegida difiere de la original en que la original se realiza basándose en ideales primos y esta en filtros primos y también se diferencian en la estructura categorial con la que aquí se presenta.

Denotaremos BDL a la categoría algebraica de los retículos distributivos acotados.

Definición 1.18 *La estructura $\langle X, \leq, \tau \rangle$ es llamada un **espacio topológico ordenado** es si $\langle X, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordendo y $\langle X, \tau \rangle$ es un espacio topológico Un espacio topológico ordenado $\langle X, \leq, \tau \rangle$ es **totalmente disconexo en el orden** si para cada $x, y \in X$ tales que $x \not\leq y$ existe un conjunto $U \subseteq X$ cerrado-abierto y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.*

Definición 1.19 *Un* ***espacio de Priestley*** *es un espacio topológico ordenado totalmente disconexo en el orden y compacto.*

Denotaremos PE a la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyas flechas son las funciones continuas y crecientes entre espacios de Priestley.

Observemos que si $\boldsymbol{P} = \langle X, \leq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley $\boldsymbol{P}^{-1} = \langle \langle X, \leq \rangle^{-1}, \tau \rangle$ también lo es.

A su vez notemos que el producto de una familia finita de espacios de Priestley con la topología y el orden producto es un espacio de Priestley.

Por otro lado si $\boldsymbol{P} = \langle X, \leq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley, $Y \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y decreciente (creciente) e $y \in Y$, entonces existe un $x \in Y$ tal que $y \leq x$ $(x \leq y)$ y x es maximal (minimal) en Y.

Definamos el funtor D: PE $\rightarrow$ BDL.

Objetos:

Dado $\boldsymbol{X} = \langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley denotaremos $D(\boldsymbol{X})$ al conjunto de los abiertos-cerrados y crecientes de X. $\mathrm{D}(\boldsymbol{X}) = \langle D(\boldsymbol{X}), \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$ es un retículo distributivo acotado.

Flechas:

Sean $\langle X_1, \leq_1, \tau_1 \rangle$ y $\langle X_2, \leq_2, \tau_2 \rangle$ dos espacios de Priestley. Sea

$$f : X_1 \rightarrow X_2$$

una función continua y creciente. Consideremos $\mathrm{D}(f) : D(X_2) \rightarrow D(X_1)$ definida por

$$\mathrm{D}(f)(U) = f^{-1}(U),$$

para cada $U \in D(X_2)$. Entonces $\mathrm{D}(f)$ es un homomorfismo de retículos de $D(X_2)$ en $D(X_1)$.

Efectivamente D: PE $\rightarrow$ BDL es un funtor.

Definamos ahora el funtor P: BDL $\rightarrow$ PE.

Objetos:

Sea $\boldsymbol{L}$ un retículo distributivo acotado. Para cada $a \in L$ sea

$$\sigma_{\boldsymbol{L}}(a) = \{P \in X(\boldsymbol{L}) : a \in P\}.$$

Consideremos la topología $\tau_{\boldsymbol{L}}$ en $X(\boldsymbol{L})$ determinada por la subbase

$$\{\sigma_{\boldsymbol{L}}(a) : a \in L\} \cup \{\sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^c : a \in L\}.$$

Donde $\sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^c = X(\boldsymbol{L}) \setminus \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$. El espacio topológico ordenado $\mathrm{P}(\boldsymbol{L}) = \langle X(\boldsymbol{L}), \subseteq, \tau_{\boldsymbol{L}} \rangle$ es un espacio de Priestley.

Flechas:

Dados $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ dos retículos distributivos acotados y $h : L_1 \rightarrow L_2$ un homomorfismo de retículos. Denotemos:

$$\mathrm{P}(h) : X(\boldsymbol{L}_2) \rightarrow X(\boldsymbol{L}_1)$$

a la función definida por:

$$\mathrm{P}(h)(P) = h^{-1}(P),$$

para cada $P \in X(\boldsymbol{L}_2)$..Entonces $\mathrm{P}(h)$ es una función continua y creciente del espacio de Priestley $\mathrm{P}(\boldsymbol{L}_2)$ en el espacio de Priestley $\mathrm{P}(\boldsymbol{L}_1)$.

Es fácil probar que efectivamente P: BDL $\longrightarrow$ PE es un funtor.

Entre las propiedades de la topología $\tau_{\boldsymbol{L}}$, para un retículo distributivo $\boldsymbol{L}$, podemos destacar que una base para ella es la formada por los conjuntos

$$\{\sigma_{\boldsymbol{L}}(a) \cap \sigma_{\boldsymbol{L}}(b)^c : a, b \in L\}.$$

De esto podemos deducir que un conjunto es Y es cerrado en $\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$ si y sólo si para cada $P \notin Y$ existen $a \in P$ y $b \notin P$ tales que $Y \subseteq \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^c \cap \sigma_{\boldsymbol{L}}(b)$, es decir, $\sigma_{\boldsymbol{L}}(a) \cap Y \subseteq \sigma_{\boldsymbol{L}}(b)$.

A su vez para cada retículo distributivo la función $\sigma_{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{L} \longrightarrow P_c(X(\boldsymbol{L}))$ es un isomorfismo entre $\boldsymbol{L}$ y $\mathrm{D}(\mathrm{P}(\boldsymbol{L}))$. Recíprocamente para cada espacio de Priestley $\boldsymbol{X}$ la función $\varepsilon_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \longrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{D}(\boldsymbol{X}))$ definida por:

$$\varepsilon_{\boldsymbol{X}}(x) = \{U \in D(\boldsymbol{X}) : x \in U\}$$

es un homeomorfismo creciente entre $\boldsymbol{X}$ y $\mathrm{P}(\mathrm{D}(\boldsymbol{X}))$.

Teorema 1.20 *Las aplicaciones σ y ε son transformaciones naturales y junto con los funtores P y D determinan una equivalencia dual entre las categorías de retículos distributivos acotados y espacios de Priesltey.*

Capítulo 2

Dualidad de Priestley para multi-retículos con operadores

" The mathematicians' function should be to simplify the intricate. Instead they do just the opposite, and complicate what is simple, and call it generalizing."

David Hilbert

En este capítulo desarrollaremos una dualidad para ciertas categorías de álgebras multi-tipadas donde cada uno de los tipos admite una estructura de retículo distributivo. Esta dualidad esta basada en la dualidad de Priestley para retículos distributivos desarrollada en [48] y [49] (ver sección 1.3 de los Preliminares) y en la representación de multi-retículos con operadores dada por Sofronie-Stokkermans en [56]. En este último trabajo no se desarrolla una dualidad en forma completa, pero si se describe la manera de asociar a cada multi-retículo con cierta operaciones un multi-espacio de Priestley con relaciones. En este capítulo completamos formalmente la dualidad entre estas estructuras, definiendo específicamente que categorías estamos considerando, describiendo los funtores correspondientes y probando la equivalencia dual. Las ideas subyacentes ya se encontraban en [56] pero no fueron completadas en ese trabajo, dado que el objetivo de Sofronie-Stokkermans era el estudio de teoremas de demostración automática y no el desarrollo de esta dualidad. Por ello, en el citado trabajo no se encuentra la representación de los multi-homomorfismos ni la equivalencia categorial.

En la primer sección definiremos las categorías que estudiaremos. En la segunda sección probaremos la equivalencia dual entre estas. Luego en la tercer sección veremos como esta dualidad aplicada al caso uno tipado, es decir, a reticulos distributivos con operdaores, nos permite describir congruencias, subálgebras y álgebras simples y subdirectamente irreducibles. En al cuarta sección compararemos los resultados de este capítulo con otros similares previamente obtenidos por diferentes autores que han sido, en su mayoría, los que inspiraron la generalización presentada en esta capítulo. Finalmente, en la última sección presentaremos una aplicación más especifica, estudiando algunas propiedades de los reticulos de congruencias en la álgeras de Ockham.

2.1. Definiciones

Multi-retículos con operadores

Definición 2.1 *Dado un multi-retículo* $\mathbf{L} = \langle \{\mathbf{L}_i\}_{i\in I}\rangle$, $i_1, \ldots, i_n \in I$. *Diremos que una función* $f : A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_{n-1}} \to A_{i_n}$ *es un* ***supremo-hemimorfismo*** *si se verifican para cada* $1 \leq j \leq n$ *las siguientes condiciones:*

1. $f(a_1, \ldots, 0_{i_j}, \ldots, a_{n-1}) = 0_{i_n}$.
2. $f(a_1, \ldots, a_{i_j} \vee_{i_j} b_{i_j}, \ldots, a_{n-1}) = f(a_1, \ldots, a_{i_j}, \ldots, a_{n-1}) \vee_{i_{n+1}} f(a_1, \ldots, b_{i_j}, \ldots, a_{n-1})$.

Definición 2.2 *Dado un multi-retículo* $\mathbf{L} = \langle \{\mathbf{L}_i\}_{i\in I}\rangle$ *dadas la n-uplas* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$ *y* $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, *diremos que* f *es un* ***operador de aridad*** $(i_1, \ldots, i_n)$ ***y tipo*** $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *en* $\mathbf{L}$ *si se verifica que:*

$$f : \mathbf{L}_{i_1}^{\varepsilon_1} \times \ldots \times \mathbf{L}_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} \to \mathbf{L}_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

es un supremo-hemimorfismo.

Un **tipo de multi-retículo** es una estructura $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ donde $\langle I, J, ar\rangle$ es un multi-tipo algebraico y $\Sigma : J \to \{1, -1\}^{<\infty}$ tal que $f \in J$ la longitud de las uplas $\Sigma(f)$ y $ar(f)$ son iguales.

Definición 2.3 *Dado un tipo de multi-retículo* $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ *un* ***multi-retículo distributivo con operadores de tipo*** $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ *es una estructura* $\mathbf{A} = \langle \langle \{\mathbf{L}_i\}_{i\in I}\rangle, J_A\rangle$ *donde:*

1. $\langle \{\mathbf{L}_i\}_{i\in I}\rangle$ *es un multi-retículo distributivo.*
2. *Para cada símbolo* $f \in J$, *el operador* $f^{\mathbf{A}} \in J_{\mathbf{A}}$ *es un operador de aridad* $ar(f)$ *y tipo* $\Sigma(f)$.

Claramente cada multi-retículo con operadores es una multi-álgebra I-tipada, pero a los propósitos de este trabajo continuaremos con esta notación que resalta la estructura de multi-retículo.

Definición 2.4 *Un* ***retículo distributivo con operadores de tipo*** $\langle J, \Sigma\rangle$ *es un multi-retículo distributivo con operadores de tipo* $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$, *donde* I *es un conjunto unitario y* ar *queda por lo tanto unívocamente determinada por* Σ.

Notemos que: si la longitud de la upla $ar(f)$ es 1, entonces f es en realidad una constante $c_f \in \mathbf{L}_{ar(f)}$. En este caso f admite trivialmente ambos tipos 1 y -1

Por la definición 1.15 de multi-homomorfismo entre álgebras multi-tipadas, tenemos que en el caso de dos multi-retículos con operadores del mismo tipo, un multi-homomorfismo resulta ser una familia de homomorfismos de retículos acotados que respeta los operadores.

Para cada tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ definimos la categoría:

$$\mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$$

Objetos:= Multi-retículos con operadores de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$

Flechas:= multi-homorfismos entre multi-retículos con operadores de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$

Multi-espacios de Priestley con O-relaciones

Definición 2.5 *Dados $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ espacios de Priestley. Una relación $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i$ se dirá una* ***O-relación*** *si verifica las siguientes propiedades:*

1. *Si $(U_1, \ldots, U_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} D(\boldsymbol{P}_i)$, entonces $R(U_1, \ldots, U_{n-1}) \in D(\boldsymbol{P}_n)$.*
2. *Si $(x_1, \ldots, x_n) \notin R$, para cada $1 \leq i \leq n-1$ existen $U_i \in D(\boldsymbol{P}_i)$ tales que cada $x_i \in U_i$ y $x_n \notin R(U_1, \ldots, U_{n-1})$.*

Observación 2.6 *De la definición anterior es fácil deducir que si $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ y para cada $1 \leq i \leq n-1$, $y_i \leq_i x_i$ y $x_n \leq_n y_n$, entonces $(y_1, \ldots, y_n) \in R$.*

También podemos deducir que $R^{-1}(x)$ es un subconjunto decreciente de $\prod_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{P}_i$ y que el conjunto $R(x_1, \ldots, x_{n-1})$ es creciente en $\boldsymbol{P}_n$.

A su vez utilizando el inciso 2 podemos comprobar que $R^{-1}(x)$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{P}_i$.

Por otra parte, de la definición se deduce que si $C_1, \ldots, C_{n-1}$ son cerrados de $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_{n-1}$ respectivamente, entonces $R(C_1, \ldots, C_{n-1})$ es un conjunto cerrado creciente.

Definición 2.7 *Dados $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ espacios de Priestley y una n-upla $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$. Una relación $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i$ se dirá una* ***O-relación de tipo*** *$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ si R es una O-relación entre los espacios de Priestley $\boldsymbol{P}_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \boldsymbol{P}_n^{\varepsilon_n}$*

Definición 2.8 *Dado un tipo de multi-retículo $\langle I, J, ar, \Sigma \rangle$, un* ***multi-espacio de Priestley de tipo*** *$\langle I, J, ar, \Sigma \rangle$ es una estructura $\boldsymbol{P} = \langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i \in I}, J_{\boldsymbol{P}} \rangle$ donde:*

1. *Cada $\boldsymbol{P}_i$ es un espacio de Priestley.*
2. *Para cada $R \in J$ existe una O-relación $R_{\boldsymbol{P}} \in J_{\boldsymbol{P}}$ tal que $R_{\boldsymbol{P}} \subseteq \boldsymbol{P}_{ar(R)_1} \times \ldots \times \boldsymbol{P}_{ar(R)_n}$ de tipo $\Sigma(R)$.*

En la definición anterior hemos hecho un obvio abuso de notación al utilizar un tipo de multi-retículo para definir los multi-espacios de Priestley, dado que en el cado se multi-espacios de Priestley J es un conjunto de símbolos de relaciones y en el caso de multi-retículos es un conjunto de símbolos de funciones. Nos hemos tomado esta licencia que consideramos no se presta a confusiones ni dificulta la comprensión y así evitaremos más definiciones y esto simplificará significativamente las notaciones y demostraciones que siguen.

Definición 2.9 *Dados dos multi-espacio de Priestley $\boldsymbol{P} = \langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i \in I}, J_P \rangle$ y $\boldsymbol{Q} = \langle \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i \in I}, J_Q \rangle$ del mismo tipo, un* ***morfismo de multi-espacios de Priestley*** *desde $\boldsymbol{P} = \langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i \in I}, J_P \rangle$ en $\boldsymbol{Q} = \langle \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i \in I}, J_Q \rangle$, es una familia de funciones $\{g_i\}_{i \in I}$ tal que:*

1. *Cada $g_i : P_i \to Q_i$ es una función continua y creciente.*

2. *Para cada* $R \in J$, *si* $\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, g_{ar_1(R_1)_n}(y)\right) \in R_{\boldsymbol{Q}}$, *existen* $y_i \in P_{ar_2(R_2)_i}$ *para cada* $1 \leq i \leq n-1$ *tales que* $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y) \in R_{\boldsymbol{P}}$ *y en el orden producto de* $\prod_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{P}_{ar_2(R_2)i}^{\Sigma_2(R_2)_i}$, $\left(g_{ar_1(R)_1}(y_1), \ldots, g_{ar_1(R)_{n-1}}(y_{n-1})\right) \leq (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Para cada tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ consideremos la siguiente categoría:

$$\mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$$

Objetos:= Espacios de Priestley multi-tipados con O-relaciones de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$

Flechas:=morfismos de espacios de Priestley multi-tipados con O-relaciones de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$

2.2. Dualidad

Utilizando la dualidad de Priestley probaremos que dado un tipo de multi-retículo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$ las dos categorías $\mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$ y $\mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$ son dualmente equivalentes.

Definamos los funtores:

$\mathrm{X}: \mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle} \to \mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$

Objetos:

$\mathrm{X}\left(\langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{L}}\rangle\right) = \left\langle \{\mathrm{P}(\boldsymbol{L}_i)\}_{i\in I}, \{R_{f_L}\}_{f_L \in J_L} \right\rangle$. Donde cada

$$R_{f_L} \subseteq X\left(\boldsymbol{L}_{ar(f)_1}\right) \times \ldots \times X\left(\boldsymbol{L}_{ar(f)_n}\right)$$

R_f esta definida por

$$(P_1, \ldots, P_n) \in R_{f_L} \text{ si y sólo si } f_{\boldsymbol{L}}\left(P_1^{\Sigma(f)_1}, \ldots, P_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\right) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}$$

si n es la longitud de la upla $ar(f)$ y donde $P_i^1 = P_i$ y $P_i^{-1} = L_{ar(f)_i} \setminus P_i$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Flechas:

$\mathrm{X}(h) = \{\mathrm{P}(h_i)\}_{i\in I}$

$\mathrm{H}: \mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle} \to \mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$

Objetos:

$\mathrm{H}\left\langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{P}}\right\rangle = \left\langle \{\mathrm{D}(\boldsymbol{P}_i)\}_{i\in I}, \{f_{R_P}\}_{R_P \in J_P}, \right\rangle$. Donde cada

$$f_{R_P} : D\left(\boldsymbol{P}_{ar(R)_1}\right) \times \ldots \times D\left(\boldsymbol{P}_{ar(R)_{n-1}}\right) \to D\left(\boldsymbol{P}_{ar(R)_n}\right)$$

f_R esta definida por:

$$f_R(U_1, \ldots, U_{n-1}) = \left(R_{\boldsymbol{P}}\left(U_1^{\Sigma(R)_1}, \ldots, U_{n-1}^{\Sigma(R)_{n-1}}\right)\right)^{\Sigma(R)_n}$$

si n es la longitud de la upla $ar(R)$ y donde $U_i^1 = U_i$ y $U_i^{-1} = \boldsymbol{P}_i \setminus U_i$.

Flechas:
$\mathrm{H}(h) = \{\mathrm{D}(h_i)\}_{i \in I}$.

En realidad la definición de los funtores X y H depende de cada tipo $\langle I, J, ar, \Sigma \rangle$, luego sería necesario indicarlo por ejemplo de la siguiente manera $\mathrm{X}_{\langle I,J,ar,\Sigma \rangle}$ y $\mathrm{H}_{\langle I,J,ar,\Sigma \rangle}$. Esto sólo complica la notación, así que de ahora en adelante supondremos $\langle I, J, ar, \Sigma \rangle$ fijos y omitiremos los subíndices siempre que sea posible.

Observación 2.10 *Si la longitud de la uplas $\Sigma(f)$ y $ar(f)$ es 1, ya observamos que f es en realidad una constante $c_f \in L_{ar(f)}$. Es facil ver en este caso que $R_f = \sigma_{L_{ar(f)}}(c_f)^{\Sigma(f)}$.*

Probaremos ahora que los funtores X y H están bien definidos y determinan una equivalencia dual entre las categorías consideradas. Para ello necesitaremos algunos resultados previos.

Lema 2.11 *Sea $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i \in I}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ un multi-retículo con operadores, sea $f \in J$ tal que la longitud de $ar(f) = n > 1$, y se cumplen las siguientes propiedades*

1. $\Sigma(f) = (1, \ldots, 1)$.
2. *$F_1, \ldots, F_{n-1}$ son filtros de $L_{ar(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_{n-1}}$ respectivamente y P_n es un filtro primo de $L_{ar(f)_n}$, tales que*
$$f_{\boldsymbol{L}}(F_1, \ldots, F_{n-1}) \subseteq P_n.$$

Entonces existen $P_1, \ldots, P_{n-1}$ filtros primos de $L_{ar(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_{n-1}}$ tales que

1. *para cada $1 \leq i \leq n-1$, $F_i \subseteq P_i$ y*
2. *$f_{\boldsymbol{L}}(P_1, \ldots, P_{n-1}) \subseteq P_n$.*

Demostración. Consideremos

$$K_1 = \left\{ G \in Fi\left(\boldsymbol{L}_{ar(f)_1}\right) : F_1 \subseteq G \text{ y } f_{\boldsymbol{L}}(G, F_2, \ldots, F_{n-1}) \subseteq P_n \right\}$$

ordenado por inclusión. Claramente $F_1 \in K_1$. Como la unión de cadenas de filtros es nuevamente un filtro, es fácil ver que toda cadena en K_1 admite una cota superior en K_1. Por el Lema de Zorn tenemos que existe P_1 maximal en K_1.

Veamos que P_1 es un filtro primo. Si $0_1 \in P_1$, tendríamos que

$$0_n = f_{\boldsymbol{L}}(0_1, 1_2, \ldots, 1_n) \in f_{\boldsymbol{L}}(P_1, F_2, \ldots, F_{n-1}) \subseteq P_n,$$

lo cual contradice que P_n sea un filtro primo. Entonces, $P_1 \neq L_{ar(f)_1}$.

Supongamos que $a, b \in L_{ar(f)_1} \setminus P_1$ y sean $P_a = F(P_1 \cup \{a\})$ y $P_a = F(P_1 \cup \{b\})$. Como $P_1 \subsetneq P_a, P_b$ tenemos que $P_a, P_b \notin K_1$. Podemos deducir que existen $a_i, b_i \in F_i$ para cada i tal que $2 \leq i \leq n-1$, cumpliendo que:

$$f_{\boldsymbol{L}}(a, a_2, \ldots, a_{n-1}) \notin P_n,$$
$$f_{\boldsymbol{L}}(b, b_2, \ldots, b_{n-1}) \notin P_n.$$

Luego, si para cada $2 \leq i \leq n-1$ denotamos $c_i = a_i \wedge b_i$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{L}}(a \vee b, c_2, \ldots, c_{n-1}) &= f_{\boldsymbol{L}}(a, c_2, \ldots, c_{n-1}) \vee f_{\boldsymbol{L}}(b, c_2, \ldots, c_{n-1}) \\ &\leq f_{\boldsymbol{L}}(a, a_2, \ldots, a_{n-1}) \vee f_{\boldsymbol{L}}(b, b_2, \ldots, b_{n-1}) \notin P_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \vee b \notin P_1$. Lo cual demuestra que P_1 es un filtro primo.

Inductivamente, una vez obtenidos los primeros $i-1$ filtros primos $P_1, \ldots, P_{i-1}$, el paso i se sigue por el mismo argumento, considerando:

$$K_i = \left\{ G \in Fi\left(\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}\right) : F_i \subseteq G \text{ y } f_{\boldsymbol{L}}(P_1, \ldots, P_{i-1}, G, F_{i+1}, \ldots, F_{n-1}) \subseteq P_n \right\}.$$

■

Corolario 2.12 *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i \in I}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ *un multi-retículo con operadores, sea* $f \in J$. *Supongamos que* $n > 1$ *es la longitud de* $ar(f)$. *Si existen* $G_1 \subseteq L_{ar(f)_1}, \ldots, G_{n-1} \subseteq L_{ar(f)_{n-1}}$ *subconjuntos tales que:*

1. *si* $\Sigma(f)_i = 1$, *entonces* G_i *es un filtro de* $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}$,
2. *si* $\Sigma(f)_i = -1$, *entonces* G_i *es un ideal de* $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}$,
   y existe P_n *un filtro primo de* $L_{ar(f)_n}$, *tal que*

$$f_{\boldsymbol{L}}(G_1, \ldots, G_{n-1}) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}$$

entonces existen $P_1, \ldots, P_{n-1}$ *filtros primos de* $L_{ar(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_{n-1}}$ *tales que para cada* $1 \leq i \leq n-1$, $G_i \subseteq P_i^{\Sigma(f)_i}$ *y*

$$f_{\boldsymbol{L}}\left(P_1^{\Sigma(f)_1}, \ldots, P_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\right) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}$$

Demostración. El operador f considerado como

$$f_{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{L}_{ar(f)_1}^{\Sigma(f)_1} \times \ldots \times \boldsymbol{L}_{ar(f)_{n-1}}^{\Sigma(f)_{n-1}} \to \boldsymbol{L}_{ar(f)_n}^{\Sigma(f)_n}$$

es un supremo hemimorfismo. Cada G_i es un filtro de $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}^{\Sigma(f)_i}$ y $P_n^{\Sigma(f)_n}$ es un filtro primo de $\boldsymbol{L}_{ar(f)_n}^{\Sigma(f)_n}$.

Por el lema anterior, tenemos que existen $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ filtros primos de $L_{ar(f)_1}^{\Sigma(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_{n-1}}^{\Sigma(f)_{n-1}}$ tales que $G_i \subseteq Q_i$ y $f_{\boldsymbol{L}}(Q_1, \ldots, Q_{n-1}) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}$. Si definimos $P_i = Q_i^{\Sigma(f)_i}$, cada P_i resulta un filtro primo de $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}$ y el resultado se sigue. ■

Corolario 2.13 *Sea* $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i \in I}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ *un multi-retículo con operadores, sea* $f \in J$ *y si* $n > 1$ *es la longitud de* $ar(f)$ *sean* $a_1, \ldots, a_{n-1}$ *elementos de* $L_{ar(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_{n-1}}$ *y* P_n *un filtro primo de* $L_{ar(f)_n}$, *tales que*

$$f_{\boldsymbol{L}}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}.$$

Entonces, existen $P_1, \ldots, P_{n-1}$ *filtros primos de* $L_{ar(f)_1}, \ldots, L_{ar(f)_n}$ *tales que* $a_i \subseteq P_i^{\Sigma(f)_i}$ *y*

$$f_{\boldsymbol{L}}\left(P_1^{\Sigma(f)_1}, \ldots, P_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\right) \subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}$$

Demostración. Consideremos:

1. si $\Sigma(f)_i = 1, G_i = [a_i)$ filtro de $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}$, y
2. si $\Sigma(f)_i = -1, G_i = (a_i]$ ideal de $\boldsymbol{L}_{ar(f)_i}$.

Luego el resultado se deduce directamente del corolario anterior. ∎

Observación 2.14 *Observemos que este último corolario prueba que:*

$$R_{f_L}\left(\sigma_{L_1}(a_1)^{\Sigma(f)_i}, \ldots, \sigma_{L_{n-1}}(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right) = \sigma_{L_n}\left(f_{\boldsymbol{L}}(a_1, \ldots, a_{n-1})\right)^{\Sigma(f)_n},$$

para el caso $n > 1$. El caso $n = 1$ fue comentado en la observación 2.10.

Ahora estamos en condiciones de probar que los funtores están bien definidos y determinan una equivalencia dual.

Teorema 2.15 *Los funtores* X *y* H *estan bien definidos.*

Demostración. Veamos primero que X esta bien definido.

Objetos:

Dado $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ un multi-retículo con operadores y dada $f \in J$ la prueba de que R_f es efectivamente una O-relación de tipo $\Sigma(f)$, es decir, que es un O-relación sobre los espacios de Priestley $P(\boldsymbol{L}_1)^{\Sigma(f)_1}, \ldots, P(\boldsymbol{L}_n)^{\Sigma(f)_n}$. se sigue directamente de la definición 2.5 y la observación 2.14. Por ello podemos concluir que X esta bien definido en los objetos.

Flechas:

Sea $h = \{h_i\}_{i\in I}$ un multi-homomorfismo del multi-retículo $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ en el multi-retículo $\boldsymbol{M} = \langle \{\boldsymbol{M}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{M}} \rangle$.

Veamos que $\mathrm{X}(h) = \{\mathrm{P}(h_i)\}_{i\in I}$ es un morfismo de multi-espacios de Priestley de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma \rangle$ de $\left\langle \{\mathrm{P}(\boldsymbol{L}_i)\}_{i\in I}, \{R_{f_L}\}_{f_L \in J_L} \right\rangle$ en $\left\langle \{\mathrm{P}(\boldsymbol{M}_i)\}_{i\in I}, \{R_{f_M}\}_{f_M \in J_M} \right\rangle$.

Claramente $\mathrm{X}(h) = \{P(h_i)\}_{i\in I}$ verifica el ítem 1 de la definición 2.9.

Veamos que verifica el ítem 2. Primero fijemos $R_{f_M} \subseteq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\boldsymbol{M}_{ar(f_M)_i}\right)$ con $f_M \in J_{\boldsymbol{M}}$. Para simplificar notación dado que tanto la aridad como el tipo coinciden en dos multi-reticulos y en sus respectivos multi-espacios, y ya que hemos fijado R_{f_M} notemos $ar = ar(f)$ y $\Sigma = \Sigma(f)$.

Sean $P_1, \ldots, P_{n-1} \in \prod_{i=1}^{n-1} X(\boldsymbol{L}_{ar_i})$ y sea $Q \in X(\boldsymbol{M}_{ar_n})$ tales que

$$(P_1, \ldots, P_{n-1}, \mathrm{P}(h_{ar_n})(Q)) \in R_{f_L},$$

es decir,

$$f_L\left(P_1^{\Sigma_1}, \ldots, P_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right) \subseteq \left(h_{ar_n}^{-1}(Q)\right)^{\Sigma_n} = h_{ar_n}^{-1}\left(Q^{\Sigma_n}\right).$$

Como $h = \{h_i\}_{i\in I}$ es un multi-homomorfismo,

$$\begin{aligned} h_{ar_n}\left(f_L\left(P_1^{\Sigma_1}, \ldots, P_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right) &= f_M\left(h_{ar_1}\left(P_1^{\Sigma_1}\right), \ldots, h_{ar_{n-1}}\left(P_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right) \\ &\subseteq Q^{\Sigma_n}. \end{aligned}$$

Dado que cada h_{ar_i} es un homomorfismo de retículos tenemos que:

1. Si $\Sigma_i = 1$, $G_i = \left[h_{ar_i}\left(P_i^{\Sigma_i}\right)\right)$ es un filtro de $\boldsymbol{M}_{ar_i}$
2. Si $\Sigma_i = -1$, $G_i = \left(h_{ar_i}\left(P_i^{\Sigma_i}\right)\right]$ es un ideal de $\boldsymbol{M}_{ar_i}$

Como f_M es un operador de tipo Σ, si $\Sigma_n = 1$ tenemos que

$$f_M(G_i,\ldots,G_{n-1}) \subseteq \left[f_M\left(h_{ar_1}\left(P_1^{\Sigma_1}\right),\ldots,h_{ar_{n-1}}\left(P_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right)\right)$$

y si $\Sigma_n = -1$

$$f_M(G_i,\ldots,G_{n-1}) \subseteq \left(f_M\left(h_{ar_1}\left(P_1^{\Sigma_1}\right),\ldots,h_{ar_{n-1}}\left(P_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right)\right]$$

en ambos casos $f_M(G_i,\ldots,G_{n-1}) \subseteq Q^{\Sigma_n}$. Luego por lema 2.12 existen

$$Q_1,\ldots,Q_{n-1} \in \prod_{i=1}^{n-1} P(\boldsymbol{M}_{ar_i})$$

tales que $G_i \subseteq Q_i^{\Sigma_i}$ y $f_M\left(Q_1^{\Sigma_1},\ldots,Q_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right) \subseteq Q^{\Sigma_n}$. Como $h_{ar_i}\left(P_i^{\Sigma_i}\right) \subseteq G_i \subseteq Q_i^{\Sigma_i}$, tenemos que $P_i^{\Sigma_i} \subseteq \left(h_{ar_i}^{-1}\left(Q_i^{\Sigma_i}\right)\right) = \mathrm{P}(h_{ar_i})(Q_i)^{\Sigma_i}$ .A su vez dado que $f_M\left(Q_1^{\Sigma_1},\ldots,Q_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right) \subseteq Q^{\Sigma_n}$, tenemos que $(Q_1,\ldots,Q_{n-1},Q) \in R_{f_M}$.

Lo cual prueba que $\mathrm{X}(h) = \{\mathrm{P}(h_i)\}_{i\in I}$ es un morfismo de multi-espacios de Priestley de $\left\langle \{\mathrm{P}(\boldsymbol{M}_i)\}_{i\in I}, \{R_f\}_{f\in J}, ar, \Sigma\right\rangle$ en $\left\langle \{\mathrm{P}(\boldsymbol{M}_i)\}_{i\in I}, \{R_f\}_{f\in J}, ar, \Sigma\right\rangle$

Veamos ahora que el funtor H esta bien definido.

Objetos:

Dado $\left\langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{P}}\right\rangle$ un multi-espacio de Priestley con O-relaciones de tipo $\langle I, J, ar, \Sigma\rangle$. Claramente $\left\langle \{\mathrm{D}(\boldsymbol{P}_i)\}_{i\in I}\right\rangle$ es un multi-retículo y para cada $R_{\boldsymbol{P}} \in J$, $f_{R_{\boldsymbol{P}}}$ es un operador de tipo $\Sigma(R)$.

Flechas:

Sea $g = \{g_i\}_{i\in I}$ un morfismo de multi-espacios de Priestley de $\left\langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{P}}\right\rangle$ en $\left\langle \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i\in I}, J_{\boldsymbol{Q}}\right\rangle$. Veamos que efectivamente $\mathrm{H}(g) = \{\mathrm{D}(g_i)\}_{i\in I}$ es un multi-homomorfismo del multi-retículo $\mathrm{H}\left\langle \{\boldsymbol{Q}_i\}_{i\in I}, K_2, ar_2, \Sigma_2\right\rangle$ en $\mathrm{H}\left\langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i\in I}, K_1, ar_1, \Sigma_1\right\rangle$. Directamente de la dualidad de Priestley tenemos que cada $\mathrm{D}(g_i) : D(Q_i) \to D(P_i)$ es un homomorfismo de retículos acotados. Sólo es necesario probar que respeta la operaciones f_{R_Q} para cada $R_Q \in J_{\boldsymbol{Q}}$.

Sean $(U_1,\ldots,U_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}(Q_{ar_i})$,entonces

$$\begin{aligned} D(g_{ar_n})\left(f_{R_Q}(U_1,\ldots,U_{n-1})\right) &= D(g_n)\left(R_Q\left(U_1^{\Sigma_1},\ldots,U_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right) \\ &= g_{ar_n}^{-1}\left(R_Q\left(U_1^{\Sigma_1},\ldots,U_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right) \\ &= \left\{x \in P_n : g_n(x) \in R_Q\left(U_1^{\Sigma_1},\ldots,U_{n-1}^{\Sigma_{n-1}}\right)\right\} \\ = \left\{x \in P_n : \exists (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} U_i^{\Sigma_i}, (x_1,\ldots,x_{n-1},g_n(x)) \in R_Q\right\} & \\ =^{(1)} & \end{aligned}$$

Como $g = \{g_i\}_{i\in I}$ es un morfismo de multi-espacios de Priestley, por la condición 2 de la definición 2.9, tenemos que:

$$\begin{aligned}
^{(1)} &= \left\{ x \in P_n : \exists (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} g_i^{-1}\left(U_i^{\Sigma_i}\right) \;\; (y_1, \ldots, y_{n-1}, x) \in R_M \right\} \\
&= \left\{ x \in P_n : x \in R_P\left(g_1^{-1}\left(U_1^{\Sigma(R_Q)_1}\right), \ldots, g_{n-1}^{-1}\left(U_{n-1}^{\Sigma(R_Q)_{-1}}\right)\right)\right\} \\
&= R_P\left(D\left(g_{ar_1}\right)(U_1), \ldots, D\left(g_{ar_{n-1}}\right)(U_{n-1})\right) \\
&= f_{R_P}\left(D\left(g_{ar_1}\right)(U_1), \ldots, D\left(g_{ar_{n-1}}\right)(U_{n-1})\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D\left(g_{ar_n}\right)\left(f_{R_Q}(U_1, \ldots, U_{n-1})\right) = f_{R_P}\left(D\left(g_{ar_1}\right)(U_1), \ldots, D\left(g_{ar_{n-1}}\right)(U_{n-1})\right)$$

La prueba de que X y H se distribuyen respecto de las composiciones de flechas se sigue directamente del hecho de que D y P tienen esa propiedad. ■

Teorema 2.16 *Las categorías* $\boldsymbol{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$ *y* $\boldsymbol{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$ *son dualmente equivalentes*

Demostración. Es facil ver que si consideramos los funtores X y H, para cada multi-retículo $\boldsymbol{L} = \langle \{\boldsymbol{L}_i\}_{i\in I}, J, ar, \Sigma\rangle$ la multifunción $\{\sigma_{L_i}\}_{i\in I}$ es un isomorfismo del multi-retículo $\boldsymbol{L}$ en $\mathrm{H}(\mathrm{X}(\boldsymbol{L}))$ De igual manera $\{\varepsilon_{X_i}\}_{i\in I}$ es un isomorfismo del multi-espacio de Priestley $\boldsymbol{P} = \langle \{\boldsymbol{P}_i\}_{i\in I}, J, ar, \Sigma\rangle$ en $\mathrm{X}(\mathrm{H}(\boldsymbol{P}))$. De la dualidad de Priestley se sigue que $\langle \mathrm{X}, \mathrm{H}, \{\sigma_{L_i}\}_{i\in I}, \{\varepsilon_{X_i}\}_{i\in I}\rangle$ definen una equivalencia dual entre las categorías $\mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$ y $\mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$. ■

2.3. Aplicaciones de la dualidad

En la sección anterior hemos desarrollado una dualidad para multi-retículos con operadores. En esta sección veremos algunas aplicaciones de esta dualidad para retículos con operadores, es decir, el caso 1-tipado. Caracterizaremos congruencias, álgebras subdirectamente irreducibles y subálgebras utilizando la dualidad antes desarrollada..

2.3.1. Congruencias y álgebras subdirectamente irreducibles

En [18] se prueba que las congruencias de un retículo distributivo estan en correspondencia biunivoca con los conjuntos cerrados del espacio de Priestley correspondiente. A su vez este resultado se ha extendido a diferentes álgebras con reductos de retículos distributivos, como los retículos distributivos con operadores modales [47], retículos con negación [12], álgebras con implicación y fusión [13], entre otros. Entre estos es importante resaltar dos de ellos, la caracterización de Urquhart de las congruencias en álgebras de Ockham dada en [58], ya que este es hasta donde sabemos el primer resultado de estas caracteristicas; y el trabajo [47] de Petrovich, en el cual estan basados muchos de los demas resultados de este tipo y del cual tomaremos las ideas esenciales para nuestra caracterización para el caso de retículos distributivos con operadores. Todos estos resultados tienen una estructura en común y con

las correspondientes adaptaciones de notación los resultados expuestos en esta sección pueden verse como una generalización de todos estos (ver sección 2.4 donde se comparan estos trabajos con lo dessarrollado en esta tesis). En esta sección caracterizaremos, en el espacio dual, cuando una congruencia es compatible con un operador. Utilizando esta caracterizaciñon describiremos las álgebras simples y subdirectamente irreducibles.

Por el resto de esta sección, salvo que se indique explicitamente lo contrario, $\boldsymbol{L}$ sera un retículo distributivo y f denotara un operador en $\boldsymbol{L}$ de tipo $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ con $n>1$. Esta ultima restricción es sólo para simplificar algunas demostraciones y no implica ninguna perdida real, ya que en el caso de $n=1$, f es en realidad una constante y por ende compatible con cualquier congruencia.

Definición 2.17 *Dado $P\in X(\boldsymbol{L})$. Definimos $MaxR_f^{-1}(P)\subseteq X(\boldsymbol{L})^{n-1}$ como sigue:*

$$(P_1,\ldots,P_{n-1})\in MaxR_f^{-1}(P)$$

si y sólo si se verifican las siguientes proposiciones:

1. *$(P_1,\ldots,P_{n-1})\in R^{-1}(P)$, es decir, $(P_1,\ldots,P_{n-1},P)\in R_f$.*
2. *$(P_1,\ldots,P_{n-1})$ es maximal entre los elementos de $R^{-1}(P)$ con el orden de $\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{P}(\boldsymbol{L})^{\varepsilon_i}$.*

Lema 2.18 *Sea $P\in X(\boldsymbol{L})$. Si $(P_1,\ldots,P_{n-1})\in R^{-1}(P)$, entonces existen $(Q_1,\ldots,Q_{n-1})\in MaxR_f^{-1}(P)$ tal que $(P_1,\ldots,P_{n-1})\leq(Q_1,\ldots,Q_{n-1})$ en $\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{P}(\boldsymbol{L})^{\varepsilon_i}$.*

Demostración. Como R_f es una relación de tipo $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, por la observación 2.6, tenemos que $R_f^{-1}(P)$ es un subconjunto cerrado y decreciente de $\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{P}(\boldsymbol{L})^{\varepsilon_i}$. Luego existe un elemento maximal de $R_f^{-1}(P)$ mayor que $(P_1,\ldots,P_{n-1})$ y el resultado se sigue. ∎

Dado un conjunto $Y\subseteq X(\boldsymbol{L})$ la congruencia de retículo asociada a Y esta definida por (ver [18]):

$$\theta(Y)=\left\{(a,b)\in L^2:\sigma_L(a)\cap Y=\sigma_L(b)\cap Y\right\}$$

En [18] se prueba que $\theta(Y)=\theta(Cl(Y))$, donde $Cl(Y)$ indica la clausura de Y en la topología de $\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$.

Si denotamos $\mathcal{C}=\{Y:X\setminus Y\in\tau\}$, en [18] se prueba que la función $\theta{:}\mathcal{C}\to Con(\boldsymbol{L})$ es una isomorfismo de orden dual.

Veamos que condiciones le debemos pedir al cerrado Y para que $\theta(Y)$ sea compatible con f.

Definición 2.19 *Un conjunto $Y\subseteq P(\boldsymbol{L})$ es llamado R_f-**cerrado** si y sólo si es cerrado en la topología de $P(\boldsymbol{L})$ y $MaxR_f^{-1}(P)\subseteq Y^n$ para cada $P\in Y$.*

Es facil ver que el conjunto de R_f-cerrados es un retículo.

Teorema 2.20 *El retículo de conjuntos R_f-cerrados de* $\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$ *es dualmente isomorfo al retículo de congruencias de* $\mathbf{L}$ *compatibles con* f.

Demostración. Dado Y un conjunto cerrado de $\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$, supongamos primero que $\theta(Y)$ es una congruencia de $\boldsymbol{L}$ compatible con f y veamos que en ese caso Y debe ser R_f-cerrado.

Sea $P \in Y$ y $(P_1,\ldots,P_{n-1}) \in MaxR_f^{-1}(P)$. Si $P_1 \notin Y$, como Y es cerrado existen $a,b \in L$ tales que $a \in P_1$, $b \notin P_1$ y $\sigma_L(a) \cap \sigma_L^c(b) \cap Y = \emptyset$, es decir, $\sigma(a) \cap Y \subseteq \sigma(b)$. Entonces por la definición de $\theta(Y)$, $(a \wedge b, a), (b, a \vee b) \in \theta(Y)$.

Supongamos primero que $\varepsilon_1 = +1$. Como $(P_1,\ldots,P_n) \in MaxR_f^{-1}(P)$, tenemos que

$$f\left(F(P_1 \cup \{b\}), P_2^{\varepsilon_2} \ldots, P_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}\right) \nsubseteq P^{\varepsilon_n},$$

es decir, existen $p \in P_1$ y $a_i \in P_i$ para cada $2 \leq i \leq n-1$ tales que $f(p \wedge b, a_2,\ldots,a_{n-1}) \notin P^{\varepsilon_n}$. Dado que $a \vee b \in P_1$ tenemos que $f(p \wedge (a \vee b), a_2,\ldots,a_n) \in P^{\varepsilon_n}$. Por hipótesis, resulta $(f(p \wedge b, a_2,\ldots,a_n), f(p \wedge (a \vee b), a_2,\ldots,a_n)) \in \theta(Y)$, luego por la definición de $\theta(Y)$ deducimos que $f(p \wedge b, a_2,\ldots,a_n) \in P^{\varepsilon_n}$ lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que $\varepsilon_1 = -1$. Como $(P_1,\ldots,P_n) \in MaxR_f^{-1}(P)$, podemos deducir que $f(I(A \backslash P_1 \cup \{a\}), P_2^{\varepsilon_2} \ldots, P_n^{\varepsilon_{n-1}}) \nsubseteq P^{\varepsilon_n}$, es decir, existen $q \notin P_1$ y $a_i \in P_i$ para cada $2 \leq i \leq n-1$ tales que $f(q \vee a, a_2,\ldots,a_n) \notin P^{\varepsilon}$. Como $a \wedge b \notin P_1$ tenemos que $f(q \vee (a \wedge b), a_2,\ldots,a_n) \in P^{\varepsilon_n}$. Pero $(f(q \vee a, a_2,\ldots,a_n), f(p \vee (a \wedge b), a_2,\ldots,a_n)) \in \theta(Y)$, lo cual es una contradicción.

En ambos casos llegamos a una contradición, lo que prueba que $P_1 \in Y$.

De igual manera se prueba que $P_i \in Y$ para cada i.

Para probar la recíproca, supongamos que Y es un conjunto R_f-cerrado. Supongamos que $(f(a_1,\ldots,a_{n-1}), f(b_1,\ldots,b_{n-1})) \notin \theta(Y)$ para alguna familia de pares $(a_i,b_i) \in \theta(Y)$ con $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, existe $P \in Y$ tal que $f(a_1,\ldots,a_n) \in P^{\varepsilon_n}$ y $f(b_1,\ldots,b_n) \notin P^{\varepsilon_n}$ o $f(b_1,\ldots,b_n) \in P^{\varepsilon_n}$ y $f(a_1,\ldots,a_n) \notin P^{\varepsilon_n}$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $f(a_1,\ldots,a_n) \in P^{\varepsilon}$ y $f(b_1,\ldots,b_n) \notin P^{\varepsilon}$. Por el corolario 2.13, existen P_i que verifican que $a_i \in P_i^{\varepsilon_i}$ para cada $1 \leq i \leq n-1$ y $(P_1,\ldots,P_{n-1},P) \in R_f$. Por la proposición 2.18, existen $(Q_1,\ldots,Q_{n-1}) \in MaxR_f^{-1}(P)$ tal que $(P_1,\ldots,P_{n-1}) \leq (Q_1,\ldots,Q_{n-1})$ en $\prod_{i=1}^{n} X(\boldsymbol{L})^{e_i}$. Entonces, $Q_i \in Y$ y $a_i \in Q_i^{\varepsilon_i}$ para cada $1 \leq i \leq n-1$. Como $(a_i,b_i) \in \theta(Y)$ y $a_i \in Q_i^{\varepsilon_i}$ tenemos que $b_i \in Q_i^{\varepsilon_i}$. Con lo cual $f(b_1,\ldots,b_n) \in P^{\varepsilon}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe ser $(f(a_1,\ldots,a_{n-1}), f(b_1,\ldots,b_{n-1})) \in \theta(Y)$. De esto concluimos que $\theta(Y)$ es compatible con f. ∎

Corolario 2.21 *Dado* $\langle \mathbf{L}, J_L \rangle$ *un retículo distributivo con operadores. Consideremos* $\mathcal{C}_J = \{C : C \text{ es } R_f\text{-cerrado para cada } f \in J_L\}$, *luego el retículo de la congruencias de* $\langle \mathbf{L}, J_L \rangle$ *es dualmente isomorfo a* $\mathcal{C}_J$ *ordenado por inclusión.*

Como $\mathcal{C}_J$ ordenado por inclusión es un retículo completo, dado $Y \subseteq P(L)$ llamaremos $Cl_{\mathcal{C}_J}(Y)$ al menor elemento de $\mathcal{C}_J$ que contiene a Y. Utilizando el corolario anterior, es facil ver que un multiretículo $\langle \mathbf{L}, J_L \rangle$ sera simple si y sólo si $\mathcal{C}_J = \{\emptyset, X(\boldsymbol{L})\}$ si y sólo si para cada $P \in X(\boldsymbol{L})$, $Cl_{\mathcal{C}_J}(\{P\}) = X(\boldsymbol{L})$ .Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 2.22 *El retículo distributivo con operadores* $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$ *es simple si y sólo si para cada* $P \in X(\mathbf{L})$, $Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})$.

Por la caractización de Birkhoff de álgebras subdirectamente irreducibles y el corolario 2.21, $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$ será subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si $\mathcal{C}_J \setminus \{X(\mathbf{L})\}$ tiene un máximo distinto del conjunto vacío.

Teorema 2.23 $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$ *es subdirectamente irreducible pero no simple si y sólo si la siguiente proposición es valida:*

$\{P \in X(\mathbf{L}) : Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})\}$ *es un conjunto abierto no vacio distinto de* $X(\mathbf{L})$.

Demostración. Supongamos primero que $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$ es subdirectamente irreducible y no simple y denotemos Y al maximo de $\mathcal{C}_J - \{X(\mathbf{L})\}$. Como $\langle \mathbf{L}, J, ar, \Sigma \rangle$ no es simple $Y \neq \emptyset$. Veremos que $X(\mathbf{L}) \setminus Y = \{P \in X(\mathbf{L}) : Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})\}$.

Si $P \in X(\mathbf{L}) \setminus Y$, entonces $P \in Cl_{\mathcal{C}_J}(P) \nsubseteq Y$. Por lo tanto $Cl_{\mathcal{C}_J}(P) \notin \mathcal{C}_J \setminus \{X(\mathbf{L})\}$, luego debe ser $Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})$.

Si $P \in X(\mathbf{L})$ es tal que $Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})$, como $Cl_{\mathcal{C}_J}(Y) = Y \neq X(\mathbf{L})$, $P \notin Y$.

Para la recíproca, si definimos $Y = X(\mathbf{L}) \setminus \{P \in X(\mathbf{L}) : Cl_{\mathcal{C}_J}(P) = X(\mathbf{L})\}$, es facil ver que $\emptyset \neq Y \in \mathcal{C}_J \setminus \{X(\mathbf{L})\}$ e Y es máximo en $\mathcal{C}_J \setminus \{X(\mathbf{L})\}$. ∎

En el caso de que J tenga un solo elemento f es posible conseguir una descripción algo más precisa, caracterizando $Cl_{\mathcal{C}_J}(Y)$ para cada Y. Dado $Y \subseteq X(\mathbf{L})$, definimos Y_n de manera inductiva como sigue:

$$Y_0 = Y$$
$$Y_{n+1} = Y_n \cup MaxR_f^{-1}(Y_n)$$

Consideremos

$$Y_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

Luego, tenemos que en este caso $Cl_{\mathcal{C}_J}(Y) = Cl(Y_\omega)$.

Corolario 2.24 $\langle \mathbf{L}, f \rangle$ *es simple si y sólo si para cada* $P \in X(\mathbf{L})$, $\{P\}_\omega$ *es denso en* $\mathrm{P}(\mathbf{L})$.

Corolario 2.25 $\langle \mathbf{L}, f \rangle$ *es subdirectamente irreducible pero no simple si y sólo si una de las siguientes proposiciones es válida:*

1. $\left\{P \in X(\mathbf{L}) : \left(MaxR_f^{-1}(P)\right)_\omega \text{ es denso en } \mathrm{P}(\mathbf{L})\right\}$ *es un conjunto abierto no vacío distinto de* $X(\mathbf{L})$.
2. *Existe* $P \in X(\mathbf{L})$, *tal que:*

   a) $P \notin Cl\left(MaxR_f^{-1}(P)_\omega\right) \neq \emptyset$ *y*

   b) $X(\mathbf{L}) = \{P\} \cup Cl\left(\left(MaxR_f^{-1}(P)\right)_\omega\right)$.

2.3.2. Subálgebras

En [18] se describe los subretículos de un retículo distributivo mediante ciertas relaciones binarias en el espacio de Priestley asociado. En esta subsección extenderemos estos resultados al caso de un retículo distributivo con operadores. Recordemos algunas definiciones y resultados de [18][1].

Definición 2.26 *Sea* $\mathbf{X}$ *un espacio de Priestley. Una relación binaria* $R \subseteq X^2$ *se dice que es un* ***preorden reticular*** *si es reflexiva, transitiva y cumple que para cada* $x, y \in X$

$$\text{si } (x,y) \notin R, \text{ existe } U \in D(X) \text{ tal que } x \in U, y \notin U \text{ y } R(U) \subseteq U. \tag{2.1}$$

Dado $\boldsymbol{L}$ un retículo distributivo y M un subconjunto de $\boldsymbol{L}$, definimos una relación binaria en $X(\boldsymbol{L})$ como sigue:

$$R_{\boldsymbol{M}} = \{(P,Q) \in X(\boldsymbol{L}) \times X(\boldsymbol{L}) : P \cap B \subseteq Q\}.$$

Dada una relación de preorden reticular R en $\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$ definimos

$$\boldsymbol{M}_R = \{a \in L : R(\sigma(a)) \subseteq \sigma(a)\}$$

En [18] se prueba que si $\boldsymbol{M}_R$ es un subretículo de $\boldsymbol{L}$, entonces R es una relación de preoden reticular. A su vez, si $\boldsymbol{M}$ es un subretículo de $\boldsymbol{L}$, R_M resulta una relación de preorden reticular y $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{R_M}$.

Dado un retículo distributivo con operadores $\langle \boldsymbol{L}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ veamos cual es la condición que se le debe pedir a una relación de preorden reticular para que $\boldsymbol{M}_R$ sea ademas cerrado bajo cada una de las operaciones $f_{\boldsymbol{L}} \in J_{\boldsymbol{L}}$.

Lema 2.27 *Sea* $\mathbf{L}$ *un retículo distributivo acotado y sea* $f : \boldsymbol{L}^n \to \boldsymbol{L}$ *un supremo hemimorfismo con* $n \geq 1$, *es decir, un operador de tipo* $(1, \ldots, 1)$. *Dado* $\mathbf{M}$ *un subretículo de* $\mathbf{L}$, *las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\boldsymbol{M}$ *es cerrado bajo* f.
2. R_M *satisface que si* $(P_1, \ldots, P_n, P) \in R_f$ *y* $(P,Q) \in R_M$, *entonces existen* $Q_1, \ldots, Q_n$ *tales que* $(P_i, Q_i) \in R_M$ *para cada* $1 \leq i \leq n$ *y* $(Q_1, \ldots, Q_n, Q) \in R_f$.

Demostración. Supongamos primero que $\boldsymbol{M}$ es cerrado bajo f y veamos que se verifica la condición 2.

Sean $(P_1, \ldots, P_n, P) \in R_f$ y $(P_n, Q) \in R_M$, es decir, $f(P_1, \ldots, P_n) \subseteq P$ y $P \cap \boldsymbol{M}_R \subseteq Q$. Como $\boldsymbol{M}$ es cerrado bajo f tenemos que:

$$f(P_1 \cap \boldsymbol{M}, \ldots, P_n \cap \boldsymbol{M}) \subseteq P \cap \boldsymbol{M} \subseteq Q.$$

Dado que f es creciente en cada coordenada,

$$f([P_1 \cap \boldsymbol{M}), \ldots, [P_n \cap \boldsymbol{M})) \subseteq [P \cap \boldsymbol{M}) \subseteq Q$$

[1] A los efectos de simplicar la notación y las demostraciones de esta sección, la definicion de preorden reticular R que daremos corresponde al hecho que R^{-1} sea un preoden reticular en la definición dada [18].

Por el lema 2.11 existen $Q_1, \ldots, Q_n$ filtros primos de $\boldsymbol{L}$ tales que:

$$f(Q_1, \ldots, Q_n) \subseteq Q$$

$P_i \cap \boldsymbol{M} \subseteq [P_i \cap \boldsymbol{M}) \subseteq Q_i$, es decir, $(P_i, Q_i) \in R_M$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $(Q_1, \ldots, Q_n, Q) \in R_f$.

Para demostrar la recíproca, supongamos que $a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{M}$ y comprobemos que efectivamente $f(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \boldsymbol{M}$. Para esto veremos que $R_M(\sigma(f(a_1, \ldots, a_n))) \subseteq \sigma(f(a_1, \ldots, a_n))$.

Sea $P \in \sigma(f(a_1, \ldots, a_n)) = R_f(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ y sea Q tal que $(P, Q) \in R_M$. Entonces, existen $P_i \in \sigma(a_1)$ tales que $(P_1, \ldots, P_n, P) \in R_f$. Por hipótesis, existen $(Q_1, \ldots, Q_n)$ tales que para cada $1 \leq i \leq n$, $(P_i, Q_i) \in R_M$ y $(Q_1, \ldots, Q_n, Q) \in R_f$.

Como para cada i, $R_M(\sigma(a_i)) \subseteq \sigma(a_i)$, tenemos que $Q_i \in \sigma(a_i)$. Luego

$$Q \in R_f(P_1, \ldots, P_n) \subseteq R_f(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) = \sigma(f(a_1, \ldots, a_n)).$$

Lo cual prueba que $R_M(\sigma(f(a_1, \ldots, a_n))) \subseteq \sigma(f(a_1, \ldots, a_n))$. Luego utilizando el hecho que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{R_M}$, el resultado se sigue. ∎

Ejemplo 2.28 *Si f es un operador de tipo $(1,1)$ el ítem 2 del teorema anterior se puede rescribir como $R_f \circ R_M \subseteq R_M \circ R_f$, donde $\circ$ simboliza la composición usual de relaciones binarias.*

Antes de probar el resultado general conviene hacer ciertas observaciones.

Observación 2.29 *Ya vimos que dado $\boldsymbol{M}$ un subretículo de $\boldsymbol{L}$ y $a \in M$, si $(P, Q) \in R_M$ y $P \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$ entonces $Q \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$. Observemos tambien que si $(P, Q) \in R_M^{-1}$ y $P \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^{-1}$, es decir, $(Q, P) \in R_M$ y $P \notin \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$, entonces $Q \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^{-1}$. Ya que si suponemos que $Q \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$, como $a \in M$ tenemos que $P \in R(\sigma_{\boldsymbol{L}}(a)) \subseteq \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)$, lo cual contracdice que $P \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^{-1}$. Por lo tanto $(P, Q) \in R_M^{\varepsilon}$ y $P \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^{\varepsilon}$ con $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, entonces $Q \in \sigma_{\boldsymbol{L}}(a)^{\varepsilon}$.*

Observación 2.30 *Por otro lado observemos que:*

$$\begin{array}{lll} (P, Q) \in R_M^{-1} & \textit{si y sólo si} & (Q, P) \in R_M \\ & \textit{si y sólo si} & Q \cap M \subseteq P \\ & \textit{si y sólo si} & P^{-1} \cap M \subseteq Q^{-1} \end{array}$$

Por lo tanto, en general si $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, entonces $(P, Q) \in R_M^{\varepsilon}$ si y sólo si $P^{\varepsilon} \cap M \subseteq Q^{\varepsilon}$.

Lema 2.31 *Sea $\langle \boldsymbol{L}, J_{\boldsymbol{L}} \rangle$ un retículo distributivo acotado con operadores y $\boldsymbol{M}$ un subretículo de $\boldsymbol{L}$. Dado $f \in J_{\boldsymbol{L}}$ tal que longitud de la upla $ar(f)$ es $n > 1$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\boldsymbol{M}$ es cerrado bajo f.*
2. *Si $(P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) \in R_f$ y $(P_n, Q) \in R_M^{\Sigma(f)_n}$, existen $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, tales que para cada $1 \leq i \leq n-1$ $(P_i, Q_i) \in R_M^{\Sigma(f)_i}$ y $(Q_1, \ldots, Q_{n-1}, Q) \in R_f$.*

Demostración. Supongamos que $\boldsymbol{M}$ es cerrado bajo f y veamos que se verifica la condición 2.

Sean $(P_1,\ldots,P_{n-1},P_n)\in R_f$ y $(P_n,Q)\in R_M^{\Sigma(f)_n}$, es decir, $f\left(P_1^{\Sigma(f)_1},\ldots,P_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)\subseteq P^{\Sigma(f)_n}$. Por la observación 2.30 y de la hipótesis $(P_n,Q)\in R_M^{\Sigma(f)_n}$, tenemos que $P^{\Sigma(f)_n}\cap\boldsymbol{M}\subseteq Q^{\Sigma(f)_n}$. Como $\boldsymbol{M}$ es cerrado bajo f

$$f\left(P_1^{\Sigma(f)_1}\cap\boldsymbol{M},\ldots,P_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\cap\boldsymbol{M}\right)\subseteq P^{\Sigma(f)_n}\cap\boldsymbol{M}\subseteq Q^{\Sigma(f)_n}.$$

Como $\boldsymbol{M}$ es un subretículo, para cada $0\leq i<n$ tenemos que:

1. $\Sigma(f)_i=1$, $G_i=[P_i\cap\boldsymbol{M})$ es un filtro de $\boldsymbol{L}$.
2. $\Sigma(f)_i=-1$, $G_i=\left(P_i^{-1}\cap\boldsymbol{M}\right]$ es un ideal de $\boldsymbol{L}$.

Utilizando el hecho que f es un operador de tipo $\Sigma(f)$, es facil ver que $f(G_1,\ldots,G_{n-1})$ esta contenido en $[P\cap\boldsymbol{M})$ si $\Sigma(f)_n=1$ y esta contenido en $(P^{-1}\cap\boldsymbol{M}]$ si $\Sigma(f)_n=-1$. En ambos casos

$$f(G_1,\ldots,G_{n-1})\subseteq Q^{\Sigma(f)_n}.$$

Por el lema 2.12, existen $Q_1,\ldots,Q_{n-1}$ filtros primos de $L_{ar(f)_1},\ldots,L_{ar(f)_{n-1}}$ tales que para cada $1\leq i\leq n-1$, $G_i\subseteq Q_i^{\Sigma(f)_i}$ y

$$f\left(Q_1^{\Sigma(f)_1},\ldots,Q_{n-1}^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)\subseteq P_n^{\Sigma(f)_n}.$$

Dado que $P_i^{\Sigma(f)_i}\cap\boldsymbol{M}\subseteq G_i\subseteq Q_i^{\Sigma(f)_i}$, concluimos que $(P_i,Q_i)\in R_M^{\Sigma(f)_i}$. A su vez de la definición de R_f (pag. 18) obtenemos $(Q_1,\ldots,Q_n,Q)\in R_f$.

Para demostrar la recíproca, supongamos que $a_1,\ldots,a_{n-1}\in\boldsymbol{M}$ y veamos

$$R_M(\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1})))\subseteq\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1})).$$

Supongamos primero que $\Sigma(f)_n=1$.

Sea $P\in\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))=R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)$ y sea $Q\in X(\boldsymbol{L})$ tal que $(P,Q)\in R_M$. Entonces, existen $P_i\in\sigma(a_i)^{\Sigma(f)_i}$ tales que $(P_1,\ldots,P_{n-1},P)\in R_f$. Por hipótesis existen $(Q_1,\ldots,Q_{n-1})$ tales que $(Q_1,\ldots,Q_{n-1},Q)\in R_f$ y para cada $1\leq i\leq n-1$ $(P_i,Q_i)\in R_M^{\Sigma(f)_i}$.

Como para cada $1\leq i\leq n$, $R_M(\sigma(a_i))\subseteq\sigma(a_i)$, por la observación 2.29, tenemos que $Q_i\in\sigma(a_i)^{\Sigma(f)_i}$. Luego

$$Q\in R_f(Q_1,\ldots,Q_{n-1})\subseteq R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right),$$

y dado que $R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)=\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$, podemos concluir que $R_M(\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1})))\subseteq\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$.

Supongamos ahora que $\Sigma(f)_n=-1$.

Sea $P\in\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))=\left(R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)\right)^{-1}$ y sea $Q\in X(\boldsymbol{L})$ tal que $(P,Q)\in R_M$.

Supongamos que $Q \notin \sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$, es decir, $Q \in R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_{n-1})^{\Sigma(f)_{n-1}}\right)$. Entonces, existen $P_i \in \sigma(a_i)^{\Sigma(f)_i}$ tales que $(P_1,\ldots,P_{n-1},Q) \in R_f$. Como $(Q,P) \in R_M^{-1}$, por hipótesis, existen $(Q_1,\ldots,Q_{n-1})$ tales que $(Q_1,\ldots,Q_n,P) \in R_f$.y $(P_i,Q_i) \in R_M^{\Sigma(f)_i}$ para cada $1 \leq i \leq n$

Como antes, dado que para cada i, $R_M(\sigma(a_i)) \subseteq \sigma(a_i)$, $Q_i \in \sigma(a_i)^{\Sigma(f)_i}$. Por lo tanto $P \in R_f(Q_1,\ldots,Q_{n-1}) \subseteq R_f\left(\sigma(a_1)^{\Sigma(f)_1},\ldots,\sigma(a_n)^{\Sigma(f)_i}\right)$, lo cual es una contradición, que proviene de suponer que $Q \notin \sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$, Por ende $Q \in \sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$, y podemos concluir que $R_M(\sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))) \subseteq \sigma(f(a_1,\ldots,a_{n-1}))$. ■

Ejemplo 2.32 *Si f es un operador de tipo $(-1,-1)$, el ítem 2 del teorema anterior se puede rescribir como $R_f \circ R_M^{-1} \subseteq R_M^{-1} \circ R_f$.*

De igual manera si f es un operador de tipo $(-1,1)$ y g un operador de tipo $(1,-1)$, el ítem 2 del teorema anterior se puede rescribir como $R_f \circ R_M \subseteq R_M^{-1} \circ R_f$ y $R_g \circ R_M^{-1} \subseteq R_M \circ R_g$ respectivamente.

Teorema 2.33 *Sea $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$ un retículo distributivo acotado con operadores y $\mathbf{M}$ un subretículo de $\mathbf{L}$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathbf{M}$ es una suálgebra de $\langle \mathbf{L}, J_{\mathbf{L}} \rangle$*
2. *Para cada $f \in J_{\mathbf{L}}$, si $(P_1,\ldots,P_{n-1},P_n) \in R_f$ y $(P_n,Q) \in R_M^{\Sigma(f)_n}$, existen $Q_1,\ldots,Q_{n-1}$, tales que $(P_i,Q_i) \in R_M^{\Sigma(f)_i}$ para cada $i \leq i \leq n-1$ y $(Q_1,\ldots,Q_{n-1},Q) \in R_f$.*

Demostración. Por el lema anterior sólo falta probar que $\boldsymbol{M}$ contiene a las constantes de $J_{\mathbf{L}}$ si y sólo si para cada $f \in J_{\mathbf{L}}$ constante si $P \in R_f$ y $(P,Q) \in R_M^{\Sigma(f)}$, entonces $Q \in R_f$. Pero esto se deduce directamente de la observaciones 2.10 y 2.29. ■

2.4. Comparación con otras dualidades y representaciones

Existen muchas dualidades y representaciones basadas en la dualidad de Priestley para retículos distributivos. En esta sección observaremos como se relacionan con la dualidad descripta en este capítulo. A su vez veremos como las aplicaciones desarrolladas en las secciones anteriores son, en ciertas ocasiones, generalizaciones de algunos resultados ya obtenidos por estos autores para los casos que ahora describiremos.

La variedad y amplitud de representaciones y dualidades para álgebras con estructura de retículo distributivo, que se han desarrollado utilizando como base la dualidad de Priestley, hace que el intento de ser exhaustivos en la comparación de los resultados con los obtenidos en este capítulo sea una tarea inabordable. Por ello elegimos arbitrariamente los casos que nos parecen más representativos. Por otro lado dejaremos para una sección en el próximo capítulo el mismo análisis para para el caso de dualidades y representaciones de algebras con operadores del tipo implicación y/o fusión.

2.4.1. Multiretículos y retículos con operadores

Ya comentamos en el comienzo de estes capítulo que en [54] y [55] Soffronie-Stokkermans describe una dualidad para retículos distributivos con operadores que coincide con la Dualidad descripta en la sección 1 para el caso 1-tipado. En estos trabajos Sofronie-Stokkermans también considera la posibilidad de que alguno de los operadores sean homomorfismo u homomorfismos duales los cuales representa con funciones en el espacio dual en lugar de relaciones (ver la subsección 2.4.2). A su vez en [56] generaliza esta dualidad a una representación para el caso multipado donde a cada multiretículo con operadores le asigna el mismo multi-espacio que se le asigna en este trabajo pero sin considerar la topología de cada espacio de Priestley, obteniendo asi una estructura que llama S-sorted RT Σ-relational structure. En el comienzo de este capítulo lo que hemos hecho es completar esta representación para obtener una dualidad categorial, adjuntandole a la estructura relacional las topologías necesarias y describiendo los funtores en los homomorfismos correspondientes a cada categoría.

2.4.2. Retículos distributivos con un operador

Retículos distributivos con un supremo homomorfismo

En [47] A. Pertrovich introduce la variedad de **J**-retículos distributivos. Utilizando los resultados de [18], desarrolla una dualidad de Priestley para estos retículos, que le permite analizar álgebras simples y subdirectamente irreducibles en esta vaiedad y en algunas de sus subvariedades. Veremos como estos resultados se relacionan con los análogos desarrollados en este capítulo. Recordemos primeros algunas definiciones.

Definición 2.34 *Un* ***J-retículo distributivo*** $\mathbf{J} = \langle J, \wedge, \vee, j, 0, 1\rangle$ *es un álgebra, de tipo algebraico* $(2,2,1,0,0)$, *tal que* $\langle J, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo y* j *satisface*

1. $j(0) = 0$,
2. $j(a \vee b) = j(a) \vee j(b)$,

para cada $a, b \in J$.

En [47] se les llama **supremo homomorfismos** a los operadores que satisfacen 1 y 2 de la definición anterior. Siguiendo la notación de esta tesis un operador j es un supremo homomorfismo si y sólo si es de tipo $(1,1)$.

Definición 2.35 *Un* ***J-espacio*** *es un par* $\langle \mathbf{X}, R\rangle$ *donde* $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau\rangle$ *es un espacio de Priestley y* R *es una relación binaria en* X *que satisface:*

1. *Para cada* $x \in X$, $R(x)$ *es un conjunto cerrado y decreciente.*
2. *Para cada* $U \in D(X)$, $R^{-1}(U) \in D(X)$.

Las relaciones que satisfacen 1 y 2 de la definición anterior se les llama, en [18] y en [47], relaciones de Priestley.

Proposición 2.36 $\langle \mathbf{X}, R\rangle$ *es un* ***J-espacio*** *si y sólo si* $\langle \mathbf{X}, R^{-1}\rangle$ *es un espacio de Priestley con una O-relación (de tipo* $(1,1)$*).*

Demostración. Claramente que R satisfaga el ítem 2 de la definición 2.35 es equivalente a que R^{-1} satisfaga el ítem 2 de la definición 2.5.

Si $\langle \boldsymbol{X}, R^{-1}\rangle$ es un espacio de Priestley con una O-relación, en la observación posterior a la definición 2.5 se prueba que R satisface el ítem 1 de la definición 2.35.

Supongamos ahora que $\langle \boldsymbol{X}, R\rangle$ es un **J**-espacio.

Probemos primero que R^{-1} satisface el ítem 3 de la definición 2.5.

Sean $(x,y) \notin R^{-1}$, es decir $(y,x) \notin R$. Por hipótesis $R(y)$ es un cerrado decreciente. Como $x \notin R(y)$, existe $U \in D(X)$ tal que $x \in U$ y $U \cap R(y) = \emptyset$, entonces $y \notin R^{-1}(U)$.

Veamos ahora que R^{-1} satisface el ítem 1 de la definición 2.5.

Sean $(x,y) \in R^{-1}$ y $x_1, y_1 \in X$ tales que $x_1 \leq x$ y $y \leq y_1$. Si suponemos que $(x_1,y_1) \notin R^{-1}$, es decir, $(y_1,x_1) \notin R$, como antes, existe $U \in D(X)$ tal que $x_1 \in U$ y $y_1 \notin R^{-1}(U)$. Por otro lado dado que $x_1 \in U$ y U es creciente, tenemos que $x \in U$, por lo tanto $y \in R^{-1}(U)$. Por hipótesis, $R^{-1}(U) \in D(X)$ es un conjunto creciente, entonces $y \leq y_1 \in R^{-1}(U)$, lo cual es una contradición. Por lo tanto, $(x_1,y_1) \in R^{-1}$. ∎

Dado un **J**-retículo $\boldsymbol{J} = \langle J, \wedge, \vee, j, 0, 1\rangle$ se define el **J**-espacio dual $\langle \mathrm{P}(\boldsymbol{J}), j^*\rangle$ donde $\mathrm{P}(\boldsymbol{J})$ es el espacio de priestley del reducto de retículo de $\boldsymbol{J}$ y j^* es una relación binaria definida como sigue:

$$j^* = \left\{(P,Q) \in X(\boldsymbol{J})^2 : Q \subseteq j^{-1}(P)\right\}.$$

Observando la definición de j^* y del hecho que j es un operador de tipo uno es facil ver que:

$$\begin{array}{lll} (P,Q) \in j^* & \text{si y sólo si} & Q \subseteq j^{-1}(P) \\ & \text{si y sólo si} & j(Q) \subseteq P \\ & \text{si y sólo si} & (Q,P) \in R_j. \end{array}$$

Por lo tanto ambas relaciones son interdefinibles. De esto podemos deducir que la dualidad desarrollada en [47] para los **J**-retículos es interdefinible con la desarrollada en este capítulo para el caso de un operador de tipo $(1,1)$.

Haciendo uso de la observación anterior y de la proposición 2.36 se puede ver como estan relcionadas las dualidades para los retículo distributivos con una clausura aditiva [18] o con un cuantificador [16], siguiendo los resultados de [47] y aplicando las restricciones y modificaciones correspondientes.

En [47], Petrovich introduce el concepto de conjunto R-saturado para caracterizar las congruencias en los J-retículo por medio de la dualidad.

Definición 2.37 *Dado un* $\boldsymbol{J}$*-espacio* $\langle \boldsymbol{X}, R\rangle$ *un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es llamado* ***R-saturado*** *si para cada* $x \in Y$ *el conjuno* $MaxR(x) \subseteq Y$*. Donde* $MaxR(x)$ *es el conjunto de los maximales en* $R(x)$ *para el orden de* $\boldsymbol{X}$*.*

Por la relación entre la dualidad dada por Petrovich en [47] y la desarrollada en esta tesis es fácil ver que que si $\boldsymbol{J}$ es un **J**-retículo distributivo, un subconjunto $Y \subseteq X(\boldsymbol{J})$ es j^*-saturado y cerrado si y sólo es un R_j-cerrado (definción 2.19). Por lo tanto el teorema 3.2 de [47] puede verse como la restición del teorema 2.20 al caso de un operador de tipo $(1,1)$.

Claramente el concepto de conjunto R_f-cerrado esta inspirado en los resultados de [47] y otros similares, que también estan basados en la ideas de [47], para otras estructuras algebraicas como en [12], [13]. Ya en [58], Urquhart da una caracterización de las congruencias por medio de cerrados del espacio dual que son cerradas para la función que representa la negación (ver la subsección 2.4.2). La principal inovación introducida en [58] respecto de los resultados de Urquhart, es la observación clave que el conjunto cerrado asociado a una congruencia debe contener a los maximales de $R(x)$ para cada elemento en él, y no todo el conjunto $R(x)$ como podría pensarse al intentar generalizar los resultados de [58].

A su vez en [47], utiliza esta caracterización de las congruencias para describir el espacio dual de los **J**-retículos subdirectamente irreducibles y simples. Por las observaciones de esta subsección, el teorema 4.1 de [47] puede verse puede verse como la restricción al caso de un operador de tipo $(1,1)$ de los corolarios 2.24 y 2.25.

En [12, Teorema 9], Celani prueba que un subretículo $\boldsymbol{M}$ es una subálgebra de un **J**-retículo distributivo $\boldsymbol{J}$ si y sólo si en la notación dada en esta tesis $R_M^{-1} \circ j^* \subseteq j^* \circ R_M^{-1}$. Este resultado es equivalente a la restricción del teorema 2.33 al caso de un operador de tipo $(1,1)$ (ver ejemplo 2.28).

Reticulos distributivos con negación

En [12], Celani introduce la variedad denominada retículos con negación y desarrola una dualidad de Priestley para la correspondiente categoría algebraica.

Definición 2.38 *Un álgebra* $\boldsymbol{N} = \langle N, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$, *de tipo algebraico* $(2,2,1,0,0)$, *es un* ***retículo con negación*** *($\neg$-retículo) si* $\langle N, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado y* $\neg$ *verifica las siguientes condiciones:*

1. $\neg(0) = 1$.
2. $\neg(a \vee b) = \neg(a) \wedge \neg(b)$.

Siguiendo la notación de esta tesis un $\neg$-retículo es un retículo distributivo acotado con un operador de tipo $(1,-1)$.

Definición 2.39 *Un* ***$\neg$-espacio*** *es un par* $\langle \boldsymbol{X}, R\rangle$ *donde* $\boldsymbol{X} = \langle X, \leq, \tau\rangle$ *es un espacio de Priestley y R es una relación binaria en X que satisface:*

1. *Para cada $x \in X$, $R(x)$ es un conjunto cerrado y decreciente.*
2. *Para cada $U \in D(X)$, $\neg_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U = \emptyset\} \in D(X)$.*

Claramente $\neg_R(U) = X \backslash R^{-1}(U)$. De manera análoga a lo probado para **J**-espacios podemos probar la siguiente proposición.

Proposición 2.40 $\langle \boldsymbol{X}, R\rangle$ *es un $\neg$-espacio si y sólo si* $\langle \boldsymbol{X}, R^{-1}\rangle$ *es un espacio de Priestley con una O-relación de tipo* $(1,-1)$.

Dado un $\neg$-retículo $\boldsymbol{N} = \langle N, \wedge, \vee, j, 0, 1\rangle$, en [12, Teorema 9] Celani define el $\neg$-espacio dual $\langle \mathrm{P}(\boldsymbol{N}), R_{\neg}^{*}\rangle$[2], donde $\mathrm{P}(\boldsymbol{N})$ es el espacio de priestley del reducto de retículo de $\boldsymbol{N}$ y $R_{\neg}^{*}$ es una relación binaria definida como sigue:

$$(P, Q) \in R_{\neg}^{*} \text{ si y sólo si } \neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset.$$

Es fácil ver que:

$$\begin{array}{lll} (P,Q) \in R_{\neg}^{*} & \text{si y sólo si} & \neg^{-1}(P) \cap Q = \emptyset \\ & \text{si y sólo si} & Q \subseteq N \setminus \neg^{-1}(P) \\ & \text{si y sólo si} & \neg(Q) \subseteq N \setminus P \\ & \text{si y sólo si} & (Q,P) \in R_{\neg}. \end{array}$$

Por lo tanto ambas relaciones son interdefinibles. Por esto la dualidad desarrollada en este capítulo abarca como un caso partícular la dualidad para los $\neg$-retículos desarrollada en [12].

A su vez, en [12] Celani siguiendo con las ideas de [47] caracteriza los espacios duales de los $\neg$-retículos simples y subdirectamente irreducibles. Los resultados expuestos en el teorema 7 de [12] pueden verse como la restricción al caso $(1,-1)$ de los corolarios 2.24 y 2.25.

Por otra parte en [12], Celani prueba que un subretículo $\boldsymbol{M}$ de una subálgebra de un $\neg$-retículo dsitributivo $\boldsymbol{N}$ si y sólo si $R_M \circ R_{\neg}^{*} \subseteq R_{\neg}^{*} \circ R_M^{-1}$. Este resultado es equivalente a la restricción del teorema 2.33 al caso de un operador de tipo $(1,-1)$ (ver ejemplo 2.32).

Álgebras de Ockham

Definición 2.41 *Un álgebra* $\mathbf{O} = \langle O, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$, *de tipo algebraico* $(2,2,1,0,0)$, *es un* ***álgebra de Ockham*** *si verifica las siguientes condiciones:*

O1. $\langle O, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado.*

O2. $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

O3. ,$f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b)$, *para cada* $a, b \in O$.

O4. $f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)$, *para cada* $a, b \in O$.

En [58] A. Urquhart desarrolla una dualidad de Priestley para las álgebras de Ockham[3].

Claramente $\mathbf{O} = \langle O, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Ockham si f es un operador de tipo $(1,-1)$ y tipo $(-1,1)$ a un mismo tiempo.

Proposición 2.42 *Sea* $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *un retículo distributivo y* f *un operador en* $\mathbf{L}$ *de tipo* $(1,-1)$. *Entonces se verifican los siguientes enunciados:*

1. $f(1) = 0$ *si y sólo si para cada* $P \in X(\boldsymbol{L})$, $R_f^{-1}(P) \neq \emptyset$.
2. $f(a \wedge b) \leq f(a) \vee f(b)$ *para cada* $a, b \in L$ *si y sólo si siempre que* $(Q,P), (D,P) \in R_f$ *existe un* $Z \in X(L)$ *tal que* $Q, D \leq Z$ *y* $(Z,P) \in R_f$.

[2]Hemos modificado levemente la notación de la relacion dada en [12, Teorema 9] para evitar confusiones, ya que esta coincide con la que dimos en este capítulo para la relación asociada al operador $\neg$.

[3]Llamadas en ese trabajo Ockham lattices.

Demostración. 1. Supongamos que $f(1) = 0$, entonces para cada $P \in X(\boldsymbol{L})$ tenemos que

$$0 \in f(\{1\}) = \{0\} \subseteq P^{-1}.$$

Por el corolario 2.12, tenemos que existe $Q \in X(\boldsymbol{L})$ tal que $f(Q) \subseteq P^{-1}$, es decir $(Q,P) \in R_f$.

Para la recíproca, supongamos que $f(1) \neq 0$, entonces existe $P \in X(\boldsymbol{L})$ tal que $f(1) \in P$. Luego para cada $Q \in X(\boldsymbol{L})$ tenemos que $f(1) \in f(Q) \cap P$. Por lo tanto para todo $Q \in X(\boldsymbol{L})$ $f(Q) \nsubseteq P^{-1}$, es decir, $R_f^{-1}(P) = \emptyset$.

2. Supongamos que f verifica que para cada $a, b \in L$, $f(a \wedge b) \leq f(a) \vee f(b)$, y sean $P, Q, D \in X(\boldsymbol{L})$ tales que $(Q,P), (D,P) \in R_f$. Por la definición de R_f, $f(Q) \subseteq P^{-1}$ y $f(D) \subseteq P^{-1}$. Veamos que

$$f(F(Q \cup D)) \subseteq P^{-1}.$$

Sean $q \in Q$ y $d \in D$, por hipótesis $f(q \wedge d) \leq f(q) \vee f(d)$. Como $f(q), f(d) \in P^{-1}$ deducimos que $f(q \wedge d) \in P^{-1}$. Entonces $f(F(Q \cup D)) \subseteq P^{-1}$. Por el corolario 2.12, existe $Z \in X(\boldsymbol{L})$, tal que $Q, D \subseteq F(Q \cup D) \subseteq Z$ y $(Z,P) \in R_f$.

Supongamos ahora que para todo $P, Q, D \in X(\boldsymbol{L})$ tales que $(Q,P), (D,P) \in R_f$ existe un $Z \in X(\boldsymbol{L})$ tal que $Q, D \leq Z$ y $(Z,P) \in R_f$. Si $a, b \in L$ son tales que $f(a \wedge b) \nleq f(a) \vee f(b)$, entonces existe $P \in X(\boldsymbol{L})$ tal que $f(a \wedge b) \in P$ y $f(a), f(b) \notin P$. De esto último tenemos que $f(a), f(b) \in P^{-1}$. Por el corolario 2.13, existen $Q, D \in X(\boldsymbol{L})$ tales que $a \in Q$, $b \in D$ y $(Q,P), (D,P) \in R_f$. Por hipótesis, tenemos que existe $Z \in X(\boldsymbol{L})$ tal que $Q, D \leq Z$ y $(Z,P) \in R_f$. Por lo tanto $a \wedge b \in Z$, con lo cual $f(a \wedge b) \notin P$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 2.43 *Una estructura* $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau, g \rangle$ *es un* ***espacio de Ockham*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\langle X, \leq, \tau \rangle$ *es un espacio de Priestley,*
2. $g : X \to X$ *es una función decreciente y continua.*

Las demostración de la siguiente proposición se sigue directamente de las definiciones de espacio de Ockham y de O-relación.

Proposición 2.44 *Dado* $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau, g \rangle$ *es un espacio de Ockham la relación* R *definida por*

$$(x,y) \in R \text{ si y sólo si } y \leq g(x)$$

es una O*-relación de tipo* $(1,-1)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\forall x \in X, \exists y\ (x,y) \in R$.
2. $\forall x, y, z \in X,\ ((y,x), (z,x) \in R) \Rightarrow \exists t \in X,\ y, z \leq t\ \&\ (t,x) \in R$.

Proposición 2.45 *Dado* $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau, R \rangle$ *un espacio de Priestley con una* O*-relación de tipo* $(1,-1)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\forall x \in X, \exists y\ (y,x) \in R$.
2. $\forall x, y, z \in X,\ ((y,x), (z,x) \in R) \Rightarrow \exists t \in X,\ y, z \leq t\ \&\ (t,x) \in R$.

Entonces las siguientes proposiciones son válidas

a. Para cada $x \in X$ el conjunto $R^{-1}(x)$ alcanza un máximo.

b. Si definimos $g_R : X \to X$ tal que $g_R(x) = y$, donde y es el máximo de $R^{-1}(x)$, entonces g_R es una función continua y decreciente.

Demostración. *a.* Por 1, tenemos que $R^{-1}(x)$ es no vacio. En la observación 2.6 vimos que $R^{-1}(x)$ es un cerrado decreciente. Por lo tanto existe y maximal en $R^{-1}(x)$. Del ítem 2 podemos deducr que y es máximo en $R^{-1}(x)$.

b. El hecho de que g_R sea una función decreciente se deduce directamente de que R es una O-relación de tipo $(1,-1)$.

Para ver que es continua, bastara probar que dado $U \in D(\mathbf{X})$ $g_R^{-1}(U)$ y $g_R^{-1}(X \setminus U)$ son abiertos de $\boldsymbol{X}$.

Como U es un conjunto creciente, tenemos que $g_R(x) \in U$ si y sólo si $R^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto

$$\begin{aligned} g_R^{-1}(U) &= \{x \in X : g_R(x) \in U\} \\ &= \left\{x \in X : R^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset\right\} \\ &= \{x \in X : x \in R(U)\} = R(U). \end{aligned}$$

Dado que R es una O-relación de tipo $(1,-1)$, $X \setminus R(U) \in D(X)$, por lo tanto $g_R^{-1}(U) = R(U)$ es un conjunto abierto.

De manera similar tenemos que

$$\begin{aligned} g_R^{-1}(X \setminus U) &= \{x \in X : g_R(x) \notin U\} \\ &= \{x \in X : (g_R(x)] \cap U = \emptyset\} \\ &= \left\{x \in X : R^{-1}(x) \cap U = \emptyset\right\} \\ &= \{x \in X : x \notin R(U)\} = X \setminus R(U) \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ∎

Dada un álgebra de Ockham $\mathbf{O} = \langle O, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ el espacio $\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) = \langle \mathrm{P}(\boldsymbol{O}), g_{\mathbf{O}}\rangle$ donde $\mathrm{P}(\boldsymbol{O})$ es el espacio de Priestley del retículo subyacente y $g_{\mathbf{O}}$ esta definida por

$$g_{\mathbf{O}}(P) = \{a \in O : f(a) \notin P\},$$

para cada $P \in X(\mathbf{O})$, es el espacio de Ockham dual de $\mathbf{O}$.

Por la definición de $g_{\mathbf{O}}$, tenemos que $Q \subseteq g_{\mathbf{O}}(P)$ sii $f(Q) \subseteq P^{-1}$ sii $(P,Q) \in R_f$. A su vez si consideramos $\langle \mathrm{P}(\boldsymbol{O}), R_f\rangle$ y definimos g_R como en la proposición 2.45 tenemos que $g_R(P) = g_{\mathbf{O}}(P)$.

Veamos ahora como Urquhart en [58] describe las congruencias de un álgebra de Ockham en función de conjuntos cerrados del espacio dual.

Definición 2.46 *Un subconjunto Y de un aspacio de Ockham $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau, g\rangle$ es llamado g-**hereditario** si $x \in Y$, $g(x) \in Y$. Diremos que Y es un conjunto g-**cerrado** si es cerrado en la topología τ y es un conjunto g-hereditario.*

Como $g_{\mathbf{O}}(P) = MaxR_f^{-1}(P)$, la definición de conjunto $g_{\mathbf{O}}$-cerrado coincide con la definición de R_f-cerrado para el caso de un operador f de tipo $(1,-1)$. Urquhart prueba que el retículo de las conguencias de un álgebra de Ockham es dualmente isomorfo al retículo de los ocnjuntos g-cerrados de su espacio dual. Por las observaciones en esta sección, tenemos que el teorema 5 de [58] puede verse como la aplicación del teorema 2.20 al caso de las álgebras de Ockham.

De igual manera el teorema 6 de [58] puede verse como una combinación de los corolarios 2.24 y 2.25 aplicada al caso delas álgebras de Ockham.

2.5. Aplicación: Congruencias en algebras de Ockham

En la sección anterior vimos como la dualidad desarrollada en el comienzo de esta capítulo estaba relacionada con la dualidad de Urquhart para álgebras de Ockham. También vimos como las descripciones de las congruencias de un álgebra utilizando las diferentes dualidades eran equivalentes. En esta sección utilizando la dualidad dada por Urquhart, describiremos el retículo de congruencias de un álgebra de Ockham cuyo cociente pertenece a la clase de Urquhart $\mathbf{P}_{m,n}$. Los resultados de esta sección fueron publicados en las Actas del Congreso Dr. Antonio Monteiro [11], y son una generalización natural de los obtenidos por Rodriguez y Silva en [53].

En [53] Rodriguez y Silva describen el retículos de congruencias de un álgebra de Ockham cuyo cociente es un álgebra de Boole. Dada un álgebra de Ockham ellos caracterizan estas congruencias de dos maneras, por un lado utilizando ciertos ideales que denominan probooleanos y por otro utilizando el conjunto de puntos fijos del espacio dual del álgebra. Aquí daremos una simple generalización de estos resultados describiendo el retículo de las congruencias de un álgebra de Ockham dada, cuyo cociente pertenece a alguna de las subvarierades de álgebras de Ockham definidas por Urquhart (ver [58]). Veremos que estas congruencias no admiten un descripción por medio de ideales pero si en el espacio dual..

Primero recordemos algunas definiciones que necesitaremos más adelante. En la próxima subsección definiremos el conjunto $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ para cada álgebra de Ockham y presentaremos los resultados principales de esta sección.

Por el resto de esta sección $\boldsymbol{O} = \langle O, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ denotara un álgebra de Ockham arbitraria. Y $Con(\boldsymbol{O})$ el retículo de congruencias de $\boldsymbol{O}$. Denotaremos con ω y con ι al menor y mayor elementos de $Con(\boldsymbol{O})$ respectivamente.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, Urquhart introduce las clases $\mathbf{P}_{m,n}$ de álgebrasde Ockham formadas por aquellas álgebras cuyos espacios duales satisfacen la condición $g^m = g^n$.

Observación 2.47 *Es facil ver que si $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ son tales que $m > n$ y $p > q$, entonces $\mathbf{P}_{p,q} \subseteq \mathbf{P}_{m,n}$ si y sólo si $p - q \mid m - n$, $q \leq n$ y $p \leq q$.*

Para lo que resta de la sección necesitaremos ciertos resultados. Para una prueba detallada de estos remitimos al lector a [58] (o [6, Capítulo 1])

Teorema 2.48 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m,n}$ si y sólo si satisface las siguientes proposiciones:*

1. Si $m - n$ es par, para cada $a \in O$

a) $f^m(a) = f^n(a)$.

2. Si $m - n$ es impar. para cada $a \in O$

a) $f^m(a) \vee f^n(a) = 1$.
b) $f^m(a) \wedge f^n(a) = 0$.

El teorema anterior prueba que las clases $\mathbf{P}_{m,n}$ son clases ecuacionales y por lo tanto subvariedades de la variedad de álgebras de Ockham. Claramente $\mathbf{P}_{1,0}$ es la variedad de álgebras de Boole.

Teorema 2.49 *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, $\mathbf{P}_{m,n}$ tiene sólo finitas álgebras subdirectamente irreducibles, cada una de las cuales es finita.*

Teorema 2.50 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, y sea $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m,n}$. Si $\boldsymbol{O}$ es un álgebra simple, entonces $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m-n,0}$.*

Para cada $p, q \in \mathbb{N}$, Berman (ver [2] o [6, Capítulo 1]) introduce las classes de Berman $\mathbf{K}_{p,q}$. Un álgebra de Ockham pertenece a la clase de Berman $\mathbf{K}_{p,q}$ si y sólo si satisface la ecuación

$$f^{2\cdot p+q}(a) = f^q(a).$$

Se sigue del teorema 2.48 que $\mathbf{K}_{p,q} = \mathbf{P}_{2p+q,q}$. Más aun $\mathbf{P}_{m,n}$ es una clase de Berman si y sólo si $m - n$ es par.

El siguiente teorema generaliza el corolario del teorema 2.7 de [6, Capítulo 2] y será útil más adelante.

Teorema 2.51 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Si $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m,n}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es una funciónn inyectiva.*
2. *$\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m-n,0}$.*

Demostración. Si $m - n$ es par, el resultado se sigue directamente del anteriormente mencionado corolario, ya que en este caso $\boldsymbol{O}$ pertenece a la clase de Berman $\mathbf{K}_{(m-n)/2,n}$.

Supongamos ahora $m - n$ es impar.

Si f es inyectiva, entonces por teorema 2.48, tenemos que para cada $a \in O$

$$f^m(a) \vee f^n(a) = 1,$$
$$f^m(a) \wedge f^n(a) = 0.$$

Supongamos que n es par. Entonces

$$f^n\left(f^{m-n}(a) \vee a\right) = f^m(a) \vee f^n(a) = 1.$$

Como f es inyectiva, tenemos que

$$f^{m-n}(a) \vee a = 1$$

para cada $a \in O$. De igual manera tenemos que $f^{m-n}(a) \wedge a = 0$ para cada $a \in O$. Entonces $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m-n,0}$. Si n es impar la prueba es similar.

Recíprocamente, sea $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m-n,0}$. Por teorema 2.48, tenemos que cada $a \in O$ es un elemento complementado y su complemento es $f^{m-n}(a)$. Si $a, b \in O$ son tales que $f(a) = f(b)$, entonces $f^{m-n}(a) = f^{m-n}(b)$. Como $\boldsymbol{O}$ es un retículo distributivo y a y b tenen el mismo complemento, entonces $a = b$. Por lo tanto f es inyectiva. ■

■

2.5.1. El retículo $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$ consideraremos el siguiente subconjunto de $Con(\boldsymbol{O})$

$$Con_{m,n}(\boldsymbol{O}) = \{\theta \in Con(\boldsymbol{O}) : \boldsymbol{O}/\theta \in \mathbf{P}_{m,n}\}$$

En [53] Rodriguez y Silva estudiaron el retículo de las congruencias de un álgebra de Ockham cuyas álgebras cocientes sean álgebras de Boole, claramente en nuestra notación este es el retículo $Con_{1,0}(\boldsymbol{O})$.

Por completitud probaremos el siguiente lema, el cual es una simple observación del álgebra universal.

Lema 2.52 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de tipo $\mathcal{F}$ y $\boldsymbol{A}$ un álgebra del mismo tipo $\mathcal{F}$. Consideremos*

$$Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A}) = \{\theta \in Con(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}/\theta \in \mathcal{V}\}.$$

Entonces $Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$ es un filtro completo de $Con(\mathbf{A})$, es decir, es un filtro cerrado bajo intersecciones arbitrarias.

Demostración. Ya que $\mathcal{V}$ es una variedad, toda álgebra trivial de tipo $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{V}$. Entonces $\mathbf{A}/\iota \in \mathcal{V}$, es decir., $\iota \in Con_{\mathcal{V}}(\mathbf{A})$.

Si $\theta \in Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$ y $\theta \subseteq \phi \in Con(\boldsymbol{A})$, entonces por el Teorema de Correspondencia (ver [8] teorema 6.20) existe $\sigma \in Con(\boldsymbol{A}/\theta)$ tal que $\boldsymbol{A}/\phi$ es isomorfa a $(\boldsymbol{A}/\theta)/\sigma$. Como $\mathcal{V}$ es una variedad podemos concluir que $\boldsymbol{A}/\phi \in \mathcal{V}$, es decir, $\phi \in Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$.

Dados $\{\theta_i\}_{i \in I}$ un conjunto arbitrario de elementos de $Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$, consideremos $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$. Sea $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ una ecuación válida en $\mathcal{V}$. Entonces para cada $i \in I$ y cada $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos que

$$(p(a_1, \ldots, a_n), q(a_1, \ldots, a_n)) \in \theta_i.$$

Luego $(p(a_1, \ldots, a_n), q(a_1, \ldots, a_n)) \in \theta$. De lo cual se sigue que $\boldsymbol{A}/\theta$ satisface $p \approx q$ para cada ecuación $p \approx q$ válida en $\mathcal{V}$. Luego, como $\mathcal{V}$ es una variedad $\boldsymbol{A}/\theta \in \mathcal{V}$, es decir, $\theta \in Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$.

■

Corolario 2.53 *Las siguientes proposiciones son válidas:*

1. *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ es un filtro completo de $Con(\boldsymbol{O})$.*

2. *Para cada* $m,n,p,q \in \mathbb{N}$ *tales que* $m > n$ *y* $p > q$, $Con_{m,n}(\boldsymbol{O}) \subseteq Con_{p,q}(\boldsymbol{O})$ *si y sólo si* $p-q \mid m-n$, $q \leq n$ *y* $p \leq q$.

3. *Si* $\theta \in Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *es un co-atomo de* $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$, *entonces* $\boldsymbol{O}/\theta$ *es finita y* $\theta \in Con_{m-n,0}(\boldsymbol{O})$.

Demostración. 1. Se sigue directamente del teorema 2.48 y el lema 2.52.

2. Directa de la observación 2.47.

3. Si θ es un co-atomo de $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$, entonces $\boldsymbol{O}/\theta$ es simple y pertenece a $\mathbf{P}_{m,n}$. Por el Teorema 2.49, $\boldsymbol{O}/\theta$ es finita y por el Teorema 2.50 tenemos que $\boldsymbol{O}/\theta \in \mathbf{P}_{m-n,0}$. ■

Observación 2.54 *Por el ítem 1 del corolario anterior tenemos que el retículo* $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *es un retículo acotado. Llamaremos* $\theta_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *a su primer elemento. Es una simple consecuencia del Teorema de Correspondencia que el retículo* $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *es isomorfo al retículo* $Con(\boldsymbol{O}/\theta_{m,n})$.

Consideremos la función

$$\mathcal{I} : Con(\boldsymbol{O}) \longrightarrow Id(\boldsymbol{O})$$

definida por

$$\mathcal{I}(\theta) = [0]_\theta$$

para cada $\theta \in Con(\boldsymbol{O})$. Donde $Id(\boldsymbol{O})$ es el conjunto de los ideales del reducto de retículo de $\boldsymbol{O}$ y si $a \in O$, $[a]_\theta$ la clase de a en la congruencia . En [53] Rodriguez y Silva pruevan que $\mathcal{I}$ restringida a $Con_{1,0}(\boldsymbol{O})$ es un isomorfismo cuya imagen son los ideales probooleanos de $\boldsymbol{O}$. En el siguiente ejemplo veremos que hay álgebras de Ockham donde esta propiedad no se satisface si restringimos $\mathcal{I}$ al conjunto $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ cuando $(m,n) \neq (1,0)$.

Ejemplo 2.55 *Consideremos la siguiente álgebra de Ockham* $\boldsymbol{O}$,

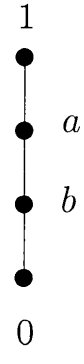


Fig 1.

Donde $f(a) = b$ *y* $f(b) = a$. *Por el teorema* 2.48, $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{2,0}$. *Como* $\mathbf{P}_{2,0}$ *es una variedad,* $Con_{2,0}(\boldsymbol{O}) = Con(\boldsymbol{O})$. *Consideremos*

$$\theta = \{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1),(a,b),(b,a)\}$$

y sea ω *el menor elemento de* $Con(\boldsymbol{O})$. *Claramente* $[0]_\theta = \{0\} = [0]_\omega$. *Luego* $\mathcal{I}$ *no es inyectiva.*

Más aún, observemos que también $[1]_\theta = \{1\} = [1]_\omega$. *Luego una congruencia en* $Con_{2,0}(\boldsymbol{O})$ *no esta determinada ni por* $[0]_\theta$ *ni por* $[1]_\theta$.

Dado un espacio de Ockham $\mathbf{X} = \langle X, \leq, \tau, g\rangle$ y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, consideremos los siguientes conjuntos

$$Fix_{m,n}(\mathbf{X}) = \{x \in X : g^m(x) = g^n(x)\} \text{ y}$$
$$G(\mathbf{X}) = \{Y \subseteq X : g(Y) \subseteq Y \text{ y } Cl(Y) = Y\}.$$

$G(\mathbf{X})$ denota entonces el conjunto de los g-cerrados de $\mathbf{X}$. En la sección 2.3 recordamos que para todo retículo distributivo la función

$$\theta : \mathcal{C} \to Con(\boldsymbol{L})$$

es un isomorfismo de retículos. Y en la sección anterior vimos que Urquhart probó que la función $\theta \restriction G(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es un ismorfismo entre los conjuntos g-cerrados de $\mathbf{X}(\boldsymbol{O})$ y las congruencias de $\boldsymbol{O}$ para toda álgebra de Ockham $\boldsymbol{O}$.

Es fácil ver que para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $Fix_{m,n}(\mathbf{X}) \in G(\mathbf{X})$. Consideremos $\Omega_{m,n}(\mathbf{X})$ el conjunto de los subconjuntos g-cerrados de $Fix_{m,n}(\mathbf{X})$, es decir,

$$\Omega_{m,n}(\mathbf{X}) = (Fix_{m,n}(\mathbf{X})] \cap G(\mathbf{X}).$$

Teorema 2.56 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces el retículo $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ es dualmente isomorfo a $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.*

Demostración. Lo único que debemos probar es que la imagen de la funcion inversa θ^{-1} restringida a $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ es $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.

Sea $\phi \in Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$. Si $P \in \theta^{-1}(\phi)$, entonces existe $Q \in X(\boldsymbol{O}/\phi)$ tal que $\rho_\phi^{-1}(Q) = P$. Ya que $\boldsymbol{O}/\phi \in \mathbf{P}_{m,n}$,

$$\begin{aligned}(g_{\boldsymbol{O}})^m(P) &= (g_{\boldsymbol{O}})^m\left(\rho_\phi^{-1}(Q)\right)\\ &= \rho_\theta^{-1}\left((g_{\boldsymbol{O}}/\phi)^m(Q)\right)\\ &= \rho_\theta^{-1}\left((g_{\boldsymbol{O}}/\phi)^n(Q)\right) = (g_{\boldsymbol{O}})^n(P).\end{aligned}$$

Luego $\theta^{-1}(\phi) \in \Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.

Si $Y \in \Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$, entonces $\boldsymbol{O}/(\theta(Y)) \cong O\langle Y, \subseteq, \tau_Y, g_y\rangle$ donde τ_Y es la restricción de $\tau_{\boldsymbol{O}}$ al subconjunto Y. Y $g_Y = g \restriction_Y$. Como $Y \in \Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$, $O\langle Y, \subseteq, \tau_Y, g_y\rangle \in P_{m,n}$, y el resultado se sigue.. ∎

Como $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es el último elemento de $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$, del teorema previo tenemos que

$$\theta^{-1}(\sigma_{m,n}) = Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})).$$

Teorema 2.57 *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Ockham y sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces el conjunto de atomos de $\Omega_{m,n}(\mathbf{X})$ es el conjunto*

$$At(\Omega_{m,n}(\mathbf{X})) = \{g^\omega(x) : x \in Fix_{m-n,0}(\mathbf{X})\}.$$

Demostración. Se sigue directamente del corolario 2.53 y el teorema 2.56. ∎

Notemos que si $x \in \Omega_{m,n}(\mathbf{X}) \setminus \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X})$, entonces

$$g^\omega(x) = C \neq \bigcup_{\substack{F \in At(\Omega_{m,n}(\mathbf{X}))\\ F \subseteq C}} F.$$

Con lo cual podemos conluir.

Corolario 2.58 *Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Para cada $\theta \in Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$,*

$$\theta = \bigcup \{\phi : \phi \in At(Con_{m,n}(\boldsymbol{O})) \ y \ \phi \subseteq \theta\}.$$

2. $Con_{m,n}(\boldsymbol{O}) = Con_{m-n,0}(\boldsymbol{O})$.
3. $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.
4. $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.

Demostración. Por la observación previa y el teorema 2.57, 1 y 2 son equivalentes.

Claramente por el teorema 2.56 y las definiciones de $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ y $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$, ítems 2, 3 y 4 son equivalentes. ∎

Teorema 2.59 *Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *es un retículo Booleano.*
2. $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ *es finito y* $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.
3. $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ *es finito y* $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.
4. $Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$ *es finito y* $Con_{m,n}(\boldsymbol{O}) = Con_{m-n,0}(\boldsymbol{O})$.

Demostración. En esta prueba omitiremos el subindice $\boldsymbol{O}$, y simplemente notaremos g en lugar de $g_{\boldsymbol{O}}$.

Claramente 2, 3 y 4 son equivalentes.

Supongamos que $\boldsymbol{O}$ satsisface 1. Primero probaremos que $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$.

Si $n = 0$ el resultado es directo.

Supongamos que $n \neq 0$ y que existe $x \in Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) \setminus Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Entonces tenemos que $x \notin g^{\omega}(g^{n}(x))$. Por el teorema 2.56, $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es un retículo Booleano. Luego

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus (g^{\omega}(g^{n}(x))) \in \Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})),$$

pero $\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus (g^{\omega}(g^{n}(x)))$ no es un conjunto g-cerrado, ya que $x \in \mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus (g^{\omega}(g^{n}(x)))$ y $g^{\omega}(x) \nsubseteq \mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus (g^{\omega}(g^{n}(x)))$, lo cual es una contradicción. Entonces $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) \subseteq Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Por los teoremas 2.53 y 2.56, tenemos que $Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) \subseteq Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Por lo tanto

$$Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = F_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})).$$

Ahora veamos que $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es finito. Como $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es un retículo Booleano, para cada $x \in Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$, $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))\setminus(g^{\omega}(x))$ es un subconjunto cerrado de $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Entonces $g^{\omega}(x)$ es un abierto relativo en $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Claramente

$$Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = \bigcup_{x \in Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))} g^{\omega}(x),$$

y como $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es cerrado en un compacto Hausdorff, es compacto. Por lo tanto existen $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ tales que

$$Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = \bigcup_{i=1}^{n} g^{\omega}(x_i).$$

Como $g^{\omega}(x_i)$ es finito para cada x_i, $Fix_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es finito.

Para la recíproca, supongamos que $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es finito y $\Omega_{m,n}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) = \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Claramente $Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es finito. Solo tenemos que probar que $\Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es un retículo Booleano.

Sea $C \in \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. Si suponemos que existe $x \in (\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus C) \cap Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ tal que $g^{\omega}(x) \cap C \neq \emptyset$, entonces existe $k \leq m-n$ tal que $g^k(x) \in C$. Luego

$$x = g^{m-n}(x) = g^{(m-n)-k}\left(g^k(x)\right) \in C,$$

porque C es un conjunto g-cerrado, lo cual es una contradicción. Entonces $(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus C) \cap Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es un conjunto g-cerrado.

Ya que $(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus C) \cap Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$ es finito, es cerrado. Luego $(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}) \setminus C) \cap Fix_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O})) \in \Omega_{m-n,0}(\mathbf{X}(\boldsymbol{O}))$. ■

El siguiente corolario da una generalización del teorema 4.2 de [6, Capítulo 4].

Corolario 2.60 *Sean $m,n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Sea $\boldsymbol{O} \in P_{m,n}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$Con(\boldsymbol{O})$ es un retículo Booleano.*
2. *$Con(\boldsymbol{O})$ es finito y $\boldsymbol{O} \in P_{m-n,0}$.*
3. *$Con(\boldsymbol{O})$ es finito y f es inyectiva.*

Demostración. Como $\boldsymbol{O} \in P_{m,n}$, $Con(\boldsymbol{O}) = Con_{m.n}(\boldsymbol{O})$. El resultado se sigue del teorema previo y del teorema 2.51. ■

Corolario 2.61 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $\boldsymbol{O} \in \mathbf{P}_{m,0}$. Si $\boldsymbol{O}$ es un álgebra finita entonces $Con(\boldsymbol{O})$ es un retículo booleano.*

Ejemplo 2.62 *Recordemos que el álgebra de Ockham finita $\boldsymbol{O}$ dada en el ejemplo 2.55 pertenecia a la clase $\mathbf{P}_{2,0}$. La figura 2 representa el retículo Booleano $Con(\boldsymbol{O})$:*

Donde

$$\theta_1 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1),(a,b),(b,a)\},$$
$$\theta_1 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1),(1,a),(a,1),(0,b),(b,0)\}.$$

Y $Con_{1,0}(\boldsymbol{O}) = \{\theta_1, \iota\}$. $Con_{1,1}(\boldsymbol{O}) = \{\iota\}$.

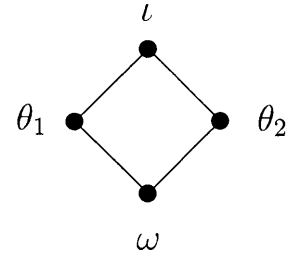


Fig. 2

Capítulo 3

DLI, DLF y DLFI-álgebras

En [13], Celani introduce las variedades de **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras. El objetivo principal de la definición de estas estructuras algebraicas es contar con una clase de álgebras que tenga entre sus subclases una ámplia variedad de álgebras asociadas a diferentes lógicas. Estas variedades de álgebras tienen entre sus subvariedades a los Retículos Residuados Conmutativos Distributivos Integrales acotados[1], las **MTL**-álgebras, **BL**-álgebras, **MV**-álgebras, Álgebras de Heyting y **WH**-álgebras, por mencionar algunas.

En [13], Celani desarrolla una dualidad de Priestley para las variedades de **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras y así como lo hicimos en el capítulo anterior para el caso de los retículos distributivos con operadores, utiliza esta dualidad para describir dualmente el retículo de congruencias, las álgebras simples y subdirectamente irreducibles y el retículo de las subálgebras.

En la primer sección este capítulo recordaremos las definiciones de **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras dadas en [13], y veremos como la dualidad desarrollada en ese trabajo se relaciona con la descripta en el capítulo anterior.

En la segunda sección analizaremos la correspondencia entre la validez de ciertas ecuaciones en las álgebras y condiciones en los respectivos espacios duales. Utilizando estos resultados, en la sección 3 restringiremos la dualidad a ciertas subvariedades de **DLI** y **DLFI**-álgebras relacionadas con las Lógicas Monoidales basadas en t-normas y Multi-valuadas, entre otras.

Finalmente, como en el capítulo anterior, realizaremos una comparación con otras dualidades de Priestley para álgebras que tengan operadores de tipo Implicación y/o Fusión.

La mayor parte de los resultados de este capítulo, sobre todo los presentados en las secciones 2, 3 y 4, han sido publicados en el Central European Journal of Mathematics [10].

3.1. Definiciones y ejemplos

Recordemos las definiciones de **DLI**, **DLF**, y **DLFI**-álgebras dadas en [13].

Definición 3.1 ([13, Definición 2.1]) *Un álgebra* $\boldsymbol{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2,2,2,0,0)$ *es llamada un* ***Retículo Distributivo con Implicación****, o* **DLI***-álgebra, si y sólo si su reducto* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado y la implicación* $\rightarrow$ *satisface las siguientes condiciones para cada* $a, b, c \in A$*:*

[1] El caso no acotado y no conmutativo es abordable con leves modificaciones, pero escapa a los objetivos de esta tesis.

1. $a \to 1 = 0 \to a = 1$.

2. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

3. $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.

En la notación de esta tesis un operador $\to$ es una implicación si es de tipo $(1, -1, -1)$.

Definición 3.2 ([13, Definición 2.1]) *Un álgebra* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \circ, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2,2,2,0,0)$ *es llamada un* ***Reticulo Distributivo con Fusión,*** *o* **DLF**-*álgebra, si y sólo si* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo acotado y la fusión* $\circ$ *satisface las siguientes condiciones para cada* $a, b, c \in A$*:*

1. $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$.

2. $a \circ (b \vee c) = (a \circ b) \vee (a \circ c)$.

3. $(a \vee b) \circ c = (a \circ c) \vee (b \circ c)$.

Siguiendo nuestra notación un operador $\circ$ es una fusión si es un operador de tipo $(1,1,1)$, es decir, un supremo hemimorfismo en dos variables. Observemos que una fusión no tiene porque ser conmutativa ni siquiera asociativa (ver ejemplo 3.7).

Definición 3.3 ([13, Definición 2.1]) *Un álgebra* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \circ, \to, 0, 1\rangle$ *es llamada un* ***Retículo Distributivo con Fusión e Implicación,*** *o* **DLFI**-*álgebra, si y sólo si el reducto* $\langle A, \vee, \wedge, \circ, 0, 1\rangle$ *es una* **DLF**-*álgebra y* $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ *es una* **DLI**-*álgebra.*

Notaremos con DLF, DLI, DLFI las variedades de **DLF**, **DLI** y **DLFI**-álgebras respectivamente.

Ejemplo 3.4 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *un retículo distributivo. Consideremos las siguientes operaciones* $\to_i$*:* $A \times A \to A$*, para* $1 \leq i \leq 4$ *:*

$$a \to_1 b = 1.$$

$$a \to_2 b = \begin{cases} 1 & si \quad b = 1 \ o \ a = 0, \\ 0 & si \quad b \neq 1 \ y \ a \neq 0. \end{cases}$$

$$a \to_3 b = \begin{cases} 1 & si \quad a \leq b, \\ 0 & si \quad a \not\leq b. \end{cases}$$

$$a \to_4 b = \begin{cases} 1 & si \quad a = 0, \\ b & si \quad a \neq 0. \end{cases}$$

Es facil ver que $\langle A, \vee, \wedge, \to_i, 0, 1\rangle$ *es una* **DLI**-*álgebra para cada* $1 \leq i \leq 4$.

Ejemplo 3.5 *Sea* $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *un retículo distributivo. Consideremos las siguientes operaciones* $\circ_i : A \times A \to A$, *para* $1 \leq i \leq 4$:

$$a \circ_1 b = 0.$$

$$a \circ_2 b = \begin{cases} 1 & si \quad a \neq 0 \ y \ b \neq 0, \\ 0 & si \quad a = 0 \ o \ b = 0. \end{cases}$$

$$a \circ_3 b = \begin{cases} a & si \quad b \neq 0, \\ 0 & si \quad b = 0. \end{cases}$$

$$a \circ_4 b = \begin{cases} b & si \quad a \neq 0, \\ 0 & si \quad a = 0. \end{cases}$$

Es facil ver que $\langle A, \vee, \wedge, \circ_i, 0, 1\rangle$ *es una* **DLF**-*álgebra para cada* $1 \leq i \leq 4$.

Todas las fusiones del ejemplo anterior son asociativas. Veremos con un ejemplo que aún en el caso de una cadena la fusión no tiene porque ser asociativa. Primero veamos un ejemplo un poco más general.

Ejemplo 3.6 *Sea* $L = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *una cadena acotada. Una operación* $\circ : L \times L \to L$ *es una fusión si y sólo si para cada* $a, b, c \in L$ *se verifican:*

1. $1 \circ 0 = 0 \circ 1 = 0$, *y*
2. *Si* $a \leq b$, *entonces* $a \circ c \leq b \circ c$ *y* $c \circ a \leq c \circ b$.

Ejemplo 3.7 *Consideremos la cadena de 4 elementos* $L = \{0, a, b, 1\}$ *tal que* $0 \leq a \leq b \leq 1$, *con la operación* $\circ$ *dada por la siguiente tabla*

$\circ$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	a	a
1	0	0	b	b

Por el ejemplo anterior tenemos que $\langle A, \vee, \wedge, \circ, 0, 1\rangle$ *es una* **DLF**-*álgebra y*

$$(b \circ 1) \circ 1 = 0 \neq a = b \circ (1 \circ 1),$$

por lo tanto $\circ$ *no es asociativa.*

Ejemplo 3.8 ([13, Lema 2.7]) *Dada una estructura* $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$, *donde* $\langle X, \leq\rangle$ *es un conjunto ordenado, y* R, $T \subseteq X^3$ *tales que si* $S \in \{R, T\}$,

$$\textit{siempre que } (x, y, z) \in S,\ x' \leq x,\ y' \leq y,\ y\ z \leq z',\ \textit{entonces } (x', y', z') \in S.$$

Es fácil ver que la estructura

$$\mathbf{A}_{\mathcal{F}} = \langle \mathcal{P}_c(X), \cup, \cap, \to_T, \circ_R, \emptyset, X\rangle$$

es una **DLFI**-*álgebra, donde las operaciones* $\rightarrow_T$ *y* $\circ_R$ *estan definidas por:*

$$U \rightarrow_T V = \{x \in X : \forall\, y \forall z,\ ((x,y,z) \in T \ e\ y \in U) \Rightarrow z \in V\} = X \setminus T^{-1}(U, X \setminus V),$$

$$U \circ_R V = \{z \in X : \exists\, (x,y) \in U \times V,\ \ (x,y,z) \in R\} = R(U,V).$$

El álgebra $\mathbf{A}_{\mathcal{F}}$ *es llamada la* **DLFI**-*álgebra asociada a* $\mathcal{F}$. *De igual manera podemos definir las* **DLI** *y* **DLF**-*álgebras asociadas a una estructura* $\langle X, \leq, R\rangle$ *donde* R *satisface la condición antes mencionada.*

Notemos que el último ejemplo guarda íntima relación con la definición de las operaciones en el dual de un espacio de Priestley con O-relaciones. En la próxima subsección profundizaremos en el análisis de esta relación.

Ejemplo 3.9 *Consideremos para cada número natural* n, *la estructura*

$$\mathcal{F}_n = \langle \{1, \ldots, n\}, \leq, R_n, T_n \rangle,$$

donde

$$(i,j,k) \in R_n = T_n \ \textit{si y sólo si}\ i + j \leq k + 1.$$

Claramente $\mathcal{F}_n$ *satisface las condiciones del ejemplo anterior. Tenemos que*

$$\mathcal{P}_c(\{1, \ldots, n\}) = \{[i) : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\emptyset\}.$$

Simples cálculos nos permiten probar que

$$U \rightarrow_{T_N} V = \begin{cases} \{1, \ldots, n\} & si \quad U = \emptyset, \\ [n+1-i) & si \quad U = [i),\ V = \emptyset, \\ [j+1-i) & si \quad U = [i),\ V = [j)\ y\ i < j, \\ \{1, \ldots, n\} & \quad\ U = [i),\ V = [j)\ y\ i \geq j, \end{cases}$$

y que

$$U \circ_{R_N} V = \begin{cases} \emptyset & si \quad U = \emptyset\ o\ V = \emptyset, \\ [i+j-1) & si \quad U = [i),\ V = [j)\ y\ i + j \leq n+1 \\ \emptyset & \quad\ U = [i),\ V = [j)\ y\ i + j > n+1 \end{cases}$$

Es sencillo comprobar la función $h : \mathcal{P}_c(\{1, \ldots, n\}) \rightarrow \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, n\right\}$ *definida por*

$$h([i)) = \frac{n+1-i}{n}\ y$$
$$h(\emptyset) = 0,$$

que es un isomorfismo ente $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_n}$ *y la* **MV**-*álgebra*

$$\mathcal{L}_n = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, n\right\}, \circ, \rightarrow, 0, 1 \right\rangle$$

donde

$$\begin{aligned} \tfrac{i}{n} \circ \tfrac{j}{n} &= \text{máx}\left\{0, \tfrac{i+j}{n} - 1\right\}\ y \\ \tfrac{i}{n} \rightarrow \tfrac{j}{n} &= \text{mín}\left\{1, 1 + \tfrac{j-i}{n}\right\}. \end{aligned}$$

Mencionaremos ahora algunas de las conocidas subvariedades de **DLFI**-álgebras, asociadas a diferentes lógicas.

Definición 3.10 *Un álgebra* $\boldsymbol{R} = \langle R, \vee, \wedge, \circ, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *se llama un* ***retículo residuado conmutativo integral acotado,*** *o* **RCI**-*retículo, si* $\langle R, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ *es un retículo acotado,* $\langle R, \circ, 1\rangle$ *es un monoide conmutativo y satisface para todos* $a, b, c \in R$ *la siguiente condición:*

$$a \circ b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \rightarrow c. \tag{Res}$$

Denotemos **RCID**-retículo a todo **RCI**-retículo distributivo. Es facil ver que todo **RCID**-retículo es una **DLFI**-álgebra. Las clases de **RCI**-retículos y **RCID**-retículos son variedades, es decir, clases ecuacionales. Denotaremos RCID a la variedad de **RCID**-retículos. Por referencias generales y resultados sobre retículos residuados en general y su relación con las lógicas subestructurales recomendamos al lector [28], [37], [45] y [46].

Sea V una subvariedad de DLF,DLI o DLFI y sea Σ un conjunto finito de ecuaciones en el lenguaje algebraico correspondiente. Denotaremos V+Γ a la subvariedad de V cuyos elementos satisfacen las ecuaciones en Σ.

La siguiente es una pequeña lista de importantes subvariedades de RCID

$$\begin{aligned}
\mathsf{MTL} &= \mathsf{RCID} + \{(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \approx 1\}.\\
\mathsf{BL} &= \mathsf{MTL} + \{a \circ (a \rightarrow b) \approx a \wedge b\}.\\
\mathsf{IMTL} &= \mathsf{MTL} + \{a \approx (a \rightarrow 0) \rightarrow 0\}.\\
\mathbf{Ł} &= \mathsf{IMTL} + \{(a \rightarrow b) \rightarrow b \approx (b \rightarrow a) \rightarrow a\}\\
&= \mathsf{BL} + \{a \approx (a \rightarrow 0) \rightarrow 0\}.
\end{aligned}$$

La variedad MTL es la variedad de las **Monoidal T–norm based Logic álgebras (MTL-álgebras)** introducida por Esteva y Godo en [24]. La variedade IMTL es la variedad de **MTL-álgebras Involutivas** definidas en [24]. BL es la variedad de **Basic Logic álgebras** introducidas por Hájek (ver [34]). **Ł** es la variedad de **MV**-álgebras (ver [17]).

Recordemos ahora álgunas de las subvariedades de **DLI**-álgebras. Para esto utilizaremos la siguiente notación, dadas dos fórmulas en el lenguaje de las **DLI**, **DLF** o **DLFI**-álgebras φ y ψ, con $\varphi \preccurlyeq \psi$ estaremos abreviando la ecuación $\varphi \wedge \psi \approx \varphi$.

En [14], Celani and Jansana introducen las **weakly Heyting álgebras** o **WH**-álgebras. Si denotamos WH a esta variedad tenemos que:

$$\mathsf{WH} = \mathsf{DLI} + \{(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \preccurlyeq a \rightarrow c, a \rightarrow a \approx 1\}$$

Entre las subvariedades de WH podemos destacar

$$\begin{aligned}
\mathsf{RWH} &= \mathsf{WH} + \{a \wedge (a \to b) \preccurlyeq a\}. \\
\mathsf{TWH} &= \mathsf{WH} + \{a \to b \preccurlyeq 1 \to (a \to b)\}. \\
\mathsf{Bas} &= \mathsf{WH} + \{a \preccurlyeq 1 \to a\} \\
&= \mathsf{TWH} + \{a \preccurlyeq 1 \to a\}. \\
\mathsf{SRL} &= \mathsf{TWH} + \{a \wedge (a \to b) \preccurlyeq a\} \\
&= \mathsf{RWH} + \{a \to b \preccurlyeq 1 \to (a \to b)\}. \\
\mathsf{H} &= \mathsf{SRL} + \{a \preccurlyeq 1 \to a\} \\
&= \mathsf{Bas} + \{a \wedge (a \to b) \preccurlyeq a\}.
\end{aligned}$$

Bas es la variedad de Basic álgebras definidas en [1]. SRL es la variedad de retículos subresiduados definida en [23]. H es la variedad de álgebras de Heyting. Para más referencias y resultados sobre estas estructuras remitimos al lector a [7] y [14].

3.1.1. Dualidad para DLI DLF y DLFI-álgebras

En esta subsección recordaremos la dualidad presentada por Celani para las **DLF DLI** y **DLFI**-álgebras en [13]. Veremos que es interdefinible con la dualidad desarrollada en el capítulo anterior.

Dada una **DLFI**-álgebra $\boldsymbol{A}$ y dados $F, G \in Fi(\boldsymbol{A})$, en [13] se definen los siguientes subconjuntos de A:

$$F \to G = \{a \in A : \text{Existen } (f,g) \in F \times G,\ f \leq g \to a\}.$$

$$F \circ G = \{a \in A : \text{Existen } (f,g) \in F \times G,\ f \circ g \leq a\}$$

Es simple ver que $F \circ G$ y $F \to G \in Fi(\boldsymbol{A})$.

Definición 3.11 *Dada $\boldsymbol{A}$ una* **DLFI**-*álgebra. Definamos $X(\boldsymbol{A})$ dos relaciones ternarias $R_{\boldsymbol{A}}$ y $T_{\boldsymbol{A}}$ como sigue:*

$$(P,Q,D) \in T_{\boldsymbol{A}} \quad \textit{si y sólo si} \quad P \to Q \subseteq D,$$

$$(P,Q,D) \in R_{\boldsymbol{A}} \quad \textit{si y sólo si} \quad P \circ Q \subseteq D.$$

Restringiendo la definición anterior, definimos $T_{\boldsymbol{A}}$ para una **DLI**-álgebra y $R_{\boldsymbol{A}}$ para una **DLF**-álgebra.

Ejemplo 3.12 *Recordemos que el álgebra de Chang es el álgebra $\boldsymbol{C} = \langle C, \wedge, \vee, \circ, \to, 0, 1\rangle$ donde $C = \{(0,i) : a \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(1,j) : b \in \mathbb{Z}^-\}$, el orden de $\boldsymbol{C}$ es el orden lexicográfico en el producto (ver Fig. 3) la fusión y la implicación estan definidas por:*

$$(a,i) \circ (b,j) = \begin{cases} (0,0) & \textit{si } a+b=0, \\ (0, 0 \vee (i+j)) & \textit{si } a+b=1, \\ (1, i+j) & \textit{si } a+b=2 \end{cases}$$

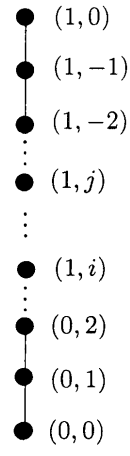


Fig. 3: Retículo del álgebra de Chang

$$(a,i) \rightarrow (b,j) = \begin{cases} (0, j-i) & si\ a = 1\ y\ b = 0, \\ (1, 0 \wedge (j-i)) & si\ a = b, \\ (1,0) & si\ a = 0\ y\ b = 1. \end{cases}$$

Como $\mathbf{C}$ *es una cadena* $X(\mathbf{C}) = \mathcal{P}_c(\mathbf{C}) \setminus \{\emptyset, C\}$. *Luego vemos que*

$$X(\mathbf{C}) = \{[(a,i)) : i \neq 0\ o\ a \neq 0\} \cup \{P_{\mathbf{C}}\},$$

donde $P_{\mathbf{C}} = \{(1,j) : b \in \mathbb{Z}^-\}$. *En este caso*

$$P \circ Q = P \rightarrow Q = \begin{cases} [(1, i+j)) & si\ P = [(1,i))\ y\ Q = [(1,j)), \\ [(0, 0 \vee (i+j))) & si\ P = [(0,i))\ y\ Q = [(1,j))\ o \\ & si\ P = [(1,j))\ y\ Q = [(0,i)) \\ C & si\ P = P_{\mathbf{C}}\ y\ Q = [(0,i))\ o \\ & si\ P = [(0,i))\ y\ Q = P_{\mathbf{C}}\ o \\ & si\ P = [(0,j))\ y\ Q = [(0,i)), \\ P_{\mathbf{C}} & si\ P = P_{\mathbf{C}}\ y\ Q = [(1,j))\ o \\ & si\ P = [(1,j))\ y\ Q = P_{\mathbf{C}}\ o \\ & si\ P = Q = P_{\mathbf{C}}. \end{cases}$$

Proposición 3.13 *Dada* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *una* **DLFI**-*álgebra entonces:*

1. $R_{\mathbf{A}} = R_{\circ}$.
2. $(P,Q,D) \in T_{\mathbf{A}}$ *si y sólo si* $(Q,D,P) \in R_{\rightarrow}$.

Demostración. El inciso 1 se sigue directamente de la definición de $R_{\mathbf{A}}$ y del hecho de que $\circ$ es un operador de tipo $(1,1,1)$.

A su vez

$$\begin{array}{lll} (P,Q,D) \in T_{\mathbf{A}} & \text{si y sólo si} & \forall b \in Q, \forall a \in A,\ b \rightarrow a \in P \Rightarrow a \in D \\ & \text{si y sólo si} & \forall b \in Q, \forall a \notin D,\ b \rightarrow a \notin P \\ & \text{si y sólo si} & \rightarrow (Q, A \setminus D) \subseteq A \setminus P \\ & \text{si y sólo si} & (Q,D,P) \in R_{\rightarrow}. \end{array}$$

■

Definición 3.14 ([13, Definición 3.1]) *Dada una estructura* $\langle X, \leq, R, \tau \rangle$, *donde* $\langle X, \leq, \tau \rangle$ *es un espacio de Priestley y* R *es una relación ternaria sobre* X, *entonces*

1. $\langle X, \leq, R, \tau \rangle$ *se dirá un* **DLI-*espacio*** *si y sólo si*

   a) *Para cada* $U, V \in \mathrm{D}(X)$, $U \to_T V \in \mathrm{D}(X)$ *y*

   b) *para todo* $x, y, z \in X$, *si* $\varepsilon_X(x) \to_T \varepsilon_X(y) \subseteq \varepsilon_X(z)$ *entonces* $(x, y, z) \in R$.

2. $\langle X, \leq, R, \tau \rangle$ *se dirá un* **DLF-*espacio*** *si y sólo si*

   a) *Para cada* $U, V \in \mathrm{D}(X)$, $U \circ_R V \in \mathrm{D}(X)$ *y*

   b) *para todo* $x, y, z \in X$, *si* $\varepsilon_X(x) \circ_R \varepsilon_X(y) \subseteq \varepsilon_X(z)$ *entonces* $(x, y, z) \in R$.

Donde $\to_T$ *y* $\circ_R$ *estan definidas en el ejemplo* 3.8.
Si T *es una relación ternaria definida en* X, *diremos que* $\langle X, \leq, R, T, \tau \rangle$ *es un* **DLFI-*espacio*** *si y sólo si* $\langle X, \leq, R, \tau \rangle$ *es un* **DLF**-*espacio y* $\langle X, \leq, T, \tau \rangle$ *es un* **DLI**-*espacio.*

Proposición 3.15 $\langle X, \leq, R, T, \tau \rangle$ *es un* **DLFI**-*espacio si y sólo si* R *es una* O-*relación (de tipo* $(1,1,1)$*) y* $T^s = \{(x, y, z); (z, x, y) \in T\}$ *es una* O-*relación de tipo* $(1, -1, -1)$.

Demostración. Sea $\langle X, \leq, R, T, \tau \rangle$ es una estructura, donde $\langle X, \leq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley y R y T son relaciones ternarias sobre X. Veamos que T^s es una O-relación de tipo $(1, -1, -1)$ si y sólo si verifica el inciso *1* de la definición .3.14

1. Dados $U, V \in \mathrm{D}(X)$. La igualdad $(T^s(U, V^{-1}))^{-1} = U \mapsto V$. Se deduce de las siguientes equivalencias,

$$\begin{array}{lll} x \in (T^s(U, V^{-1}))^{-1} & \text{si y sólo si} & x \notin T^s(U, V^{-1}) \\ & \text{si y sólo si} & x \notin \{z \in X : \exists u \in U, \exists v \in V^{-1} \ (u, v, z) \in T^s\} \\ & \text{si y sólo si} & \forall u \in U, \forall v \notin V, \ (u, v, z) \notin T^s \\ & \text{si y sólo si} & \forall u \in U, \forall v \notin V, \ (z, u, v) \notin T \\ & \text{si y sólo si} & \forall u \in U, (x, u, v) \in T \Rightarrow v \in V \\ & \text{si y sólo si} & x \in U \to_T V. \end{array}$$

Por lo tanto $(T^s(U, V^{-1}))^{-1} \in \mathrm{D}(X)$ si y sólo si $U \to_T V \in \mathrm{D}(X)$, es decir, T satisface el inciso *1.a* de la definición anterior si y sólo si T^s satisface el inciso *1* de la definición 2.5.

Supongamos que $U \to_T V \in \mathrm{D}(X)$ para cada $U, V \in \mathrm{D}(X)$ y probemos que T satisface el inciso 1.b de la definición 3.14 si y sólo si T^s satisface el inciso 2 de la definición 2.5.

Si suponemos primero que es válido el inciso 1.*b* de la definición de **DLFI**-espacio.
Si $(x, y, z) \notin T^s$ debemos probar que existen $U, V \in D(X)$ tales que $x \in U$ $y \notin V$ y $z \notin T^s(U, V^{-1})$.
Como $(x, y, z) \notin T^s$ tenemos que $(z, x, y) \notin T$. En consecuencia, $\varepsilon_X(z) \to_T \varepsilon_X(x) \not\subseteq \varepsilon_X(y)$. Es decir ,existe $V \in \varepsilon_X(z) \mapsto \varepsilon_X(x)$ tal que $y \notin V$. Entonces existen $U, W \in D(X)$ tales que $x \in U$ $z \in W$ y $W \subseteq U \to_T V = X \setminus T^s(U, V^{-1})$. Por lo tanto $z \notin T^s(U, V^{-1})$.

Supongamos ahora que T^s satisface el inciso *2* de la definición 2.5.

Sean $x, y, z \in X$ tales que $\varepsilon_X(x) \to_T \varepsilon_X(y) \subseteq \varepsilon_X(z)$, debemos probar que $(x, y, z) \in T$.

Si suponemos que $(x, y, z) \notin T$, es decir, $(y, z, x) \notin T^s$ tenemos, por hipótesis, que existen $U, V \in \mathrm{D}(X)$ tales que $y \in U$ $z \notin V$ y $x \notin T^s(U, V^{-1})$. Por lo tanto

$$x \in X \setminus T^s\left(U, V^{-1}\right) = U \mapsto V = X \setminus T^{-1}\left(U, V^{-1}\right).$$

Con lo que $U \to_T V \in \varepsilon_X(x)$ y $U \in \varepsilon_X(y)$. Luego $V \in \varepsilon_X(x) \to_T \varepsilon_X(y)$ y $V \notin \varepsilon_X(z)$, lo cual contradice que $\varepsilon_X(x) \to_T \varepsilon_X(y) \subseteq \varepsilon_X(z)$. Entonces debe ser $(x, y, z) \in T$.

La prueba que R satisface el inciso *2* de la definición anterior si y sólo si es un O-relación de tipo $(1, 1, 1)$ se sigue de manera similar. ■

Ahora vamos a introducir la nociones apropiadas de morfismos entre los diferentes tipos de espacios.

Definición 3.16 *Un* ***i-morfismo****, desde el* **DLI***-espacio* $\langle X_1, \leq_1, T_1, \tau_1\rangle$ *en el* **DLI***-espacio* $\langle X_2, \leq_2, T_2, \tau_2\rangle$, *es una función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *que verifica las siguientes condiciones:*

1. f *es continua y creciente,*
2. *Si* $(x, y, z) \in T_1$, *entonces* $(f(x), f(y), f(z)) \in T_2$,
3. *Si* $(f(x), y', z') \in T_2$, *entonces existen* $y, z \in X_1$ *tales que* $(x, y, z) \in T_1$, $y' \leq f(y)$ *y* $f(z) \leq z'$.

Un ***f-morfismo****, desde el* **DLF***-espacio* $\langle X_1, \leq_1, R_1, \tau_1\rangle$ *en el* **DLF***-espacio* $\langle X_2, \leq_2, R_2, \tau_2\rangle$, *es una función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *que verifica las siguientes condiciones:*

1. f *es continua y creciente,*
2. *Si* $(x, y, z) \in R_1$, *entonces* $(f(x), f(y), f(z)) \in R_2$,
3. *Si* $(x', y', f(z)) \in R_2$, *entonces existen* $x, y \in X_1$ *tales que* $(x, y, z) \in R_1$, $x' \leq f(x)$ *y* $y' \leq f(y)$.

Dados dos **DLFI***-espacios* $\boldsymbol{X}_1 = \langle X_1, \leq_1, R_1, T_1, \tau_1\rangle$ *y* $\boldsymbol{X}_2 = \langle X_2, \leq_2, R_2, T_2, \tau_2\rangle$, *un* ***fi-morfismo*** *desde* $\boldsymbol{X}_1$ *en* $\boldsymbol{X}_2$*el es una función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *tal que es un* f*-morfismo de* $\langle X_1, \leq_1, R_1, \tau_1\rangle$ *en* $\langle X_2, \leq_2, R_2, \tau_2\rangle$ *y es un* i*-morfismo de* $\langle X_1, \leq_1, T_1, \tau_1\rangle$ *en* $\langle X_2, \leq_2, T_2, \tau_2\rangle$.

De la definición anterior, la definición de morfismo entre espacios de Priestley multi-tipados, y la proposición 3.15, obtenemos directamente la siguiente proposición.

Proposición 3.17 $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es un* fi*-morfismo desde el* **DLFI***-espacio* $\langle X_1, \leq_1, R_1, T_1, \tau_1\rangle$ *en el* **DLFI***-espacio* $\langle X_2, \leq_2, R_2, T_2, \tau_2\rangle$ *si y sólo si es un morfismo de espacios de Priestley multi-tipados de* $\langle X_1, \leq_1, R_1, T_1^s, \tau_1\rangle$ *en* $\langle X_2, \leq_2, R_2, T_2^s, \tau_2\rangle$.

La estructura $\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, \tau_{\boldsymbol{A}}, R_{\boldsymbol{A}}, T_{\boldsymbol{A}} \rangle$ es un **DLFI**-espacio, llamado el **DLFI-espacio asociado a $\boldsymbol{A}$.** De la misma forma dada una **DLI**-álgebra (**DLF**-álgebra) $\boldsymbol{A}$, $\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, \tau_{\boldsymbol{A}}, T_{\boldsymbol{A}} \rangle$ ($\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, \tau_{\boldsymbol{A}}, R_{\boldsymbol{A}} \rangle$) será su **DLI-espacio (DLF-espacio) asociado.**

Por la proposición anterior podemos ver que las relaciones ternarias definidas en [13] y las dadas por la dualidad descripta en el capítulo anterior aplicada al caso de las **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras son interdefinibles. De igual manera haciendo las modificaciones adecuadas se puede probar que la dualidad desarrollada por Celani es equivalente a la restricción de la dualidad desarrollada en el capítulo anterior aplicada a retículos distributivos con uno o dos operadores del tipo correcto. A su vez en [13], Celani utiliza la dualidad para describir el retículo de las congruencias, las álgebras simples y subdirectamente irrducibles y el retículo de las subálgebras, estos resultados son equivalentes (con las respectivas modificaciones) a los obtenidos en el capítulo anterior restringidos al caso de los operadores de tipo $(1,1,1)$ y $(1,-1,-1)$

De ahora en adelante trabajaremos con **DLI DLF** y **DLFI**-álgebras y sus subvariedades, por ello cuando nos refiramos al espacio de Priestley dual nos referiremos al espacio dual con las relaciones T_A y/o R_A según corresponda. Esto probara ser muy útil cuando apliquemos la dualidad a los retículos residuados. La categoría de **DLFI**-espacios con fi-morfismos será denotada DLFI*. De igual forma denotaremos DLI* y DLF* a las categorías de **DLI**-espacios y **DLF**-espacios con i-morfismos y f-morfismos respectivamente.

Los siguientes lemas probados por Celani en [13], los enunciamos aquí, por separado, porque serán la piedra fundamental de varias demostraciones en la siguiente sección. En ambos lemas el caso de la fusión puede demostrarse utilizando los corolarios 2.12 y 2.13 para el caso $(1,1,1)$. Para el caso de implicación el segundo lema puede obtenerse utilizando el corolario 2.13 para el caso $(1,-1,-1)$.

Lema 3.18 *Sea $\boldsymbol{A}$ una* **DLFI**-*álgebra y sean $F, G \in Fi(\boldsymbol{A})$ y $P \in X(\boldsymbol{A})$, entonces:*

1. *Si $F \rightarrow G \subseteq P$, existen $Q, D \in X(\boldsymbol{A})$, tales que $F \subseteq Q$, $G \subseteq D$ y $(Q, D, P) \in T_{\boldsymbol{A}}$.*
2. *Si $F \circ G \subseteq P$, existen $Q, D \in X(\boldsymbol{A})$, tales que $F \subseteq Q$, $G \subseteq D$ y $(Q, D, P) \in R_{\boldsymbol{A}}$.*

Lema 3.19 *LSea $\boldsymbol{A}$ una* **DLFI**-*álgebra y sean $a, b \in A$ y $P \in X(\boldsymbol{A})$, entonces:*

1. *$a \rightarrow b \in P$ si y sólo si $Q, D \in X(\boldsymbol{A})$ son tales que $a \in Q$ y $(P, Q, D) \in T_{\boldsymbol{A}}$, entonces $b \in D$.*
2. *$a \circ b \in P$ si y sólo si existen $Q, D \in X(\boldsymbol{A})$ tales que $a \in Q$, $b \in D$ y $(Q, D, P) \in R_{\boldsymbol{A}}$.*

3.2. Correspondencia

Con el objetivo de aplicar la dualidad de las **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras a algunas de sus subvariedades, en esta sección veremos como ciertas ecuaciones que se satisfacen en un álgebra estan relacionadas con condiciones de primer orden en su espacio dual.

Teorema 3.20 *Sea $\boldsymbol{A}$ una* **DLI**-*álgebra, notemos $X = X(\boldsymbol{A})$ al conjunto de filtros primos de $\boldsymbol{A}$ y $T = T_{\boldsymbol{A}}$ la relación ternaria dada en la definición 3.11 . Entonces las ecuaciones de la izquierda se verifican en $\boldsymbol{A}$ si y sólo si se verican las condiciones de la derecha en $\langle X, \subseteq, T \rangle$ (ver Tabla 1)*

	Ecuación	Condición
1	$a \preccurlyeq (a \to b) \to b$	$T = T'$.
2	$a \to (b \to c) \preccurlyeq b \to (a \to c)$	$(P,Q,Z,W) \in T \circ T \Rightarrow (P,Z,Q,W) \in T \circ T$.
3	$a \to b \preccurlyeq (b \to c) \to (a \to c)$	$(P,Q,Z,W) \in T \circ T \Rightarrow (P,Z,Q,W) \in T \circ T'$.
4	$(a \wedge b) \to c \preccurlyeq a \to (b \to c)$	$(P,Q,Z,W) \in T \circ T \Rightarrow \exists K \in X, (Q \subseteq K \;\&\; Z \subseteq K \;\&\; (P,K,W) \in T)$.
5	$a \to (b \to c) \preccurlyeq (a \wedge b) \to c$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow (P,Q,Q,D) \in T \circ T$.
6	$(a \wedge b) \to c \preccurlyeq (a \to c) \vee (b \to c)$	$((P,Q,D) \in T \;\&\; (P,Z,W) \in T) \Rightarrow$ $(\exists H,K \in X, (Q \subseteq H \;\&\; Z \subseteq H \;\&\; (K \subseteq D \text{ or } K \subseteq W)) \;\&\; (P,H,K) \in T)$.
7	$a \preccurlyeq b \to (a \wedge b)$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow (P \subseteq D \;\&\; Q \subseteq D)$.
8	$a \preccurlyeq b \to b$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow Q \subseteq D$.
9	$a \preccurlyeq a \to a$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow (P \subseteq D \circ Q \subseteq D)$.
10	$a \preccurlyeq b \to a$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow P \subseteq D$.
11	$1 \to a \preccurlyeq a$	$\forall P,Q \in X, P \subseteq Q \Rightarrow \exists D \in X, (P,D,Q) \in T$.
12	$a \wedge (a \to b) \preccurlyeq b$	$\forall P \in X, (P,P,P) \in T$.
13	$a \to (b \vee c) \preccurlyeq (a \to b) \vee (a \to c)$	$((P,Q,D) \in T \;\&\; (P,Z,W) \in T) \Rightarrow$ $(\exists H,K \in X, (Q \subseteq H \text{ or } Z \subseteq H) \;\&\; K \subseteq D \;\&\; K \subseteq W \;\&\; (P,H,K) \in T)$.
14	$(a \to b) \wedge (b \to c) \preccurlyeq a \to c$	$(P,Q,D) \in T \Rightarrow (P,Q,P,D) \in T \circ T'$.
15	$1 \approx (a \to b) \vee (b \to a)$	$(P,Q,D) \in T \;\&\; (P,Z,W) \in T \Rightarrow (Q \subseteq W \text{ or } Z \subseteq D)$.
16	$a \to b \preccurlyeq 1 \to (a \to b)$	$(P,Q,Z,W) \in T \circ T \Rightarrow (P,Z,W) \in T$.

Tabla 1

Demostración. Por una cuestión de completitud demostraremos cada una de las proposiciones anteriores. Varias demostraciones tienen argumentos similares por eso recomendamos como ejemplos las demostraciones de los ítems 1, 4 y 6.

1. $\Rightarrow$) Supongamos que $\boldsymbol{A}$ satisface la ecuación $a \preccurlyeq (a \to b) \to b$. Para probar que $T = T'$ bastara probar que si $(P, Q, D) \in T$, entonces $(Q, P, D) \in T$.

Sean P, Q, D tales que $(P, Q, D) \in T$, es decir, $P \to Q \subseteq D$. Veamos que $Q \to P \subseteq P \to Q$. Dado $a \in Q \to P$ existe $x \in P$ tal que $x \to a \in Q$. Por hipótesis $x \leq (x \to a) \to a$, entonces $(x \to a) \to a \in P$, por lo tanto $a \in P \to Q$. Concluimos que $Q \to P \subseteq P \to Q \subseteq D$, es decir, $(Q, P, D) \in T$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que existen $a, b \in \boldsymbol{A}$ tales que $a \not\leq (a \to b) \to b$. Entonces existe $P \in X$, tal que $a \in P$ y $(a \to b) \to b \notin P$. Por lema 3.19 existen $Q, D \in X$ tales que $a \to b \in Q$, $b \notin D$ y $(P, Q, D) \in T$. Por hipótesis $(Q, P, D) \in T$, luego $b \in Q \to P \subseteq D$, lo cual contradice lo antes supuesto.

Por lo tanto $\boldsymbol{A}$ satisface la ecuación $a \preccurlyeq (a \to b) \to b$.

2. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, Z, W \in X$ tales que $(P, Q, Z, W) \in T \circ T$, es decir, existe $D \in X$ tal que $P \to Q \subseteq D$ y $D \to Z \subseteq W$. Probaremos que:

$$(P \to Z) \to Q \subseteq W.$$

Sea $a \in (P \to Z) \to Q$, existen $p \in P$, $q \in Q$ y $z \in Z$ tales que:

$$p \leq z \to (q \to a).$$

Luego, por hipótesis, $p \leq q \to (z \to a) \in P$. Como $P \to Q \subseteq D$, tenemos que $z \to a \in D$. Dado que $D \to Z \subseteq W$, obtenemos $a \in W$.

Por el lema 3.18, existe $K \in X$ tal que $P \to Z \subseteq K$ y $K \to Q \subseteq W$, es decir, $(P, Z, K) \in T$ y $(K, Q, W) \in T$, por lo tanto $(P, Z, Q, W) \in T \circ T$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b, c \in A$ tales que $a \to (b \to c) \not\leq b \to (a \to c)$. Entonces, $a \to (b \to c) \in P$ y $b \to (a \to c) \notin P$, para algún $P \in X$. Por el lema 3.19, existen $Q, D \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$, $b \in Q$ y $a \to c \notin D$. Como $a \to c \notin D$, existen $Z, W \in X$ tales que $D \to Z \subseteq W$, $a \in Z$, y $c \notin W$. Luego, tenemos que $(P, Q, Z, W) \in T \circ T$, por hipótesis $(P, Z, Q, W) \in T \circ T$, es decir, existe $K \in X$ tal que $P \to Z \subseteq K$ y $K \to Q \subseteq W$. Dado que $a \to (b \to c) \in P$, deducimos que $c \in W$, lo cual es una contradicción.

3. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, Z, W \in X$ tales que $(P, Q, Z, W) \in T \circ T$, es decir, existe $D \in X$ tal que $P \to Q \subseteq D$ y $D \to Z \subseteq W$. Probaremos que

$$Q \to (P \to Z) \subseteq W.$$

Si $a \in Q \to (P \to Z)$, existe $x \in P \to Z$ tal que $x \to a \in Q$ y existe $z \in Z$ tal que $z \to x \in P$. Por hipotesis, $z \to x \leq (x \to a) \to (z \to a) \in P$. Dado que $P \to Q \subseteq D$ y $x \to a \in Q$, $z \to a \in D$. Como $D \to Z \subseteq W$ y $z \in Z$, $a \in W$. Con lo cual probamos que $Q \to (P \to Z) \subseteq W$.

Por lema 3.18, existe $K \in X$ tal que $P \to Z \subseteq K$ y $Q \to K \subseteq W$.

Entonces $(P, Z, Q, W) \in T \circ T'$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b, c \in A$ tales que $a \to b \not\leq (b \to c) \to (a \to c)$. Entonces existe $P \in X$ tal que $a \to b \in P$ y $(b \to c) \to (a \to c) \notin P$. Por lema 3.19 existen Q, D tales

que $(P,Q,D) \in T$, $b \to c \in Q$ y $a \to c \notin D$. Otra vez por lema 3.19, existen $Z,W \in X$, tales que $(D,Z,W) \in T$, $a \in Z$ y $c \notin W$. Por lo tanto $(P,Q,Z,W) \in T \circ T$. Por hipótesis, $(P,Z,Q,W) \in T \circ T'$, es decir, existe $U \in X$, tal que $(P,Z,U),(Q,U,W) \in T$.

Como $a \to b \in P$ y $a \in Z$, tenemos que $b \in U$. Dado que $b \to c \in Q$, deducimos que $c \in W$, lo cual es una contradicción.

4. $\Rightarrow$) Sean $P,Q,W,Z \in X$ tales que $(P,Q,Z,W) \in T \circ T$, es decir, existe $D \in X$ tal que $P \to Q \subseteq D$ y $D \to Z \subseteq W$. Probaremos que

$$P \to F(Q \cup Z) \subseteq W.$$

Sea $a \in P \to F(Q \cup Z)$, es decir, existe $b \in F(Q \cup Z)$ tal que $b \to a \in P$. Luego existen $x \in Q$ e $y \in Z$ tales que $x \wedge y \leq b$. Por hipotesis, $b \to a \leq (x \wedge y) \to a \leq x \to (y \to a) \in P$. Como $x \in Q$ y $P \to Q \subseteq D$, tenemos que $y \to a \in D$. Dado que $y \in Z$ y que $D \to Z \subseteq W$, concluimos que $a \in W$. Por lema 3.18 existe $K \in X$ tal que $Q,Z \subseteq F(Q \cup Z) \subseteq K$ y $(P,K,D) \in T$

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a,b,c \in A$ tales que $(a \wedge b) \to c \not\leq a \to (b \to c)$. Sea $P \in X$, tal que $(a \wedge b) \to c \in P$, y $a \to (b \to c) \notin P$. Por lo tanto existen $Q,D \in X$, tales que $a \in Q$, $b \to c \notin D$ y $(P,Q,D) \in T$. Luego existen $Z,W \in X$, tales que $b \in Z$, $c \notin W$ y $(D,Z,W) \in T$. Con lo cual tenemos que $(P,Q,Z,W) \in T \circ T$. Por hipótesis, existe $K \in X$ tal que $Q,Z \subseteq K$ y $(P,K,W) \in T$. Pero, $a \wedge b \in K$ y $(a \wedge b) \to c \in P$ entonces $c \in W$, lo cual es una contradicción.

5. $\Rightarrow$) Sean $P,Q,D \in X$, tales que $(P,Q,D) \in T$. Probaremos que

$$(P \to Q) \to Q \subseteq D.$$

Sea $a \in (P \to Q) \to Q$, entonces existen $x,y \in Q$ tales que $x \to (y \to a) \in P$. Por hipótesis, $(x \wedge y) \to a \in P$. Como $x \wedge y \in Q$, tenemos que $a \in P \to Q \subseteq D$.

Luego, existe $K \in X$ tal que $P \to Q \subseteq K$ y $K \to Q \subseteq D$, es decir, $(P,Q,Q,D) \in T \circ T$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a,b,c \in A$ tales que $a \to (b \to c) \not\leq (a \wedge b) \to c$. Entonces, sea $P \in X$ tal que $a \to (b \to c) \in P$ y $(a \wedge b) \to c \notin P$. Sean $Q,D \in X$, tales que $a \wedge b \in Q$, $c \notin D$ y $(P,Q,D) \in T$. Por hipótesis, existe K tal que $(P,Q,K),(K,Q,D) \in T$. Como $a \to (b \to c) \in P$ y $a \in Q$ entonces $b \to c \in K$. Dado que $b \in Q$, concluimos que $c \in D$, lo cual es una contradicción.

6. $\Rightarrow$) Sean $P,Q,D,W,Z \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$ y $P \to W \subseteq Z$.

Consideremos el filtro $P \to F(Q \cup W)$ y el ideal $I = D^c \cap Z^c$. Probaremos que:

$$P \to F(Q \cup W) \cap I = \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $q \in Q$, $w \in W$ y $x \in I$ tales que $(q \wedge w) \to x \in P$. Por hipótesis, $(q \to x) \vee (w \to x) \in P$. Dado que P es un filtro primo, $q \to x \in P$ o $w \to x \in P$. Luego, $x \in D$ o $x \in Z$, lo cual es una contradicción.

Por el teorema del filtro primo existe $K \in X$ tal que $P \to F(Q \cup W) \subseteq K$ y $K \cap D^c \cap Z^c = \emptyset$. De esto último deducimos que $K \subseteq D$ o $K \subseteq Z$. Ahora por el lema 3.18, existe $H \in X$ tal que $Q,W \subseteq F(Q \cup W) \subseteq H$ y $P \to H \subseteq K$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a,b,c \in A$, tales que $(a \wedge b) \to c \not\leq (a \to c) \vee (b \to c)$. Entonces existe $P \in X$ tal que $(a \wedge b) \to c \in P$ y $(a \to c) \vee (b \to c) \notin P$. Como P es un filtro primo tenemos que $a \to c \notin P$, luego existen Q,D tales que $a \in Q$, $c \notin D$ y $(P,Q;D) \in T$. De igual manera existen $Z,W \in X$ tales que $b \in Z$, $c \notin W$ y $(P,Z,W) \in T$. Por hipótesis existen

$H, K \in X$, tales que $Q, Z \subseteq H$, $K \subseteq D \cap W$ y $(P, H, K) \in T$. Entonces $a, b \in H$ y $c \notin K$. Como $(a \wedge b) \to c \in P$ y $(P, H, K) \in T$, tenemos que $c \in K$, lo cual es una contradicción.

7. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $(P, Q, D) \in T$.

Sea $x \in P$. Por hipótesis $x \leq 1 \to (x \wedge 1) = 1 \to x$, entonces $x \in P \to Q \subseteq D$. Luego, $P \subseteq D$.

Sea $y \in Q$. Por hipótesis $1 \leq y \to (1 \wedge y) = y \to y \in P$, entonces $y \in D$. Luego, $Q \subseteq D$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a, b \in A$ son tales que $a \not\leq b \to (a \wedge b)$. Entonces existe $P \in X$ tal que $a \in P$, $b \to (a \wedge b) \notin P$. Como $b \to (a \wedge b) \notin P$, existen $Q, D \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$, $b \in Q$ y $a \wedge b \notin D$. Dado que $P \subseteq D$ y $Q \subseteq D$, $a, b \in D$. Luego $a \wedge b \in D$, lo cual es una contradicción.

8. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $(P, Q, D) \in T$. Sea $x \in Q$. Como $1 \in P$ y por hipótesis $1 \leq x \to x$, $x \in P \to Q \subseteq D$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a, b \in A$ son tales que $a \not\leq b \to b$. Entonces existe $P \in X$ tal que $a \in P$ y $b \to b \notin P$. Luego existen Q, D tales que $(P, Q, D) \in T$ $b \in Q$ y $b \notin D$. Entonces $Q \not\subseteq D$, lo cual contradice la hipótesis.

9. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $(P, Q, D) \in T$. Supongamos que $x \in P \cap Q$. Por hipótesis, $x \leq x \to x \in P$, entonces $x \in P \to Q \subseteq D$. Luego $P \cap Q \subseteq D$. Como D es un filtro primo, $P \subseteq D$ o $Q \subseteq D$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a \in A$ es tal que $a \not\leq a \to a$. Sea $P \in X$ tal que $a \in P$ y $a \to a \notin P$. Luego, existen Q, D tales que $(P, Q, D) \in T$ $a \in Q$ y $a \notin D$. Por hipótesis, $P \subseteq D$ o bien $Q \subseteq D$ con lo cual $a \in D$, lo cual es una contradicción.

10. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $(P, Q, D) \in T$. Dado $x \in P$, como $1 \in Q$ y por hipótesis, tenemos que $x \leq 1 \to x \in P$, entonces $x \in P \to Q \subseteq D$. Luego $P \subseteq D$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a, b \in A$ son tales que $a \not\leq b \to a$. Sea $P \in X$ tal que $a \in P$ y $b \to a \notin P$. Luego existen Q, D tales que $(P, Q, D) \in T$, $b \in Q$ y $a \notin D$. Entonces $P \not\subseteq D$, lo cual contradice la hipótesis.

11. $\Rightarrow$) Sean $P, Q \in X$ tales que $P \subseteq Q$. Veamos que $P \to \{1\} \subseteq Q$. Sea $a \in P \to \{1\}$. Entonces, $1 \to a \in P$. Por hipótesis $a \in P \subseteq Q$. Luego por el lema 3.18 existe $D \in X$ tal que $(P, D, Q) \in T$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a \in A$ es tal que $1 \to a \not\leq a$. Sea $P \in X$ tal que $1 \to a \in P$ y $a \notin P$. Como $P \subseteq P$, por hipótesis existe $D \in X$ tal que $(P, D, P) \in T$. Dado que $1 \to a \in P$ y $1 \in D$, tenemos que $a \in P$, lo cual es una contradicción.

12. $\Rightarrow$) Sea $P \in X$, veamos que $P \to P \subseteq P$. Sea $b \in P \to P$. Entonces, existe $a \in P$ tal que $a \to b \in P$. Por hipótesis $a \wedge (a \to b) \leq b \in P$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a, b \in A$ son tales que $a \wedge (a \to b) \not\leq b$. Sea $P \in X$ tal que $a, a \to b \in P$ y $b \notin P$. Por hipótesis $(P, P, P) \in T$. Como $a, a \to b \in P$, $b \in P \to P \subseteq P$. Lo cual es una contradicción.

13. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D, Z, W \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$ and $P \to Z \subseteq W$. Consideremos el filtro $P \to (Q \cap Z)$ y el ideal $I = I(D^c \cup W^c)$. Probaremos que:

$$P \to (Q \cap Z) \cap I = \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $q \in Q \cap Z$, $d \notin D$ y $w \notin W$ cumpliendo que $q \to (d \vee w) \in P$. Por hipótesis

$$(q \to d) \vee (q \to w) \in P.$$

Como P es primo, $q \to d \in P$ o $q \to w \in P$. Si $q \to d \in P$ teniendo en cuenta que $P \to Q \subseteq D$, tenemos que $d \in D$, lo cual es una contradicción. Si $q \to w \in P$ arribamos a una contradicción similar. Luego, $P \to (Q \cap Z) \cap I = \emptyset$.

Por el teorema del filtro primo existe $K \in X$ tal que $P \to (Q \cap Z) \subseteq K$ y $K \cap (D^c \cup W^c) = \emptyset$, es decir, $K \subseteq D \cap W$. Ya que $Q \cap Z$ es un filtro, por el lema 3.18, existe $H \in X$ tal que $Q \cap Z \subseteq H$ y $P \to H \subseteq K$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b, c \in A$ tales que $a \to (b \vee c) \not\leq (a \to b) \vee (a \to c)$, entonces sea $P \in X$ tal que $a \to (b \vee c) \in P$ y $(a \to b) \vee (a \to c) \notin P$. Luego, existen $Q, D, Z, W \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$, $P \to Z \subseteq W$, $a \in Q \cap Z$, $b \notin D$ y $c \notin W$. Por hipótesis, existen $H, K \in X$ tales que $Q \cap Z \subseteq H$, $K \subseteq D \cap W$ y $P \to H \subseteq K$. Dado que $a \in H$ y $a \to (b \vee c)$, $b \vee c \in K \subseteq D \cap W$, lo cual es una contradicción.

14. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$. Probemos que:

$$P \to (P \to Q) \subseteq D.$$

Dado $x \in P \to (P \to Q)$, existe $y \in P \to Q$ tal que $y \to x \in P$ y existe $q \in Q$ tal que $q \to y \in P$. Luego $(q \to y) \wedge (y \to x) \leq q \to x \in P$, lo cual implica que $x \in P \to Q \subseteq D$.

Por el lema 3.18, existe $K \in X$ tal que $P \to Q \subseteq K$ y $P \to K \subseteq D$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b, c \in A$ tales que $(a \to b) \wedge (b \to c) \not\leq a \to c$, entonces sea $P \in X$ tal que $(a \to b) \wedge (b \to c) \in P$ y $a \to c \notin P$. Luego, existen $Q, D \in X$ tales que $a \in Q$, $c \notin D$ y $P \to Q \subseteq D$. Por hipótesis existe $D_1 \in X$ tal que $P \to Q \subseteq D_1$ y $P \to D_1 \subseteq D$. Dado que $a \in Q$, $b \in D_1$. Entonces, $c \in D$, ya que $b \to c \in P$, lo cual es una contradicción.

15. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D, W, Z \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$ y $P \to W \subseteq Z$. Supongamos que existen $a \in Q \backslash Z$ y $b \in W \backslash D$. Como $1 = (a \to b) \vee (b \to a) \in P$. Si $a \to b \in P$, entonces $b \in D$, y si $b \to a \in P$, tambien $a \in Z$. En ambos casos llegamos a una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $1 \neq (a \to b) \vee (b \to a)$. Entonces existe $P \in X$ tal que $(a \to b) \vee (b \to a) \notin P$. Entonces existen $Q, D, W, Z \in X$, tales que $a \in Q$, $b \notin D$, $b \in W$, $a \notin Z$ y $(P, Q, D), (P, W, Z) \in T$. Por hipótesis, $Q \subseteq Z$ o $W \subseteq D$, implicando que $a \in Z$ o $b \in D$ lo cual es una contradicción.

16. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D, W, Z \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D$ y $D \to W \subseteq Z$. Sea $a \in P \to W$, es decir existe $w \in W$ tal que $w \to a \in P$. Por hipótesis $w \to a \leq 1 \to (w \to a) \in P$. Como $1 \in Q$ tenemos que $w \to a \in D$. Por lo tanto $a \in Z$. Con lo que hemos demostrado que $P \to W \subseteq Z$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \to b \not\leq 1 \to (a \to b)$. Sea $P \in X$ tal que $a \to b \in P$ y $1 \to (a \to b) \notin P$. Luego, existen $Q, D \in X$ tales que $1 \in Q$, $a \to b \notin D$ y $(P, Q, D) \in T$. Otra vez por el lema 3.19 existen $W, Z \in X$ tales que $a \in W$ $b \notin Z$ y $(D, W, Z) \in T$. Por hipótesis, $P \to W \subseteq Z$ pero $b \in P \to W$ lo cual es una contradicción ■

Utilizando el teorema anterior podemos obtener los siguientes resultados.

Corolario 3.21 *Sea* $\mathbf{A}$ *una* **DLI**-*álgebra que satisface la ecuación:*

$$a \preccurlyeq (a \to b) \to b.$$

Entonces las siguientes proposiciones son válidas:

1. $\mathbf{A} \vDash a \to (b \to c) \preccurlyeq b \to (a \to c)$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \vDash a \to b \preccurlyeq (b \to c) \to (a \to c)$.

2. $\mathbf{A} \models a \preccurlyeq b \to b$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models a \preccurlyeq b \to a$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models a \preccurlyeq b \to (a \wedge b)$.

3. $\mathbf{A} \models a \to (b \to c) \preccurlyeq (a \wedge b) \to c$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models (a \to b) \wedge (b \to c) \preccurlyeq a \to c$.

Demostración. Por el ítem 2.(a) del teorema anterior dado que $\mathbf{A} \models a \preccurlyeq (a \to b) \to b$, tenemos que $T = T'$. Luego para demostrar cada equivalencia basta observar que las condiciones correspondientes en el dual son equivalentes bajo la hipótesis $T = T'$. ■

Corolario 3.22 *Sea* $\mathbf{A}$ *una* **DLI**-*álgebra que satisface la siguiente la ecuación:*

$$a \preccurlyeq b \to b. \tag{a}$$

Consideremos las siguentes proposiciones:

1. $\mathbf{A} \models a \to (b \vee c) \preccurlyeq (a \to b) \vee (a \to c)$.

2. $\mathbf{A} \models (a \wedge b) \to c \preccurlyeq (a \to c) \vee (b \to c)$.

3. $\mathbf{A} \models 1 \approx (a \to b) \vee (b \to a)$.

Entonces, 1 implica 3 y 2 implica 3.

Demostración. Primero probemos que *1* implica *3*. Sean $P, Q_1, Q_2, D_1, D_2 \in X(\mathbf{A})$ tales que $P \to Q_1 \subseteq D_1$ y $P \to Q_2 \subseteq D_2$. Por hipótesis *1* y el teorema 3.20 ítem 13, existen $Q, D \in X(\mathbf{A})$ tales que $Q_1 \subseteq Q$ o $Q_2 \subseteq Q$, $D \subseteq D_1 \cap D_2$ y $(P, Q, D) \in T$. Por condición (a) y ítem 8 del teorema 3.20, tenemos que $Q \subseteq D$. Luego $Q_1 \subseteq Q \subseteq D \subseteq D_2$ or $Q_2 \subseteq Q \subseteq D \subseteq D_1$. Finalmente por el ítem 15 del teorema 3.20, la ecuación $(a \to b) \vee (b \to a) \approx 1$ es válida en $\mathbf{A}$.

Ahora probaremos que *2* implica *3*. Como antes sean $P, Q_1, Q_2, D_1, D_2 \in X(\mathbf{A})$ tales que $P \to Q_1 \subseteq D_1$ y $P \to Q_2 \subseteq D_2$. Por hipótesis *2* e ítem 6 del teorema 3.20, existen $Q, D \in X(\mathbf{A})$ tales que $Q_1 \cup Q_2 \subseteq Q$ y $D \subseteq D_1$ o $D \subseteq D_2$ y $P \to Q \subseteq D$. Si $D \subseteq D_1$. Por condición (a) e ítem *8* del teorema 3.20, tenemos que $Q_2 \subseteq Q \subseteq D \subseteq D_1$. Si $D \subseteq D_2$. Con el mismo argumento concluimos que $Q_1 \subseteq D_2$. Luego por el ítem 15 del teorema 3.20, $(a \to b) \vee (b \to a) \approx 1$ es válida en $\mathbf{A}$. ■

Corolario 3.23 *Sea* $\mathbf{A}$ *una* **DLI**-*álgebra que satisface las siguientes ecuaciones:*

1. $a \preccurlyeq b \to b$,

2. $1 \to a \preccurlyeq a$,

3. $a \to (b \vee c) \preccurlyeq (a \to b) \vee (a \to c)$.

Entonces, $\mathbf{A} \models [(a \to b) \to b] \wedge [(b \to a) \to a] \preccurlyeq a \vee b$.

Demostración. Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que

$$[(a \to b) \to b] \wedge [(b \to a) \to a] \not\leq a \vee b.$$

Entonces existe $P \in X(\mathbf{A})$, tal que $[(a \to b) \to b] \wedge [(b \to a) \to a] \in P$, $a \notin P$ y $b \notin P$. Por condición *2*, $1 \to a \notin P$ y $1 \to b \notin P$. Por lema 3.19, existen $Q_1, Q_2, D_1, D_2 \in X(\mathbf{A})$ tales que $P \to Q_1 \subseteq D_1$, $P \to Q_2 \subseteq D_2$, $a \notin D_1$ y $b \notin D_2$. Por condición *3* e ítem 8 del teorema 3.20, existen $Q, D \in X(\mathbf{A})$ tales que $P \to Q \subseteq D$, $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q$, $D \subseteq D_1$ y $D \subseteq D_2$. Por condiciones *1*, *3* y el teorema 3.22, $1 = (a \to b) \vee (b \to a) \in Q$. Si $a \to b \in Q$, ya que $(a \to b) \to b \in P$ y $P \to Q \subseteq D$, tendríamos que $b \in D$, lo cual es una contradicción. Si $b \to a \in Q$, llegamos a una contradicción similar. Luego, $[(a \to b) \to b] \wedge [(b \to a) \to a] \leq a \vee b$. ∎

El siguiente teorema es similar al teorema 3.20 pero para el caso de **DLF**-álgebras. Estos resultados no son originales salvo en su presentación. Pueden obtenerse mediante los resultados de Uruquhart en [59, Sección 4], pero para esto es necesario comprobar que los resultados de [59, Sección 4] se pueden aplicar a **DLF** y/o **DLFI**-álgebras. En la sección 3.5 probaremos que un resultado aún más general de correspondencia automatica es válido para las **DLF** y **DLFI**-álgebras.

Por el momento incluimos una demostración del siguiente teorema que será útil en la próxima sección y luego veremos como esta relacionado con el resultado más general que presentaremos en la sección 3.5.

Teorema 3.24 *Sea* $\mathbf{A}$ *una* **DLF**-*álgebra y sea* $X = X(\mathbf{A})$ *el conjunto de filtros primos de* $\mathbf{A}$ *y* $R = R_{\mathbf{A}}$. *Entonces las ecuaciones de la izquierda se verifican en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si se verican las condiciones de la derecha en* $\langle X, \subseteq, T\rangle$:

	Ecuación	Condición
1	$(a \circ b) \circ c \preccurlyeq a \circ (b \circ c)$	$(P,Q,Z,W) \in R \circ R \Rightarrow (Q,Z,P,W) \in R \circ R'$.
2	$a \circ (b \circ c) \preccurlyeq (a \circ b) \circ c$	$(P,Q,Z,W) \in R \circ R' \Rightarrow (Z,P,Q,W) \in R \circ R$.
3	$a \circ b \preccurlyeq b \circ a$	$R = R'$.
4	$1 \circ a \preccurlyeq a$	$(P,Q,D) \in R \Rightarrow Q \subseteq D$.
5	$a \circ 1 \preccurlyeq a$	$(P,Q,D) \in R \Rightarrow P \subseteq D$.
6	$a \preccurlyeq a \circ 1$	$\forall P \in X, \exists Q \in X, (P,Q,P) \in R$
7	$a \preccurlyeq 1 \circ a$	$\forall P \in X, \exists Q \in X, (Q,P,P) \in R$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D, Z, W \in X$ tales que $(P,Q,D), (D,Z,W) \in R$, es decir., $P \circ Q \subseteq D$ y $D \circ Z \subseteq W$. Probaremos que:

$$P \circ (Q \circ Z) \subseteq W.$$

Sea $y \in P \circ (Q \circ Z)$, entonces existen $p \in P, q \in Q, z \in Z$ tales que $p \circ (q \circ z) \leq y$. Por hipótesis, $(p \circ q) \circ z \leq y$. Como $p \circ q \in D$, $(p \circ q) \circ z \in D \circ Z \subseteq W$.

Por el lema 3.18, existe $K \in X$ tal que $Q \circ Z \subseteq K$ y $P \circ K \subseteq W$, es decir, $(Q, Z, P, W) \in R \circ R'$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b, c \in A$ tales que $(a \circ b) \circ c \not\leq a \circ (b \circ c)$, entonces existe $W \in X$ tal que $(a \circ b) \circ c \in W$ y $a \circ (b \circ c) \notin W$. Por lema 3.19, existen $D, Z \in X$ tales que $a \circ b \in D$, $c \in Z$ y $D \circ Z \subseteq W$ y existen $P, Q \in X$ tales que $a \in P$, $b \in Q$ y $P \circ Q \subseteq D$. Por hipótesis, tenemos que existe $K \in X$ tal que $Q \circ Z \subseteq K$ y $P \circ K \subseteq W$. Luego $b \circ c \in K$ y $a \circ (b \circ c) \in W$, lo cual es una contradicción.

2. Se prueba de manera análoga al inciso 1.

3. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $(P, Q, D) \in R$, es decir $P \circ Q \subseteq D$. Veamos que $Q \circ P \subseteq D$. Sea $a \in Q \circ P$ entonces existen $p \in P$ y $q \in Q$ tales que $q \circ p \leq a$. Por hipótesis $q \circ p = p \circ q \in D$, luego $a \in D$. Por lo tanto $(Q, P, D) \in R$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \circ b \not\leq b \circ a$ entonces existe $D \in X$ tal que $a \circ b \in D$ y $b \circ a \notin D$. Por el lema 3.19 existen $P, Q \in X$ tales que $a \in P$, $b \in Q$ y $(P, Q, D) \in R$. Por hipótesis $(Q, P, D) \in R$, de lo que podemos deducir que $b \circ a \in D$, lo cual es una ocntradicción.

4. $\Rightarrow$) Sean $P, Q, D \in X$ tales que $P \circ Q \subseteq D$. Por hipótesis, $1 \circ q \leq q \in P \circ Q \subseteq D$ para cada $q \in Q$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $a \in A$ tal que $1 \circ a \not\leq a$, entonces existe $D \in X$ tal que $1 \circ a \in D$ y $a \notin D$. Por el lema 3.19, existen $P, Q \in X$ tales que $a \in Q$ y $P \circ Q \subseteq D$. Entonces $a \in Q \subseteq D$, lo cual es una contradicción.

5. Se prueba de manera análoga al inciso 4.

6. $\Rightarrow$) Sea $P \in X$. Por hipótesis, para cada $p \in P$, $p \leq p \circ 1$. Luego $P \circ \{1\} \subseteq P$. Por el lema 3.18, existe $Q \in X$ tal que $P \circ Q \subseteq P$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \not\leq a \circ 1$. Existe $P \in X$ tal que $a \in P$ y $a \circ 1 \notin P$. Entonces $P \circ \{1\} \not\subseteq P$. Luego $P \circ Q \not\subseteq P$ para cada $Q \in X$, lo cual es una contradicción.

7. Se prueba de manera análoga al inciso 6. ■

3.3. Dualidad para subvariedades de Retículos Residuados

En esta sección utilizaremos los resultados de la sección anterior para restringir la dualidad dada en [13] a algunas subvariedades de RCID.

Retículos residuados conmutativos integrales distributivos

Teorema 3.25 *La categoría algebraica* RCID *es dualmente equivalente a la subcategoria completa de* DLFI* *cuyos espacios verifican las siguientes condiciones:*

1. $T = R$.

2. $R = R'$.

3. $\forall x, y, v, w \in X$, $((x, y, v, w) \in R \circ R) \Rightarrow ((x, v, y, w) \in R \circ R)$.

4. $\forall x \in X$, $\exists y \in X$, $(x, y, x) \in R$.

5. $\forall x, y, z \in X$, $(x, y, z) \in R \Rightarrow y \leq z$.

Demostración. Consideremos $\boldsymbol{A}$ una **DLFI**-álgebra. Por el teorema 3.24 tenemos que $\langle A, \circ, 1\rangle$ es un monoide conmutativo si y sólo si su espacio dual $X(\boldsymbol{A})$ satisface las condiciones *2* a *5*.

Probaremos que $\boldsymbol{A}$ satisface la condición (Res) (ver pag. 3.10) si y sólo si $T_{\boldsymbol{A}} = R_{\boldsymbol{A}}$.

Supongamos que $\boldsymbol{A}$ satsface (Res). Consideremos $P, Q \in X(\boldsymbol{A})$, entonces:

$$\begin{aligned} P \to Q &= \{x \in A : \exists p \in P,\ \exists q \in Q \text{ tales que } p \leq q \to x\} \\ &= \{x \in A : \exists p \in P,\ \exists q \in Q \text{ tales que } p \circ q \leq x\} \\ &= P \circ Q. \end{aligned}$$

Luego, $T_{\boldsymbol{A}} = R_{\boldsymbol{A}}$.

Para la recíproca supongamos que $T_{\boldsymbol{A}} = R_{\boldsymbol{A}}$ y sean $a, b, c \in A$. Por el lema 3.19 tenemos que:

$$\begin{aligned} a \circ b \leq c &\Leftrightarrow \forall P, Q \in X(\boldsymbol{A}) \text{ tales que } a \in P \text{ y } b \in Q,\ c \in P \circ Q \\ &\Leftrightarrow \forall P, Q \in X(\boldsymbol{A}) \text{ tales que } a \in P \text{ y } b \in Q,\ c \in P \to Q \\ &\Leftrightarrow a \leq b \to c. \end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{A}$ satisface (Res). ∎

Observemos que las condiciones 4 y 5 del teorema anterior en un **DLFI**-espacio son equivalentes a la condicion

$$\forall x, y \in X, (x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in X, (z, y, x) \in R).$$

Los **DLFI**-espacios que satisfacen las condiciones del teorema 3.25 serán llamados **RCID**-espacios. La subcategoría completa de DLFI* cuyos objetos son **RCID**-espacios será denotada RCID*.

MTL-álgebras e IMTL-álgebras

Recordemos que la variedad MTL de **MTL**-álgebras, introducida en [24], puede ser definida como la subvariedad de los reticulos residuados integrales comutativos cuyas algebras satisfacen la condición de prelinealidad:

$$\mathsf{MTL} = \mathsf{RCID} + \{(a \to b) \vee (b \to a) \approx 1\}.$$

Teorema 3.26 *La categoría algebraica* MTL *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* RCID* *cuyos espacios satisfacen:*

$$\forall x, y, z, v, w \in X\ ,\ ((x, y, z) \in T\ y\ (x, v, w) \in T) \Rightarrow (y \leq w\ o\ v \leq z).$$

Demostración. Inmediata del teorema 3.25, y del ítem 15 del teorema 3.20. ∎

Ahora estudiaremos las representación de la variedad IMTL de **IMTL**-álgebras. La variedad IMTL esta definida como:

$$\mathsf{IMTL} = \mathsf{MTL} + \{(a \to 0) \to 0 \approx a\}.$$

Para describir los espacios duales de las **IMTL**-álgebras necesitaremos algunos resultados previos[2].

Observemos que por ítem *2* del teorema 3.25, e ítem 1 del teorema 3.20, cada **RCID**-retículo satisface la identidad $a \preccurlyeq (a \to b) \to b$, en particular $a \preccurlyeq (a \to 0) \to 0$. Por ítems *4* y *5* del teorema 3.25, e ítems 10 y 11 del teorema 3.20, tenemos que cada **RCID**-retículo satisface la identidad:

$$a \approx 1 \to a.$$

Lema 3.27 ([24, Proposition 3]) *Cada* **MTL**-*álgebra es un producto subdirecto de* **MTL**-*álgebras totalmente ordenadas.*

Corolario 3.28 *La siguiente ecuación es válida en toda* **MTL**-*álgebra:*

$$(a \wedge b) \to c \approx (a \to c) \vee (b \to c).$$

Observación 3.29 *Una prueba del corolario anterior puede obtenerse de los resultados de los resultados de Hart, Raftery y Tsinakis en [35].*

Lema 3.30 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una* **DLI**-*álgebra y sea* $X = X(\boldsymbol{A})$ *y* $T = T_{\boldsymbol{A}}$. *Entonces*

$$\boldsymbol{A} \vDash 1 \to 0 \approx 0 \text{ si y sólo si } \forall P \in X,\ \exists Q \in X,\ T(P,Q) \neq \emptyset.$$

Demostración. Supongamos primero que $\boldsymbol{A}$ satisface $1 \to 0 \approx 0$. Sea $P \in X$. Por hipótesis $0 \notin P \to \{1\}$, entonces existen $Q, D \in X$ tales que $P \to Q \subseteq D \neq A$, es decir, $T(P,Q) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $1 \to 0 \neq 0$, entonces existe $P \in X$ tal que $1 \to 0 \in P$. Luego para cada $Q \in X$, $0 \in P \to Q$. Entonces $T(P,Q) = \emptyset$. ∎

Teorema 3.31 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una* **DLI**-*álgebra,* $X = X(\boldsymbol{A})$ *y* $T = T_{\boldsymbol{A}}$. *Supongamos que* $\boldsymbol{A}$ *satisface las siguientes identidades:*

1. $1 \to 0 \approx 0$.

2. $(a \wedge b) \to c \approx (a \to c) \vee (b \to c)$,

entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

a. $\boldsymbol{A} \vDash (a \to 0) \to 0 \preccurlyeq a$.

b. $\forall P, D \in X, (\forall Q \in X,\ T(P,Q) \neq \emptyset \Rightarrow T(Q,D) \neq \emptyset) \Rightarrow D \subseteq P$.

[2]En [37] y en [28] se pueden encontrar pruebas algebraicas de las propiedades que aqui presentamos. Incluimos aqui una demostración utilizando la representación por completitud y para observar como la dualidad y las correspondencias antes desarrolladas pueden servir como herramientas para estudiar algunas propiedades de los **RCID**-retículos.

Demostración. $a \Rightarrow b$) Sean $P, D \in X$ tales que para cada $Q \in X$, $T(P,Q) \neq \emptyset$ implica $T(Q,D) \neq \emptyset$, es decir., si $P \to Q \neq A$, entonces $Q \to D \neq A$. Sea $a \in D$. Probaremos que:

$$P \to [a \to 0) = A.$$

Supongamos que $P \to [a \to 0) \neq A$, entonces existe $Q \in X$ tal que $a \to 0 \in Q$ y $P \to Q \neq A$. Luego $Q \to D \neq A$. Pero $a \in D$ y $a \to 0 \in Q$, con lo cual $0 \in Q \to D$, lo cual es una contradicción.

Entonces $0 \in A = P \to [a \to 0)$, es decir, existe $p \in P$ tal que $p \leq (a \to 0) \to 0 \leq a$. Luego $a \in P$.

b $\Rightarrow$ a) Sea $a \in A$. Si $a = 0$, entonces por 1. $(0 \to 0) \to 0 = 1 \to 0 = 0 \leq 0 = a$ y el resultado se sigue. Supongamos que existe $a \neq 0$ tal que $(a \to 0) \to 0 \nleq a$. Luego existe $P \in X$ tal que $(a \to 0) \to 0 \in P$ y $a \notin P$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$N_P = \{Q \in X : P \to Q \neq A\}.$$

Por la condición *1* y el lema 3.30, tenemos que $N_P \neq \emptyset$. Ahora consideremos el conjunto

$$F = \{H \in Fi(\mathbf{A}) : a \in H \text{ y para cada } Q \in N_P,\ Q \to H \neq A\},$$

ordenado por inclusión. Como $(a \to 0) \to 0 \in P$, si $Q \in N_P$, entonces $a \to 0 \notin Q$. Luego $Q \to [a) \neq A$. Por lo tanto $[a) \in F$. Considermos ahora una cadena $\{H_i : i \in I\}$, en F con $I \neq \emptyset$. Sea $G = \bigcup \{H_i : i \in I\}$. Probemos que para cada $Q \in N_P$,

$$Q \to G \neq A.$$

Si suponemos lo contrario, existen $Q \in N_P$, $h \in G$ tales que $h \to 0 \in Q$. Como $h \in G$, existe $i_0 \in I$ tal que $h \in H_{i_0}$. Luego, $Q \to H_{i_0} = A$, lo cual contradice el hecho de que $H_{i_0} \in F$.

Por lo tanto, $G \in F$. Por el Lema de Zorn existe un elemento $D \in F$ maximal. Probaremos que $D \in X$. Supongamos que existen $b, c \in A$ tales que $b \vee c \in D$ y $b, c \notin D$ Consideremos los filtros $D_b = F(D \cup \{b\})$ y $D_c = F(D \cup \{c\})$. Ya que $D_b, D_c \notin F$, existen $Q_b, Q_c \in N_P$ tales que

$$Q_b \to D_b = A \text{ y } Q_c \to D_c = A.$$

Como $P \to Q_b \neq A$ y $P \to Q_c \neq A$, tenemos por la condición *2* y el ítem 6 del teorema 3.20, que existe $Q \in N_P$ tal que $Q_b \cup Q_c \subseteq Q$. Entonces $Q \to D_b = A = Q \to D_c$. Luego existen $q \in Q$ y $p_b, p_c \in D$, tales que $q \leq (p_b \wedge b) \to 0$ y $q \leq (p_c \wedge c) \to 0$. Consideremos $p = p_b \wedge p_c \in D$, por la condición *2* tenemos que:

$$\begin{aligned} q &\leq ((p \wedge b) \to 0) \wedge ((p \wedge c) \to 0) \\ &\leq ((p \wedge b) \vee (p \wedge c)) \to 0 \\ &\leq (p \wedge (b \vee c)) \to 0. \end{aligned}$$

Luego, $Q \to D = A$, lo cual contradice el hecho de que $D \in F$. Entonces D es un filtro primo y para cada $Q \in N_P$, $Q \to D \neq A$. Luego por hipótesis, $a \in D \subseteq P$, Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $(a \to 0) \to 0 \leq a$ para cada $a \in A$. ∎

Usando los teoremas 3.31 y 3.26 podemos concluir que:

Teorema 3.32 *La categoría algebraica* IMTL *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* RCID* *satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. $\forall x,y,z,v,w \in X$, $((x,y,z) \in T \ y \ (x,v,w) \in T) \Rightarrow (y \leq w \ or \ v \leq z)$.
2. $\forall x,y \in X$, $(\forall z \in X, T(x,z) \neq \emptyset \Rightarrow T(z,y) \neq \emptyset) \Rightarrow y \leq x$.

MV-algebras

Recordemos que las **MV**-álgebras pueden ser definidas como **MTL**-álgebras satisfaciendo la identidad:

$$(a \to b) \to b \approx (b \to a) \to a.$$

Teorema 3.33 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una* **DLI**-*álgebra. Si* $\boldsymbol{A}$ *verifica:*

1. $(a \wedge b) \to c \approx (a \to c) \vee (b \to c)$.
2. $1 \to a \preccurlyeq a$.

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. $\boldsymbol{A} \vDash (a \to b) \to b \preccurlyeq a \vee b$.

b. $\forall P \in X(\boldsymbol{A}), \forall b \notin P, \forall K \in X(\boldsymbol{A})$, $(\forall Q \in X(\boldsymbol{A}) \ (b \notin P \to Q \Rightarrow b \notin Q \to K)) \Rightarrow K \subseteq P$.

Demostración. $a \Rightarrow b$) Supongamos $P, K \in X(\boldsymbol{A})$ y $b \notin P$ son tales que para cada $Q \in X(\boldsymbol{A})$ siempre que $b \notin P \to Q$ entonces $b \notin Q \to K$. Sea $a \in K$, Si $(a \to b) \to b \notin P$, entonces existe $Q \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $a \to b \in Q$ y $b \notin P \to Q$. Luego $b \notin Q \to K$, lo cual ocntradice el hecho de que $a \in K$. Entonces $(a \to b) \to b \leq a \vee b \in P$. Como $b \notin P$ y P es un filtro primo. tenemos que $a \in P$. Entonces $K \subseteq P$.

$b \Leftarrow a$) Supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $(a \to b) \to b \not\leq a \vee b$. Entonces, existe $P \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $(a \to b) \to b \in P$ y $a \vee b \notin P$. Consideremos

$$N_{P,b} = \{Q \in X(\boldsymbol{A}) : b \notin P \to Q\},$$

por la condición *2* y el ítem 11 del teorema 3.20, tenemos que existe $Q \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $P \to Q \subseteq P$. Por lo tanto $N_{P,b} \neq \emptyset$. Ahora consideremos

$$F = \{F \in Fi(\boldsymbol{A}) : a \in F \text{ y } b \notin Q \to F, \text{ para cada } Q \in N_{P,b}\}.$$

Como $(a \to b) \to b \in P$ y $b \notin P \to Q$, Si $Q \in N_{P,b}$ entonces $a \to b \notin Q$. Luego tenemos que $b \notin Q \to [a)$, es decir,. $[a) \in F$. Por la condición *1* y utilizando el mismo argumento que la demostración del teorema 3.31 tenemos que existe $K \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $a \in K$ y para cada $Q \in N_{P,b}$, $b \notin Q \to K$. Luego $a \in K \subseteq P$, lo cual es una contradicción. Entonces, $(a \to b) \to b \leq a \vee b$, para cada $a, b \in A$. ∎

Es conocido (ver [24, pg 275]) que en toda **MTL**-álgebra se satisface la siguiente identidad:

$$a \vee b \approx ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a),$$

Esto también puede deducirse del teorema 3.23.

De esto tenemos que una en una **MTL**-álgebra $\boldsymbol{A}$, las siguientes porposiciones son equivalentes:

1. $\boldsymbol{A} \vDash (a \to b) \to b \preccurlyeq a \vee b$.

2. $\boldsymbol{A} \vDash (a \to b) \to b \approx (b \to a) \to a$.

Con esta observación y el teorema previo hemos probado que:

Teorema 3.34 *La categoría de* **MV***-algebras es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* RCID* *cuyos espacios satisfacen:*

1. $\forall\, x, y, z, v, w \in X,\ ((x, y, z), (x, v, w) \in T) \Rightarrow (y \leq w \ or\ v \leq z)$

2. $\forall x, z \in X\ \forall U \in \mathrm{D}(X)$
$((\forall y \in X, T(x, y) \cap U^c \neq \emptyset \Rightarrow T(y, z) \cap U^c \neq \emptyset) \Rightarrow (z \leq x\ o\ x \in U))$

3.4. Dualidad para subvariedades de WH-álgebras

En esta sección veremos como restringir la dualidad dada para las **DLI**-álgebras a las subvariedades de **WH**-álgebras mencionadas en la página 49. En la última sección de este capítulo veremos como se relacionan estas dualidades con las dadas por Jansana y Celani en [14].

Recordemos que una **WH**-álgebra es una **DLI**-álgebra que satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (a \to b) \wedge (b \to c) &\preccurlyeq a \to c, \\ a \to a &\approx 1. \end{aligned}$$

Utilizando el teorema 3.20 tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.35 *La categoría algebraica* WH *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen las siguientes condiciones*

1. $\forall x, y, z \in X, (x, y, z) \in T \Rightarrow (x, y, x, z) \in T \circ T'$.

2. $\forall x, y, z \in X,\ (x, y, z) \in T \Rightarrow y \leq z$.

La categoría algebraica TWH *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen las condiciones 1 y 2 anteriores y*

3. $\forall x, y, z, w \in X, (x, y, z, w) \in T \circ T \Rightarrow (x, z, w) \in T$.

La categoría algebraica Bas *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen la condición 1 anterior y*

4. $\forall x, y, z \in X,\ (x, y, z) \in T \Rightarrow x, y \leq z$.

La categoría algebraica RWH *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen las condiciónes 1 y 2 anteriores*

5. $\forall x \in X,\ (x, x, x) \in T$.

La categoría algebraica SRL *es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen las condiciones 1, 2, 3 y 5 anteriores.*

La categoría algebraica H *de las álgebras de Heyting es dualmente equivalente a la subcategoría completa de* DLI* *cuyos espacios satisfacen:*

6. $(x, y, z) \in T$ *si y sólo si* $x, y \leq z$.

3.5. Comparación con otras dualidades

Como anunciamos previamente, en esta sección estudiaremos la relación entre la dualidad desarrollada en [13] para **DLI DLF** y **DLFI**-álgebras y otras dualidades desarrolladas para retículos distributivos con operaciones de fusión y/o implicación. Todas las dualidades aquí estudiadas estan basadas en la dualidad de Priestley para retículos distributivos (acotados o no) y agregan operaciones o relaciones a la estructura de los espacios de Priestley para recuperar las operaciones de implicación y fusión.

Resaltamos entre las subsecciones siguientes a la referida a las álgebras Relevantes, donde desarrollaremos un teorema de correspondecia automática que amplia los resultados de Urquhart dados en [59].

3.5.1. Álgebras relevantes

La dualidad desarrollada por Celani en [13] es una extensión de la dualidad generada por A. Urquhart en [59]. Urquhart describe una dualidad para álgebras relevantes las cuales son **DLFI**-álgebras con un antihomomorfismo (una negación de Ockham) y un elemento distinguido. Es facil comprobar que la siguiente definición de álgebra relevante es equivalente a la dada en [59, Section 2].

Definición 3.36 *Un álgebra* $\boldsymbol{R} = \langle R, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, \neg, e, 1, 0\rangle$ *es un* ***álgebra relevante*** *si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\langle R, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, 0, 1\rangle$ *es una* **DLFI**-*álgebra,*
2. $\langle R, \wedge, \vee, \neg, 1, 0\rangle$ *es un álgebra de Ockham,*
3. $e \circ a = a$, *para cada* $a \in R$,
4. *Para cada* $a, b, c \in R$
$$a \circ b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \rightarrow c.$$

Como en cada álgebra relevante la implicación es el residuo a izquierda de la fusión, Urquhart utiliza la misma relación ternaria para representar la implicación (ver teorema 3.25). Esta relación ternaria se define de la misma manera que la dada por Celani en para representar la fusión. Utilizando la notación de esta tesis podemos reescribir la siguiente definición.

Definición 3.37 ([59, Page 268]) *Un* ***espacio relevante*** *es una estructura* $\langle X, \leq, \tau, R, f, U\rangle$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\langle X, \leq, \tau, R\rangle$ *es un* **DLI** *y un* **DLF**-*espacio,*
2. $\langle X, \leq, \tau, f\rangle$ *es un espacio de Ockham,*
3. $U \in \mathrm{D}(X)$ *y satisface* $\forall y, z \in X\,(y \leq z \Leftrightarrow \exists x\,(x \in U \ \&\ (x, y, z) \in R))$.

Por ende, la dualidad dada en [13] para **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras es claramente el desglosamiento del fragmento fusión y/o implicación la dualidad dada por Urquhart [59].

En el Teorema 4.3 de [59], Urquhart prueba un teorema correspondencia automatica entre la validez de ecuaciones en el reducto de $\langle R, \circ, e\rangle$ y la válidez de las correspondientes ecuaciones en el conjunto de los cerrados crecientes del dual con las operaciones adecuadas. Veamos que ciertos resultados aun más amplio son válidos en las **DLF** y **DLFI**-álgebras y que restringidos al caso de las álgebras relevantes son una generalización del mencionado resultado de Urquhart.

Primero necesitaremos algunas definiciones y resultados.

Denotaremos $C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$ al conjunto de cerrados crecientes de $\mathrm{P}(\boldsymbol{A})$. Por la observación 2.6 podemos ver que la operación $*$ deifnida por $U * V = R_{\boldsymbol{A}}(U, V)$ para cada $U, V \in C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$, es cerrada en $C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$.

Por el resto de esta sección $\boldsymbol{A}$ será una **DLF**-álgebra y e un elemento de A.

Lema 3.38 *La función $\eta : Fi(\boldsymbol{A}) \to C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$ definida por $\eta(F) = \{P \in X(A) : F \subseteq P\}$ es un isomorfismo $\langle Fi(\boldsymbol{A}), \circ, [e]\rangle$ en $\langle C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})), *, \sigma_{\boldsymbol{A}}(e)\rangle$,*

Lema 3.39 *La función $\kappa : A \to Fi(\boldsymbol{A})$ donde $\kappa(a) = [a)$ es un homomorfismo inyectivo de $\langle A, \circ, e\rangle$ en $\langle Fi(\boldsymbol{A}), \circ, [e]\rangle$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\kappa} & Fi(\boldsymbol{A}) \\ & \sigma_{\boldsymbol{A}} \searrow & \downarrow \eta \\ & & C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})) \end{array}$$

De los lemas anteriores deducimos que toda ecuación en el lenguaje $\{\circ, c\}$, donde $\circ$ es un símbolo de operación binaria y c es un símbolo de constante, válida en $\langle C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})), *, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}(e)\rangle$ es válida en $\langle A, \circ, e\rangle$.

En el próximo teorema veremos que la recíproca es válida. Para ello primero necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.40 *Sea $s(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula en el lenguaje $\{\circ, c\}$ y sean $s^{\boldsymbol{A}}$ y $s^{Fi(\boldsymbol{A})}$ las interpretaciones de la fórmula s en $\langle A, \circ, e\rangle$ y $\langle Fi(\boldsymbol{A}), \circ, [e]\rangle$ respectivamente. Entonces para cada $F_1, \ldots, F_n \in Fi(\boldsymbol{A})$ y cada $a \in A$ tenemos que*

$$s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1, \ldots, F_n) = \left\{a \in A : \textit{Existen } a_1 \in F_1, \ldots, a_n \in F_n,\ s^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) \leq a\right\} \qquad \text{(K)}$$

Demostración. Primero observemos que como s es una fórmula en el lenguaje $\{\circ, c\}$ es facil probar qúe $s^{\boldsymbol{A}}$ y $s^{Fi(\boldsymbol{A})}$ son crecientes en cada coordenada.

Supongamos que existen $a_1 \in F_1, \ldots, a_n \in F_n$ tales que $s^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) \leq a$. Por lo tanto

$$a \in [s(a_1, \ldots, a_n)) = \eta(s(a_1, \ldots, a_n)).$$

Como η es un homomorfismo es fácil ver que $\eta(s(a_1, \ldots, a_n)) = s^{Fi(\boldsymbol{A})}([a_1), \ldots, [a_n))$ y por la observación al comienzo de esta demostración $a \in s^{Fi(\boldsymbol{A})}([a_1), \ldots, [a_n)) \subseteq s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1, \ldots, F_n)$. Entonces

$$\left\{a \in A : \text{Existen } a_1 \in F_1, \ldots, a_n \in F_n,\ s^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) \leq a\right\} \subseteq s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1, \ldots, F_n)$$

para cada $F_1, \ldots, F_n \in Fi(\boldsymbol{A})$.

Probaremos la otra inclusión por inducción en la formación de s.

Supongamos primero que s es la constante c, por lo tanto $s^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) = e$ para cada $a_1,\ldots,a_n \in A$, en particular $s^{\boldsymbol{A}}(1,\ldots,1) = e$. A su vez $s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) = [e)$. Por lo tanto si $a \in s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n)$, como $1 \in F_i$ para cada i y $s^{\boldsymbol{A}}(1,\ldots,1) = e \leq a$, el resultado se sigue.

Supongamos ahora que s es la variable x_i con $1 \leq i \leq n$. Entonces $s^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a_i$ y $s(F_1,\ldots,F_n) = F_i$. Si $a \in s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) = F_i$, entonces si fijamos

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j \neq i \\ \\ a & \text{si} \quad j = i \end{cases}$$

$s^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a \leq a$ y cada $a_i \in F_i$, y el resultado se sigue.

Por último, supongamos que $s = \alpha \circ \beta$ y α, β son fórmulas que satisfacen la condición (K).

Observemos que

$$\begin{array}{rl} a \in s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) & \text{si y sólo si} \quad a \in (\alpha \circ \beta)^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \\ \text{si y sólo si} & a \in \alpha^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \circ \beta^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \\ \text{si y sólo si} & \text{existen } b \in \alpha^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \text{ y } c \in \beta^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \text{ y } b \circ c \leq a. \end{array}$$

Por hipótesis, existen $b_1, c_1 \in F_1, \ldots, b_n, c_n \in F_n$, cumpliendo que $\alpha^{\boldsymbol{A}}(b_1,\ldots,b_n) \leq b$ y $\beta^{\boldsymbol{A}}(c_1,\ldots,c_n) \leq c$. Definiendo $a_i = b_i \wedge c_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, claramente $a_1 \in F_1, \ldots, a_n \in F_n$ y por la observación al comienzo de esta demostración tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) &\leq \alpha^{\boldsymbol{A}}(b_1,\ldots,b_n) \leq b \text{ y} \\ \beta^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) &\leq \beta^{\boldsymbol{A}}(c_1,\ldots,c_n) \leq c \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) \circ \beta^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) = s^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) \leq b \circ c \leq a$. Conluimos que:

$$s^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n) \subseteq \left\{a \in A : \text{Existen } a_1 \in F_1,\ldots,a_n \in F_n,\ s^{\boldsymbol{A}}(a_1,\ldots,a_n) \leq a\right\}$$

■

Teorema 3.41 *Sean t y u dos fórmulas en el lenguaje $\{\circ, c\}$ entonces $\langle A, \circ, e\rangle \vDash t \preceq u$ si y sólo si $\langle C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})), *, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}(e)\rangle \vDash t \preceq u$.*

Demostración. Ya observamos que si $\langle C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})), *, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}(e)\rangle \vDash t \preceq u$, entonces tenemos que $\langle A, \circ, e\rangle \vDash t \preceq u$.

Para la recíproca, supongamos que $\langle A, \circ, e\rangle \vDash t \preceq u$. Por el lema 3.38 debemos probar que $\langle Fi(\boldsymbol{A}), \circ, [e)\rangle \vDash u \preceq t$. Consideremos que $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es el conjunto de variables que aparecen en u y en t, $\{y_1,\ldots,y_m\}$ las variables de u que no estan en t y $\{z_1,\ldots,z_l\}$ las variables de t que no estan en u.

Sean $F_1,\ldots,F_n,G_1,\ldots,G_m,H_1,\ldots,H_l \in Fi(\boldsymbol{A})$. Debemos probar que

$$u^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n,G_1,\ldots,G_m) \subseteq t^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n,H_1,\ldots,H_l).$$

Sea $a \in u^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1,\ldots,F_n,G_1,\ldots,G_m)$. Por el lema 3.40, existen $f_1 \in F_1,\ldots,f_n \in F_n$, y $g_1 \in G_1,\ldots,g_m \in G_m$ tales que $u^{\boldsymbol{A}}(f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m) \leq a$. Por hipótesis,

$$t^{\boldsymbol{A}}(f_1,\ldots,f_n,1,\ldots,1) \leq u^{\boldsymbol{A}}(f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m) \leq a.$$

Como $1 \in H_i$ para cada $1 \leq i \leq l$, nuevamente por el lema 3.40, $a \in t^{Fi(\boldsymbol{A})}(F_1, \ldots, F_n, H_1, \ldots, H_l)$. ■

Veamos ahora como se relaciona el resultado anterior con las demostraciones dadas en el teorema 3.24.

Teorema 3.42 *Sean t y u dos fórmulas en el lenguaje $\{\circ, c\}$ tales que cada variable en t aparece sólo una vez. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\langle A, \circ, e\rangle \vDash t \preceq u$.
2. $\forall P_1, \ldots, P_n \in X(\boldsymbol{A})$, $t^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}([P_1], \ldots, [P_n]) \subseteq u^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}([P_1], \ldots, [P_n])$, *considerando que las variables de t y u estan contenidas $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Demostración. Por el teorema 3.41 sólo debemos demostrar que la condición *2* es equivalente a

$$\langle C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A})), *, \varepsilon_{\boldsymbol{A}}(e)\rangle \vDash t \preceq u. \tag{1'}$$

Claramente *1* implica *2 ya que cada* $[P_i) \in C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$.

Para la demostrar la reciproca, supongamos que se satisface la condición *2* y consideremos $A_1, \ldots, A_n \in C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$. Debemos probar que $t^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}(A_1, \ldots, A_n) \subseteq u^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}(A_1, \ldots, A_n)$.

Sea $P \in t^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}(A_1, \ldots, A_n)$. Como cada variable en t aparece sólo una vez, entonces existen $P_1 \in A_1, \ldots, P_n \in A_n$ tales que $P \in t^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}([P_1), \ldots, [P_n))$. Por hipótesis y como cada $[P_i) \subseteq A_i$ tenemos que $P \in u^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}([P_1), \ldots, [P_n)) \subseteq u^{C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))}(A_1, \ldots, A_n)$. ■

Ahora bien si identificamos cada $P \in X(\boldsymbol{A})$ con $\eta(P) = [P)$, como $\eta(P \circ Q) = R(P, Q)$ podemos observar que los resultados expresados en el teorema 3.24 se pueden probar utilizando el resultado anterior, identifican e con 1 en el caso de los ítems 4 a 7.

Como ejemplo el veamos el ítem 1 del teorema 3.24. Utilizando el teorema anterior tenemos que $\boldsymbol{A} \vDash (a \circ b) \circ c \preccurlyeq a \circ (b \circ c)$ si y sólo si

$$\begin{array}{ll} & \forall P, Q, Z \in X(\boldsymbol{A}), (\eta((P \circ Q) \circ Z) \subseteq \eta(P \circ (Q \circ Z))) \\ \text{si y sólo si} & \forall P, Q, Z \in X(\boldsymbol{A}), R(R(P, Q), Z) \subseteq R(P, R(Q, Z)) \\ \text{si y sólo si} & \forall P, Q, Z, W \in X(\boldsymbol{A}), (P, Q, Z, W) \in R \circ R \Rightarrow (Q, Z, P, W) \in R \circ R'. \end{array}$$

3.5.2. Retículos implicativos I

En [41], N.G. Martínez desarrolla una equivalencia dual entre los retículos implicativos y los espacios de Priestley acotados con una familia de funciones binarias. Simplifica sus resultados en [42], asociando a cada retículo implicativo un espacio de Priestley con una función binaria. Recordemos la definición de retículo implicativo..

Definición 3.43 *Un **retículo implicativo** es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow\rangle$ de tipo $(2, 2, 2)$ tal que $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo y satisface las siguientes ecuaciones:*

1. $a \rightarrow (b \wedge c) \approx (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.
2. $(a \vee b) \rightarrow c \approx (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$.

3. $a \to (b \vee c) \approx (a \to b) \vee (b \to c)$.

4. $(a \wedge b) \to c \approx (a \to c) \vee (b \to c)$.

Diremos que $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es un retículo implicativo acotado si el reducto $\langle A, \wedge, \vee, \to\rangle$ es un retículo implicativo y $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado.

En [42], Martinez define para cada retículo implicativo la función $\Phi : S(\boldsymbol{A}) \times S(\boldsymbol{A}) \to S(\boldsymbol{A})$ mediante:

$$\Phi(P, Q) = \bigcup_{x \in P} \{y : x \to y \in Q\}.$$

Donde $S(\boldsymbol{A}) = X(\boldsymbol{A}) \cup \{\emptyset, A\}$.

Los ítems 6 y 13 del teorema 3.20 dan condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio dual $\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, \tau, T_{\boldsymbol{A}}\rangle$ para que una **DLI**-álgebra $\boldsymbol{A}$ sea un retículo implicativo acotado.

De igual manera podemos encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre $\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, \tau, \Phi\rangle$ para que un retículo distributivo acotado sea una **DLI**-álgebra..Se sigue de las definiciones 3.1 y 3.43 que un retículo implicativo acotado es una **DLI**-álgebra si y sólo si las condiciones $a \to 1 \approx 1$ y $0 \to a \approx 1$ se verifican en $\boldsymbol{A}$.

Dado un retículo implicativo acotado $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$, es facil probar que

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} \vDash a \to 1 = 1 \text{ si y sólo si } \forall P, Q \in X(\boldsymbol{A}),\ \Phi(P, Q) \neq \emptyset. \\ &\boldsymbol{A} \vDash 0 \to a = 1 \text{ si y sólo si } \forall Q \in X(\boldsymbol{A}),\ \Phi(A, Q) = A. \end{aligned} \tag{B}$$

Si $\boldsymbol{A}$ es una **DLI**-álgebra que satisface los ítems 3 y 4 de la definición 3.43, $P \to Q \in X(\boldsymbol{A})$ para cada $P, Q \in X(\boldsymbol{A})$. Luego $T_{\boldsymbol{A}}(P, Q)$ es un conjunto creciente principal. Utilizando las correspondencias (B) y las observaciones previas tenemos que la función Φ puede ser descripta por medio de la relación ternaria $T_{\boldsymbol{A}}$ como sigue:

$$\Phi(P, Q) = \begin{cases} A & \text{si } P = A \text{ y } Q \neq \emptyset, \\ A & \text{si } Q = A \text{ y } P \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{si } P = \emptyset \text{ o } Q = \emptyset, \\ D & \text{si } P, Q \in X(\boldsymbol{A}) \text{ y } T_{\boldsymbol{A}}(P, Q) = [D). \end{cases}$$

En el otro sentido se sigue directamente $P, Q \in X(\boldsymbol{A})$, $\Phi(P, Q) = Q \to P$ (ver página 50). Entonces la relación ternaria $T_{\boldsymbol{A}}$ (definición 3.11) puede ser recuperada utilizando Φ como sigue

$$(P, Q, D) \in T_{\boldsymbol{A}} \text{ si y sólo si } \Phi(Q, P) \subseteq D.$$

3.5.3. Retículos Implicativos II

En [43] N.G. Martinez y H.A. Priestley desarrollan una equivalencia dual entre la categoría algebraica de los retículo implicativos y los espacios de Priestley acotados con una función especial. Si $\boldsymbol{A}$ es un retículo implicativo la función $\mu : D(S(\boldsymbol{A})) \times S(\boldsymbol{A}) \longrightarrow S(\boldsymbol{A})$ se define por

$$\mu(\beta_{\boldsymbol{A}}(a), P) = P_a = \{x \in A : x \to a \notin P\}.$$

Donde $\beta_{\boldsymbol{A}}(a) = \{F \in S(\boldsymbol{A}) : a \in F\}$.

Como en (B) podemos dar condiciónes dobre μ que son equivalentes al hecho de que el retículo implicativo acotado sea una **DLI**-álgebra. En efecto, se puede probar que,

$$\boldsymbol{A} \vDash a \to 1 = 1 \text{ si y sólo si } \forall P \in S(\boldsymbol{A}) \setminus \{\emptyset\}, \mu(\beta_{\boldsymbol{A}}(1), P) = \emptyset,$$
$$\boldsymbol{A} \vDash 0 \to a = 1 \text{ si y sólo si } \forall P \in S(\boldsymbol{A}) \setminus \{\emptyset\}, \mu(\beta_{\boldsymbol{A}}(0), P) \neq A.$$

Es fácil ver que P_a es el elemento maximal de $S(\boldsymbol{A})$ tal que $a \notin P \to P_a$. Dado un retículo implicativo acotado $\boldsymbol{A}$ que a su vez es una **DLI**-álgebra, si $P \in X(\boldsymbol{A})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\{Q \in X(A) : T(P,Q) \cap \beta_{\boldsymbol{A}}^{c}(a) \neq \emptyset\} &= \{Q : a \notin P \to Q\} \\ &= \{Q : \forall x \in Q,\ x \to a \notin P\} \\ &= (P_a].\end{aligned}$$

Se sigue de esto que en el caso que un retículo implicativo sea también una **DLI**-álgebra μ puede ser obtenida como sigue:

$$\mu(\beta(a), P) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } P = A, \\ A & \text{si } P = \emptyset, \\ D & \text{si } P \in X(A) \text{ y } \{Q \in X(\boldsymbol{A}) : T(P,Q) \cap \beta_{\boldsymbol{A}}^{c}(a) \neq \emptyset\} = (D]. \end{cases}$$

Luego claramente las función μ puede ser obtenida mediante la relación ternaria $T_{\boldsymbol{A}}$.

A su vez, si definimos $T_\mu \subseteq (X(\boldsymbol{A}))^3$ como

$$(P,Q,D) \in T_\mu \text{ si y sólo si } D \in \bigcap \{\beta_{\boldsymbol{A}}(a) : a \in A \text{ y } Q \nsubseteq P_a\}$$

entonces $T_\mu = T_{\boldsymbol{A}}$. Ya que $a \in P \to Q$ si y sólo si existe $x \in Q$ tal que $x \to a \in P$ si y sólo si $Q \nsubseteq P_a$, tenemos que $P \to Q \subseteq D$ si y sólo si $a \in D$, es decir, $D \in \beta_{\boldsymbol{A}}(a)$ para cada.a tal que $Q \nsubseteq P_a$, lo cual equivale a $D \in \bigcap \{\beta_{\boldsymbol{A}}(a) : a \in A \text{ y } Q \nsubseteq P_a\}$.

3.5.4. WH-álgebras

Veamos como se relacionan la dualidad dada por Celani y Jansana en [14] para las **WH**-álgebras con la desarrollada en [13] para las **DLI**-álgebras.

Dada una **WH**-álgebra $\boldsymbol{A}$, en [14] Celani y Jansana definen una relación binaria sobre $X(\boldsymbol{A})$ como sigue:

$$(P,Q) \in S_{\boldsymbol{A}} \Leftrightarrow \forall a, b \in A, (a \to b \in P \ \&\ a \in Q) \Rightarrow b \in Q. \tag{3.1}$$

Proposición 3.44 *Sea $\boldsymbol{A}$ una* **WH***-álgebra y sea $T_{\boldsymbol{A}}$ la relación ternaria sobre $X(\boldsymbol{A})$ definida en 3.11 y $S_{\boldsymbol{A}}$ la relación arriba mencionada. Entonces:*

1. *$(P,Q) \in S_{\boldsymbol{A}}$ si y sólo si $(P,Q,Q) \in T_{\boldsymbol{A}}$.*
2. *$(P,Q,D) \in T_{\boldsymbol{A}}$ si y sólo si $\exists F \in X(\boldsymbol{A})$, $Q \subseteq F \subseteq D$ and $(P,F) \in S_{\boldsymbol{A}}$.*

Demostración. La prueba de 1. se sigue directamente de las definiciones.
Supongamos que $(P, Q, D) \in T_{\boldsymbol{A}}$. Consideremos el conjunto

$$H = \{Z \in X(\boldsymbol{A}) : (P, Z, D) \in T_A \ \& \ Q \subseteq Z\},$$

ordenado por la inclusión. Por el lema de Zorn y el teorema 3.18, podemos probar que H tiene un elemento maximal.

Sea F un elemento maximal de H. Como $(P, F, D) \in T_A$ y $\boldsymbol{A}$ es una **WH**-álgebra por el teorema 3.20 ítem 14, existe F_1 tal que $(P, F, F_1), (P, F_1, D) \in T_{\boldsymbol{A}}$. Entonces $F \subseteq F_1 \in H$. Por la maximalidad de F en H, tenemos que $F_1 = F$ y luego $(P, F, F) \in T_{\boldsymbol{A}}$, es decir, $(P, F) \in S_{\boldsymbol{A}}$. Como $F \in H$, $Q \subseteq F$ y por el ítem 8 del teorema 3.20 y (P, F, D), tenemos que $F \subseteq D$.

Supongamos ahora que $P, Q, D \in X(\boldsymbol{A})$ son tales que existe $F \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $Q \subseteq F \subseteq D$ y $(P, F) \in S_{\boldsymbol{A}}$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \to b \in P$ y $a \in Q$. Entonces $b \in F$, y como $(P, F) \in S_{\boldsymbol{A}}$, $b \in F$. Luego, $b \in D$. Por lo tanto, $(P, Q, D) \in T_{\boldsymbol{A}}$. ∎

Dado que la variedad de **WH**-álgebras es una subvariedad de DLI y las observaciones previas, podemos concluir que las dualidad dada en [14] es interdefinible con la dualidad dada en [13] restringida a este caso, utilizando los resultados de esta tesis.

En [14] se dan condiciones necesarias y suficientes en el espacio dual para que una **WH**-álgebra pertenezca a las Variedades TWH, RWH, Bas, SRL y H. Utilizando las observaciones de esta sección se pueden ver que estas condiciones son análogas a las dadas en el teorema 3.35.

Parte II

Lógicas con implicación y fusión

Capítulo 4

Preliminares

"... el pensamiento es privativo de quien lo crea,
y sólo se transforma en propiedad social
si se lo comunica a través del lenguaje."

Gregorio Klimovsky,
Las desventuras del conocimiento cientfico.

Todas las observaciones realizadas para el capítulo de preliminares de la primer parte de esta tesis son válidas para este capítulo. En este capítulo presentaremos las definiciones y herramientas de lógica álgebraica que utilizaremos durante esta parte del trabajo. Este capítulo esta dividido en tres secciones. En la primera fijaremos lo que entenderemos en esta tesis por sistema deductivo o lógica, y estableceremos la notación fundamental para el resto de este trabajo. En la segunda sección hacemos un breve resumen de las técnicas mediante las cuales asignamos a una lógica o sistema deductivo diferentes clases de álgebras, junto con álgunas definiciones necesarias de la jerarquía de Leibniz. Y en la última sección veremos el método general mediante el cual luego definiremos las lógicas asociadas a las **DLFI**, **DLF** y **DLI**-álgebras.

4.1. Sistemas deductivos

Dado lenguaje algebraico, $\mathcal{L}$ recordemos que denotamos con $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ al álgebra absolutamente libre sobre $\mathcal{L}$ con una cantidad numerable de generadores libres que llamamos **variables**. Los elementos de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ son llamados fórmulas y una **sustitución** es simplemente un homomorfismo de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ en si misma.

Definición 4.1 *Un **sistema deductivo fintiario** en el lenguaje $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}) \times \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ es una relación de consecuencia invariante bajo susituciones, es decir, satisface las siguientes propiedades para cada $\varphi, \psi \in \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ y $\Gamma, \Sigma \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$:*

1. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ *siempre que* $\varphi \in \Gamma$,
2. *si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ *para cada* $\varphi \in \Sigma$ *y* $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, *entonces* $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$,

3. si h es una sustitución y $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $h(\Gamma) \vdash_{\mathcal{S}} h(\varphi)$,

4. para cada $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ existe Γ' un suconjunto finito de Γ tal que $\Gamma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Todos los sistemas deductivos que trataremos en esta tesis son finitarios, por lo tanto omitiremos el adjetivos y nos referiremos a estos simplemente como sistemas deductivos.

En la definición anterior estamos considerando relaciones de consecuencia entre conjuntos de fórmulas y fórmulas en lugar de entre secuencias de fórmulas, esto es porque todos los sistemas deductivos que consideraremos satisfacen las propiedades estructurales de idempotencia, contracción e intercambio (para referencias sobre lógicas substructurales recomendamos [45] o [46]).

Dado un sistema deductivo $\mathcal{S}$, un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ es llamado una **$\mathcal{S}$-teoría** siempre que sea cerrado bajo la relación de consecuencia, es decir, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma$. El conjunto de $\mathcal{S}$-teorías es denotado $Th(\mathcal{S})$.

Si $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, notamos $Cn(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$ a la menor $\mathcal{S}$-teoría que contiene al conjunto Γ. Si $\Gamma = \{\varphi\}$, escribiremos $Cn(\Gamma) = Cn(\varphi)$ y si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, denotaremos con $Cn(\Gamma, \varphi)$ al conjunto $Cn(\Gamma \cup \{\varphi\})$. Usualmente notaremos $\varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ en lugar de $\{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ y $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ en lugar de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.

Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son sistemas deductivos de tipo $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$' respectivamente. Diremos que $\mathcal{S}'$ es una **extensión** de $\mathcal{S}$ si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ y $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq \vdash_{\mathcal{S}'}$. $\mathcal{S}'$ es una **expansión** de $\mathcal{S}$ si $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}'$ y $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq \vdash_{\mathcal{S}'}$, y $\mathcal{S}'$ es una **expansión conservativa** de $\mathcal{S}$ si es una expansión y para cada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}'} \varphi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

En esta tesis un **secuente** de tipo $\mathcal{L}$ será un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, donde Γ es un subconjunto de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ y φ es una fórmula. Denotaremos con $\mathbf{Seq}_{\mathcal{L}}$ al conjunto de secuentes de tipo $\mathcal{L}$. Observemos que un sistema deductivo $\mathcal{S}$ de tipo $\mathcal{L}$ esta determinado por los secuentes $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ tales que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Usualmente notaremos al par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ con $\Gamma \vdash \varphi$ y diremos que un sistema deductivo $\mathcal{S}$ satisface un secuente $\Gamma \vdash \varphi$, o que $\Gamma \vdash \varphi$ es un secuente de $\mathcal{S}$, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Una **regla de Gentzen**, o simplemente regla, es un par $\langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$ donde Π es un conjunto finito de secuentes (posiblemente vacio) y $\Gamma \vdash \varphi$ es un secuente.

4.2. Matrices y matrices generalizadas

Una **matriz** es un par $\langle \boldsymbol{A}, F \rangle$ donde $\boldsymbol{A}$ es un álgebra con universo A y $F \subseteq A$. Dado un sistema deductivo $\mathcal{S}$ y un álgebra $\boldsymbol{A}$, ambos del mismo tipo $\mathcal{L}$, un conjunto $F \subseteq A$ es llamado un **$\mathcal{S}$-filtro** si para cada homomorfismo h de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ en $\boldsymbol{A}$, y cada conjunto de fórumlas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $h(\Gamma) \subseteq F$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $h(\varphi) \in F$, es decir, si $h^{-1}(F) \in Th(\mathcal{S})$. Denotaremos al conjunto de $\mathcal{S}$-filtros de un álgebra $\boldsymbol{A}$ con $Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$. El conjunto de $\mathcal{S}$-filtros del álgebra de fórmulas $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ es exactamente $Th(\mathcal{S})$. Una matriz $\langle \boldsymbol{A}, F \rangle$ es una **matriz modelo** de un sistema deductivo $\mathcal{S}$ si F es un $\mathcal{S}$-filtro de $\boldsymbol{A}$.

Dada una matriz $\langle \boldsymbol{A}, F \rangle$, la **congruencia de Leibniz** de F relativa a $\boldsymbol{A}$, denotada por $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, es la mayor congruencia de $\boldsymbol{A}$ compatible con F, esto es si $\langle a, b \rangle \in \Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$, $a \in F$ si y sólo si $b \in F$. La función $\Omega_{\boldsymbol{A}} : \mathcal{P}(A) \to Con(\boldsymbol{A})$ es llamada el **operador de Leibniz** *en* $\boldsymbol{A}$. Una matriz $\langle \boldsymbol{A}, F \rangle$ se dirá **reducida** si $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F)$ es la relación identidad.

Dado un sistema deductivo $\mathcal{S}$, la clase de álgebras usualmente asociada a $\mathcal{S}$ es:

$$Alg^{*}\mathcal{S} = \{\boldsymbol{A} : \exists F \in Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}),\ \langle \boldsymbol{A}, F \rangle \text{ es reducida}\}.$$

Una **matriz generalizada** (g-matriz para abreviar) es un par $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ donde $\boldsymbol{A}$ es un álgebra y $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos cerrada bajo intersecciónes arbitrarias y bajo uniones de subfamilias dirigidas superiormente (para la relación de inclusión). La familia $\mathcal{C}$ define un operador de clausura $Clo_{\mathcal{C}}$ en A por medio de $Clo_{\mathcal{C}}(X) = \bigcap \{F \in \mathcal{C} : X \subseteq F\}$, para cada $X \subseteq A$.

Para cada sistema deductivo $\mathcal{S}$ y cada álgebra $\boldsymbol{A}$ del mismo tipo $\langle \boldsymbol{A}, Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}) \rangle$ es una g-matriz. Una g-matriz $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ es un **g-modelo** de un sistema deductivo $\mathcal{S}$ si $h(\varphi) \in Clo_{\mathcal{C}}(h(\Gamma))$ para cada $h \in Hom(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, \boldsymbol{A})$ y cada $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, es decir, $\mathcal{C} \subseteq Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$. Por la propiedad de invariacia bajo sustituciones de todo sistema deductivo $\mathcal{S}$, la g-matriz $\langle \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, Th(\mathcal{S}) \rangle$ es un g-modelo de $\mathcal{S}$.

Dada una g-matriz $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$, la **congruencia de Tarski** de $\mathcal{C}$ relativa a $\boldsymbol{A}$, definida por :

$$\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C}) = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} \Omega_{\boldsymbol{A}}(F),$$

es la mayor congruencia de $\boldsymbol{A}$ compatible con cada $F \in \mathcal{C}$. Una g-matriz $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ se dirá una **g-matriz reducida** si $\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C})$ es la relación identidad.

Sea $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ una g-matriz y $\rho : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C})$ la proyección canónica sobre el álgebra cociente. La g-matriz $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ se dira un **g-modelo pleno** de un sistema deductivo $\mathcal{S}$ siempre que sea válida la siguiente igualdad:

$$\left\{ \rho(F) \subseteq \boldsymbol{A}/\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C}) : F \in \mathcal{C} \right\} = Fi_{\mathcal{S}}\left(\boldsymbol{A}/\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C}) \right).$$

Dado un sistema deducctivo $\mathcal{S}$, definimos la clase de álgebra $Alg\mathcal{S}$ asociadas con $\mathcal{S}$ por:

$$Alg\mathcal{S} = \{ \boldsymbol{A} : \langle \boldsymbol{A}, Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A}) \rangle \text{ es reducida} \}.$$

Existe aun otra clase de álgebras usualmente asociada a un sistema deductivo $\mathcal{S}$, y es la variedad generada por el álgebra de Lindembaum-Tarski $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\widetilde{\Omega}_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S}))$, usualmente denotada $\mathrm{K}_{\mathcal{S}}$. La relación entre las diferentes clases asociadas a un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es la siguiente:

$$Alg^*\mathcal{S} \subseteq Alg\mathcal{S} \subseteq \mathrm{K}_{\mathcal{S}}.$$

Más aún,

$$\begin{array}{lcl} Alg\mathcal{S} & = & \mathbb{P}s(Alg^*\mathcal{S}) \\ \mathrm{K}_{\mathcal{S}} & = & \mathbb{V}(Alg\mathcal{S}) \quad = \quad \mathbb{V}(Alg^*\mathcal{S}) \end{array}$$

donde $\mathbb{P}s(Alg^*\mathcal{S})$ es la clausura mendiante imagenes isomorfas de productos subdirectos de elementos de $Alg^*\mathcal{S}$.

Dada $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ una g-matriz, la **relación de Frege** en $\mathcal{C}$ es:

$$\Lambda_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C}) = \{ \langle a, b \rangle : Clo_{\mathcal{C}}(a) = Clo_{\mathcal{C}}(b) \}$$

Si $\Lambda_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C}) = \widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C})$ diremos que $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ tiene la **propiedad de congruencia**. Observemos que si $\mathcal{S}$ es un sistema deductivo, $\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S})) = \{ \langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi \ \& \ \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \}$. Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es llamado **autoextensional** si $\langle \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, Th(\mathcal{S}) \rangle$ tiene la propiedad de congruencia. $\mathcal{S}$ es llamado **plenamente autoextensional** si cada g-modelo pleno $\mathcal{S}$ tiene la propiedad de congruecia. $\mathcal{S}$ se dirá **Fregeano** si para cada $\Gamma \in Th(\mathcal{S})$, la g-matriz $\left\langle \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, Th(\mathcal{S})^{\Gamma} \right\rangle$

tiene la propiedad de congruencia, donde $Th(\mathcal{S})^{\Gamma} = \{\Delta \in Th(\mathcal{S}) : \Gamma \subseteq \Delta\}$. Observemos que $\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}\left(Th(\mathcal{S})^{\Gamma}\right) = \{\langle \varphi, \psi\rangle : \Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi \ \& \ \Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$. $\mathcal{S}$ es **plenamente Fregeano** si para cada g-modelo pleno de $\mathcal{S}$ $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C}\rangle$, la g-matriz $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C}^{F}\rangle$ tiene la propieda de congruencia para cada $F \in \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}^{F} = \{G \in \mathcal{C} : F \subseteq G\}$.

4.2.1. Jerarquía de Leibniz

La jerarquía de Leibniz es una amplia clasificación de diferentes sistemas deductivos en general por medio de ciertas propiedades. Muchos de las diferentes categorías de esta jerarquía no fueron originalmente definidas utilizando el operador de Leibniz, pero es posible probar que pueden ser caracterizadas por medio del mencionado operador y de allí el nombre. En esta tesis sólo mencionaremos dos clases de esta jerarquía, para más detalles y resultados sobre la Jerarquía de Leibniz recomendamos el compendio [26].

Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es **protoalgebraico** si y sólo si para cada álgebra $\boldsymbol{A}$, del mismo lenguaje, $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ restringida al conjunto $Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$ es una función creciente. $\mathcal{S}$ es **algebrizable** si y sólo si para cada álgebra $\boldsymbol{A}$, del mismo lenguaje, $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ es un isomorfismo entre retículo de $\mathcal{S}$-filtros $Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$ y el retículo de congruencas de $\boldsymbol{A}$ que conmuta con las imagenes inversas de homomorfismos, es decir, para cada par de álgebras $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, cada $h \in Hom(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ y cada $F \in Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{B})$

$$\Omega_{\boldsymbol{A}}\left(h^{-1}(F)\right) = h^{-1}\left(\Omega_{\boldsymbol{B}}(F)\right).$$

4.3. Sistemas deductivos basados en semiretículos

En la sección anterior vimos como suelen asociarse a un sistema deductivo diferentes clases de álgebras. Dada una clase de álgebras existen también varias maneras de asociarle un sistema deductivo. En esta tesis nos centraremos principalmente en dos de ellas llamadas la lógica afirmativa o sistema deductivo afirmativo y el sistema deductivo basado en semiretículos (ver [36]).

Definición 4.2 *Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo en el lenguaje $\mathcal{L}$. Un conectivo arbitrario $\wedge \in \mathcal{L}$ es llamado una **conjunción** de $\mathcal{S}$ se para cada fórmula φ, ψ las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $\varphi, \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \wedge \psi$.
2. $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.
3. $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.

Definición 4.3 *Sea K clase de álgebra de lenguaje $\mathcal{L}$ y $\wedge$ un simbolo de funcion en $\mathcal{L}$ de aridad 2. La clase K se dirá una **clase de semiretículos relativos a** $\wedge$ si las siguientes ecuaciones son válidas en cada miembro de K:*

1. $x \wedge x \approx x$.
2. $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$.

3. $x \wedge y \approx y \wedge x$.

Sea $\boldsymbol{A}$ un álgebra de una clase de semiretículos, similar al caso de retículos, diremos que $F \subseteq A$ es un **filtro de semireticulo** de $\boldsymbol{A}$ si F es un conjunto no vacío creciente y cerrado bajo $\wedge$. Como el concepto de filtro y filtro de semiretículo coinciden en el caso de retículos, llamaremos $Fi(\boldsymbol{A})$ al conjunto de filtros de semiretículos de $\boldsymbol{A}$.

Definición 4.4 *Sea* K *una clase de semiretículos relativos a* $\wedge$ *en el lenguaje* $\mathcal{L}$. *El sistema deductivo* $\mathcal{S}(\mathsf{K})$ *esta definido por:*

1. *Para conjuntos finitos*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi \text{ si y sólo si } h(\varphi_0) \wedge \ldots \wedge h(\varphi_n) \leq h(\varphi)$$
$$\emptyset \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi \text{ si y sólo si } a \leq h(\varphi)$$

para cada $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$, *cada homomorfismo* $h : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{A}$ *y cada* $a \in A$.

2. *Para conjuntos arbitrarios*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi \text{ si y sólo si existe un conjunto finito } \Delta \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Delta \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi.$$

$\mathcal{S}(\mathsf{K})$ *es llamado el* ***sistema deductivo basado en semiretículos relativo a*** $\wedge$ ***y a*** K.

Observación 4.5 ([36, Observaciones 3 y 4]) *Dada una clase de álgebras* K *basada en semiretículo por la definición anterior tenemos que para cada* $\varphi, \psi \in Fm$

$$\varphi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \psi \text{ y } \psi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi$$

si y sólo si para cada $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$,

$$A \models \varphi \approx \psi.$$

Luego $\mathcal{S}(\mathsf{K}) = \mathcal{S}(\mathbb{V}(\mathsf{K}))$ *y si* K *y* K' *son dos clases de álgebras tales que* $\mathcal{S}(\mathsf{K}) = S(\mathsf{K}')$, *entonces* $\mathbb{V}(\mathsf{K}) = \mathbb{V}(\mathsf{K}')$.

Teorema 4.6 [36] *Si* $\mathcal{S}$ *es un sistema deductivo basado en semiretículos, entonces*

1. $\langle \boldsymbol{A}, \mathcal{C} \rangle$ *es una g-matriz plena y reducida modelo of* $\mathcal{S}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$ *y* $\mathcal{C} = Fi(\boldsymbol{A})$ *si* $\mathcal{S}$ *tiene teoremas o* $\mathcal{C} = Fi(\boldsymbol{A}) \cup \{\emptyset\}$ *si* $\mathcal{S}$ *no los tiene.*

2. $Alg(\mathcal{S}) = \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$.

3. $\mathcal{S}$ *es sistema deductivo basado en semiretículos relativo a* $Alg(\mathcal{S})$.

El siguiente teorema fue probado por Pynko en [50], para el caso de sistemas deductivos basados en semiretículo no pseudo axiomáticos. Como todo sistema deductivo basados en semiretículo con teoremas es no pseudo axiomatico [36, Lemma 3.3], y dado que el concepto de no pseudo axiomatico no será utilizado en esta tesis, reescribimos el resultado como sigue:

Teorema 4.7 *Para cada tipo algebraico $\mathcal{L}$ con un operador binario $\wedge$ existe un isomorfismo dual entre el conjunto de los sistemas deductivos autoextensionales con conjunción $\wedge$ ordenados por extensión y el conjunto de todas las subvariedades de la variedad $\mathsf{K}^{\mathcal{L}}_{\wedge}$, donde $\mathsf{K}^{\mathcal{L}}_{\wedge}$ es la variedad de tipo $\mathcal{L}$ axiomatizada por las ecuaciones de la definición 4.3. El isomorfismo esta dado por la asignación $\mathcal{S} \to \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$*

Definición 4.8 *Si cada álgebra en una variedad V basada en semiretículos tiene último elemento denotado con el simbólo 1, la 1-**lógica afirmativa** $\mathcal{S}(\mathsf{V}, 1)$ esta definida por*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)} \varphi \text{ si y sólo si } h(\varphi) = 1_{\boldsymbol{A}} \text{ cuando } h(\Gamma) \subseteq \{1_{\boldsymbol{A}}\}$$

para toda $\boldsymbol{A} \in \mathsf{V}$, y para cada homomorfismo $h : \mathbf{Fm} \to \boldsymbol{A}$.

Como $\{1_{\boldsymbol{A}}\}$ es un filtro de semiretículo para cada $\boldsymbol{A}$ en V, $\mathcal{S}(\mathsf{V}, 1)$ es una extensión de $\mathcal{S}(\mathsf{V})$.

Capítulo 5

Sistemas deductivos asociados a DLFI, DLI y DLF

"Que pour examiner la vérité il est besoin,
une fois en sa vie de mettre toutes choses on doute,
autan qu'il se peut."

Descartes,
Les Principles de la Philosophie

En este capítulo estudiaremos los sistemas deductivos basados en semiretículos asociados a las variedades de **DLF DLI** y **DLFI**-álgebras . Estos sistemas deductivos cuentan entre sus extensiones a varias lógicas bien conocidas, brindando un marco general para el estudio de las mismas. Definiremos para los sistemas deductivos antes mencionados una semántica basada en conjuntos ordenados con una o dos relaciones ternarias (marcos), intimamente relacionada con la dualidad desarrolada en [13] y aplicada en el capítulo anterior a algunas subvariedades de estas álgebras. Probaremos utilizando esta semántica relacional que estas lógicas no son Fregeanas ni protoalgebraicas.

Luego estudiaremos más en profundidad la relación entre las subclases de DLFI, DLI y DLF, las lógicas asociadas a estas clases y los marcos que validan estas lógicas. Finalmente introduciremos el concepto de clase de álgebras canónica por marcos ternarios, veremos en la ultima sección un ejemplo de clase no canónica. Dejaremos para el próximo capítulo el desarrollo de ejemplos positivos.

5.1. Definiciones

Consideremos los lenguajes algebraicos de las **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras:

$$\mathcal{L}_{\rightarrow} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \bot, \top\}$$
$$\mathcal{L}_{\circ} = \{\wedge, \vee, \circ, \bot, \top\}$$
$$\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \circ, \rightarrow, \bot, \top\}$$

donde $\wedge, \vee, \circ$ y $\rightarrow$ son símbolos de operación binarios y $\bot, \top$ son símbolos de constantes, interpretados en las álgebras como 0 y 1 respectivamente.

Denotaremos $\mathbf{Fm}_{\rightarrow}, \mathbf{Fm}_{\circ}$ y $\mathbf{Fm}$ a los conjuntos de fórmulas con un conjunto numerable de variables proposicionales en los lenguajes $\mathcal{L}_{\rightarrow}$, $\mathcal{L}_{\circ}$ y $\mathcal{L}$.respectivamente.

Dado que las variedades DLF, DLI y DLFI tienen un reducto de $\wedge$-semiretículo y cada álgebra tiene un último elemento, en la sección 4.3 del capítulo de preliminares de esta parte, vimos que hay dos sistemas deductivos naturalmente asociados a cada variedad, $\mathcal{S}(\mathsf{DLI})$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLI}, 1)$ para DLI, $\mathcal{S}(\mathsf{DLF})$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLF}, 1)$ para DLF and $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI}, 1)$ para DLFI. Cada uno de ellos en los lenguajes $\mathcal{L}_{\rightarrow}$, $\mathcal{L}_{\circ}$ y $\mathcal{L}$. Basandonos en la dualidad desarrollada por Celani en [13] para estas variedades, daremos una semántica correcta y completa para estos sistemas deductivos.

Semánticas ternarias

Definición 5.1 *Un* ***marco ternario*** *(T-marco) es una estructura* $\langle X, \leq, S\rangle$, *donde* $\langle X, \leq\rangle$ *es un conjunto parcialmente ordenado y* $S \subseteq X^3$ *satisface la siguiente condición:*

$$\text{Si } (x,y,z) \in S,\ u \leq x, v \leq y \text{ y } z \leq t, \text{ entonces } (u,v,t) \in S.$$

Un ***FI-marco*** *es una estructura* $\langle X, \leq, R, T\rangle$, *tal que* $\langle X, \leq, R\rangle$ *y* $\langle X, \leq, T\rangle$ *son T-marcos.*

Definición 5.2 *Un* ***FI-modelo*** *es un par* $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, *donde* $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$ *es un FI-marco y* $V : Fm \to \mathcal{P}_c(X, \leq)$ *satisfaciendo, para cada* φ, ψ *fórmulas, las siguientes condiciones:*

1. $V(\top) = X$, $V(\bot) = \emptyset$,
2. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$, $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$,
3. $V(\varphi \circ \psi) = \{z \in X : \text{Existen } x \in V(\varphi), y \in V(\psi), \text{ tales que } (x,y,z) \in R\}$,
4. $V(\varphi \to \psi) = \{x \in X : \text{Para cada } y \in V(\varphi) \text{ si } (x,y,z) \in T, \text{ entonces } z \in V(\psi)\}$.

Definición 5.3 *Un* ***I-modelo*** *es un par* $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, *tal que* $\mathcal{F}$ *es un T-marco y* V *es una función* $V : Fm_{\rightarrow} \to \mathcal{P}_c(X, \leq)$ *que satisface las condiciones 1, 2 y 4 de la definición 5.2.*

Un ***F-modelo*** *es un par* $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ *donde* $\mathcal{F}$ *es un T-marco y* $V : Fm_{\circ} \to \mathcal{P}_c(X, \leq)$ *es una función que satisface las condiciones 1, 2 y 3 de la definición 5.2.*

Si $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ es un FI-modelo (F-modelo or I-modelo), diremos que V es una **valuación** basada en $\mathcal{F}$. Cuando un cierto T-marco $\mathcal{F}$ es la base de un I-modelo o un F-modelo diremos que $\mathcal{F}$ es un **I-marco** o un **F-marco**, respectivamente.

Observación 5.4 *Por la definición 5.2 de un FI-modelo, tenemos que dadas dos fórmulas* φ *y* ψ

$$V(\varphi \to \psi) = \{x \in X : T(x, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)\} = X \setminus T^{-1}(V(\varphi), X \setminus V(\varphi))$$

y

$$V(\varphi \circ \psi) = \{z \in X : z \in R(V(\varphi), V(\psi))\} = R(V(\varphi), V(\psi)).$$

Entonces, por el ejemplo 3.8, tenemos que cada función $V : Fm \to \mathcal{P}_c(X)$ *es una valuación en un FI-marco* $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$ *si y sólo si es un homomorfismo de* $\mathbf{Fm}$ *en* $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$.

Para no complicar aún más la notación agregando engorrosos subindices o supraindices, notaremos con $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ a la **DLF** o **DLI**-álgebra cuando $\mathcal{F}$ es un F-marco o un I-marco, respectivamente. Esto no supondra dificultades ya que en general el contexto nos permitará distinguir a cual de ellas nos estamos refiriendo, más aún en la sección 5.4 esta notación nos permitirá probar resultados en forma general, independizandonos del lenguaje correspondiente.

Ahora definiremos la noción de validez en esta semántica. La misma definición es válida para cada clase de marcos y modelos FI, F, o I, por ello omitiremos el prefijo.

Dado un modelo $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ y un conjunto de fórmulas Γ denotaremos:

$$V(\Gamma) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} V(\alpha).$$

Definiremos primero la validez de secuentes en marcos y modelos, y en función de estas definiremos las nociones análogas para fórmulas y reglas como es usual.

Definición 5.5 *Diremos que un* ***secuente*** $\Gamma \vdash \varphi$ ***es localmente válido en el modelo*** $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, *y lo notaremos* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \Gamma \vdash \varphi$, *si* $V(\Gamma) \subseteq V(\varphi)$.

Un ***secuente*** $\Gamma \vdash \varphi$ ***es localmente válido en un marco*** $\mathcal{F}$ *si es localmente válido en cada modelo basado en él, y lo notaremos* $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$.

Definición 5.6 *Diremos que un* ***secuente*** $\Gamma \vdash \varphi$ ***es globalmente válido en el modelo*** $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ *si* $V(\Gamma) \neq X$ *o* $V(\varphi) = X$ *y lo notaremos* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_g \Gamma \vdash \varphi$.

Un ***secuente*** $\Gamma \vdash \varphi$ ***es globalmente válido en un marco*** $\mathcal{F}$ *si es globalmente válido en cada modelo basado en él. Este caso lo denotaremos con* $\mathcal{F} \models_g \Gamma \vdash \varphi$.

Definición 5.7 *Diremos que una* ***fórmula*** φ ***es válida en un modelo*** $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ *y lo notaremos* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models \varphi$, *si* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash \varphi$, *es decir,* $V(\varphi) = X$. *De igual manera diremos que* ***fórmula*** φ ***es válida en un marco*** $\mathcal{F}$ *y lo notaremos* $\mathcal{F} \models \varphi$, *si* $\mathcal{F} \models_l \emptyset \vdash \varphi$, *es decir,* $V(\varphi) = X$ *para cada valuación basada en* $\mathcal{F}$.

Claramente para el caso de fórmulas no tiene sentido una distinción entre global y local. Es facil ver que si reemplazamos $\models_l$ por $\models_g$ en la definición anterior, obtendriamos una definición equivalente.

Definición 5.8 *Diremos que una* ***regla*** $\langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$ ***es localmente válida en el modelo*** $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, *y lo notaremos* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$, *si* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \not\models_l \Gamma_i \vdash \varphi_i$ *para algún* $\Gamma_i \vdash \varphi_i \in \Pi$ *o* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \Gamma \vdash \varphi$.

Una ***regla*** $\langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$ ***es localmente válida en un marco*** $\mathcal{F}$ *si es localmente válida en cada modelo basado en él. En este caso notaremos* $\mathcal{F} \models_l \langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$.

Definición 5.9 *Diremos que una* ***regla*** $\langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$ ***es globalmente válida en el modelo*** $\langle \mathcal{F}, V \rangle$, *y lo notaremos* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_g \langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$, *si* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \not\models_g \Gamma_i \vdash \varphi_i$ *para algún* $\Gamma_i \vdash \varphi_i \in \Pi$ *o* $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_g \Gamma \vdash \varphi$.

Un ***regla*** $\langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$ ***es globalmente válida en un marco*** $\mathcal{F}$ *si es globalmente válida en cada modelo basado en él. En este caso notaremos* $\mathcal{F} \models_g \langle \Pi, \Gamma \vdash \varphi \rangle$

Observemos que estas nociones de validez de secuentes son análogas a las definiciones de de validez local y global en las semánticas de Kripke para lógicas modales y lógicas subintuicionistas (ver [3],[15]).

Las demostraciones de correctitud y completitud sólo las haremos para los sistemas deductivos $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI},1)$ y las semánticas locales y globales sobre FI-marcos , pero son válidas para los sistemas deductivos $\mathcal{S}(\mathsf{DLI})$, $\mathcal{S}(\mathsf{DLF})$, $\mathcal{S}(\mathsf{DLI},1)$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLF},1)$ y las semánticas sobre I-marcos y F-marcos respectivamente. Las demostraciones para estos casos se siguen simplemente reemplazando $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ por $\mathcal{S}(\mathsf{DLI})$ o $\mathcal{S}(\mathsf{DLF})$, FI por I o F y $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}_{\rightarrow}$ o $\mathcal{L}_{\circ}$, según corresponda.

Teorema 5.10 (Correctitud) *Sea $\Gamma \vdash \varphi$ un secuente en el lenguaje $\mathcal{L}$. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} \varphi$, entonces para cada FI-marco $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Es decir, la semántica local de FI-marcos es correcta para $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$.*

Demostración. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} \varphi$, y sean $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$ un FI-marco y V una valuación en $\mathcal{F}$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, ya que $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ es finitario. Por la observación 5.4, tenemos que V es un homomorfismo de $\mathbf{Fm}$ en $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$, luego por la definición de $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ y como $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} \varphi$ tenemos que $V(\varphi_1) \cap \ldots \cap V(\varphi_n) \subseteq V(\varphi)$. Entonces, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Como esto último es válido para cualquier valuación, el resultado se sigue. ∎

Teorema 5.11 (Completitud) *Sea $\Gamma \vdash \varphi$ un secuente en el lenguaje $\mathcal{L}$. Si para cada FI-marco $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} \varphi$. Es decir, la semántica local de FI-marcos es completa para $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$.*

Demostración. Consideremos $\sigma_{\boldsymbol{A}}{:}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ el homorfismo definido en la sección 1.3. Si $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A})$, entonces $\sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h \in Hom\left(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}\right)$. Por la observación 5.4, $\sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h$ es una valuación en $\mathcal{F}(\boldsymbol{A})$.

Sea $\Gamma \vdash \varphi$ un secuente localmente válido en todo FI-marco $\mathcal{F}$. Sea $\boldsymbol{A}$ una **DLFI**-álgebra y $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A})$. Supongamos que para cada subconjunto finito de Γ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ tenemos que $h(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge h(\varphi_n) \nleq h(\varphi)$, entonces $h(\varphi) \notin F(h(\Gamma))$. Por lo tanto, existe $P \in X(\boldsymbol{A})$ tal que $h(\Gamma) \subseteq P$ y $h(\varphi) \notin P$. Luego, $P \in \bigcap_{\psi \in \Gamma} (\sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h)(\psi) \nsubseteq (\sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h)(\varphi)$, con lo cual tenemos que $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}) \not\models_l \Gamma \vdash \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe ser $h(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \leq h(\varphi)$ para algún $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ subconjunto finito de Γ, y el resultado se sigue. ∎

Los mismos argumentos de los teoremas 5.10 y 5.11 prueban lo siguiente:

Teorema 5.12 *Sea $\Gamma \vdash \varphi$ un secuente en el lenguaje $\mathcal{L}$. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI},1)} \varphi$ si y sólo si para cada FI-marco $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models_g \Gamma \vdash \varphi$. Es decir, la semántica global de FI-marcos es correcta y completa para $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI},1)$.*

En la siguiente sección utilizaremos convenientemente la definición o la semántica ternaria para estudiar las propiedades de $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$, $\mathcal{S}(\mathsf{DLI})$ y $\mathcal{S}(\mathsf{DLF})$.

5.2. Propiedades

En esta sección estudiaremos ciertas propiedades de los sistemas deductivos $\mathcal{S}$ (DLI), $\mathcal{S}$ (DLF) y $\mathcal{S}$ (DLFI). Probaremos que ninguno de ellos es protoalgebraico y estudiaremos sus propiedades de congruencia. De hecho, probaremos estos resultados sólo para $\mathcal{S}$ (DLFI), pero resultados similares son válidos para $\mathcal{S}$ (DLI) y $\mathcal{S}$ (DLF), y las demostraciones para estos sistemas deductivos se siguen con mínimas modificaciones.

Matrices y jerarquía de Leibniz

Teorema 5.13 *$\mathcal{S}$ (DLFI) no es protoalgebraico y las clases de álgebras asociadas a $\mathcal{S}$ (DLFI) cumplen las siguientes relaciones*

$$Alg^*\mathcal{S}\,(\mathsf{DLFI}) \subsetneq Alg\mathcal{S}\,(\mathsf{DLFI}) = \mathrm{K}_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} = \mathsf{DLFI}.$$

Demostración. Consideremos la cadena de tres elementos $A = \{0, a, 1\}$ y las siguientes operaciones dadas en los ejemplos 3.5 y 3.4:

$\circ$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	0
1	0	0	0

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	1
1	1	1	1

Entonces, $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \circ, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es una **DLFI**-álgebra. Por el teorema 4.6, tenemos que

$$Fi_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})}(\boldsymbol{A}) = Fi(\boldsymbol{A}) = \{\{1\}, \{a, 1\}, A\}.$$

Dado que ambas operaciones son constantes, una relación de equivalencia en A es congruencia de $\boldsymbol{A}$ si y sólo si es una congruencia del reducto de retículo de $\boldsymbol{A}$. Se sigue que:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\boldsymbol{A}}(\{1\}) &= \{(0,0), (a,a), (1,1), (0,a), (a,0)\},\\
\Omega_{\boldsymbol{A}}(\{a,1\}) &= \{(0,0), (a,a), (1,1), (1,a), (a,1)\},\\
\Omega_{\boldsymbol{A}}(A) &= A \times A.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Omega_{\boldsymbol{A}}$ no preserva el orden, ya que $\Omega_{\boldsymbol{A}}(\{1\}) \not\subseteq \Omega_{\boldsymbol{A}}(\{a,1\})$.
Luego $\mathcal{S}$ (DLFI) no es protoalgebraico.

Por el teorema 4.6, $Alg\mathcal{S}\,(\mathsf{DLFI}) = \mathrm{K}_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} = \mathsf{DLFI}$.
Si consideramos el álgebra $\boldsymbol{A}$ descripta anteriormente, vimos que $\Omega_{\boldsymbol{A}}(F) \neq Id_{\boldsymbol{A}}$ para cada $F \in Fi_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})}(\boldsymbol{A})$. Luego $\boldsymbol{A} \in Alg\mathcal{S}\,(\mathsf{DLFI})$, pero $\boldsymbol{A} \notin Alg^*\mathcal{S}\,(\mathsf{DLFI})$. ∎

Corolario 5.14 *$Alg^*\mathcal{S}$ (DLFI) no es una cuasivariedad.*

En el próximo teorema veremos algunas propiedades relacionadas con matrices generalizadas de lógicas multivaluadas (ver [27]) que las g-matrices de $\mathcal{S}$ (DLFI) no siempre satisfacen.

Teorema 5.15 *Existen g-matrices $\langle \boldsymbol{A}, C\rangle$, que son modelos de $\mathcal{S}$ (DLFI) y no satisfacen las siguientes proposiciones:*

1. $a \to a \in Clo_C(\emptyset)$, *para cada* $a \in A$.
2. $Clo_C(a \circ b) = Clo_C(b \circ a)$, *para cada* $a, b \in A$.
3. $c \in Clo_C(a \circ b)$ *si y sólo si* $a \to c \in Clo_C(b)$, *para cada* $a, b, c \in A$.
4. $c \in Clo_C(a \circ b)$ *si y sólo si* $b \to c \in Clo_C(a)$, *para cada* $a, b, c \in A$.
5. $Clo_C(a \to (b \to c)) = Clo_C(b \to (a \to c))$, *para cada* $a, b, c \in A$.

Demostración. Consideremos el retículo Booleano con cuatro elementos $A = \{0, a, b, 1\}$ dotado de las operaciones de fusión $\circ$ e implicación $\to$ dadas por las siguientes tablas:

$\circ$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	b	b
b	0	0	0	0
1	0	0	b	b

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	a	1	1
b	b	b	1	1
1	0	0	1	1

Es tedioso pero sencillo probar que $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \circ, \to, 0, 1\rangle$ es una **DLFI**-álgebra. Por el teorema 4.6, tenemos que $\langle \boldsymbol{A}, Fi(\boldsymbol{A})\rangle$ es un modelo completo reducido de $\mathcal{S}$(DLFI). Ahora observemos que:

1. $Clo_C(\emptyset) = \bigcap Fi(\boldsymbol{A}) = \{1\}$ y $a \to a = a \in Clo_C(\emptyset)$.
2. $Clo_C(a \circ b) = \{b, 1\} \neq A = Clo_C(b \circ a)$.
3. $a \in Clo_C(b \circ a)$, pero $b \to a = b \notin \{a, 1\} = Clo_C(a)$.
4. $a \in Clo_C(b \circ a)$, pero $a \to a = a \notin \{b, 1\} = Clo_C(b)$.
5. $Clo_C(a \to (b \to a)) = Clo_C(a \to b) = \{1\}$, pero
   $Clo_C(b \to (a \to a)) = Clo_C(b \to a) = \{b, 1\}$.

Por lo tanto $\langle \boldsymbol{A}, Fi(\boldsymbol{A})\rangle$ no satisface ninguna de las propiedades listadas en el teorema. ■

La **DLFI**-álgebra utilizada como contraejemplo en la prueba del teorema anterior fue construida como el álgebra $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ de un cierto marco $\mathcal{F}$, el cual satisface ciertas propiedades que garantizan que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ no va a cumplir ninguna de las propiedades listadas en el teorema. Como el marco en este caso es finito, puede dotarselo de la topología discreta y resultara un **DLFI**-espacio y $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ se correspondera con D($\mathcal{F}$). Luego utilizando los teoremas 6.1,6.2 y 6.3 podemos ver cuales son las condiciones que debe cumplir $\mathcal{F}$, de manera que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ (D($\mathcal{F}$)) no satisfaga las propiedades listadas..Esto se puede aplicar directamente sólo al caso finito.

En el próximo capítulo veremos que en muchos casos existe una relación entre la satisfacción de ciertos secuentes y fórmulas en un marco y ciertas condiciones de primer orden. Muchos de estos resultados estan relacionados con los obtenidos en los teoremas antes mencionados, cuando llegue el momento comentaremos estas conexiones.

Propiedades de congruencia

En [36, Proposition 3.1], Jansana prueba que todo sistema deductivo basado en semiretículos es autoextensional y tiene una conjunción, por ello $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ es autoextensional y el conectivo $\wedge$ es una conjunción en el. De este hecho, utilizando los resultados de [25, Section 4.2] podemos deducir directamente que $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ es completamente autoextensional.

Ahora veamos que $\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ no es Fregeano.

Teorema 5.16 *$\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ no es Fregeano.*

Demostración. Sea p una variable proposicional y consideremos $\Gamma = Cn(p)$ la teoría generada por p. Observemos que, $\Gamma, \top \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} p$, luego $(p, \top) \in \Lambda_{\mathbf{Fm}}\left(Th(\mathcal{S}(\mathsf{DLFI}))^{\Gamma}\right)$.

Consideremos ahora el FI-marco $\mathcal{F} = \langle X, =, R, T\rangle$ donde

$$X = \{a, b, c\},$$
$$R = T = \{(a, b, c)\}.$$

Sea $V : Fm \to \mathcal{P}_c(X)\,(= \mathcal{P}(X))$ una valuación tal que $V(p) = \{a, b\}$. Es facil ver que $V(\Gamma) = V(p) = \{a, b\}$. Luego, $V(\Gamma \cup \{p \to \top\}) = \{a, b\}$ pero

$$\begin{aligned} V(p \to p) &= \{x \in X : \forall y \in V(p), (x, y, z) \in T \Rightarrow z \in V(p)\} \\ &= \{b, c\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $V(\Gamma \cup \{p \to \top\}) \nsubseteq V(p \to p)$, es decir,

$$\mathcal{F} \not\models_l \Gamma, p \to \top \vdash p \to p.$$

Por el teorema 5.10, podemos deducir que $\Gamma, p \to \top \not\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})} p \to p$, luego

$$(p \to \top, p \to p) \notin \Lambda_{\mathbf{Fm}}\left(Th(\mathcal{S}(\mathsf{DLFI}))^{\Gamma}\right).$$

Con lo cual, $\left\langle \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}, Th(\mathcal{S}(\mathsf{DLFI}))^{\Gamma}\right\rangle$ no tiene la propiedad de congruencia. ∎

Corolario 5.17 *$\mathcal{S}(\mathsf{DLFI})$ no es completamente Fregeano.*

5.3. Marcos

En esta sección veremos algunas cosntrucciones de nuevos marcos a partir de una familia de marcos o de un marco dado y analizaremos en esta y en la próxima sección el comportamiento de estas respecto de la validez de secuentes.

Listaremos primero las construcciónes clásicas.

Denotemos $\mathcal{F}_i$ una familia de marcos indexada por un conjunto no vacio I.

Con $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ denotaremos el producto de los marcos indexados por I.

Si U es un ultrafiltro de $\mathcal{P}(I)$, $\prod_U \mathcal{F}_i$ denota el ultraproducto de los marcos $\mathcal{F}_i$.

Con $\biguplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$ denotaremos a la unión disjunta de los marcos, en el caso de que los conjuntos subjacentes a los marcos $\mathcal{F}_i$ sean disjuntos.

Dada una clase de marcos Λ denotaremos

$$\mathbb{P}_F(\Lambda),\ \mathbb{P}u_F(\Lambda) \text{ y } \mathbb{U}_F(\Lambda)$$

a las familias de todos los posibles productos, ultraproductos y uniones disjuntas de familias de marcos en Λ, respectivamente.

Para introducir los conceptos de submarco e imagen de un marco, necesitaremos el concepto de morfismo entre marcos que introduciremos en la próxima subsección.

5.3.1. Morfismos y submarcos

Las definiciones de morfismos en las diferentes clases de marcos estan basadas en las definiciones de morfismos entre los espacios de Priestley asociados a **DLI**, **DLF** y **DLFI**-álgebras, definidos en 3.16 (ver también [13]). A su vez, esta noción esta intimamente relacionada con las definiciones de morfismo acotado entre marcos de Kripke [3, Chapter 2], y morfismos entre espacios implicativos [42].

Definición 5.18 *Sean $\langle X_1,\leq_1,S_1\rangle$ y $\langle X_2,\leq_2,S_2\rangle$ dos T-marcos y sea $g: X_1\to X_2$ una función creciente satisfaciendo la siguiente condición:*

P *Si $(x,y,z)\in S_1$, entonces $(g(x),g(y),g(z))\in S_2$*

*Diremos que g es un **I-morfismo** si satisface la siguiente condición:*

Si $(g(x),y,z)\in S_2$, entonces $\exists y'z'\in X_1:\ (x,y',z')\in S_1$ & $y\leq g(y')$ & $g(z')\leq z$.

*Diremos que g es un **F-morfismo** si satisface la siguiente condición:*

Si $(x,y,g(z))\in S_2$, entonces $\exists x'y'\in X_1:\ (x',y',z)\in S_1$ & $x\leq g(x')$ & $y\leq g(y')$.

*Dados $\langle X_1,\leq_1,R_1,T_1\rangle$ y $\langle X_2,\leq_2,R_2,T_2\rangle$ dos FI-marcos. Una función creciente $g: X_1\to X_2$ es un **FI-morfismo**, si es un F-morfismo del T-marco $\langle X_1,\leq_1,R_1\rangle$ en el T-marco $\langle X_2,\leq_2,R_2\rangle$ y un I-morfismo del T-marco $\langle X_1,\leq_1,T_1\rangle$ en el T-marco $\langle X_2,\leq_2,T_2\rangle$.*

En el resto de la sección trabajaremos solamente con FI-marcos y FI-morfismos. Resultados análogos son válidos para I-marcos y F-marcos y las demostraciones se pueden obtener de las dadas aquí con sólo pequeñas modificaciones.

Para simplificar las proposiciones de esta subsección, por el resto de la misma denotaremos con $\mathcal{F}_1=\langle X_1,\leq_1,R_1,T_1\rangle$ y $\mathcal{F}_2=\langle X_2,\leq_2,R_2,T_2\rangle$ dos FI-marcos y con $g: X_1\to X_2$ un FI-morfismo entre ellos.

La siguiente proposición se sigue directamente del teorema 3.4 de [13].

Proposición 5.19 *La función $h_g:\mathcal{P}_c(X_2)\to\mathcal{P}_c(X_1)$ definida por*

$$h_g(U)=g^{-1}(U)$$

para cada $U\in\mathcal{P}_c(X_2)$, es un homomorfismo de **DLFI**-*álgebras desde $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_2}$ en $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_1}$.*

Definición 5.20 *Sea V una valuación basada en $\mathcal{F}_2$, denotaremos V_g a la valución basada en $\mathcal{F}_1$ definida por:*

$$V_g(\varphi) = (h_g \circ V)(\varphi) = g^{-1}(V(\varphi)).$$

Sea W una valuación basada en $\mathcal{F}_1$. Denotaremos W^g a la valuación basada en $\mathcal{F}_2$ definida en cada variable proposicional por:

$$W^g(p) = [g(W(p))).$$

Como $h_g \in Hom(\mathbf{A}_{\mathcal{F}_2}, \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1})$, $V_g = h_g \circ V \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}_{\mathcal{F}_1})$. Utilizando la observación 5.4, podemos comprobar que efectivamente V_g es una valuación basada en $\mathcal{F}_1$.

Teorema 5.21 *Si g es sobreyectiva, para cada secuente $\Gamma \vdash \varphi$ en el lenguaje $\mathcal{L}$, si $\mathcal{F}_1 \models_l \Gamma \vdash \varphi$, tenemos que $\mathcal{F}_2 \models_l \Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \models \Gamma \vdash \varphi$, y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}_2$. Como g es sobreyectiva,

$$V(\Gamma) = g\left(g^{-1}(V(\Gamma))\right) = g(V_g(\Gamma)).$$

Como $\mathcal{F}_1 \models_l \Gamma \vdash \varphi$, $V_g(\Gamma) \subseteq V_g(\varphi)$. Luego,

$$V(\Gamma) = g(V_g(\Gamma)) \subseteq g(V_g(\varphi)) = g\left(g^{-1}(V(\varphi))\right) = V(\varphi),$$

y el resultado se sigue. ∎

Lema 5.22 *Si g es estrictamente creciente y W es una valuación basada en $\mathcal{F}_1$, entonces para cada $\varphi \in Fm$*

$$W^g(\varphi) \cap Im(g) = g(W(\varphi)).$$

Demostración. Probaremos esta afirmación por inducción en la formación de la fórmula φ.

Dada p una variable proposicional. Por la definición 5.20, $W^g(p) = [g(W(p)))$. Claramente $g(W(p)) \subseteq W^g(p) \cap Im(g)$. Sea $x \in W^g(p) \cap Im(g)$, entonces existen $y \in W(p)$ y $z \in X_1$ tales que $g(y) \leq_2 x = g(z)$. Como g es estrictamente creciente y $W(p)$ es un conjunto creciente, $y \leq_1 z$ y $z \in W(p)$. Luego, $x = g(z) \in g(W(p))$.

Las pruebas para los conectivos $\wedge$, $\vee$ y las constantes $\bot, \top$ se siguen facilmente de la definición.

Sólo probaremos el caso del conectivo de implicación $\rightarrow$, ya que el caso del conectivo de fusión $\circ$ se prueba de manera similar.

Supongamos que $\alpha,\beta \in Fm$ son tales que:

$$W^g(\alpha) \cap Im(g) = g(W(\alpha)) \text{ y } W^g(\beta) \cap Im(g) = g(W(\beta)).$$

Consideremos $x \in W^g(\alpha \rightarrow \beta) \cap Im(g)$. Sea $x' \in X_1$ tal que $g(x') = x$. Sean $y' \in W(\alpha)$ y $z' \in X_1$, tales que $(x', y', z') \in T_1$. Por la definición 5.20 de FI-morfismo, tenemos que $(x, g(y'), g(z')) \in T_2$. Por hipótesis, $g(y') \in W^g(\alpha)$. Como $x \in W^g(\alpha \rightarrow \beta)$, vemos que

$g(z') \in W^g(\beta) \cap Im(g) = g(W(\beta))$. Dado que g es una función inyectiva, $z' \in W(\beta)$, lo cual prueba que $x' \in W(\alpha \to \beta)$. Por lo tanto

$$W^g(\alpha \to \beta) \cap Im(g) \subseteq g(W(\alpha \to \beta)).$$

Para probar la otra inclusión, sea $x \in g(W(\alpha \to \beta))$. Si $y \in W^g(\alpha)$ y $z \in X_2$ son tales que $(x, y, z) \in T_2$, debemos probar que $z \in W^g(\beta)$. Sea $x' \in W(\alpha \to \beta)$ tal que $g(x') = x$, entonces $(g(x'), y, z) \in T_2$. Por la definición 5.20, existen $y', z' \in X_1$ tales que $(x', y', z') \in T_1$, $y \leq_2 g(y')$ y $g(z') \leq_2 z$. Por hipótesis y como $y \leq_2 g(y')$, $y' \in W(\alpha)$. Luego, $z' \in W(\beta)$. Con lo cual, $g(z') \in g(W(\beta)) \subseteq W^g(\beta)$, y podemos concluir que $z \in W^g(\beta)$. Por lo tanto

$$g(W(\alpha \to \beta)) \subseteq W^g(\alpha \to \beta) \cap Im(g).$$

■

Corolario 5.23 *Si g es estrictamente creciente y W es una valuación basada en $\mathcal{F}_2$, entonces para cada $\varphi \in Fm$*

$$W(\varphi) = (W^g)_g(\varphi)$$

Demostración. Sea $\varphi \in Fm$. Entonces

$$\begin{aligned}(W^g)_g(\varphi) &= g^{-1}(W^g(\varphi)) = g^{-1}(W^g(\varphi) \cap Im(g)) \\ &= g^{-1}(g(W(\varphi))) = W(\varphi).\end{aligned}$$

■

Teorema 5.24 *Si g es estrictamente creciente. Para cada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, si $\mathcal{F}_2 \models_l \Gamma \vdash \varphi$, entonces $\mathcal{F}_1 \models_l \Gamma \vdash \varphi$.*

Los resultados previos nos permiten proponer las siguientes definiciones como las más apropiadas para los conceptos de submarco y submodelo.

Definición 5.25 *Diremos $\mathcal{F}_2$ is a **FI-submarco** de $\mathcal{F}_1$, en símbolos $\mathcal{F}_2 \preccurlyeq \mathcal{F}_1$, si satisface las siguientes condiciones*

1. $X_2 \subseteq X_1$,
2. $\leq_2 = \leq_1 \cap (X_2)^2$, *y*
3. *la inclusión $i : X_2 \to X_1$ es un FI-morfismo.*

Observemos que $\mathcal{F}_2 \preccurlyeq \mathcal{F}_1$ si y sólo si $X_2 \subseteq X_1$, la inclusión $i : X_2 \to X_1$ es un FI-morfismo estrictamente creciente. Definimos **F-submarcos** and **I-submarco** de manera similar. Por el teorema 5.24 y la observación previa tenemos que la validez de secuentes se preserva en los submarcos.

Definición 5.26 *Si $\mathcal{F}_2 \preccurlyeq \mathcal{F}_1$ y V es una valuación basada en $\mathcal{F}_1$ diremos que $\langle \mathcal{F}_2, V_i \rangle$ es un **FI-submodelo** de $\langle \mathcal{F}_1, V \rangle$, donde i es la función inclusión y V_i es la valuación dada en la definición 5.20.*

Observación 5.27 *Por el lema 5.22, tenemos que si* $\langle \mathcal{F}_2, V_i \rangle$ *es un submodelo de* $\langle \mathcal{F}_1, V \rangle$, *entonces para cada fórmula* $\varphi \in Fm$,

$$V_i(\varphi) = i^{-1}(V(\varphi)) = V(\varphi) \cap X_2.$$

Dada Λ una familia de marcos (FI, F o I-marcos) denotaremos

$\mathbb{H}_F(\Lambda) = \{\mathcal{M} : \text{existe un morfismo sobreyectivo } f : \mathcal{F} \to \mathcal{M}, \text{ para algún } \mathcal{F} \in \Lambda\}$ y
$\mathbb{S}_F(\Lambda) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{F} \text{ para algún } \mathcal{F} \in \Lambda\}$.

5.4. Secuentes, álgebras y marcos

En esta sección analizaremos algunas propiedades de las familias de álgebras y marcos que hacen válidos ciertos secuentes. Para ello definiremos primero ciertos operadores entre clases de álgebras, marcos y secuentes.

Para simplificar la notación no indicaremos el lenguaje, ya que los resultados de esta sección son válidos para los tres lenguajes sobre los que estamos trabajando. Más adelante cuando utilicemos los resultados aquí expuestos, el lenguaje quedará claro por el contexto y en caso de que no sea así se indicará explicitamente.

Dado Π un conjunto de secuentes, denotaremos $Fr_l(\Pi)$ a la familia de todos los marcos validan localmente cada uno de los sequentes en Γ, es decir,

$$\mathcal{F} \in Fr_l(\Pi) \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi \text{ para cada } \Gamma \vdash \varphi \in \Pi.$$

De manera similar para la validez global definimos $Fr_g(\Pi)$.

Por otro lado denotaremos $Alg_l(\Pi)$ y $Alg_g(\Pi)$ a los conjuntos de álgebra (**DLI**, **DLF** o **DLFI**-álgebras según corresponda) definidos por:

$\boldsymbol{A} \in Alg_l(\Pi)$ si y sólo si $h(\varphi) \in F(h(\Gamma))$ para cada $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A})$ y cada $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$,

$\boldsymbol{A} \in Alg_g(\Pi)$ si y sólo si $h(\Gamma) \neq \{1\}$ o $h(\varphi) = 1$ para cada $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A})$ y cada $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$.

Notaremos $Fr_l(\Gamma \vdash \varphi) = Fr_l(\{\Gamma \vdash \varphi\})$, y de igual forma para $Fr_g(\Gamma \vdash \varphi)$, $Alg_l(\Gamma \vdash \varphi)$ y $Alg_g(\Gamma \vdash \varphi)$.

Dada Λ una familia de marcos denotaremos $Seq_l(\Lambda)$, $Seq_g(\Lambda)$ a los conjuntos de secuentes válidos local y globalmente en cada marco en Λ. Es decir,

$\Gamma \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$ si y sólo si $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$ para cada $\mathcal{F} \in \Lambda$, y
$\Gamma \vdash \varphi \in Seq_g(\Lambda)$ si y sólo si $\mathcal{F} \models_g \Gamma \vdash \varphi$ para cada $\mathcal{F} \in \Lambda$.

A su vez indicaremos

$$Alg(\Lambda) = \{\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \in \Lambda\}.$$

Si K es una clase de álgebras contenida en DLFI, DLI o DLF, entonces recordemos que $\mathcal{S}(\mathsf{K})$ denota el sistema deductivo basado en la estructura de $\wedge$-semiretículo relativo a K, y $\mathcal{S}(\mathsf{K},1)$ es la lógica afirmativa asociada a K (ver definiciones 4.4 y 4.8)

A su vez denotaremos

$$Fr(\mathsf{K}) = \{\mathcal{F}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \in \mathsf{K}\}.$$

El siguiente es un esquema de las definiciones anteriores.

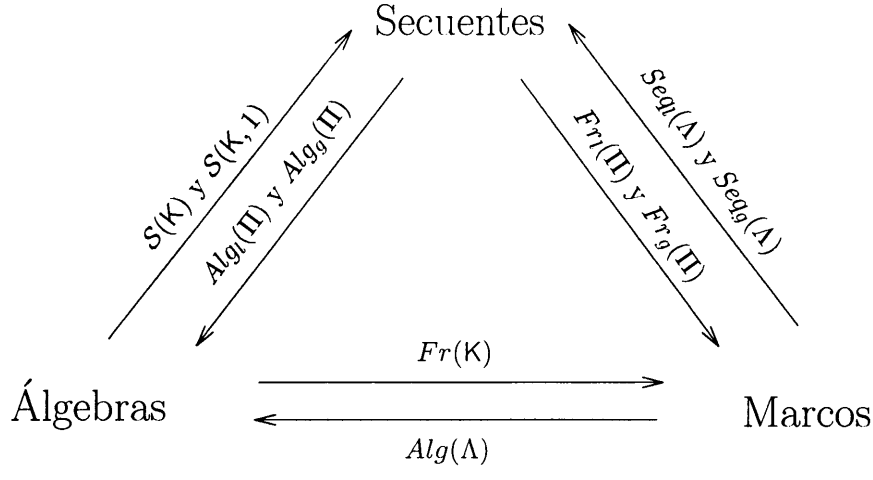


Fig. 4

5.4.1. Propiedades

Ahora veremos algunas propiedades de los operadores que acabamos de definir. Más adelante veremos como se comportan las composiciones de estos operadores.

Recordemos que dada una clase K de álgebras (**DLFI**, **DLF** o **DLI**-álgebras), $\mathcal{S}(\mathsf{K})$ es un sistema deductivo finitario autoextensional, y $\mathcal{S}(\mathsf{K},1)$ es un sistema deductivo que extiende a $\mathcal{S}(\mathsf{K})$.

Veamos algunas de las propiedades de los otros operadores definidos en esta sección.

$$Fr_l$$

En la sección anterior introdujimos varias maneras de obtener nuevos marcos a partir de una familia o un marco dado. Probamos que en ciertos casos estas construcciónes preservaban la validez de secuentes. Resumiremos y ampliaremos estos resultados en la próxima proposición aplicando la notación definida en esta sección.

Proposición 5.28 *Dada* Π *una familia de secuentes, entonces*

1. $\mathbb{H}_F(Fr_l(\Pi)) \subseteq Fr_l(\Pi)$.
2. $\mathbb{S}_F(Fr_l(\Pi)) \subseteq Fr_l(\Pi)$.

3. $\mathbb{U}_F(Fr_l(\Pi)) \subseteq (Fr_l(\Pi))$.

Demostración. *1.* y *2.* Se siguen directamente de los teoremas 5.21 y 5.24, respectivamente.

3. Sean $\mathcal{F}_i$ una familia disjunta de marcos contenida en $Fr_l(\Pi)$, indexada por $I \neq \emptyset$. Sea V una valuación en $\biguplus_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Denotemos $\langle X_i, \leq_i\rangle$ al conjunto ordenado de cada uno de los marcos $\mathcal{F}_i$, es decir $\mathcal{F}_i = \langle X_i, \leq_i, R\rangle$ o.$\mathcal{F}_i = \langle X_i, \leq_i, R, T\rangle$ según el lenguaje. Si consideramos $V_i : Fm \to P_i(X_i, \leq_i)$ definida en cada fórmula ψ como sigue:

$$V_i(\psi) = V(\psi) \cap X_i,$$

es una valuación basada en $\mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$. A su vez, $V(\varphi) = \biguplus_{i\in 1} V_i(\varphi)$. Como cada $\mathcal{F}_i \in Fr_l(\Pi)$ y la unión de los $\mathcal{F}_i$ es disjunta tenemos que, si $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$,

$$V(\Gamma) = \bigcap_{\psi\in\Gamma} V(\psi) = \biguplus_{i\in I}\bigcap_{\psi\in\Gamma} V_i(\psi) \subseteq \biguplus_{i\in I} V_i(\varphi) = V(\varphi).$$

■

En los próximos ejemplos veremos que no necesariamente $Fr_l(\Pi)$ es cerrado por productos ni ultraproductos. En el primer ejemplo veremos que aún cuando el secuente es de la forma $\emptyset \vdash \varphi$, incluso un poducto finito de marcos que validan el secuente, puede no validar el mismo.

Ejemplo 5.29 *Consideremos* $\mathcal{F} = \langle\{1,2\}, \leq, R, T\rangle$, *donde*

$$R = T = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,1,2)\}.$$

Veamos que

$$\mathcal{F} \models_l \emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p),$$

es decir, $\mathcal{F} \in Fr_l(\emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p))$ [1]. *Para esto, como* $\mathcal{P}_c(\{1,2\}, \leq) = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}$, *en la siguiente tabla vemos todas las posibles valuaciones para* p *y* q :

$V(p)$	$V(q)$	$V(p \to q)$	$V(q \to p)$	$V((p \to q) \vee (q \to p))$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x : T(x,\emptyset) \subseteq \emptyset\} = \{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\{2\}$	$\{x : T(x,\emptyset) \subseteq \{2\}\} = \{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Luego concluimos que $\mathcal{F} \in Fr_l(\emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p))$.

[1] Es válido destacar que el hecho que $\mathcal{F}$ satisfaga el secuente $\emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p)$, se podría haber demostrado facilmente utilizando el item 1.(e) del teorema 6.1. Preferimos no adelantarnos, por eso ha sido presentado de esta manera.

Ahora bien consideremos una valuación V basada en $\mathcal{F}^2$ tal que

$$V(p) = \{(1,2),(2,2)\}, \text{ y}$$
$$V(q) = \{(2,1),(2,2)\}.$$

Recordemos que $\mathcal{F}^2 = \langle X^2, \leq', R', T' \rangle$ donde

$$(a,b) \leq' (c,d) \text{ si y sólo si } a \leq c \text{ y } b \leq d,$$
$$((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)) \in R' \text{ si y sólo si } (a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2) \in R \text{ y}$$
$$((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)) \in T' \text{ si y sólo si } (a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2) \in T.$$

Luego

$$V(p \to q) = \{(a,b) : T((a,b), V(p)) \subseteq V(q)\} = \{(a,b) : T(a,1) \subseteq \{2\}\} = \{(2,1),(2,2)\}$$

y

$$V(q \to p) = \{(a,b) : T((a,b), V(q)) \subseteq V(p)\} = \{(a,b) : T(b,1) \subseteq \{2\}\} = \{(1,2),(2,2)\}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}^2 \not\models_l \emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p)$$

con lo cual $\mathcal{F}^2 \notin Fr_l(\emptyset \vdash (p \to q) \vee (q \to p))$.

Con el ejemplo anterior vemos que aun en el caso de secuentes o familias de secuentes muy simples es posible que

$$\mathbb{P}_{Fr}(Fr_l(\Pi)) \nsubseteq (Fr_l(\Pi)).$$

Algunos de los cálculos del siguiente ejemplo son bastante tediosos, los hemos incluido sólo por completitud. Lo que veremos es simplemente un caso en que

$$\mathbb{P}u_{Fr}(Fr_l(\Pi)) \nsubseteq (Fr_l(\Pi)).$$

Ejemplo 5.30 *Consideremos los marcos $\mathcal{F}_n$ definidos en el ejemplo 3.9. Como vimos en el mencionado ejemplo que $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_n}$ es isomorfa a L_n, y dado que una valuación V basada en $\mathcal{F}_n$ es un homomorfismo de $\mathbf{Fm}$ en $\mathbf{A}_{\mathcal{F}_n}$ deducimos que*

$$\mathcal{F}_n \models_l p \circ (q \to p) \vdash q \circ (p \to q),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, (ver proposición 5.38), es decir, $\mathcal{F}_n \in Fr(p \circ (q \to p) \vdash q \circ (p \to q))$.

Ahora consideremos el ultrafiltro de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$U = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}.$$

Si $f \in \prod \mathcal{F}_n$, f_U denota la clase de f en $\prod_U \mathcal{F}_n$. Por la definición de ultraproducto en este caso tenemos que

$$f_U = \left\{ g \in \prod \mathcal{F}_n : \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ g(n) = f(n) \right\},$$
$$f_U \leq g_U \text{ si y sólo si } \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ f(n) \leq g(n)$$
$$R_U = T_U = \{(f_U, g_U, h_U) : \exists n_0, \forall n \geq n_0,\ (f(n), g(n), h(n)) \in R_n = T_n\}$$

Sean

$$A = \{f_U : \exists k \in \mathbb{N}, \exists n_0, \forall n \geq n_0,\, g(n) \geq n - k\}\,,\ y$$
$$B = \{f_U : \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_k,\ g(n) \geq k\}\,.$$

Observemos que ver que $A \subsetneq B$ *y que ambos con conjuntos crecientes en* $\prod_U \mathcal{F}_n$. *Consideremos entonces una valuación tal que* $V(p) = A$ *y* $V(q)$. *Por la definición* T_U *tenemos que:*

$$\begin{array}{rrr} h_U \in T_U(f_U, V(p)) & \textit{si y sólo si} & \exists g_u \in A, (\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ (f(n), g(n), h(n)) \in R_n) \\ & \textit{si y sólo si} & \exists g_U \in A, (\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ f(n) + g(n) \leq h(n) + 1) \\ & \textit{entonces} & \exists g_U \in A, (\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ g(n) \leq h(n)) \\ & \textit{por lo tanto} & h_U \in A \subseteq B. \end{array}$$

Luego $V(p \to q) = \prod_U \mathcal{F}_n$.

Por la definición de valuación, $f_u \in V(q \to p)$ *si y sólo si* $T_U(f_u, V(q)) \subseteq V(p)$. *Veamos entonces que*

$$\begin{aligned} h_U \in T_U(f_u, V(q)) &\Leftrightarrow \exists g_u \in B, (\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ (f(n), g(n), h(n)) \in R_n) \\ &\Leftrightarrow \exists g_U \in B, (\exists n_0, \forall n \geq n_0,\ f(n) + g(n) \leq h(n) + 1) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_k,\ f(n) + k \leq h(n) + 1 \end{aligned}$$

Si $k = 1$, *la última equivalencia nos dice que* $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1,\ f(n) + 1 \leq h(n) + 1$, *es decir* $f_U \leq h_U$, *entonces si* $f_U \in A$, *tenemos que* $h_U \in A = V(p)$. *Si suponemos que* $f_U \notin A$, *es decir,* $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n_k, \exists n \geq n_k,\ g(n) < n - k$, *definimos una sucesión* $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *como sigue:*

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) < n - 3\} \\ s_2 &= \min\{n \in \mathbb{N} : s_2 < n \ \&\ f(n) < n - 5\} \\ &\vdots \\ s_{k+1} &= \min\{n \in \mathbb{N} : s_k < n \ \&\ f(n) < n - 2(k+1)\}\,. \end{aligned}$$

Luego consideremos g *definida por*

$$g(n) = k \textit{ si } s_{k-1} \leq n < s_k.$$

Claramente $g_U \in B = V(q)$, *ya que para cada* $n \geq s_k$ $g(n) \geq k$. *Si llamamos* $h = f + g - 1$, *por la definición de* T_U *tenemos que* $(f_U, g_U, h_U) \in T_U$. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *para cada* $n, s_{n+k} \geq n$ *y*

$$\begin{array}{rrl} h(s_{n+k}) = & f(s_{n+k}) + g(s_{n+k}) - 1 < s_n - 2(n+k) + n + k - 1 \\ < & s_n - n - k - 1 < s_n - k, \end{array}$$

entonces $h_U \notin A = V(p)$. *Con lo que hemos probado que* $V(q \to p) = A$.

Veamos que $V(p \circ (p \to q)) = A$. *Como ya probamos que* $V(p \to q) = \prod_U \mathcal{F}_n$ *si* $f \in A$ *basta considerar* $h \in V(p \to q)$, $h(n) = 1$ *para cada* n, *entonces* $f(n) + h(n) \leq f(n) + 1$ *para cada* n, *por lo tanto* $(f_U, h_U, f_U) \in T_U$ *luego,* $A \subseteq V(p \circ (p \to q))$.

Ya observamos que si $(f_U, g_U, h_U) \in T_U$ *y* $f_U \in A$, *entonces* $h_U \in A$. *Con lo cual tenemos que* $V(p \circ (p \to q)) = A$.

Veamos finalmente que $V(q \circ (q \to p)) = \emptyset$. *Supongamos que existen* $(f_U, g_U, h_U) \in T_U$ *tales que* $f_U \in V(q) = B$ *y* $g_U \in V(q \to p) = A$. *Como* $g_U \in V(q \to p) = A$ *existen* $k, n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que para todo* $n \geq n_0$, $g(n) \geq n - k$. *Ahora bien, dado que* $f_U \in B$ *existe* $n_{k+2} \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_{k+2}$ $f_U(n) \geq k + 2$. *Entonces, si* $n \geq \max\{n_0, n_k\}$ *tenemos que*

$$n + 1 < n - k + k + 2 \leq f(n) + g(n) \leq h(n) + 1$$

por lo tanto $h(n) > n$, *lo cual es una contradicción.*

Resumiendo probamos que:

$$V(p \circ (p \to q)) = A, \ y$$
$$V(q \circ (q \to p)) = \emptyset.$$

Luego vemos que

$$\prod\nolimits_U \mathcal{F}_n \not\models_l p \circ (p \to q) \vdash q \circ (q \to p),$$

por lo tanto $\prod_U \mathcal{F}_n \notin Fr(p \circ (q \to p) \vdash q \circ (p \to q))$.

$$Alg_l$$

Proposición 5.31 *Sea* Π *una familia de secuentes. Entonces las siguientes proposiciones son válidas:*

1. $\mathbb{S}(Alg_l(\Pi)) \subseteq Alg_l(\Pi)$.
2. $\mathbb{H}(Alg_l(\Pi)) \subseteq Alg_l(\Pi)$.
3. *Si* $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n \in Alg_l(\Pi)$, *entonces* $\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \in Alg_l(\Pi)$.

Demostración. *1.* El hecho que $\mathbb{S}(Alg_l(\Pi)) \subseteq Alg_l(\Pi)$ se sigue facilmente de la definición de $Alg_l(\Pi)$.

2. Para probar que $\mathbb{H}(Alg_l(\Pi)) \subseteq Alg_l(\Pi)$. Consideremos $\boldsymbol{B} \in \mathbb{H}(Alg_l(\Pi))$, por lo tanto existes $\boldsymbol{A} \in Alg_l(\Pi)$ y $h : A \to B$ un homomorfismo sobreyectivo. Dado $g : Fm \to B$ un homomorfismo del conjunto de fórmulas en el correspondiente lenguaje. Para cada variable proposicional p fijemos $a_p \in A$ tal que

$$h(a_p) = g(p).$$

Consideremos $f : Fm \to A$ es único homomorfismo tal que para cada p variable proposicional

$$f(p) = a_p.$$

Por esta definición tenemos que $h \circ f = g$.

Dado $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$, como $\boldsymbol{A} \in Alg_l(\Pi)$.tenemos que $f(\varphi) \in Fi(f(\Gamma))$. Como h es un homomorfismo,

$$g(\varphi) = h(f(\varphi)) \in h(Fi(f(\Gamma))) \subseteq Fi(h(f(\Gamma))) = Fi(g(\Gamma))$$

por lo tanto $\boldsymbol{B} \in Alg_l(\Pi)$.

3. Denotemos $\boldsymbol{B} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i$ y para cada $1 \leq i \leq n$, indicaremos con $\pi_i : B \to A_i$ a cada una de las proyecciones. Sea $g : Fm \to B$ un homomorfismo. Dado $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$ y cada $\boldsymbol{A}_i \in Alg_l(\Pi)$, tenemos que $\pi_i \circ g(\varphi) \in Fi(\pi_i \circ g(\Gamma))$. Por lo tanto para cada $1 \leq i \leq n$ existen $\varphi_1^i, \ldots, \varphi_{n_i}^i \in \Gamma$ tales que $\pi_i \circ g(\varphi_1^i) \wedge \ldots, \pi_i \circ g(\varphi_{n_i}^i) \leq \pi_i \circ g(\varphi)$. Denotemos $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \{\varphi_1^i, \ldots, \varphi_{n_i}^i\} \subseteq \Gamma$. Claramente Δ es un conjunto finito de fórmulas, y

$$\bigwedge_{\psi \in \Delta} \pi_i \circ g(\psi) \leq \pi_i \circ g(\varphi)$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $\bigwedge_{\psi \in \Delta} g(\psi) \leq g(\varphi)$, es decir, $g(\varphi) \in Fi(g(\Gamma))$. Con lo que concluimos que $\boldsymbol{B} \in Alg_l(\Pi)$. ■

Ya vimos que $Alg_l(\Pi)$ es cerrada bajo subalgebras e imagenes homomórficas. El caso de los productos de álgebras es un poco más complejo. Veamos primero un caso en el que $Alg_l(\Pi)$ no es cerrado bajo productos.

Ejemplo 5.32 *Dada una variable proposicional p, consideremos*

$$\Gamma = \{p^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p \to \bot\}.$$

donde $p^1 = p$ y $p^{n+1} = p^n \circ p$. Luego, como todo elemento distinto del 1 en L_n es nilpotente, tenemos que

$$L_n \in Alg_l(\Gamma \vdash \bot).$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver ejemplo 3.9). Consideremos $\boldsymbol{B} = \prod_{i \in \mathbb{N}} L_n$ y $g : Fm \to B$ un homomorfismo tal que

$$g(p) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right).$$

Es facil ver que:

$$g(p \to \bot) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right), \text{ y}$$

$$g(p^n) = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+2}, \ldots, \frac{i}{n+i}, \ldots\right)$$

Luego $x \in Fi(g(\Gamma))$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+j}, \ldots\right) \leq x.$$

Por lo tanto, $g(\bot) = (0, \ldots, 0, \ldots) \notin Fi(g(\Gamma))$, es decir, $\boldsymbol{B} \notin Alg(\Gamma \vdash \bot)$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(Alg_l(\Gamma \vdash \bot)) \not\subseteq Alg_l(\Gamma \vdash \bot).$$

El ejemplo anterior nos permite concluir que $Alg_l(\Pi)$ no siempre es una variedad ni una cuasi-variedad.

Veamos ahora que en ciertos casos $Alg_l(\Pi)$ si es una familia de álgebras cerrada bajo productos.

Proposición 5.33 *Sea* Π *una familia de secuentes que satisface*

$$\text{Para cada } \Gamma \vdash \varphi \in \Pi, \text{existe } \Delta \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Delta \text{ es finito y } \Delta \vdash \varphi. \tag{fin}$$

entonces las siguientes proposiciónes son válidas:

1. $\mathbb{P}(Alg_l(\Pi)) \subseteq Alg_l(\Pi)$.
2. $\mathbb{V}(Alg_l(\Pi)) = Alg_l(\Pi)$.

Demostración. *1.* Sean $\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}(Alg_l(\Pi))$. Entonces para alguna familia de álgebras en $Alg_l(\Pi)$,

$$\boldsymbol{B} = \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i.$$

Denotemos $\pi_i : B \to A_i$ cada una de las proyecciones. Sea $g : Fm \to B$ un homomorfismo y sea $\Gamma \vdash \varphi \in \Pi$. Por la hipótesis (fin) podemos suponer que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas tales que

$$\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Como cada $A_i \in Alg_l(\Pi)$ tenemos que

$$\pi_i \circ g(\varphi) \in Fi(\pi_i \circ g(\Gamma)) = [\pi_i \circ g(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \pi_i \circ g(\varphi_n)).$$

Entonces, para cada $i \in I$. $\pi_i \circ g(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \pi_i \circ g(\varphi_n) \leq \pi_i \circ g(\varphi)$, por lo tanto

$$g(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge g(\varphi_n) \leq g(\varphi).$$

Luego $g(\varphi) \in Fi(g(\Gamma))$. Con lo que concluimos que $\boldsymbol{B} \in Alg_l(\Pi)$.

2. Se sigue del inciso *1* y de la proposición 5.31. ∎

Seq_l

Proposición 5.34 *Dada* Λ *una familia de marcos, entonces* $\langle \mathbf{Fm}, Seq_l(\Lambda) \rangle$ *es un sistema deductivo con conjunción.*

Demostración. Consideremos Γ y Δ dos conjuntos de fórmulas y φ una fórmula

1. Si $\varphi \in \Gamma$, entonces para cada marco $\mathcal{F} \in \Lambda$ y cada valuación V sobre $\mathcal{F}$, tenemos que $V(\Gamma) = \bigcap_{\psi \in \Gamma} V(\psi) \subseteq V(\varphi)$, por lo tanto $\Gamma \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$.

2. Supongamos que Γ y Δ son tales que , $\Delta \vdash \psi \in Seq_l(\Lambda)$ para cada $\psi \in \Gamma$ y que $\Gamma \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$. Si $\mathcal{F} \in \Lambda$ y V es una valuación sobre $\mathcal{F}$, entonces $V(\Delta) \subseteq V(\psi)$ para cada $\psi \in \Gamma$, es decir,

$$V(\Delta) \subseteq V(\Gamma) \subseteq V(\varphi).$$

Luego $\Delta \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$.

3. Si $\Gamma \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$ y f es una sustitución en $\mathbf{Fm}$, dado que para cada valuación $V \circ f$ es una valuación, entonces $f(\Gamma) \vdash f(\varphi) \in Seq_l(\Lambda)$.

El hecho de que el conectivo $\wedge$ se una conjunción en $\langle \mathbf{Fm}, Seq_l(\Lambda) \rangle$ se sigue directamente de la definición de la semántica y de la definición de conjunción. ∎

5.4.2. Relaciones entre Fr, Seq, Alg y $\mathcal{S}$.

Durante esta subsección primero analizaremos el comportamiento de las distintas composiciones de los operadores Fr, Seq, Alg y $\mathcal{S}$. Luego probaremos ciertas relaciones entre la deducción local y global y las lógicas basadas en semiretículos y afirmativas que nos serán de mucha utilidad en el próximo capítulo cuando estudiemos extensiones de $\mathcal{S}$(DLFI) y $\mathcal{S}$(DLI).

Álgebras y secuentes

En [36], Jansana prueba que

$$Alg(\mathcal{S}(\mathsf{K})) = \mathbb{V}(\mathsf{K}).$$

Por nuestra definición, claramente $Alg(\mathcal{S}(\mathsf{K})) = Alg_l(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})})$ luego tenemos que

$$\mathsf{K} = Alg_l(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})}) \text{ si y sólo si } \mathsf{K} \text{ es una variedad.}$$

Proposición 5.35 *Sea Π una familia de secuentes que satisface la condición (fin) de la proposición 5.33, entonces las siguientes proposiciones son válidas:*

1. $\Pi \subseteq \vdash_{\mathcal{S}(Alg_l(\Pi))}$.
2. $\mathcal{S}(Alg_l(\Pi))$ *es el menor sistema deductivo finitario autoextensional que satisface 1.*
3. $\Pi = \vdash_{\mathcal{S}(Alg_l(\Pi))}$ *si y sólo si* $\mathcal{S} = \langle Fm, \Pi\rangle$ *es un sistema deductivo finitario autoextensional*

Demostración. *1.* Directamente de la definición de $\mathcal{S}(Alg_l(\Pi))$ y de la propiedad (fin).
2. Se sigue del teorema 4.7.
3. Directamente del item anterior. ■

Veamos con un ejemplo que la contención del item *1.* de la proposición anterior no es necesariamente válida si Π no satisface la condición (fin).

Ejemplo 5.36 *Sea $\Gamma = \{p^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p \to \bot\}$ como en el ejemplo 5.32. Vimos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{L}_n \in Alg_l(\Gamma \vdash \bot)$. Pero*

$$\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}(Alg_l(\Gamma \vdash \bot))} \bot,$$

dado que no existe ningún subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que para cada $\mathbf{L}_n$ y cada $h : Fm \to \mathbf{L}_n$, $h(\bot) = 0 \in Fi(h(\Delta))$.

Álgebras y marcos

Claramente dada un familia de álgebras K

$$\mathsf{K} \subseteq \mathbb{S}(Alg(Fr(\mathsf{K}))).$$

Definición 5.37 *Sea K una clase de álgebras (***DLI, DLF** *o* **DLFI**-*álgebras). Diremos que K es* ***canónica con respecto a marcos (I, F, FI-marcos)*** *si satisface la siguiente condición:*

$$Alg(Fr(\mathsf{K})) \subseteq \mathsf{K}.$$

Si K es una variedad, resulta de la definición anterior y la observación previa a la misma, que si K es canónica con respecto a marcos entonces

$$\mathbb{V}(Alg(Fr(\mathsf{K}))) = \mathsf{K}.$$

En el próximo capítulo veremos algunos ejemplos de clases de álgebras canónicas con respecto marcos, como los **RCID**-retículos, **MTL**-álgebras y **WH**-álgebras, entre otras; y en la última sección de este capítulo analizaremos un ejemplo de clases de álgebras no canónicas y analizaremos la relación entre la canonicidad por marcos y otro tipo de canonicidad que definiremos en la próxima sección.

Marcos y secuentes

Dada Π una familia de secuentes, tenemos que

$$\Pi \subseteq Seq_l(Fr_l(\Pi)).$$

Aún en el caso que $\langle Fm, \Pi\rangle$ sea un sistema deductivo no podemos asegurar que $\Pi = Seq_l(Fr_l(\Pi))$. En el próximo capítulo veremos que si V es una variedad canónica según la definición 5.37, entonces $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})} = Seq_l\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right)$.

Es facil ver que

$$Fr_l(\Pi) = Fr_l(Seq_l(Fr_l(\Pi)))$$

Dada Λ un familia de marcos, claramente

$$\Lambda \subseteq Fr_l(Seq_l(\Lambda)).$$

Luego

$$Seq_l(\Lambda) = Seq_l(Fr_l(Seq_l(\Lambda)))$$

Algebras, marcos y secuentes

Proposición 5.38 *Sea* K *una clase de álgebras y sea* Λ *una familia de marcos entonces las siguientes proposiciones son válidas,*

1. $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \subseteq Seq_l(\Lambda)$ *si y sólo si* $Alg(\Lambda) \subseteq \mathbb{V}(\mathsf{K})$.
2. *Si* $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} = Seq_l(\Lambda)$, *entonces* $\mathbb{V}(\mathsf{K}) = \mathbb{V}(Alg(\Lambda))$.

Demostración. *1.* Supongamos que $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \subseteq Seq_l(\Lambda)$. Y sea $\varphi \approx \psi$ una ecuación válida en cada álgebra de $\mathbb{V}(\mathsf{K})$. Por la observación 4.5, tenemos que $\varphi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \psi$ y $\psi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi$, por lo tanto $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$. Luego por la observación 5.4, para cada $\mathcal{F} \in \Lambda$ y cada homomorfismo h de $\mathbf{Fm}$ en $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ $h(\varphi) = h(\psi)$. Con lo cual concluimos que para cada $\mathcal{F} \in \Lambda$, $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ satisface todas la ecuaciones válidas en $\mathbb{V}(\mathsf{K})$, luego $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}} \in \mathbb{V}(\mathsf{K})$

La recíproca es directa de la observación 5.4 y del hecho que $\mathcal{S}(\mathsf{K})$ es un sistema deductivo finitario.

2. Por el inciso anterior tenemos que $\mathbb{V}(Alg(\Lambda)) \subseteq \mathbb{V}(\mathsf{K})$. Para la otra inclusión consideremos una ecuación $\varphi \approx \psi$ válida en $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ para cada $\mathcal{F} \in \Lambda$. Entonces $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \in Seq_l(\Lambda)$. Por hipótesis $\varphi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \psi$ y $\psi \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \varphi$, por lo tanto cada $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ satisface la ecuación $\varphi \approx \psi$. Con lo que concluimos que $\mathbb{V}(\mathsf{K}) \subseteq \mathbb{V}(Alg(\Lambda))$. ∎

Corolario 5.39 *Sea* K *una clase de álgebras canónica por marcos ternarios, entonces*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \subseteq Seq_l\left(Fr\left(\mathsf{K}\right)\right)$$

En el próximo capítulo veremos que si V es una variedad de álgebras canónicas por marcos ternarios en realidad tenemos que $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})} = Seq_l\left(Fr\left(\mathsf{V}\right)\right)$.

Veremos ahora la conexión entre deducción global y local en una familia de marcos y la lógica basada en semiretículo y la lógica afirmativa de una variedad de álgebras.

Lema 5.40 *Dada* Λ *una clase de marcos entonces*

$$\vdash_{\mathcal{S}(Alg(\Lambda),1)} = Seq_g\left(\Lambda\right)$$

Demostración. Por la definción de satisfacción global y la observación 5.4 tenemos que $\mathcal{F} \models_g \Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si para cada homomorfismo $h : Fm \to \boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$ si $h\left(\Gamma\right) \subseteq \{1_{\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}}\} = \{X\}$, entonces $h\left(\varphi\right) = 1_{\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}} = X$, donde X es el conjunto subyacente al marco $\mathcal{F}$. El resultado se sigue. ∎

Corolario 5.41 *Sea* K *una clase de álgebras y sea* Λ *una clase de marcos tal que*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})} \subseteq Seq_l\left(\Lambda\right).$$

Entonces,

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathbb{V}(\mathsf{K}),1)} \subseteq Seq_g\left(\Lambda\right).$$

Demostración. Si $\mathcal{F} \in \Lambda$, por el lema 5.38 tenemos que $\mathcal{F} \in \mathbb{V}\left(\mathsf{K}\right)$. Luego el resultado se sigue del lema 5.40. ∎

Corolario 5.42 *Sea* K *una clase de álgebras entonces,*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathbb{V}(\mathsf{K}),1)} \subseteq Seq_g\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K})}\right)\right).$$

Teorema 5.43 *Sea* K *una clase de álgebras canónica por marcos ternarios entonces,*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K},1)} = Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{K}\right)\right).$$

Demostración. Si $\mathcal{F} \in Fr\left(\mathsf{K}\right)$, como K es canónica por marcos ternarios $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}} \in \mathsf{K}$. Luego

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K},1)} \subseteq Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{K}\right)\right).$$

por el lema 5.40.

Para probar la otra inclusión consideremos $\Gamma \vdash \varphi \in Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{K}\right)\right)$, $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ y $h \in Hom\left(\mathbf{Fm}, \boldsymbol{A}\right)$.tal que $h\left(\Gamma\right) = 1$. Consideremos $\sigma_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$, vimos en la observación 5.4, que $\sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h$ es una valuación en $\mathcal{F}\left(\boldsymbol{A}\right)$. Como $\Gamma \vdash \varphi \in Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{K}\right)\right)$,

$$h\left(\Gamma\right) = 1 \Rightarrow \sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h\left(\Gamma\right) = X\left(\boldsymbol{A}\right) \Rightarrow \sigma_{\boldsymbol{A}} \circ h\left(\varphi\right) = X\left(\boldsymbol{A}\right) \Rightarrow h\left(\varphi\right) = 1.$$

Con lo que concluimos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{K},1)} \varphi$. ∎

Corolario 5.44 *Sea* V *una variedad de álgebras canónica por marcos ternarios entonces,*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)} = Seq_g\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right).$$

Demostración. En el corolario 5.42 vimos que $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)} \subseteq Seq_g\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right)$. Por el teorema anterior tenemos que $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)} = Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{V}\right)\right)$, y como la clase de álgebras es canónica $Fr\left(\mathsf{V}\right) \subseteq Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)$, luego

$$Seq_g\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right) \subseteq Seq_g\left(Fr\left(\mathsf{V}\right)\right) = \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)},$$

y el resultado se sigue. ■

5.5. No canonicidad de MV-álgebras y BL-álgebras

Como el título lo indica en esta sección probaremos que las variedades Ł y BL no son canónicas por marcos ternarios. A su vez analizaremos otro concepto de canonicidad introducido por Jónsson y Tarski para el caso de álgebras de Boole con operadores (ver [38],[39]) y generalizado para retículos distributivos, retículos y conjuntos ordenados con diferentes tipos de operaciones internas en [29],[30],[31].

Algunos de los resultados presentados en esta sección fueron aceptados para su publicación en el Reports on Mathematical Logic [9].

Primero necesitamos introducir cierta notación y definiciones.

Dado $\boldsymbol{M}$ un retículo completo un elemento $u \in M$ se dirá **supremo completamente irreducible** si para cada $S \subseteq M$ tal que $u = \bigvee S$ entonces existe $s \in S$, tal que $u = s$. Dentaremos $J^{\infty}(\boldsymbol{M})$ al conjunto de los elementos supremo completamente irreducibles de $\boldsymbol{M}$. El concepto de **infimo completamente irreducible** se define en forma dual, y notaremos al conjunto de estos elementos $M^{\infty}(\boldsymbol{M})$. Por otro lado $c \in M$ es **compacto** si para cada $S \subseteq M$ tal que $u = \bigvee S$ existe S' un subconjunto finito de S tal que $u = \bigvee S'$. Un retículo completo $\boldsymbol{M}$ se dirá **algebraico** si y sólo si todo elemento de M es supremo de elementos compactos de $\boldsymbol{M}$ y diremos que es **doblemente algebraico** si $\boldsymbol{M}$ y su dual $\boldsymbol{M}^{-1}$ son algebraicos.

Dado un retículo distributivo $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$, una **extensión** es un homomorfismo inyectivo $e : L \to M$, en otro retículo distributivo $\boldsymbol{M}$. Para simplicar la notación suprimiremos el embebimiento e, y diremos que $\boldsymbol{M}$ es una extensión de $\boldsymbol{L}$.

Una extensión $\boldsymbol{M}$ es llamada una **completación** si $\boldsymbol{M}$ es un retículo completo. Dada una extensión $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{L}$, diremos que $\boldsymbol{L}$ es **separante** en $\boldsymbol{M}$ si para cada elemento $u \in J^{\infty}(\boldsymbol{M})$ y todo elemento $p \in M^{\infty}(\boldsymbol{M})$ que satisfacen $p \leq u$, existe $a \in L$ tal que $p \leq e(a) \leq u$. Dada una completación $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}$ es llamado **compacto** en $\boldsymbol{M}$ si para cada $X, Y \subseteq L$ que cumplen que $\bigwedge_{\boldsymbol{M}} e(X) \leq \bigvee_{\boldsymbol{M}} e(Y)$, existen conjuntos finitos $F \subseteq X$ y $G \subseteq Y$ tales que

$$\bigwedge_{\boldsymbol{M}} e(F) = e\left(\bigwedge_{\boldsymbol{L}} F\right) \leq e\left(\bigvee_{\boldsymbol{L}} G\right) = \bigvee_{\boldsymbol{M}} e(G).$$

Dado un retículo distributivo $\boldsymbol{L}$, con $\boldsymbol{L}^{\sigma}$ denotaremos al retículo $\mathcal{P}_c(X(\boldsymbol{A}), \subseteq)$. Claremente $\sigma_{\boldsymbol{L}} : L \to L^{\sigma}$ es una completación. Esta completación es llamada la **extensión canónica** de $\boldsymbol{L}$ y puede ser caracterizada salvo isomorfismos por el siguiente lema.

Lema 5.45 ([30, Theorem 2.5]) *Dado un retículo distributivo* $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^{\sigma}$ *es un retículo completo doblemente algebraico tal que* $\boldsymbol{L}$ *es separante y compacto en* $\boldsymbol{L}^{\sigma}$. *Si* $\boldsymbol{M}$ *es una completación que cumple con las propiedades antes mencionadas, entonces es* $\boldsymbol{M}$ *isomorfo a* $\boldsymbol{L}^{\sigma}$.

Cuando sea útil y por lo que resta de esta sección, para simplificar la notación consideraremos $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{L}^{\sigma}$, identificando a $\sigma_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{L})$ con $\boldsymbol{L}$.

Un elemento $p \in \boldsymbol{L}^{\sigma}$ es llamado **cerrado** si existe $X \subseteq L$ tal que $p = \bigwedge X$. El conjunto de elementos cerrados de $\boldsymbol{L}^{\sigma}$ será notado por $K(\boldsymbol{L}^{\sigma})$. La noción de elemento **abierto** se define de forma dual, y el conjunto de elementos abiertos es denotado $O(\boldsymbol{L}^{\sigma})$.

Dada una **DLI**, **DLF**, o **DLFI**-álgebra $\boldsymbol{A}$ cuyo reducto de retículo es $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, el álgebra $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es una **DLI**, **DLF**, o **DLFI**-álgebra cuyo retículo subyacente es exactamente $\langle A, \wedge, \vee \rangle^{\sigma}$. Dado que $\sigma_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es un homomorfismo inyectivo tenemos que las operaciones $\to_{R_{\boldsymbol{A}}}$ y $\circ_{R_{\boldsymbol{A}}}$ son extensiones de las operaciones $\to$ y $\circ$ de $\boldsymbol{A}$.

En la teoría de extensiones canónicas se definen dos posibles extensiones para una función creciente $f : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{M}$: una es llamada **extensión canónica** y denotada $f^{\sigma} : L^{\sigma} \to M^{\sigma}$ y la otra es llamada **extensión canónica dual** y denotada $f^{\pi} : L^{\sigma} \to M^{\sigma}$. Hay varias maneras de definir estas extensiones (ver [29],[30]). Para el resto de esta sección, las definiremos de acuerdo con el siguiente lema, muy útil a la hora de calcular dichas extensiones.

Lema 5.46 *Sea* $f : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{M}$ *una función creciente de* $\boldsymbol{L}$ *en* $\boldsymbol{M}$, *entonces*

1. $f^{\sigma}(p) = \bigwedge \{f(a) : p \leq a \text{ y } a \in L\}$, *para cada* $p \in K(\boldsymbol{L}^{\sigma})$,
2. $f^{\pi}(u) = \bigvee \{f(a) : a \leq u \text{ y } a \in L\}$, *para cada* $u \in O(\boldsymbol{L}^{\sigma})$,
3. $f^{\sigma}(x) = \bigvee \{f^{\sigma}(p) : p \leq x \text{ y } p \in K(\boldsymbol{L}^{\sigma})\}$ *para cada* $x \in \boldsymbol{L}^{\sigma}$,
4. $f^{\pi}(x) = \bigwedge \{f^{\pi}(u) : x \leq u \text{ y } u \in O(\boldsymbol{L}^{\sigma})\}$ *para cada* $x \in \boldsymbol{L}^{\sigma}$

Una función $f : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{M}$, es llamada **suave** si $f^{\sigma} = f^{\pi}$.

Siguendo con la notación utilizada en esta tesis recordemos que dado un retículo $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^{-1}$ denota el retículo con el order inverso[2].

La prueba de los siguientes resultados puede encontrarse en [30].

1. $\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{\sigma} = (\boldsymbol{L}^{\sigma})^{-1}$
2. $K\left(\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{\sigma}\right) = O((\boldsymbol{L}^{\sigma}))$ y $O\left(\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{\sigma}\right) = K((\boldsymbol{L}^{\sigma}))$.
3. $(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M})^{\sigma} = \boldsymbol{L}^{\sigma} \times \boldsymbol{M}^{\sigma}$
4. $K(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M})^{\sigma} = K(\boldsymbol{L}^{\sigma}) \times K(\boldsymbol{M}^{\sigma})$ y $K(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M})^{\sigma} = K(\boldsymbol{L}^{\sigma}) \times K(\boldsymbol{M}^{\sigma})$.

[2]En los artículos citados sobre extensiones canónicas usualmente se denota $\boldsymbol{L}^{d}$ o $\boldsymbol{L}^{\delta}$ al retículo $\boldsymbol{L}^{-1}$.

Utilizando las observaciones previas las extensiones $f^\sigma, f^\pi: \left(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i\right)^\sigma \to \boldsymbol{M}^\sigma$ de una función $f : \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i \to \boldsymbol{M}$ que es creciente o decreciente en cada coordenada, pueden ser calculadas de acuerdo con el lema 5.46.

Dada un álgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ con un reducto de retículo distributivo tal que cada operación f_i es creciente o decreciente en cada coordenada, nos permite definir dos posibles candidatos a extender el álgebra $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^\sigma = \langle A^\sigma, \wedge, \vee, \{f_i^\sigma\}_{i\in I}\rangle$ y $\boldsymbol{A}^\pi = \langle A^\sigma, \wedge, \vee, \{f_i^\pi\}_{i\in I}\rangle$ llamadas las extensiones canónica y canónica dual de $\boldsymbol{A}$. Una clase de álgebras es llamada σ-canónica o π-canónica si es cerrada bajo extensiones canónicas o canónicas duales respectivamente.

Existen varios resultados, positivos y negativos sobre la canonicidad de diferentes clases de álgebras. Uno de los más poderosos es el dado en [30] donde se prueba que si una clase K es cerrada bajo ultraproductos y σ-canonicas (π-canonicas) extensiones, entonces la variedad generada por K es σ-canónica (π-canónica). En [32], Gerhke y Priestley probaron que las únicas subvariedades de **MV**-álgebras que resultan canonicas son exactamente las finitamente generadas. En ese trabajo se analizan las **MV**-álgebras en el lenguaje $\{\oplus, \neg, 0, 1\}$, por ello y dado que las ecuaciones que permiten definir la fusión y la implicación en este lenguaje

$$a \to b = \neg a \oplus b$$
$$a \circ b = \neg(\neg a \oplus \neg b)$$

no se pueden aplicar a las respectivas extensiones de cada operación, estos resultados no pueden ser traducidos directamente al lenguaje de las **BL**-álgebras. En esta sección estudiaremos la canonicidad de las **BL**-álgebras y algunas de sus subvariedades en los tres sentidos que hemos definido, σ-canonicidad, π-canonicidad y canonicidad por marcos ternarios. Probaremos que en ninguno de estos sentidos las **BL**-álgebras son canónicas, luego analizaremos las relaciones entre las distintas extension y finalmente veremos que las únicas subvariedades de **BL**-álgebras generadas por cadenas indescomponibles (ver pag. 118) que son σ-canonical son las finitamente generadas.

5.5.1. Las extensiones canónicas del álgebra de Chang

Comenzaremos probando que la variedad de las **BL**-álgebras no es σ-canónica, ni π-canónica y ni canónica por marcos ternarios, comprobando que las extensiones canónicas del álgebra de Chang (ver ejemplo 3.12) no son **BL**-Álgebras.

Recordemos que $X(\boldsymbol{C}) = \{[(i,a)) : i \neq 0 \text{ o } a \neq 0\} \cup \{P_{\boldsymbol{C}}\}$ donde $P_{\boldsymbol{C}} = \{(1,b) : b \in \mathbb{Z}^-\}$. Como estamos idenficando cada elemento de $\boldsymbol{C}$ con su correspondiente en $\boldsymbol{C}^\sigma$ podemos observar que $\boldsymbol{C}^\sigma$ tiene sólo dos nuevos elementos $[P_{\boldsymbol{C}})$ y $[P_{\boldsymbol{C}}) \setminus \{P_{\boldsymbol{C}}\}$, siguiendo la notación de [32] los llamaremos x e y respectivamente (ver Fig. 5).

Como el lenguaje y la definición de las extensiones σ y π-canónicas difieren en gran medida de los correspondientes para la extension por marcos ternarios, decidimos separar las proposiciones que calculan estas extensiones.

Proposición 5.47 *Sean* $\circ^\sigma$ *y* $\circ^\pi$ *la extensión canónica y canónica dual del operador* $\circ$ *en el*

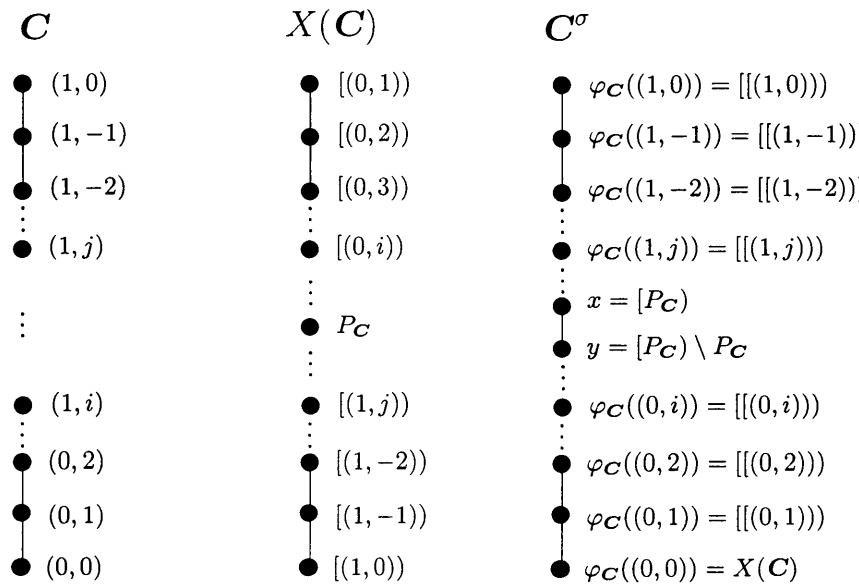


Fig. 5

álgebra de Chang $\mathbf{C}$. *Las siguientes tablas los describen completamente*

$$a \circ^{\sigma} b = \begin{cases} a \circ b & si\ a, b \in C, \\ (0,0) & si\ a = x\ y\ b = (0,i) \quad (a) \\ & o\ a = (0,i)\ y\ b = x, \\ x & si\ a = x\ y\ b \geq x \quad (b) \\ & o\ a > x\ y\ b = x, \\ (0,0) & si\ a = x\ y\ b = y \quad (c) \\ & o\ a = y\ y\ b = x, \\ (0,0) & si\ a = y\ y\ b \leq y \quad (d) \\ & o\ a < y\ y\ b = y, \\ y & si\ a = y\ y\ b = (1,j) \quad (e) \\ & o\ a = (1,j)\ y\ b = y \end{cases}$$

y

$$a \circ^{\pi} b = \begin{cases} y & si\ a = x\ y\ b = y \quad (f) \\ & o\ if\ a = y\ y\ b = x, \\ a \circ^{\sigma} b & en\ otro\ caso. \quad (g) \end{cases}$$

Donde $i \in \mathbb{Z}^+$ y $j \in \mathbb{Z}^-$.

Demostración. Es facil ver que $K(\mathbf{C}^{\sigma}) = C \cup \{x\}$ y $O(\mathbf{C}^{\sigma}) = C \cup \{y\}$. Por lo tanto, $K((\mathbf{C} \times \mathbf{C})^{\sigma}) = (C \cup \{x\}) \times (C \cup \{x\})$ y $O((\mathbf{C} \times \mathbf{C})^{\sigma}) = (C \cup \{y\}) \times (C \cup \{y\})$.

En [30] prueban que toda variedad de retículos distributivos con operadores (en nuestra notación retículo con supremo homomorfismos) son canónicas, de esto podemos deducir que dado $\circ$ es conmutativa, entonces $\circ^{\sigma}$ y $\circ^{\pi}$ son conmutativas (ver tambien [29, Theorem 4.6]). Por ello sólo debemos probar las igualdades indexadas en la tabla.

Primero calcularemos $\circ^{\sigma}$.
(a) Dado que $(x,(0,i)) \in K\left((\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C})^{\sigma}\right)$,

$$\begin{aligned} x \circ^{\sigma} (0,i) &= \bigwedge \{c \circ d : x \leq c \text{ and } (0,i) \leq d \text{ and } c,d \in C\} \\ &= \bigwedge \{(1,k) \circ (0,i) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= \bigwedge \{(0, 0 \vee (k+i)) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Como $(x,(1,j)), (x,x) \in K\left((\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C})^{\sigma}\right)$, (b) se sigue de manera similar.
(c)

$$\begin{aligned} x \circ^{\sigma} y &= \bigvee \{c \circ^{\sigma} d : c,d \in K(\boldsymbol{C}^{\sigma}), c \leq x \text{ y } d \leq y\} \\ &= \bigvee \{x \circ^{\sigma} (0,k) : k \in \mathbb{Z}^{+}\} \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

(d) Dado que $\circ^{\sigma}$ es conmutativa y creciente en cada coordenada, tenemos que

$$(0,0) \leq y \circ^{\sigma} (0,i) \leq y \circ^{\sigma} y \leq x \circ^{\sigma} y = (0,0)$$

(e)

$$\begin{aligned} y \circ^{\sigma} (1,j) &= \bigvee \{c \circ^{\sigma} (1,j) : c \in K(\boldsymbol{C}^{\sigma}), c \leq y\} \\ &= \bigvee \{(0,i) \circ (1,j) : i \in \mathbb{Z}^{+}\} \\ &= \bigvee \{(0, 0 \vee (i+j)) : i \in \mathbb{Z}^{+}\} \\ &= y. \end{aligned}$$

Por [30, Theorem 2.20], tenemos que $\circ^{\sigma}$ y $\circ^{\pi}$ coinciden en $K\left((\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C})^{\sigma}\right) \cup O\left((\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C})^{\sigma}\right)$. Por ello sólo debemos probar (f).

$$\begin{aligned} x \circ^{\pi} y &= \bigwedge \{c \circ^{\pi} d : c,d \in O(\boldsymbol{C}^{\sigma}), x \leq c \text{ y } y \leq d\} \\ &= \bigwedge \{(1,j) \circ^{\pi} y : j \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= y. \end{aligned}$$

■

La siguiente proposición podria obtenerse directamente de la proposición anterior y el teorema 5.53. Elegimos poner aquí una demostración independiente de este resultado para tener como ejemplo un calculo efectivo de $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ para algún álgebra no trivial.

Proposición 5.48 *Sea $\circ_{R_C}$ la extensión por marcos ternarios del operador $\circ$ en el álgebra de Chang $\boldsymbol{C}$. La siguiente tabla la describe completamente*

$$a \circ_{R_C} b = \begin{cases} a \circ b & si\ a, b \in C, \\ (0,0) & si\ a = x\ y\ b = (0,i) \quad (a) \\ & o\ a = (0,i)\ y\ b = x, \\ x & si\ a = x\ y\ b \geq x \quad (b) \\ & o\ a > x\ y\ b = x, \\ (0,0) & si\ a = x\ y\ b = y \quad (c) \\ & o\ a = y\ y\ b = x, \\ (0,0) & si\ a = y\ y\ b \leq y \quad (d) \\ & o\ a < y\ y\ b = y, \\ y & si\ a = y\ y\ b = (1,j) \quad (e) \\ & o\ a = (1,j)\ y\ b = y \end{cases}$$

Demostración. Como $\circ$ es conmutativa, en el item 3 del teorema 3.24 probamos que si $(P,Q,D) \in R_{\boldsymbol{C}}$ entonces $(Q,P,D) \in R_{\boldsymbol{C}}$, luego para cada $U, V \in \boldsymbol{C}^{\sigma}$, $R_{\boldsymbol{C}}(U,V) = R_{\boldsymbol{C}}(V,U)$, por lo tanto $\circ_{R_C}$ resulta conmutativa. Por ello sólo debemos probar las igualdades indexadas en la tabla (ver tambien el item 1.(a) del teorema 6.2).

Recordemos que estamos identificando a los elementos de $\boldsymbol{C}$ con $\sigma_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})$. Por ello al momento de realizar las cuentas utilizaremos ambas notaciones.

Recordemos que la relación $R_{\boldsymbol{C}}$ puede obtenerse por la tabla dada en el ejemplo 3.12

(a)

$$\begin{aligned} x \circ_{R_C} (0,i) &= R_{\boldsymbol{C}}(x,(0,i)) = R_{\boldsymbol{C}}([P_{\boldsymbol{C}}), \sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i))) \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists j \leq i, (P_{\boldsymbol{C}}, [(0,j)), P) \in R_{\boldsymbol{C}}\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists j \leq i, P_{\boldsymbol{C}} \circ [(0,j)) \subseteq P\} \end{aligned}$$

Como $P_{\boldsymbol{C}} \circ [(0,j)) = \boldsymbol{C}$, tenemos que $x \circ_{R_C} (0,i) = \emptyset = \sigma_{\boldsymbol{C}}(0,0) = (0,0)$.

(b)

$$\begin{aligned} x \circ_{R_C} x &= R_{\boldsymbol{C}}(x,x) = R_{\boldsymbol{C}}([P_{\boldsymbol{C}}), [P_{\boldsymbol{C}})) \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P_{\boldsymbol{C}} \circ P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P\} = x. \end{aligned}$$

Si $b = (1,j)$, dado que $P_{\boldsymbol{C}} \circ [(1,j)) = P_{\boldsymbol{C}}$ el resultado se sigue de manera análoga.

(c)

$$\begin{aligned} x \circ_{R_C} y &= R_{\boldsymbol{C}}(x,y) = R_{\boldsymbol{C}}([P_{\boldsymbol{C}}), [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}}) \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists i > 0, P_{\boldsymbol{C}} \circ [(0,i)) \subseteq P\} \\ &= \emptyset = \sigma_{\boldsymbol{C}}(0,0) = (0,0). \end{aligned}$$

(d) Como $\circ_{R_C}$ es un operador de tipo $(1,1,1)$ es creciente en cada coordenada,

$$(0,0) \leq y \circ_{R_C} (0,j) \leq y \circ_{R_C} y \leq x \circ_{R_C} y = (0,0).$$

(e)

$$\begin{aligned} y \circ_{R_{\boldsymbol{C}}} (1,j) &= R_{\boldsymbol{C}}(y,(1,j)) = R_{\boldsymbol{C}}([P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}}, \sigma_{\boldsymbol{C}}((1,j))) \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists i > 0, [(0,i)) \circ [(1,j)) \subseteq P\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists i > 0, [(0, 0 \vee (i+j))) \subseteq P\} \\ &= [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} = y. \end{aligned}$$

■

Proposición 5.49 *Las extensiones canónicas $\to^\sigma$ y $\to^\pi$ de la implicación $\to$ del álgebra de Chang estan dadas por las siguientes tablas:*

$$a \to^\sigma b = \begin{cases} a \to b & si\ a,b \in C, \\ (1,0) & si\ a = y\ y\ b \geq x \quad (a) \\ x & si\ a = y\ y\ b = (0,i) \quad (b) \\ (1,0) & si\ a = (0,i)\ y\ b = y \quad (c) \\ y & si\ a \geq x\ y\ b = y \quad (d) \\ x & si\ a = b = y \quad (e) \\ (1,0) & si\ a = (0,i)\ y\ b = x \quad (f) \\ x & si\ a = (1,j)\ y\ b = x \quad (g) \\ x & si\ a = b = x \quad (h) \\ y & si\ a = x\ y\ b = (0,i) \quad (i) \\ (1,0) & si\ a = x\ y\ b = (1,j) \quad (j) \end{cases}$$

y

$$a \to^\pi b = \begin{cases} (1,0) & si\ a = b = y \quad (k) \\ (1,0) & si\ a = b = x \quad (l) \\ a \to^\sigma b & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. Primero observemos que $K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^\sigma\right) = (C \cup \{y\}) \times (C \cup \{x\})$ y $O\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)^\sigma \times \boldsymbol{C}^\sigma\right) = (C \cup \{x\}) \times (C \cup \{y\})$.

Calculemos ahora $\to^\sigma$.

(a) Como $(y,x) \in K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^\sigma\right)$,

$$\begin{aligned} y \to^\sigma x &= \bigwedge \{(0,k) \to (1,l) : k \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } l \in \mathbb{Z}^-\} \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

El caso $(y,(1,j))$ se sigue de manera análoga.

(b) Dado que $(y,(0,i)) \in K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^\sigma\right)$,

$$\begin{aligned} y \to^\sigma (0,i) &= \bigwedge \{(0,k) \to (0,i) :\ k \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= x. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (0,i) \to^\sigma y &= \bigvee \{(0,i) \to^\sigma (0,k) : k \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= (0,1). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x \to^{\sigma} y &= \bigvee \{(1,l) \to^{\sigma} (0,k) : k \in \mathbb{Z}^{+} \text{ y } l \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= \bigvee \{(0,k-j) : k \in \mathbb{Z}^{+} \text{ y } l \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= y. \end{aligned}$$

Para el caso $((1,j),y)$ la demostración es similar.

(e)

$$\begin{aligned} y \to^{\sigma} y &= \bigvee \{y \to^{\sigma} (0,k) : k \in \mathbb{Z}^{+} \text{ y } l \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= x. \end{aligned}$$

(f) Como $((0,i),x) \in K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^{\sigma}\right)$,

$$\begin{aligned} (0,i) \to^{\sigma} x &= \bigwedge \{(0,i) \to (1,k) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

(g) Ya que $((1,j),x) \in K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^{\sigma}\right)$,

$$\begin{aligned} (1,j) \to^{\sigma} x &= \bigwedge \{(1,j) \to (1,k) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= \bigwedge \{(1,0 \wedge (k-j)) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= x. \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} x \to^{\sigma} x &= \bigvee \{(1,k) \to^{\sigma} x : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= x. \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} x \to^{\sigma} (0,i) &= \bigvee \{(1,k) \to^{\sigma} (0,i) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= \bigvee \{(0,i-k) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= y. \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} x \to^{\sigma} (1,j) &= \bigvee \{(1,k) \to^{\sigma} (1,j) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= \bigvee \{(1,0 \wedge (j-k)) : k \in \mathbb{Z}^{-}\} \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

Por el hecho de que $\to^{\sigma}$ y $\to^{\pi}$ son iguales en $K\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^{\sigma}\right) \cup O\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1} \times \boldsymbol{C}\right)^{\sigma}\right)$, sólo debemos probar (k) y (l)

(k)

$$\begin{aligned} y \to^{\pi} y &= \bigwedge \{(0,k) \to^{\pi} y : k \in \mathbb{Z}^{+}\} \\ &= \bigwedge \{(0,k) \to^{\sigma} y : k \in \mathbb{Z}^{+}\} \\ &= (1,0). \end{aligned}$$

(l) Se sigue de manera análoga. ■

Proposición 5.50 *La extensión canónica por marcos $\rightarrow_{T_C}$ de la implicación $\rightarrow$ del álgebra de Chang esta dada por la siguiente tabla:*

$$a \rightarrow_{T_C} b = \begin{cases} a \rightarrow b & si\ a, b \in C, \\ (1,0) & si\ a = y\ y\ b \geq x \quad (a) \\ x & si\ a = y\ y\ b = (0,i) \quad (b) \\ (1,0) & si\ a = (0,i)\ y\ b = y \quad (c) \\ y & si\ a \geq x\ y\ b = y \quad (d) \\ y & si\ a = (1,j)\ y\ b = y \quad (e) \\ (1,0) & si\ a = b = y \quad (f) \\ (1,0) & si\ a = (0,i)\ y\ b = x \quad (g) \\ x & si\ a = (1,j)\ y\ b = x \quad (h) \\ (1,0) & si\ a = b = x \quad (i) \\ y & si\ a = x\ y\ b = (0,i) \quad (j) \\ (1,0) & si\ a = x\ y\ b = (1,j) \quad (k) \end{cases}$$

Demostración. (a)

$$\begin{aligned} y \rightarrow_{T_C} x &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, y) \subseteq x\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}}) \subseteq [P_{\boldsymbol{C}})\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k > 0, P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P \rightarrow [(0,k))\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

Como $\rightarrow_{T_C}$ es un operador de tipo $(1,-1,-1)$, es creciente en la segunda coordenada, luego

$$(1,0) = y \rightarrow_{T_C} x \leq y \rightarrow_{T_C} (1,j) = (1,0).$$

(b)

$$\begin{aligned} y \rightarrow_{T_C} (0,i) &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, y) \subseteq \sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i))\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k > 0, [0,i) \subseteq P \rightarrow [(0,k))\} \\ &= \{P_{\boldsymbol{C}}\} \cup \{[(0,i))\} = [P_{\boldsymbol{C}}) = x. \end{aligned}$$

(c) Si $i \neq 0$.

$$\begin{aligned} (0,i) \rightarrow_{T_C} y &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, \sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i))) \subseteq y\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k \leq i, P \rightarrow [(0,k)) \in [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} \cup \{C\}\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k \leq i, \exists l \geq 0,\ [(0,l)) \subseteq P \rightarrow [(0,k))\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $i = 0$, tenemos que $\sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i)) = \emptyset$ y el resultado se sigue.
(d)

$$\begin{aligned} x \rightarrow_{T_C} y &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, x) \subseteq y\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P \rightarrow P_{\boldsymbol{C}} \in [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} \cup \{C\}\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists l \geq 0,\ [(0,l)) \subseteq P \rightarrow P_{\boldsymbol{C}}\} \\ &= [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} = y. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} (1,j) \rightarrow_{T_C} y &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, (1,j)) \subseteq y\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k \leq i, P \rightarrow [1,j) \in [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} \cup \{C\}\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \exists l \geq 0,\ [(0,l)) \subseteq P \rightarrow [1,j)\} \\ &= [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} = y. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} y \to_{T_{\boldsymbol{C}}} y &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, y) \subseteq y\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k > 0, P \to [(0,k)) \in [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} \cup \{C\}\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : \forall k > 0 \exists l \geq 0,\ [(0,l)) \subseteq P \to [(0,k))\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

(g) La prueba del item (c) para el caso de $i = 0$, se puede aplicar aquí, por lo tanto $(0,0) \to_{T_{\boldsymbol{C}}} x = (1,0)$.

Supongamos que $i \neq 0$

$$\begin{aligned} (0,i) \to_{T_{\boldsymbol{C}}} x &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, \sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i))) \subseteq x\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P \to [(0,i)) \in [P_{\boldsymbol{C}})\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P \to [(0,k))\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} (1,j) \to_{T_{\boldsymbol{C}}} x &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, \sigma_{\boldsymbol{C}}((1,i))) \subseteq x\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P \to [(1,j)) \in [P_{\boldsymbol{C}})\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P \to [(1,j))\} \\ &= [P_{\boldsymbol{C}}) = x. \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} x \to_{T_{\boldsymbol{C}}} x &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, x) \subseteq x\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : P_{\boldsymbol{C}} \subseteq P \to P_{\boldsymbol{C}}\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} x \to_{T_{\boldsymbol{C}}} (0,i) &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, x) \subseteq \sigma_{\boldsymbol{C}}((0,i))\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : [0,i) \subseteq P \to P_{\boldsymbol{C}}\} \\ &= \{[(0,k)) : k > 0\} = [P_{\boldsymbol{C}}) \setminus P_{\boldsymbol{C}} = y. \end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned} x \to_{T_{\boldsymbol{C}}} (1,j) &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : T_{\boldsymbol{C}}(P, x) \subseteq \sigma_{\boldsymbol{C}}((1,i))\} \\ &= \{P \in X(\boldsymbol{C}) : [1,i) \subseteq P \to P_{\boldsymbol{C}}\} \\ &= X(\boldsymbol{C}) = \sigma_{\boldsymbol{C}}(1,0) = (1,0). \end{aligned}$$

■

Esta última proposición se podría haber simplificado utilizando en el teorema 6.18 donde probaremos que la variedes de RCID es canónica por marcos ternarios. Veamos la razón, en [30] Gherke y Jónsson prueban que dado que la fusión en el álgebra de Chang $\circ$ es residuada a izquierda y a derecha, entonces $\circ^{\sigma}$ también lo es y su residuo es exactamente $\to^{\pi}$. Ahora bien, si notamos que $\circ_{R_{\boldsymbol{C}}} = \circ^{\sigma}$, y luego aplicamos el teorema 6.18, $\to_{T_{\boldsymbol{C}}}$ es el residuo a izquierda y a derecha de $\circ_{R_{\boldsymbol{C}}}$ podríamos entonces deducir que $\to^{\sigma} = \to_{T_{\boldsymbol{C}}}$. Pero elegimos no adelantarnos y a su vez tener un ejemplo de un cálculo efectivo de $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ para algún álgebra de cierta complejidad.

Corolario 5.51 *La fusión y la implicación de* $\boldsymbol{C}$ *no son operaciones suaves.*

Teorema 5.52 *Ni* $\boldsymbol{C}^{\sigma}$, *ni* $\boldsymbol{C}^{\pi}$ *ni* $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{C})}$ *son* **BL***-álgebras.*

Demostración. De hecho veremos que en ningún caso la ecuación

$$a \circ (a \to b) \approx b \circ (b \to a)$$

se satisface.

Para $\boldsymbol{C}^{\sigma}$ consideremos

$$\begin{aligned} x \circ^{\sigma} (x \to^{\sigma} y) &= x \circ^{\sigma} y \\ &= (0,0)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y \circ^{\sigma} (y \to^{\sigma} x) &= y \circ^{\sigma} (1,0) \\ &= y. \end{aligned}$$

Para el caso de $\boldsymbol{C}^{\pi}$,

$$\begin{aligned} x \circ^{\pi} (x \to^{\pi} (0,0)) &= x \circ^{\pi} y \\ &= y, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (0,0) \circ^{\pi} ((0,0) \to^{\pi} x) &= (0,0) \circ^{\pi} (1,0) \\ &= (0,0)\,. \end{aligned}$$

Y finalmente para el caso de $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{C})}$

$$\begin{aligned} x \circ_{R_C} (x \to_{T_C} y) &= x \circ_{R_C} y \\ &= (0,0)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y \circ_{R_C} (y \to_{T_C} x) &= y \circ_{R_C} (1,0) \\ &= y. \end{aligned}$$

■

El teorema anterior nos prueba que la variedad de BL tanto como cualquier subvariedad BL que tenga el álgebra de Chang no será ni σ-canónica, ni π-canónica ni canónica por marcos ternarios.

5.5.2. Comparación de las extensiones

Dado un operador $f : L^n \to L$ de tipo $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ definimos $f_{R_f} : (A^{\sigma})^n \to A^{\sigma}$ mediante:

$$f_R(U_1, \ldots, U_{n-1}) = (R(U_1^{e_1}, \ldots, U_n^{e_n}))^{e_{n+1}}$$

para cada $U_1, \ldots, U_{n-1} \in A^{\sigma} = \mathcal{P}_c(X(\boldsymbol{A}))$.

En [30] se prueba que dada cualquier función creciente $f : L \to M$ entre retículos distributivos

$$f^{\sigma} \leq f^{\pi}.$$

En esta sección veremos que para ciertos tipos de operadores también podemos establecer algunas comparaciones.

Teorema 5.53 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una* **DLF** *o* **DLFI***-álgebra entonces*

$$\circ^{\sigma} = \circ_{R_{\boldsymbol{A}}}.$$

Demostración. Dados $a, b \in A$ como ambas son extensiónes de $\circ$ em $\boldsymbol{A}^{\sigma}$ tenemos que:

$$R_{\boldsymbol{A}}\left(\sigma_{\boldsymbol{A}}(a), \sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\right) = \sigma_{\boldsymbol{A}}(a) \circ_{R_{\boldsymbol{A}}} \sigma_{\boldsymbol{A}}(b) = \sigma_{\boldsymbol{A}}(a) \circ^{\sigma} \sigma_{\boldsymbol{A}}(b).$$

Sean ahora $P, Q \in X(\boldsymbol{A})$. Entonces por la definición de $\circ^{\sigma}$

$$\begin{aligned}
[P) \circ^{\sigma} [Q) &= \left(\bigcap_{\{a:a\in P\}} \sigma_{\boldsymbol{A}}(a)\right) \circ^{\sigma} \left(\bigcap_{\{b:b\in Q\}} \sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\right) \\
&= \bigcap_{\{a:P\in\sigma_{\boldsymbol{A}}(a)\}} \bigcap_{\{b:Q\in\sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\}} \left(\sigma_{\boldsymbol{A}}(a) \circ^{\sigma} \left(\sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\right)\right) \\
&= \bigcap_{\{a:P\in\sigma_{\boldsymbol{A}}(a)\}} \bigcap_{\{b:Q\in\sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\}} R_{\boldsymbol{A}}\left(\sigma_{\boldsymbol{A}}(a), \sigma_{\boldsymbol{A}}(b)\right).
\end{aligned}$$

Luego se sigue que

$$[P) \circ_{R_{\boldsymbol{A}}} [Q) = R_{\boldsymbol{A}}\left([P), [Q)\right) = R_{\boldsymbol{A}}(P, Q) \subseteq [P) \circ^{\sigma} [Q).$$

Como $R_{\boldsymbol{A}}$ es un operador de tipo $(1,1,1)$, si $D \notin R_{\boldsymbol{A}}(P,Q)$ existen $U, V \in \mathrm{D}(X(\boldsymbol{A}))$ tales que $P \in U, Q \in V$ y $D \notin R_{\boldsymbol{A}}(U,V)$. Como existen $a, b \in A$ tales que $\sigma_{\boldsymbol{A}}(a) = U, \sigma_{\boldsymbol{A}}(b) = V$, tenemos que $D \notin [P) \circ^{\sigma} [Q)$ con lo cual probamos que

$$[P) \circ^{\sigma} [Q) \subseteq [P) \circ_{R_{\boldsymbol{A}}} [Q),$$

concluimos que

$$[P) \circ^{\sigma} [Q) = [P) \circ_{R_{\boldsymbol{A}}} [Q).$$

Finamente, para cada $F, G \in \mathcal{P}_c(X(\boldsymbol{A}))$ tenemos que

$$F \circ_{R_{\boldsymbol{A}}} G = R_{\boldsymbol{A}}(F,G) = \bigcup_{P\in F}\bigcup_{Q\in G} R_{\boldsymbol{A}}(P,Q) = \bigcup_{P\in F}\bigcup_{Q\in G} [P) \circ^{\sigma} [Q) = F \circ^{\sigma} G.$$

■

De manera similar se prueba el siguiente teorema.

Teorema 5.54 *Dado un retículo distributivo acotado* $\boldsymbol{L}$ *si* $f : \boldsymbol{L}^n \to \boldsymbol{L}$ *es un supremo-hemimorfismo, entonces*

$$f_{R_f} = f^{\sigma},$$

donde $f_{R_f}(U_1, \ldots, U_n) = R_f(U_1, \ldots, U_n)$ *para cada* $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{P}_c(X(\boldsymbol{A}))$.

Corolario 5.55 *Dado un retículo distributivo acotado* $\boldsymbol{L}$ *si* $f : \boldsymbol{L}^n \to \boldsymbol{L}$ *es un operador de tipo* $(-1, \ldots, -1, -1)$ *(ínfimo-hemimorfismo), entonces*

$$f_{R_f} = f^{\pi}.$$

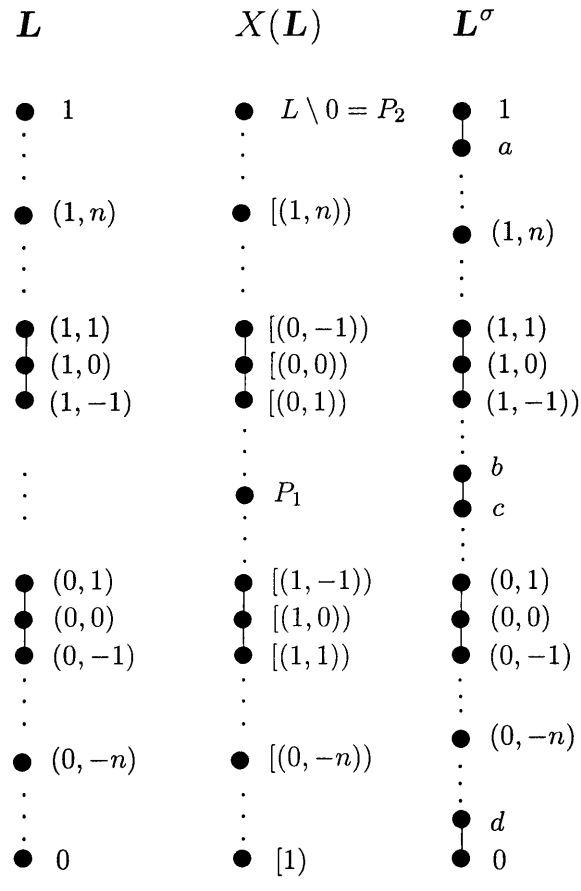

$\boldsymbol{L}$
$X(\boldsymbol{L})$
$\boldsymbol{L}^{\sigma}$
1
$(1,n)$
$(1,1)$
$(1,0)$
$(1,-1)$
$(0,1)$
$(0,0)$
$(0,-1)$
$(0,-n)$
0
$L \setminus 0 = P_2$
$[(1,n))$
$[(0,-1))$
$[(0,0))$
$[(0,1))$
P_1
$[(1,-1))$
$[(1,0))$
$[(1,1))$
$[(0,-n))$
$[1)$
1
a
$(1,n)$
$(1,1)$
$(1,0)$
$(1,-1))$
b
c
$(0,1)$
$(0,0)$
$(0,-1)$
$(0,-n)$
d
0

Fig. 6

Demostración. Se sigue directamente de observar que $f' : \left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)^n \to \boldsymbol{L}^{-1}$ definida como $f' = f$ en un supremo hemimorfismo y $(f')^\sigma = f^\pi$. ∎

Veamos un ejemplo en el que a pesar de que f no es un supremo-hemimorfisno ni un infimo-hemimorfismo $f^\sigma = f^\pi = f_{R_f}$.

Ejemplo 5.56 *Consideremos* $\boldsymbol{L} = \{0,1\} \cup (\{0,1\} \times \mathbb{Z})$ *con el orden dado por la figura 6. Definamos* $f : L \to L$ *por*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 0, \\ f(0,i) &= (1,-i), \\ f(1,j) &= (0.-j-1). \end{aligned}$$

Entonces $\langle L, \wedge, \vee, f, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Ockham*[3] *Como* $\boldsymbol{L}$ *es totalmente ordenado es facil ver que*

$$X(\boldsymbol{L}) = \{[a) : a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\{(1,j) : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}, L \setminus \{0\}\}$$

denotemos con $P_1 = \{(1,j) : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}$ *y* $P_2 = L \setminus \{0\}$. *Ver figura 6.*

Luego $\boldsymbol{L}^\sigma$ *es el retículo dado en la figura 6, donde* $a = X(\boldsymbol{L}) \setminus \{[1)\}$, $b = [P_1)$, $c = [P_1) \setminus \{P_1\}$ *y* $d = \{P_2\}$.

Consideremos a f *como una operación de tipo* $(-1,1)$, *para calcular* R_f *veamos que*

$$\begin{aligned} f\left([1)^{-1}\right) &= f(L \setminus \{1\}) = L \setminus \{0\} = P_2, \\ f\left([(1,j))^{-1}\right) &= f((1,j-1]) = [0,-j) \\ f\left((P_1)^{-1}\right) &= f(\{(0,j) : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}) = P_1, \\ f\left([(0,j))^{-1}\right) &= f((0,j-1]) = [1,-j+1), \\ f\left((P_2)^{-1}\right) &= f(\{0\}) = \{1\} = [1), \end{aligned}$$

por lo tanto dados $P, Q \in X(L)$ *tenemos que:*

$$(P,Q) \in R_f \text{ si y sólo si} \begin{cases} P = [1) & y \quad Q = P_2, \text{ o} \\ P = [(1,j)) & y \quad [0,-j) \subseteq Q, \text{ o} \\ P = P_1 & y \quad P_1 \subseteq Q, \text{ o} \\ P = [(0,j)) & y \quad [1,-j+1) \subseteq Q, \text{ o} \\ P = P_2. & \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} f_{R_f}(a) &= R_f\left(a^{-1}\right) = R_f([1)) = \{P_2\} = d, \\ f_{R_f}(b) &= R_f\left(b^{-1}\right) = R_f\left([P_1)^{-1}\right) = R_f((P_1] \setminus \{P_1\}) \\ &= R_f(\{[(1,j)) : j \in \mathbb{Z}\}) = [P_1) \setminus \{P_1\} = c, \\ f_{R_f}(c) &= R_f\left(c^{-1}\right) = R_f\left(([P_1) \setminus \{P_1\})^{-1}\right) = R_f((P_1]) \\ &= [P_1) = b, \\ f_{R_f}(d) &= R_f\left(d^{-1}\right) = R_f(X(\boldsymbol{L}) \setminus \{P_2\}) = X(\boldsymbol{L}) \setminus \{[1)\} = a. \end{aligned}$$

[3]Este ejemplo de álgebra de Ockham fue extraido de [6] Example 1.1.

Consideremos a f como una operación de tipo $(1,-1)$, para calcular R_f veamos que

$$\begin{aligned} f([1)) &= \{0\}, \\ f([(1,j))) &= (0,-j-1] \\ f(P_1) &= f(\{(1,j) : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}) = L \setminus P_1, \\ f([(0,j))) &= (1,-j], \\ f(P_2) &= f(L \setminus \{0\}) = L \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

por lo tanto dados $P, Q \in X(L)$ tenemos que:

$$(P,Q) \in R_f \text{ si y sólo si} \begin{cases} P = [1) & , o \\ P = [(1,j)) \quad y \quad Q \subseteq [0,-j), o \\ P = P_1 \quad y \quad Q \subseteq P_1, o \\ P = [(0,j)) \quad y \quad Q \subseteq [1,-j+1), o \\ P = P_2. \quad y \quad Q = [1). \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} f_{R_f}(a) &= R_f(a)^{-1} = X(\mathbf{L}) \setminus R_f(X(\mathbf{L}) \setminus \{[1)\}) = \{P_2\} = d, \\ f_{R_f}(b) &= R_f(b)^{-1} = X(\mathbf{L}) \setminus R_f([P_1)) = X(\mathbf{L}) \setminus (P_1] = \\ &= [P_1) \setminus \{P_1\} = c, \\ f_{R_f}(c) &= R_f(c)^{-1} = X(\mathbf{L}) \setminus R_f(([P_1))) = X(\mathbf{L}) \setminus ((P_1] \setminus \{P_1\}) \\ &= [P_1) = b, \\ f_{R_f}(d) &= R_f(d)^{-1} = X(\mathbf{L}) \setminus R_f(\{P_2\}) = X(\mathbf{L}) \setminus \{[1)\} = a. \end{aligned}$$

Recordemos que para poder calcular f^σ y f^π debemos conciderar a $f : L^{-1} \to L$. Es facil ver que $K(\mathbf{L}) = O(\mathbf{L}^{-1}) = \mathbf{L} \cup \{b,d\}$ y $O(\mathbf{L}) = K(\mathbf{L}^{-1}) = \mathbf{L} \cup \{a,c\}$. Como f^σ coincide con f^π en $K(\mathbf{L}) \cup O(\mathbf{L})$ y $K(\mathbf{L}) \cup O(\mathbf{L}) = \mathbf{L}^\sigma$ entonces, f es un operador suave. Luego

$$\begin{aligned} f^\sigma(a) &= \bigwedge \{f(x) : x \leq a\} = \bigwedge \{f(x) : x \in L \setminus \{1\}\} = d, \\ f^\sigma(c) &= \bigwedge \{f(x) : x \leq c\} = \bigwedge \{f(x) : x \in L \setminus \{P_1\}\} = b, \\ f^\pi(b) &= \bigvee \{f(x) : x \geq b\} = \bigvee \{f(x) : x \in P_1\} = c, \\ f^\pi(d) &= \bigvee \{f(x) : x \geq d\} = \bigvee \{f(x) : x \in L \setminus \{0\}\} = a. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^\sigma = f^\pi = f_{R_f}$.

A pesar de no poseer una prueba general que relaciones las extensiones canonicas de los diferentes tipos de operadores, tampoco hemos podido encontrar aún contraejemplos que prueben que no se puedan comparar.

5.5.3. Canonicidad de subvariedades BL

En esta subsección analizaremos la σ y π-canonicidad de ciertas subvariedades de **BL**-álgebras.

Entre las subvariedades de **BL**-álgebras es importante destacar las variedades **Ł** de **MV**-álgebras (ver página 49), **Π** de álgebras producto, y **G** de álgebras de Gödel o álgebras de Heyting Lineales. Recordemos que las álgebras en **Ł** son **BL**-álgebras que satisfacen la siguiente ecuación:

$$a \approx (a \to 0) \to 0.$$

Las álgebras producto son **BL**-álgebras cumpliendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &\approx a \wedge (a \to 0), \\ 1 &\approx ((c \to 0) \to 0) \to ((a \circ c \to b \circ c) \to (a \to b)), \end{aligned}$$

y las álgebras de Gödel son **BL**-álgebras que satisfacen

$$a \approx a \circ a.$$

Es bien conocido que cada subvariedad de **BL**-álgebras esta generada por **BL**-cadenas (**BL**-álgebras totalmente ordenadas)(ver [34]). En [33], se prueba que cada **BL**-cadena se puede sumergir en una **BL**-cadena saturada y que cada **BL**-cadena saturada se puede descomponer como una suma ordinal de cadenas en **Ł**, **G** y **Π**.

A partir de ahora focalizaremos nuestra atención en la subvariedad **ŁΠG**[4], la cual es la subvariedad de **BL**-álgebras generada por la familia de **MV**-cadenas, cadenas producto y cadenas de Gödel. El retículo de subvariedades de **ŁΠG** fue descripto completamente por Di Nola et al. en [21]. Recordemos un importante resultado de ese trabajo, en el cual basaremos nuestro análisis.

Teorema 5.57 *El retículo de subvariedades de* **ŁΠG** *es el producto cartesiano de los retículos de subvariedades de* **Ł**, **Π** *y* **G**.

Este teorema sugiere que para analizar la canonicidad de subvariedades de **ŁΠG**, en primera instancia debemos estudiar la canonicidad de las subvariedades de **Ł**, **Π** y **G**.

Ł

El retículo de subvaridades de **Ł** fue determinado por Komori en [40]. Komori probó que cada subvariedad propia de **Ł** tiene un número finito de generadores (ver [40, Theorem 4.11]). Describiremos esto generadosres en el lenguaje de las **BL**-álgebras. Los generadores finítos son las cadenas $Ł_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ y los generadores infinitos son

$$S_n^\omega = \left\{(x,y) : x \in \left\{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}, y \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(0,y) : y \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup \left\{(1,y) : y \in \mathbb{Z}^-\right\}^5,$$

donde el producto esta dado por:

$$(x,y) \circ (z,u) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } x+z < 1, \\ (0, 0 \vee (u+y)) & \text{si } x+z = 1, \\ (x+z-1, u+y) & \text{si } x+z > 1. \end{cases}$$

[4]El caso general ha sido estudiado en colaboración con la Dra. Manuela Busaniche y se encuentra en referato para su publicación en una revista especializada.

[5]Si consideramos $\mathbf{\Lambda}(\mathbb{Z})$ al grupo reticulado $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfio, entonces $S_n^\omega = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Lambda}(\mathbb{Z}), (n,0))$ (ver [17, Paginas 152 y 167]

y la implicación esta dada por:

$$(x,y) \to (z,u) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } x < z, \\ (1, 0 \wedge (u-y)) & \text{si } x = z, \\ (1-x+z, u-y) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En [32], Gehrke y Priestley probaron que cada subvariedad de **MV**-álgebras es canónica (σ o π) si y sólo si es generada por una familia finita de cadenas finitas. Este resultado esta basado en el hecho que el álgebra de Chang $\boldsymbol{C}$ pertenece a cada subvariedad de **MV**-álgebras que no sea finitamente generada y ella que ellas probaron que las éxtensiones canónicas de el álgebra de Chang no es una **MV**-álgebra. En la subsección 5.5.1 hemos probado que la extensión canónica y dual canónica de del álgebra de Chang, vista como una **BL**-álgebra, no son **BL**-álgebras. Por lo tanto, cada subvariedad de **BL**-álgebras que contenga a S_n^ω para algún $n \geq 1$ no es ni σ-canónica ni π-canónica.

G

La variedad G de álgebras de Gödel es la variedad de las álgebras de Heyting lineales. Es conocido que la variedad G esta generada por cualquier cadena de Gödel infinita. Sus subvariedades propias son G_n, $n \geq 2$, donde G_n es la variedad generada por las cadenas de n elementos. Claramente, $\mathsf{B} = \mathsf{G}_2 \subsetneq \mathsf{G}_3 \subsetneq \ldots \mathsf{G}_n \ldots \subsetneq \mathsf{G}$, donde B es la variedad de álgebras de Boole.

Observación 5.58 *Dado que cada* G_n *es generada por una álgebra finita, tenemos que* G_n *es* σ*-canónica y* π*-canónica para cada* $n \geq 2$.

En [30] Gehrke y Jónsson probaron el siguiente resultado.

Teorema 5.59 *La variedad de álgebras de Heyting es* π*-canónica pero no* σ*-canónica.*

El ejemplo dado por Gehrke y Jónsson para probar que la variedad de álgebras de Heyting no es σ-canónica es una cadena. Dado que la extensión canónica de una cadena es también una cadena, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.60 G *es* π*-canónica pero no* σ*-canónica.*

Π

Cignoli y Torrens probaron en [19, Corollary 2.10] que la única subvariedad propia de **Π** es la variedad de las álgebras de Boole B. Ahora probaremos que Π no es ni σ-canónica ni π-canónica.

Sea $\boldsymbol{P} = \langle [0,1], \text{mín}, \text{máx}, *, \to, 0, 1 \rangle$ el álgebra producto sobre el intervalo, donde $*$ es el producto usual de números y la implicación esta dada por

$$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b/a & \text{si } b < a. \end{cases}$$

La presentación de la completación canónica $\boldsymbol{P}^\sigma$ es un tanto incomoda para el desarrollo de los cálculos que haremos más adelante, por ello utilizando el Lema 5.45 introduciremos directamente un retículo candidato a ser isomorfo a la extensión canónica y probaremos que efectivamente cumple las condiciones del mencionado lema. Por supuesto este retículo fue obtenido luego de calcular $\mathcal{P}_c(X([0,1]), \subseteq)$ y de buscar una manera de presentarlo más sencillamente.

Proposición 5.61 *Consideremos el retículo* $\boldsymbol{L} = ([0,1] \times \{-1,0,1\}) - \{(0,-1),(1,1)\}$ *con el orden lexicográfico en el producto (ver figura 7). Sea* $e : [0,1] \to L$ *el homomorfismo inyectivo definido por* $e(a) = (a,0)$, *entonces el retículo* $\langle [0,1], \text{mín}, \text{máx}, 0, 1\rangle$ *es separante y compacto en* $\boldsymbol{L}$.

Demostración.

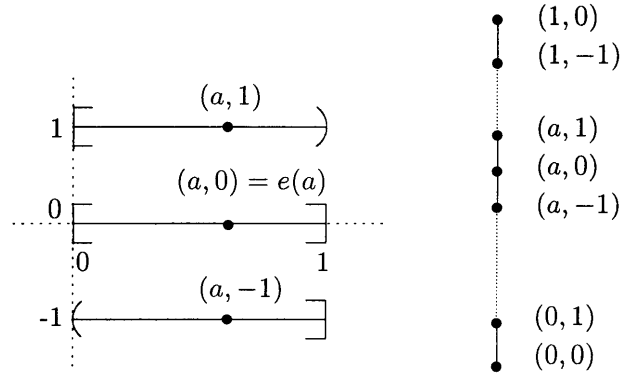


Fig. 7: $\boldsymbol{L}$

La prueba de que $\boldsymbol{L}$ es doblemente algebraico se sigue directamente de la observación que el conjunto de los elementos compactos de $\boldsymbol{L}$ es exactamente

$$([0,1] \times \{0,1\}) - \{(1,1)\},$$

y que $\boldsymbol{L}$ es isomorfo a $\boldsymbol{L}^{-1}$.

Separante:

Sean $(a,i) \in M^{\infty}(L)$ y $(b,j) \in J^{\infty}(L)$, tales que $(a,i) \leq (b,j)$. Es fácil ver que $i \in \{-1,0\}$ y $j \in \{0,1\}$. Si $a < b$, sea $c \in [0,1]$ tal que $b < c < a$ luego

$$(a,i) < (c,0) = e(c) < (b,j).$$

Si $b = a$, entonces

$$(a,i) \leq (a,0) = e(a) \leq (a,j) = (b,j).$$

Luego $[0,1]$ es separante en $\boldsymbol{L}$.

Compacto:

Ahora consideremos A y B subconjuntos de $[0,1]$ tales que $\bigwedge e(A) \leq \bigvee e(B)$. Es facil ver que:

$$\bigwedge e(A) = \begin{cases} e(\bigwedge A) & \text{si } \bigwedge A \in A \\ (\bigwedge A, 1) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$\bigvee e(B) = \begin{cases} e(\bigvee B) & \text{si } \bigvee B \in B \\ (\bigvee B, -1) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que $\bigwedge A \notin A$ y $\bigvee B \notin B$. Luego $(\bigwedge A, 1) \leq (\bigvee B, -1)$, es decir, $\bigwedge A < \bigvee B$. Entonces deben existir $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a < b$. Si $\bigwedge A \in A$ o $\bigvee B \in B$ el resultado se sigue de manera similar. Luego, $e([0,1])$ es un subconjunto compacto de $\boldsymbol{L}$, y el resultado se sigue. ■

Proposición 5.62 *Sea* $\boldsymbol{P}$ *el álgebra producto sobre el intervalo* $[0,1]$. *Dado que* $*^{\sigma}$ *y* $*^{\pi}$ *son conmutativas, las siguientes tablas las describen completamente:*

$$(a,i) *^{\sigma} (b,j) = \begin{cases} (a*b,0) & si\ i=j=0, \\ (a*b,1) & si\ i=0,\ j=1,\ y\ a\neq 0, \quad (a) \\ (0,0) & si\ i=0,\ j=1,\ y\ a=0, \quad (b) \\ (a*b,1) & si\ i=j=1, \quad (c) \\ (a*b,-1) & si\ i=-1,\ j=1,\ y\ b\neq 0, \quad (d) \\ (0,1) & si\ i=-1,\ j=1,\ y\ b=0, \quad (e) \\ (a*b,-1) & si\ i=-1,\ j=-1, \quad (f) \\ (a*b,-1) & si\ i=-1,\ j=0,\ y\ b\neq 0, \quad (g) \\ (0,0) & si\ i=-1\ y\ (b,j)=(0,0). \quad (h) \end{cases}$$

Y

$$(a,i) *^{\pi} (b,j) = \begin{cases} (a*b,1) & si\ i=1\ y\ j=-1 \quad (i) \\ & o\ si\ i=-1\ i\ j=1, \\ (a,i) *^{\sigma} (b,j) & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. Observemos primero que

$$K([0,1]^{\sigma}) = ([0,1]\times\{0\}) \cup ([0,1)\times\{1\})\ \text{y}$$
$$O([0,1]^{\sigma}) = ([0,1]\times\{0\}) \cup ((0,1]\times\{-1\}).$$

Calcularemos $*^{\sigma}$.
(a) (b) Como $((a,0),(b,1)) \in K(([0,1]\times[0,1])^{\sigma})$,

$$\begin{aligned}(a,0) *^{\sigma} (b,1) &= \bigwedge \{(c*d,0) : a\leq c\ \text{y}\ b<d\} \\ &= \bigwedge \{(a*d,0) : b<d\}.\end{aligned}$$

Si $a=0$, $(a,0) *^{\sigma} (b,1) = (0,0)$. Si $a\neq 0$, $(a,0) *^{\sigma} (b,1) = (a*b,1)$.

(c) Dado que $((a,1),(b,1)) \in K(([0,1]\times[0,1])^{\sigma})$, se sigue de manera similar a (a).
(d) Como $b\neq 0$,

$$\begin{aligned}(a,-1) *^{\sigma} (b,1) &= \bigvee \{(c,k) *^{\sigma} (b,1) : (c,k)\leq (a,-1),\ k\in\{0,1\}\} \\ &= \bigvee \{(c,k) *^{\sigma} (b,1) : c<a,\ k\in\{0,1\}\} \\ &= \bigvee \{(c*b,1) : c<a\} \cup \{(0,0)\} \\ &= (a*b,-1).\end{aligned}$$

(e), (f) y (g) se siguen de manera análoga a (d).

(h)

$$\begin{aligned}(a,-1) *^{\sigma} (0,0) &= \bigvee \{(c,k) *^{\sigma} (0,0) : c < a,, \ k \in \{0,1\}\} \\ &= (0,0)\,.\end{aligned}$$

Dado que $*^{\sigma}$ y $*^{\pi}$ coinciden sobre $K\left(([0,1]\times[0,1])^{\sigma}\right) \cup O\left(([0,1]\times[0,1])^{\sigma}\right)$, sólo debemos probar (i)

$$\begin{aligned}(a,1) *^{\pi} (b,-1) &= \bigwedge \{(c,k) *^{\pi} (b,-1) : a < c, \ k \in \{0,-1\}\} \\ &= \bigwedge \{(c,k) *^{\sigma} (b,-1) : a < c, \ k \in \{0,-1\}\} \\ &= \bigwedge \{(c * b,-1)\,,: a < c\} \\ &= (a * b,1)\,.\end{aligned}$$

■

Proposición 5.63 *Sea* $\mathbf{P}$ *el álgebra producto sobre el intervalo* $[0,1]$, *entonces las extensiones* $\to^{\sigma}$ *y* $\to^{\pi}$ *estan dadas por las siguientes tablas:*

$$(a,i) \to^{\sigma} (b,j) = \begin{cases} (a \to b, 0) & si\ (i,j) = (0,0), & \\ (1,0) & si\ a \le b\ y\ i < j, & (a) \\ \left(\frac{b}{a},1\right) & si\ b < a\ y\ i < j, & (b) \\ (1,0) & si\ a < b\ y\ i \ge j, & (c) \\ \left(\frac{b}{a},-1\right) & si\ b \le a,\ i \ge j\ y\ (i,j) \ne (0,0). & (d) \end{cases}$$

and

$$(a,i) \to^{\pi} (b,j) = \begin{cases} (1,0) & si\ a \le b\ y\ i = j = -1 & (e) \\ \left(\frac{b}{a},1\right) & si\ b < a\ y\ i = j = -1 & (f) \\ (1,0) & si\ a \le b\ y\ i = j = 1 & (g) \\ \left(\frac{b}{a},1\right) & si\ b < a\ y\ i = j = 1 & (h) \\ (a,i) \to^{\sigma} (b,j) & en\ otro\ caso. & \end{cases}$$

Demostración. Primero calculemos $\to^{\sigma}$.

(a) Si $a \le b$, supongamos que $(i,j) = (0,1)$, entonces $((a,i),(b,j)) \in K\left(\left([0,1]^d \times [0,1]\right)^{\sigma}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}(a,i) \to^{\sigma} (b,j) &= \bigwedge \{(c \to d, 0) : c \le a, b < d\} \\ &= \bigwedge \{(1,0) : c \le a, b < d\} \\ &= (1,0)\,.\end{aligned}$$

Si $(i,j) \in \{(-1,0),(-1,1)\}$, la prueba es similar.

(b) Si $b < a$, supongamos que $(i,j) = (0,1)$. Luego,

$$\begin{aligned}(a,0) \to^{\sigma} (b,1) &= \bigwedge \{(c \to d, 0) : c \le a, b < d\} \\ &= \bigwedge \left\{\left(\tfrac{d}{c}, 0\right) : b < d \le c \le a\right\} \\ &= \left(\tfrac{b}{a}, 1\right)\,.\end{aligned}$$

Si $(i,j) \in \{(-1,0),(-1,1)\}$, la prueba se sigue de manera análoga.

(c) Si $a < b$ y $(i,j) = (-1,-1)$,

$$\begin{aligned}(a,-1) \to^{\sigma} (b,-1) &= \bigvee \{(c,k) \to^{\sigma} (d,l) : a \leq c, d < b,\ k \in \{0,-1\}, l \in \{0,1\}\} \\ &= \bigvee \{(a,-1) \to^{\sigma} (d,l) : d < b,\ l \in \{0,1\}\} \\ &= \bigvee \{(1,0) : d < b,\ l \in \{0,1\}\} \\ &= (1,0).\end{aligned}$$

Si $(i,j) \in \{(0,-1),(1,0),(1,1),(1,-1)\}$, la demostración es similar.

(d) Si $b \leq a$ y $(i,j) = (-1,-1)$,

$$\begin{aligned}(a,-1) \to^{\sigma} (b,-1) &= \bigvee \{(a,-1) \to^{\sigma} (d,l) : d < b,\ l \in \{0,1\}\} \\ &= \bigvee \left\{\left(\tfrac{d}{a},1\right) : d < b\right\} \\ &= \left(\tfrac{b}{a},-1\right).\end{aligned}$$

Si $(i,j) \in (i,j) \in \{(0,-1),(1,0),(1,1),(1,-1)\}$, se sigue de igual manera.

Dado que $\to^{\sigma}$ y $\to^{\pi}$ coinciden en $K\left(\left([0,1]^d \times [0,1]\right)^{\sigma}\right) \cup O\left(\left([0,1]^d \times [0,1]\right)^{\sigma}\right)$ sólo debemos probar (e)(f)(g)(h).

(e) Dado que $a \leq b$,

$$\begin{aligned}(a,-1) \to^{\pi} (b,-1) &= \bigwedge \{(c,k) \to^{\pi} (b,-1) : c < a \leq b,\ k \in \{0,1\}\} \\ &= (1,0).\end{aligned}$$

(f) Como $b < a$,

$$\begin{aligned}(a,-1) \to^{\pi} (b,-1) &= \bigwedge \{(c,k) \to^{\pi} (b,-1) : c < a,\ k \in \{0,1\}\} \\ &= \bigwedge \{(c,k) \to^{\sigma} (b,-1) : c < a,\ k \in \{0,1\}\} \\ &= \bigwedge \left\{\left(\tfrac{b}{c},-1\right) : b \leq c < a\right\} \cup \{(1,0)\} \\ &= \left(\tfrac{b}{a},1\right).\end{aligned}$$

(g) y (h) se siguen de manera similar. ∎

Corolario 5.64 *La fusión y la implicación de* $\boldsymbol{P}$ *no son operadores suaves.*

Teorema 5.65 *Ni* $\boldsymbol{P}^{\sigma}$ *ni* $\boldsymbol{P}^{\pi}$ *son* **BL***-álgebras.*

Demostración. En ambos casos veremos que la ecuación $a \circ (a \to b) = b \circ (b \to a)$ no es válida.

Para el caso de $\boldsymbol{P}^{\sigma}$ consideremos

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2},0\right) *^{\sigma} \left(\left(\tfrac{1}{2},0\right) \to^{\sigma} \left(\tfrac{1}{2},1\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{2},1\right) *^{\sigma} (1,0) \\ &= \left(\tfrac{1}{2},1\right),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2},1\right) *^{\sigma} \left(\left(\tfrac{1}{2},1\right) \rightarrow^{\sigma} \left(\tfrac{1}{2},0\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{2},1\right) *^{\sigma} (1,-1) \\ &= \left(\tfrac{1}{2},-1\right).\end{aligned}$$

A su vez para $\boldsymbol{P}^{\pi}$,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2},-1\right) *^{\pi} \left(\left(\tfrac{1}{2},-1\right) \rightarrow^{\pi} \left(\tfrac{1}{2},1\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{2},-1\right) *^{\pi} (1,0) \\ &= \left(\tfrac{1}{2},-1\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2},1\right) *^{\pi} \left(\left(\tfrac{1}{2},1\right) \rightarrow^{\pi} \left(\tfrac{1}{2},-1\right)\right) &= \left(\tfrac{1}{2},1\right) *^{\pi} (1,-1) \\ &= \left(\tfrac{1}{2},1\right).\end{aligned}$$

■

Resumiendo los resultados de esta subsección tenemos la siguiente proposición (ver la figura 8).

Proposición 5.66 *Sea* V *una subvariedad* LΠG. *Entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. V *es* σ*-canónica y* π*-canónica si y sólo si es generada por una familia finita de álgebras finitas.*
2. *Si* V *no es generada por una familia finita de álgebras finitas, entonces*
   a) V *no es* σ*-canónica,*
   b) *si* V *tiene un* **BL***-álgebra producto, entonces* V *no es* π*-canónica,*
   c) *si existe algún* $n \geq 1$*, tal que* $S_n^{\omega} \in$ V*, entonces* V *no es* π*-canónica.*

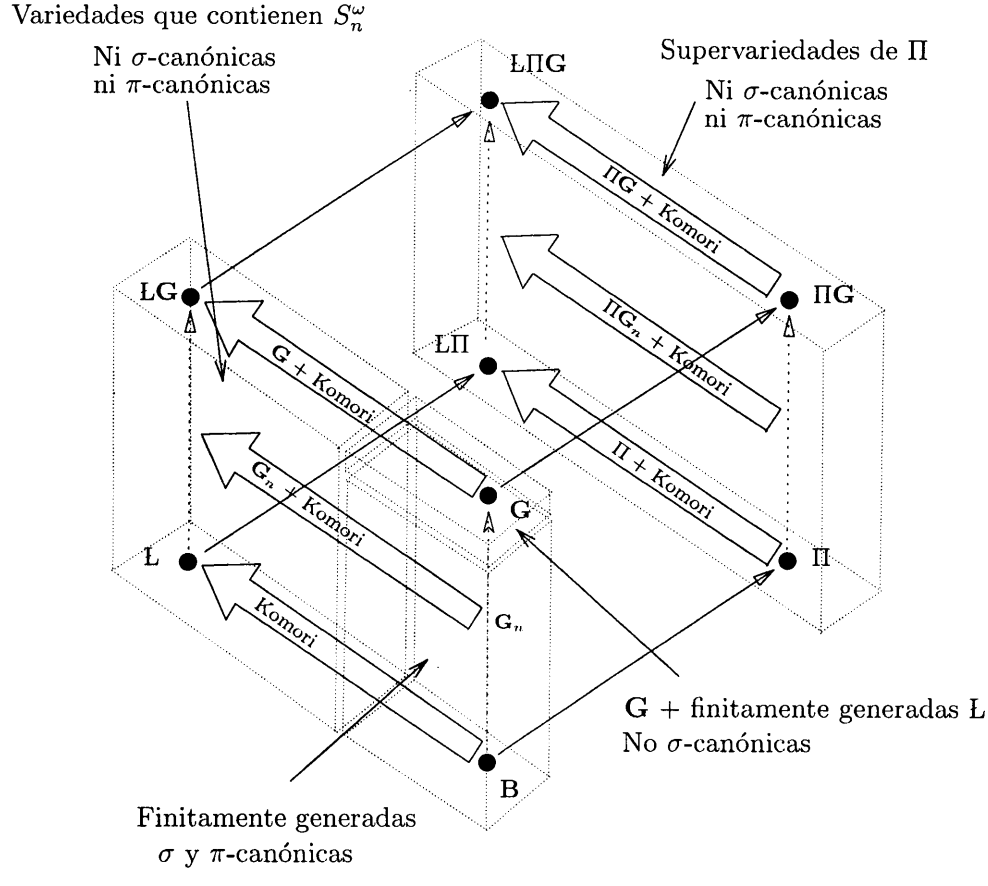

Variedades que contienen S_n^ω
Ni σ-canónicas
ni π-canónicas
ŁΠG
Supervariedades de Π
Ni σ-canónicas
ni π-canónicas
ΠG + Komori
ŁG
ΠG
ΠG$_n$ + Komori
ŁΠ
G + Komori
Π + Komori
G$_n$ + Komori
G
Ł
Π
G$_n$
Komori
G + finitamente generadas Ł
No σ-canónicas
B
Finitamente generadas
σ y π-canónicas

Fig. 8

Capítulo 6

Extensiones de $\mathcal{S}$(DLFI) y $\mathcal{S}$(DLI)

"Et il faut qu'il y ait des substances simples, puisqu'il y a des composés; car le composé n'est autre chose qu'un amas ou aggregatum des simples."

Gottgred Wilhelm Leibniz,
La monadologie

En [50] y [36] se prueba que el retículo de las extensiones autoextensionales de una logica basada en semiretículos $\mathcal{S}$ es dualmente isomorfo al retículo de subvariedades de $\mathrm{K}_{\mathcal{S}}$. En este capítulo estudiaremos algunas extensiones de $\mathcal{S}$(DLFI) y $\mathcal{S}$(DLI) relacionadas a ciertas subvariedades de DLFI y DLI. Para esto analizaremos que condiciónes deben cumplir los marcos para satisfacer ciertos secuentes, fórmulas o reglas simples, para luego combinarlos y definir una semántica de marcos ternarios para cada caso. Particularmente estudiaremos el caso de las lógicas subintuicionistas y la lógica $\mathcal{S}$(MTL). A su vez utilizaremos estos resultados y la relación entre la deducción local y global para dar una semántica ternaria la lógica monoidal basada en t-normas.

En la última sección compararemos estos resultados con estas semánticas con las semánticas dadas por Robles para la lógica monoidal basada en t-normas involutivas en [52], por Montagna y Ono en[44] para la lógica monoidal basada en t-normas y finalmente por Celani y Jansana en [15] para la lógica subintuicionista.

6.1. Correspondencia

Como en el caso de la lógica modal y los marcos de Kripke la noción de validez de un secuente o de una fórmula en un FI, F o I-marco es intrinsecamente una condición de segundo orden. En este capítulo estudiaremos la correspondencia entre la validez de ciertas fórmulas secuentes y reglas en un marco (F, I or FI-marco) y la satisfacción de ciertas condiciones de primer orden.

Observemos primero que esta correspondencia no siempre es posible. Para esto consideremos el secuente

$$\varphi \circ (\varphi \to \psi) \vdash \psi \circ (\psi \to \varphi)$$

característico de la Lógica Básica de Hájek. En el ejemplo 5.30 vimos que la familia de FI-marcos $Fr_l(\varphi \circ (\varphi \to \psi) \vdash \psi \circ (\psi \to \varphi))$ no es cerrada bajo ultraproductos, por lo tanto no

puede ser definida mediante fórmulas de primer orden.

Los resultados de esta sección serán utílizados más tarde en combinación con los resultados de los capítulos anteriores para estudiar ciertas extensiones de los sistemas deductivos $\mathcal{S}$ (DLFI) y $\mathcal{S}$ (DLI).

6.1.1. I-marcos

En esta subsección analizaremos sólo fórmulas, secuentes y reglas en el lenguaje $\mathcal{L}_{\rightarrow}$.

Teorema 6.1 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T\rangle$ un I-marco.*

1. *Cada fórmula en la columna de la izquierda es válida en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:*

	Fórmula	*Condición*
(a)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow y \leq u.$
(b)	$\varphi \rightarrow \varphi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow y \leq z.$
(c)	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow y \leq z.$
(d)	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow y \leq z.$
(e)	$(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$	$((x,y,z) \in T \ \&\ (x,v,w) \in T) \Rightarrow (y \leq w \ o \ v \leq z).$

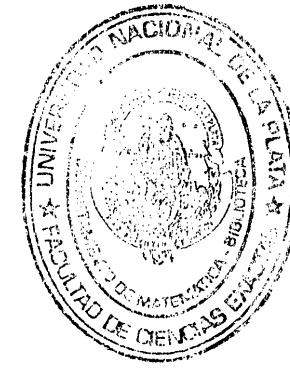
2. *Cada secuente en la columna de la izquierda es localmente válido en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:*

	Secuente	*Condición*
(a)	$\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow (y,x,z) \in T$
(b)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta) \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow (x,y,y,z) \in T^2$
(c)	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$	$\forall x, (x,x,x) \in T$
(d)	$\varphi \vdash \psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow (x \leq z \ \&\ y \leq z)$
(e)	$\varphi \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow x \leq z$
(f)	$\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow x \leq z$
(g)	$\varphi \vdash \top \rightarrow \varphi$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow x \leq z$
(h)	$\top \rightarrow \varphi \vdash \varphi$	$\forall x \in X, \exists y \in X, (x,y,x) \in T$
(i)	$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \delta \vdash \varphi \rightarrow \delta$	$(x,y,z) \in T \Rightarrow (x,y,x,z) \in T \circ T'.$
(j)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (x,t,y,u) \in T^2.$
(k)	$\varphi \rightarrow \psi \vdash (\psi \rightarrow \delta) \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (x,t,y,u) \in T \circ T'$
(l)	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (\exists w,$ $y \leq w \ \&\ t \leq w \ \&\ (x,w,u) \in T)$
(m)	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta \vdash (\varphi \rightarrow \delta) \vee (\psi \rightarrow \delta)$	$((x,y,z) \in T \ \&\ (x,t,u) \in T) \Rightarrow (\exists v \exists w,$ $y \leq v \ \&\ t \leq v \ \&\ (x,v,w) \in T \ \&\ w \in (\{z,u\}])$
(n)	$\varphi \rightarrow \psi \vdash \delta \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (x,t,u) \in T$
(o)	$\varphi \rightarrow \psi \vdash \top \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (x,t,u) \in T$
(p)	$\top \rightarrow \psi \vdash \top \rightarrow (\top \rightarrow \psi)$	$(x,y,t,u) \in T^2 \Rightarrow (\exists w \in X, \ (x,w,u) \in T).$

3. *Cada regla en la columna de la izquierda es localmente válida en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface*

la condición de primer orden de la columna de la derecha:

	Regla	*Condición*
	$\emptyset \vdash \varphi$	
(a)	$\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\emptyset \vdash \psi}$	$\forall z \in X, \exists x, y \in X, (x, y, z) \in T$
(b)	$\dfrac{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\varphi \vdash \psi}$	$\forall y \in X, \exists x \in X, (x, y, y) \in T$
(c)	$\dfrac{\varphi, \psi \vdash \delta}{\varphi \vdash \psi \to \delta}$	$(x, y, z) \in T \Rightarrow (x \leq z \ \& \ y \leq z)$
(d)	$\dfrac{\psi \vdash \delta}{\emptyset \vdash \psi \to \delta}$	$(x, y, z) \in T \Rightarrow y \leq z$



Demostración. Por una cuestión de completitud daremos una demostración de cada una de las afirmaciones del teorema. Los argumentos de varias de ellas son similares, por ello recomendamos 1.(e), 2.(a), 2.(b) y 3 (a), como ejemplos de estos argumentos y han sido desarrollados con más detalle.

Durante esta demostración las letras p, q y r indicaran variables proposicionales.

1. (a) Supongamos que $\mathcal{F} \models \varphi \to (\psi \to \varphi)$. Sean $a, b, c, d \in X$ tales que $(a, b, c, d) \in T^2$. Luego, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e), (e, c, d) \in T$. Consideremos una valuación V tal que $V(p) = [b)$ y $V(q) = [c)$. Por hipótesis, $V(p \to (q \to p)) = X$, por lo tanto tenemos que $e \in T(a, b) = T(a, V(p)) \subseteq V(q \to p)$. Luego, $d \in T(e, c) = T(e, V(q)) \subseteq V(p) = [b)$, es decir, $b \leq d$.

   Para probar la recíproca sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$, $a \in X$ y $c \in T(a, V(\varphi))$. Debemos probar que $c \in V(\psi \to \varphi)$, es decir, $T(c, V(\psi)) \subseteq V(\varphi)$. Sea $e \in T(c, V(\psi))$, como $c \in T(a, V(\varphi))$ tenemos que existen $b \in V(\varphi)$ y $d \in V(\psi)$ que satisfacen $(a, b, c), (c, d, e) \in T$, es decir, $(a, b, d, e) \in T^2$. Por hipótesis, y dado que $V(\varphi)$ es un conjunto creciente, $b \leq e \in V(\varphi)$.

   (b) Supongamos que $\mathcal{F} \models \varphi \to \varphi$. Si $(a, b, c) \in T$, consideremos V una valuación tal que: $V(p) = [b)$. Por hipótesis, $V(p \to p) = X$, $a \in V(p \to p)$, es decir, $T(a, V(p)) \subseteq V(p)$. Como $c \in T(a, b) \subseteq T(a, [b)) \subseteq [b)$, es decir, $b \leq c$.

   Para probar la recíproca sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Debemos probar que para cada $a \in X$, $a \in V(\varphi \to \varphi)$. Si $V(\varphi) = \emptyset$ el resultado se sigue directamente. Supongamos entonces que $V(\varphi) \neq \emptyset$. Sea $c \in T(a, V(\varphi))$, es decir, existe $b \in V(\varphi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, $b \leq c$. Como $V(\varphi)$ es creciente, resulta $c \in V(\varphi)$. Por lo tanto $a \in V(\varphi \to \varphi)$.

   (c) Supongamos que $\mathcal{F} \models (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$. Si $(a, b, c) \in T$, sea V una valuación tal que: $V(p) = V(q) = [b)$. Por hipótesis $V((p \wedge q) \to p) = X$, por lo tanto $a \in V((p \wedge q) \to p)$. Dado que $b \in V(p \wedge q) = V(p) \cap V(q) = [b)$, tenemos que $c \in V(p)$, es decir, $b \leq c$.

   Para probar la recíproca sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ y $a \in X$, veamos que $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$. Supongamos que $c \in T(a, V(\varphi \wedge \psi))$, es decir, existe $b \in V(\varphi \wedge \psi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, $b \leq c$. Dado que $V(\varphi \wedge \psi)$ es creciente, resulta $c \in V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi) \subseteq V(\varphi)$. Por lo tanto $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$

(d) Supongamos que $\mathcal{F} \models \varphi \to (\varphi \vee \psi)$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = V(q) = [b)$. Por hipótesis $V(p \to (p \vee q)) = X$, por lo tanto $a \in V(p \to (p \vee q))$. Dado que $b \in V(p) = V(p) \cup V(q) = [b)$, tenemos que $c \in V(p)$, es decir, $b \leq c$.

Para probar la recíproca sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ y $a \in X$, veamos que $a \in V(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$. Supongamos que $c \in T(a, V(\varphi))$, es decir, existe $b \in V(\varphi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $b \leq c$. Luego $c \in V(\varphi) \subseteq V(\varphi) \cup V(\psi)$. Por lo tanto $a \in V(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$

(e) Supongamos que $\mathcal{F} \models (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ .Si $(a,b,c), (a,d,e) \in T$, sea V una valuación tal que: $V(p) = [b)$ y $V(q) = [d)$. Por hipótesis $V((p \to q) \vee (q \to p)) = X$, por lo tanto $a \in V(p \to q)$ o $a \in V(q \to p)$. Si $a \in V(p \to q)$,como $(a,b,c) \in T$ y $b \in V(p)$ tenemos que $c \in V(q) = [d)$, es decir, $d \leq c$. Si suponemos que $a \in V(q \to p)$, con un argumento similar obtenemos que $b \leq e$.

Para probar la recíproca sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ y $a \in X$, veamos que $a \in V((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$. Supongamos que $a \notin V((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$, es decir, $a \notin V(\varphi \to \psi)$ y $a \notin V(\psi \to \varphi)$. Por lo tanto existen $(a,b,c), (a,d,e) \in T$ tales que $b \in V(\varphi)$, $c \notin V(\psi)$, $d \in V(\psi)$ y $e \in V(\varphi)$. Por hipótesis $b \leq e$ o $d \leq c$, en ambos casos llegamos a una contradición, ya que tanto $V(\psi)$ como $V(\varphi)$ son conjuntos crecientes.

2. (a) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$ y sea $(a,b,c) \in T$. Consideremos V una valuación tal que $V(p) = [a)$ y $V(q) = T(b,a)$. Por la definición 5.1 tenemos que:

$$\begin{aligned} T(b, V(p)) &= T(b, [a)) \\ &= T(b,a) \\ &= V(q). \end{aligned}$$

Entonces $b \in V(p \to q)$. Dado que $a \in V(p)$, por hipótesis $a \in V((p \to q) \to q)$, es decir, $T(a, V(p \to q)) \subseteq V(q) = T(b,a)$. Como $b \in V(p \to q)$, podemos probar que $T(a,b) \subseteq T(a, V(p \to q)) \subseteq T(b,a)$. Por lo tanto $c \in T(b,a)$, es decir, $(b,a,c) \in T$.

Para demostrar la recíproca sea V una valuación. Si $a \in V(\varphi)$ debemos probar que $a \in V((\varphi \to \psi) \to \psi)$, es decir, $T(a, V(\varphi \to \psi)) \subseteq V(\psi)$. Sea $c \in T(a, V(\varphi \to \psi))$, entonces existe $b \in V(\varphi \to \psi)$, tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $(b,a,c) \in T$. Como $b \in V(\varphi \to \psi)$ y $a \in V(\varphi)$, $c \in T(b,a) \subseteq T(b, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Con lo que podemos concluir que $a \in V((\varphi \to \psi) \to \psi)$.

(b) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to (\psi \to \delta) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \delta$. Si $(a,b,c) \in T$. Consideremos V una valuación tal que $V(p) = [b)$, $V(q) = [b)$ y $V(r) = T(T(a,b), b)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} V(p \to (q \to r)) &= \{d \in X : T(d, V(p)) \subseteq V(q \to r)\} \\ &= \{d \in X : T(d,b) \subseteq V(q \to r)\} \\ &= \{d \in X : T(T(d,b), V(q)) \subseteq V(r)\} \\ &= \{d \in X : T(T(d,b), b) \subseteq T(T(a,b), b)\} \end{aligned}$$

Luego $a \in V(p \to (q \to r))$. Por hipótesis, $a \in V((p \wedge q) \to r)$. Entonces

$$\begin{aligned} &T(a, V(p \wedge q)) \subseteq V(r), \text{ es decir,} \\ &T(a,b) \subseteq T(T(a,b), b). \end{aligned}$$

Como $c \in T(a,b) \subseteq T(T(a,b),b)$, existe $e \in T(a,b)$ tal que $(e,b,c) \in T$, es decir, $(a,b,b,c) \in T^2$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi \to (\psi \to \delta))$ entonces

$$T(a, V(\varphi)) \subseteq V(\psi \to \delta), \text{ entonces,}$$
$$T(T(a, V(\varphi)), V(\psi)) \subseteq V(\delta).$$

Sea $(a,b,c) \in T$ tal que $b \in V(\varphi \wedge \psi)$. Por hipótesis, existe $d \in X$ que satisface $(a,b,d),(d,b,c) \in T$. Luego

$$d \in T(a,b) \subseteq T(a, V(\varphi)) \text{ y}$$
$$c \in T(d,b) \subseteq T(T(a, V(\varphi)), b) \subseteq T(T(a, V(\varphi)), V(\psi)) \subseteq V(\delta).$$

Por lo tanto $T(a, V(\varphi \wedge \psi)) \subseteq V(\delta)$, es decir, $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \delta)$.

(c) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$. Dado $a \in X$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$ y $V(q) = T(a,a)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} V(p \to q) &= \{b \in X : T(b, V(p)) \subseteq V(q)\} \\ &= \{b \in X : T(b,a) \subseteq T(a,a)\}, \end{aligned}$$

luego $a \in V(p \to q)$. Como $a \in V(p) \cap V(p \to q)$, por hipótesis $a \in V(q) = T(a,a)$, es decir, $(a,a,a) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi) \cap V(\varphi \to \psi)$. Por hipótesis $(a,a,a) \in T$, entonces tenemos $a \in T(a,a) \subseteq T(a, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$.

(d) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \psi \to (\psi \wedge \varphi)$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$, $V(q) = [b)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(q \to (q \wedge p))$. Entonces $c \in T(a, V(q)) \subseteq V(q \wedge p) = V(q) \cap V(p) = [a) \cap [b)$. Por lo tanto $a \leq c$ y $b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\psi))$, existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $a \leq c$ y $b \leq c$. Como $V(\varphi)$ y $V(\psi)$ son crecientes tenemos que $c \in V(\varphi) \cap V(\psi) = V(\varphi \wedge \psi)$. Luego, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\varphi \wedge \psi)$. Concluimos que $V(\varphi) \subseteq V(\psi \to (\psi \wedge \varphi))$.

(e) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \varphi \to \varphi$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación que satisface: $V(p) = [a) \cup [b)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(p \to p)$. Entonces, tenemos que $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(p)) \subseteq V(p) = [a) \cup [b)$. Por lo tanto, $a \leq c$ o $b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi))$, existe $b \in V(\varphi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis $a \leq c$ o $b \leq c$. En ambos casos, como $V(\varphi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\varphi)$. Por lo tanto $T(a, V(\varphi)) \subseteq V(\varphi)$, es decir, $V(\varphi) \subseteq V(\varphi \to \varphi)$.

(f) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \psi \to \varphi$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$, $V(q) = [b)$. Por hipótesis $a \in V(p) \subseteq V(q \to p)$. Como $b \in V(q)$, tenemos que $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(q)) \subseteq V(p) = [a)$, por lo tanto $a \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\psi))$, entonces existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $a \leq c$. Como $a \in V(\varphi)$ y

$V(\varphi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\varphi)$. Por lo tanto $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\varphi)$, es decir $a \in V(\psi \to \varphi)$. Concluimos que $V(\varphi) \subseteq V(\psi \to \varphi)$.

(g) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \top \to \varphi$. Si $(a, b, c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$. Por hipótesis $a \in V(p) \subseteq V(\top \to p)$. Como $b \in X = V(\top)$, tenemos que $c \in T(a, b) \subseteq T(a, V(\top)) \subseteq V(p) = [a)$, por lo tanto, $a \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Si $c \in T(a, X)$, entonces existe $b \in X$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, $a \leq c$. Como $a \in V(\varphi)$ y $V(\varphi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\varphi)$. Por lo tanto, $T(a, V(\top)) \subseteq V(\varphi)$, es decir $a \in V(\top \to \varphi)$. Concluimos que $V(\varphi) \subseteq V(\top \to \varphi)$.

(h) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \top \to \varphi \vdash \varphi$. Si $a \in X$ y V es una valuación que cumple $V(p) = T(a, X)$, $a \in V(\top \to p)$. Por hipótesis $a \in V(p) = T(a, X)$, es decir existe $b \in X$ tal que $(a, b, a) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\top \to \varphi)$. Por hipótesis, existe $b \in X$ tal que $(a, b, a) \in T$, es decir, $a \in T(a, b) \subseteq T(a, X) = T(a, V(\top))$. Como $a \in V(\top \to \varphi)$, $a \in T(a, V(\top)) \subseteq V(\varphi)$. Por lo tanto, $V(\top \to \varphi) \subseteq V(\varphi)$.

(i) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to \psi, \psi \to \delta \vdash \varphi \to \delta$. Si $(a, b, c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [b)$, $V(q) = T(a, b)$ y $V(r) = T(a, T(a, b))$.

Como $T(a, V(p)) = T(a, b) = V(q)$, $a \in V(p \to q)$.A su vez, $a \in V(q \to r)$ dado que $T(a, V(q)) = T(a, V(q)) = T(a, T(a, b)) = V(r)$, . Por hipótesis, $a \in V(p \to r)$, entonces $c \in T(a, b) = T(a, V(p)) \subseteq V(r) = T(a, T(a, b))$. Entonces, existe $d \in T(a, b)$ tal que $(a, d, c) \in T$, es decir, $(a, b, a, c) \in T \circ T'$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi \to \psi) \cap V(\psi \to \delta)$. Si $c \in T(a, V(\varphi))$, existe $b \in V(\varphi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, existe $d \in T(a, b)$ tal que $(a, d, c) \in T$. Como $a \in V(\varphi \to \psi)$, $d \in T(a, b) \subseteq T(a, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Luego $c \in T(a, d) \subseteq T(a, V(\psi)) \subseteq V(\delta)$. Por lo tanto $a \in V(\varphi \to \delta)$.

(j) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to (\psi \to \delta) \vdash \psi \to (\varphi \to \delta)$. Si $(a, b, c, d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e), (e, c, d) \in T$.

Sea V una valuación tal que $V(p) = [c)$, $V(q) = [b)$ y $V(r) = T(T(a, c), b)$. Dado $f \in T(a, V(p)) = T(a, c)$, entonces $T(f, V(q)) \subseteq T(T(a, c), b) = V(r)$. Por lo tanto, $T(a, V(p)) \subseteq V(q \to r)$, es decir, $a \in V(p \to (q \to r))$. Por hipótesis, tenemos que $a \in V(q \to (p \to r))$, con lo cual $e \in T(a, V(q)) \subseteq V(p \to r)$. De esto deducimos que $d \in T(e, c) \subseteq V(r) = T(T(a, c), b)$, es decir, existe $g \in T(a, c)$ tal que $(g, b, d) \in T$, con lo cual $(a, c, b, d) \in T^2$.

Para probar la recíproca, consideremos V una valuación y $a \in V(\varphi \to (\psi \to \delta))$. Si $e \in T(a, V(\psi))$, existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a, b, e) \in T$. Supongamos que $d \in T(e, V(\varphi))$, es decir, existe $c \in V(\varphi)$ tal que $(e, c, d) \in T$, entonces $(a, b, c, d) \in T^2$. Por hipótesis, existe f tal que $(a, c, f), (f, b, d) \in T$. Como $a \in V(\varphi \to (\psi \to \delta))$ y $c \in V(\varphi)$ tenemos que $f \in V(\psi \to \delta)$. Dado que $b \in V(\psi)$, tenemos que $d \in V(\delta)$. Por lo tanto, $T(e, V(\varphi)) \subseteq V(\delta)$ para cada $e \in T(a, V(\psi))$. Entonces, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\varphi \to \delta)$, es decir, $a \in V(\psi \to (\varphi \to \delta))$.

(k) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to \psi \vdash (\psi \to \delta) \to (\varphi \to \delta)$. Si $(a, b, c, d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e), (e, c, d) \in T$. Consideremos V una valuación que satisface las

siguientes condiciones: $V(p) = [c)$, $V(q) = T(a,c)$ y $V(r) = T(b,T(a,c))$. Entonces, $T(a,V(p)) \subseteq V(q)$, es decir, $a \in V(p \to q)$. Por hipótesis, $a \in V((q \to r) \to (p \to r))$, es decir, $T(a,V(q \to r)) \subseteq V(p \to r)$. Como $T(b,V(q)) = T(b,T(a,c)) = V(r)$, entonces $b \in V(q \to r)$. Luego concluimos $e \in V(p \to r)$, y de esto podemos deducir $d \in T(e,c) = (e,V(p)) \subseteq V(r) = T(b,T(a,c))$. Entonces, existe $f \in T(a,c)$ tal que $(b,f,d) \in T$, es decir, $(a,c,b,d) \in T \circ T'$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y $a \in V(\varphi \to \psi)$. Si $e \in T(a,V(\psi \to \delta))$, entonces existe $b \in V(\psi \to \delta)$, $(a,b,e) \in T$. Supongamos que $d \in T(e,V(\varphi))$, entonces existe $c \in V(\varphi)$ tal que $(e,c,d) \in T$. Por lo tanto, $(a,b,c,d) \in T^2$. Por hipótesis, existe $f \in X$ tal que $(a,c,f),(b,f,d) \in T$. Como $c \in V(\varphi)$ y $a \in V(\varphi \to \psi)$, tenemos que $f \in T(a,c) \subseteq T(a,V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Dado que $b \in V(\psi \to \delta)$, $f \in V(\psi)$ y $(b,f,d) \in T$, entnces $d \in T(b,f) \subseteq T(b,V(\psi)) \subseteq V(\delta)$. Luego, $T(e,V(\varphi)) \subseteq V(\delta)$ para cada $e \in T(a,V(\psi \to \delta))$, es decir, $T(a,V(\psi \to \delta)) \subseteq V(\varphi \to \delta)$, Por lo tanto, $a \in V((\psi \to \delta) \to (\varphi \to \delta))$.

(l) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \wedge \psi) \to \delta \vdash \varphi \to (\psi \to \delta)$. Si $(a,b,c,d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a,b,e),(e,c,d) \in T$. Consideremos V una valuación tal que $V(p) = [b)$, $V(q) = [c)$ y $V(r) = T(a,[b) \cap [c))$. Entonces, $a \in V((p \wedge q) \to r)$. Luego, por hipótesis, $a \in V(p \to (q \to r))$. Por lo tanto, $e \in T(a,b) = T(a,V(p)) \subseteq V(q \to r)$, es decir, $T(e,V(q)) = T(e,c) \subseteq V(r) = T(a,[b) \cap [c))$. Entonces, existe $f \in X$ tal que $b,c \leq f$ y $(a,f,d) \in T$.

Para demostrar la recíproca, sea V una valuación y $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \delta)$. Dado $e \in T(a,V(\varphi))$, existe $b \in V(\varphi)$ tal que $(a,b,e) \in T$. Si $d \in T(e,V(\psi))$ existe $c \in V(\psi)$ tal que $(e,c,d) \in T$. Por lo tanto $(a,b,c,d) \in T^2$. Por hipótesis, existe $f \in X$, $b,c \leq f$ y $(a,f,d) \in T$. Entonces $f \in V(\varphi) \cap V(\psi)$, por lo tanto $d \in T(a,V(\varphi \wedge \psi)) \subseteq V(\delta)$. Con lo cual, $T(e,V(\psi)) \subseteq V(\delta)$ para cada $e \in (a,V(\varphi))$, es decir, $a \in V(\varphi \to (\psi \to \delta))$.

(m) Si $\mathcal{F} \models_l (\varphi \wedge \psi) \to \delta \vdash (\varphi \to \delta) \vee (\psi \to \delta)$. Dados $(a,b,c),(a,d,e) \in T$, consideremos V una valuación tal que $V(p) = [b)$, $V(q) = [d)$ y $V(r) = T(a,[b) \cap [d))$. De esto tenemos que $a \in V((p \wedge q) \to r)$. Por hipótesis, $a \in V(p \to r) \cup V(q \to r)$. En el caso que $a \in V(p \to r)$, $c \in T(a,b) = T(a,V(p)) \subseteq V(r) = T(a,[b) \cap [d))$. Luego, existe $e \in [b) \cap [d)$ tal que $(a,e,c) \in T$. Por otro lado si $a \in V(q \to r)$, podemos ver que $e \in T(a,d) = T(a,V(q)) \subseteq V(r) = T(a,[b) \cap [d))$, es decir, existe $f \in [b) \cap [d)$ tal que $(a,f,e) \in T$. Entonces, existe $g \in [b) \cap [d)$ y $h \in (\{c,d\}]$ tal que $(a,g,h) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \delta)$. Supongamos que $a \notin V((\varphi \to \delta) \vee (\psi \to \delta))$, es decir, existen $b \in V(\varphi)$, $d \in V(\psi)$ y $c,e \notin V(\delta)$ tales que $(a,b,c),(a,d,e) \in T$. Por hipótesis, existen $f \in [b) \cap [d)$ y $g \in (\{c,d\}]$ tales que $(a,f,g) \in T$. Como $V(\varphi)$ y $V(\psi)$ son conjuntos crecientes y $b,d \leq f$, entonces tenemos que $f \in V(\varphi) \cap V(\psi) = V(\varphi \wedge \psi)$. Luego, $g \in T(a,f) \subseteq T(a,V(\varphi \wedge \psi))$. Como $a \in V((\varphi \wedge \psi) \to \delta)$ entonces $g \in V(\delta)$. Esto implica que $c \in V(\delta)$ o $d \in V(\delta)$, lo cual es una contradición. Luego $a \in V((\varphi \to \delta) \vee (\psi \to \delta))$.

(n) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to \psi \vdash \delta \to (\varphi \to \psi)$. Si $(a,b,c,d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a,b,e),(e,c,d) \in T$. Sea V una valuación tal que $V(p) = [c)$, $V(q) = T(a,c)$ and $V(r) = [b)$. Entonces, $a \in V(p \to q)$. Por hipótesis, $a \in V(r \to (p \to q))$. Luego, $e \in T(a,b) = T(a,V(r)) \subseteq V(p \to q)$, entonces $d \in T(e,c) = T(e,V(p)) \subseteq V(q)$. Con lo cual $(a,c,d) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi \to \psi)$. Si $e \in T(a, V(\delta))$, existe $b \in V(\delta)$ tal que $(a, b, e) \in T$. Si $d \in T(e, V(\varphi))$, existe $c \in V(\varphi)$ tal que $(e, c, d) \in T$. Por lo tanto $(a, b, c, d) \in T^2$. Por hipótesis $(a, c, d) \in T$. Como $c \in V(\varphi)$ y $a \in V(\varphi \to \psi)$, tenemos que $d \in V(\psi)$. Con lo cual, $T(e, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$ para cada $e \in T(a, V(\delta))$, es decir, $a \in V(\delta \to (\varphi \to \psi))$.

(o) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \to \psi \vdash \top \to (\varphi \to \psi)$. Si $(a, b, c, d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e), (e, c, d) \in T$. Sea V una valuación tal que $V(p) = [c)$, $V(q) = T(a, c)$. Entonces, $a \in V(p \to q)$. Luego, $e \in T(a, b) \subseteq T(a, X) \subseteq V(p \to q)$ ya que por hipótesis, $a \in V(\top \to (p \to q))$. Por lo tanto $d \in T(e, c) = T(e, V(p)) \subseteq V(q) = T(a, c)$, es decir, $(a, c, d) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y $a \in V(\varphi \to \psi)$. Si $e \in T(a, V(\top))$, existe $b \in X$ tal que $(a, b, e) \in T$. Si $d \in T(e, V(\varphi))$, existe $c \in V(\varphi)$ tal que $(e, c, d) \in T$. Por lo tanto, $(a, b, c, d) \in T^2$. Luego, $(a, c, d) \in T$. Como $c \in V(\varphi)$ y $a \in V(\varphi \to \psi)$, tenemos que $d \in V(\psi)$. Con lo cual, $T(e, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$ para cada $e \in T(a, X)$, es decir, $a \in V(\top \to (\varphi \to \psi))$.

(p) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \top \to \psi \vdash \top \to (\top \to \psi)$. Si $(a, b, c, d) \in T^2$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e), (e, c, d) \in T$. Sea V una valuación tal que $V(p) = T(a, X)$. Entonces, $a \in V(\top \to p)$. Luego $e \in T(a, b) = T(a, X) \subseteq V(\top \to p)$, ya que por hipótesis, $a \in V(\top \to (\top \to q))$. Por lo tanto $d \in T(e, c) = T(e, V(\top)) \subseteq V(p) = T(a, X)$, es decir, existe $f \in X$ tal que $(a, f, d) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\top \to \psi)$. Si $e \in T(a, V(\top))$, existe $b \in X$ tal que $(a, b, e) \in T$. Si $d \in T(e, V(\top))$ existe $c \in X$ tal que $(e, c, d) \in T$. Por lo tanto, $(a, b, c, d) \in T^2$. Por hipótesis existe $f \in X$ tal que $(a, f, d) \in T$. Como $a \in V(\top \to \psi)$, tenemos que $d \in V(\psi)$. Con lo cual, $T(e, V(\top)) \subseteq V(\psi)$ para cada $e \in T(a, X)$, es decir, $a \in V(\top \to (\top \to \psi))$.

3. (a) Supongamos que en $\mathcal{F}$ es localmente válida la siguiente regla:

$$\frac{\emptyset \vdash \varphi \qquad \emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\emptyset \vdash \psi}$$

Considereremos una valuación V tal que $V(p) = X$ y $V(q) = T(X, X)$ Entonces, $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash p$ y $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash p \to q$. Por hipótesis $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash q$, por lo tanto, $X = T(X, X) = V(q)$, es decir, para cada $a \in X$, existen $b, c \in X$, tales que $(b, c, a) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación que verifica $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash \varphi$ y $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash \varphi \to \psi$, es decir $V(\varphi) = X = V(\varphi \to \psi)$. Dado $a \in X$, por hipótesis, existen $b, c \in X$, tales que $(b, c, a) \in T$. Como $b \in V(\varphi \to \psi)$ y $c \in V(\varphi)$, entonces $a \in T(b, c) \subseteq T(b, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Luego, $V(\psi) = X$, es decir $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash \psi$.

(b) Supongamos que en $\mathcal{F}$ es localmente válida la siguiente regla:

$$\frac{\emptyset \vdash \varphi \to \psi}{\varphi \vdash \psi}$$

Dado $b \in X$, sea V una valuación tal que $V(p) = [b)$ y $V(q) = T(X, b)$ Claramente $V(p \to q) = X$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \emptyset \vdash p \to q$. Luego, por hipótesis tenemos que $b \in V(p) \subseteq V(q) = T(X, b)$, es decir, existe $a \in X$ tal que $(a, b, b) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación tal que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \emptyset \vdash \varphi \to \psi$, es decir, $V(\varphi \to \psi) = X$. Sea $b \in V(\varphi)$. Por hipótesis, existe $a \in X$ tal que $(a, b, b) \in T$. Como $a \in V(\varphi \to \psi)$ y $b \in V(\varphi)$, tenemos que $b \in V(\psi)$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi \vdash \psi$.

(c) Supongamos que en $\mathcal{F}$ es localmente válida la siguiente regla:

$$\frac{\varphi, \psi \vdash \delta}{\varphi \vdash \psi \to \delta}$$

Si $(a, b, c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$, $V(q) = [b)$ y $V(r) = [a) \cap [b)$. Entonces, $V(p) \cap V(q) \subseteq V(r)$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p, q \vdash r$. Por hipótesis, tenemos que $a \in V(p) \subseteq V(q \to r)$. Luego, $c \in T(a, b) = T(a, V(q)) \subseteq V(r) = [a) \cap [b)$, por lo tanto $a, b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación tal que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi, \psi \vdash \delta$, es decir, $V(\varphi) \cap V(\psi) \subseteq V(\delta)$. Sea $a \in V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\psi))$, existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, $a, b \leq c$, como $V(\varphi)$ y $V(\psi)$ son crecientes, tenemos que $c \in V(\varphi) \cap V(\psi) \subseteq V(\delta)$. Luego, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\delta)$, es decir, $a \in V(\psi \to \delta)$.

(d) Supongamos que en $\mathcal{F}$ es localmente válida la siguiente regla:

$$\frac{\psi \vdash \delta}{\emptyset \vdash \psi \to \delta}$$

Si $(a, b, c) \in T$, sea V una valuación que verifica $V(p) = [b)$ y $V(q) = [b)$. Entonces, $V(p) \subseteq V(p)$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p \vdash q$. Por hipótesis, $a \in X = V(p \to q)$. Luego, $c \in T(a, b) = T(a, V(p)) \subseteq V(q) = [b)$, por lo tanto, $b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación tal que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \psi \vdash \delta$, es decir, $V(\psi) \subseteq V(\delta)$. Sea $a \in X$. Si $c \in T(a, V(\psi))$, existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Por hipótesis, $b \leq c$, como $V(\psi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\psi) \subseteq V(\delta)$. Luego, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\delta)$, es decir, $a \in V(\psi \to \delta)$.

■

Es importante remarcar que cada una de las equivalencias probadas en teorema anterior son válidas también en el caso de que $\mathcal{F}$ sea un FI-marco.

6.1.2. F-marcos

En esta subsección consideraremos sólo fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}_\circ$.

Teorema 6.2 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$ un F-marco.*

1. *Cada secuente en la columna de la izquierda es localmente válido en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$*

satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:

	Secuente	*Condición*
(a)	$\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi$	$R = R'$.
(b)	$(\varphi \circ \psi) \circ \delta \vdash \varphi \circ (\psi \circ \delta)$	$(x,y,t,u) \in R^2 \Rightarrow (y,t,x,u) \in R \circ R'$.
(c)	$\varphi \circ (\psi \circ \delta) \vdash (\varphi \circ \psi) \circ \delta$	$(x,y,t,u) \in R \circ R' \Rightarrow (t,x,y,u) \in R^2$.
(d)	$\varphi \circ \top \vdash \varphi$	$(x,y,z) \in R \Rightarrow x \leq z$.
(e)	$\top \circ \varphi \vdash \varphi$	$(x,y,z) \in R \Rightarrow y \leq z$.
(f)	$\varphi \circ \varphi \vdash \varphi$	$(x,y,z) \in R \Rightarrow (x \leq z \ o \ y \leq z)$.
(g)	$\varphi \vdash \varphi \circ \varphi$	$\forall x \in X, (x,x,x) \in R$.
(h)	$\varphi \vdash \varphi \circ \top$	$\forall x \in X, \exists y \in X, (x,y,x) \in R$.
(i)	$\varphi \vdash \top \circ \varphi$	$\forall x \in X, \exists y \in X, (y,x,x) \in R$.
(j)	$(\varphi \circ \psi) \wedge (\varphi \circ \delta) \vdash \varphi \circ (\psi \wedge \delta)$	$((x,y,z) \in R \ \& \ (t,u,z) \in R) \Rightarrow \exists v,w \in X,$ $v \in [\{x,t\}) \ \& \ y \leq w \ \& \ u \leq w \ \& \ (v,w,z) \in R.$
(k)	$(\varphi \circ \psi) \wedge (\delta \circ \psi) \vdash (\varphi \wedge \delta) \circ \psi$	$((x,y,z) \in R \ \& \ (t,u,z) \in R) \Rightarrow \exists v,w \in X,$ $x \leq v \ \& \ t \leq v \ \& \ w \in [\{y,u\}) \ \& \ (v,w,z) \in R.$

2. *Cada regla en la columna de la izquierda es localmente válida en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:*

	Regla	*Condición*
(a)	$\dfrac{\varphi \circ \psi \vdash \bot}{\varphi, \psi \vdash \bot}$	$\forall x \in X, \exists z \in X, (x,x,z) \in R.$
(b)	$\dfrac{\varphi, \psi \vdash \bot}{\varphi \circ \psi \vdash \bot}$	$(x,y,z) \in R \Rightarrow \exists u \in X, x \leq u \ \& \ y \leq u$
(c)	$\dfrac{\varphi, \psi \vdash \delta}{\varphi \circ \psi \vdash \delta}$	$(x,y,z) \in R \Rightarrow x \leq z \ \& \ y \leq z$
(d)	$\dfrac{\varphi \circ \psi \vdash \delta}{\varphi, \psi \vdash \delta}$	$\forall x \in X, (x,x,x) \in R$

Demostración. Como en la demostración del teorema 6.1, por completitud daremos una demostración de cada una de las proposición. Recomendamos al lector las pruebas 1.(b) y 2.(a) como ejemplo.

Durante esta demostración las letras p, q y r indicaran variables proposicionales.

1. (a) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi$, y que $(a,b,c) \in R$. Sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$ y $V(q) = [b)$. Claramente, $c \in V(p \circ q)$. Por hipótesis, $c \in V(q \circ p)$, por lo tanto $(b,a,c) \in R$.

   Para probar la recíproca, sea V una valuación y consideremos $c \in V(\varphi \circ \psi)$. Existen $a \in V(\varphi)$ y $b \in V(\psi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipotesis, $(b,a,c) \in R$, por lo tanto $c \in V(\psi \circ \varphi)$.

   (b) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \circ \delta \vdash \varphi \circ (\psi \circ \delta)$, y supongamos que $(a,b,c,d) \in R^2$. Existe $e \in X$ tal que $(a,b,e), (e,c,d) \in R$. Sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$

$V(q) = [b)$ y $V(r) = [c)$. Entonces, $e \in V(p \circ q)$ y $d \in V((p \circ q) \circ r)$. Por hipótesis, $d \in V(p \circ (q \circ r))$. Luego, existe $f \in V(q \circ r) = R(b,c)$, tal que $(a,f,d) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y consideremos $d \in V((\varphi \circ \psi) \circ \delta)$. Existen $a \in V(\varphi)$, $b \in V(\psi)$, $c \in V(\delta)$ y $e \in X$, tales que $(a,b,e),(e,c,d) \in R$. Por hipótesis, existe $f \in X$ tal que $(b,c,f),(a,f,d) \in R$. Como $b \in V(\psi)$ y $c \in V(\delta)$, entonces $f \in V(\psi \circ \delta)$, por lo tanto $d \in V(\varphi \circ (\psi \circ \delta))$.

(c) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \circ (\psi \circ \delta) \vdash (\varphi \circ \psi) \circ \delta$. Si $(a,b,c,d) \in R^2$, existe $e \in X$ tal que $(a,b,e),(e,c,d) \in R$. Sea V una valuación tal que $V(p) = [c)$, $V(q) = [a)$ y $V(r) = [b)$. Entonces, $e \in V(q \circ r)$ y $d \in V(p \circ (q \circ r))$. Por hipótesis, $d \in V((p \circ q) \circ r)$. Luego, existe $f \in V(p \circ q) = R(c,a)$, tal que $(f,b,d) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y consideremos $d \in V(\varphi \circ (\psi \circ \delta))$. Existen $c \in V(\varphi)$, $a \in V(\psi)$, $b \in V(\delta)$ y $e \in X$, tales que $(a,b,e),(c,e,d) \in R$. Por hipótesis, existe $f \in X$ tal que $(c,a,f),(f,b,d) \in R$. Como $c \in V(\varphi)$ y $a \in V(\psi)$ entonces $f \in V(\varphi \circ \psi)$, por lo tanto $d \in V((\varphi \circ \psi) \circ \delta)$.

(d) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \circ \top \vdash \varphi$. Si $(a,b,c) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$. Por hipótesis, $c \in R(a,b) \subseteq R(a,X) = R(V(p),V(\top)) \subseteq V(p) = [a)$, es decir, $a \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación. Si $c \in V(\varphi \circ \top) = R(V(\varphi),X)$, existen $a \in V(\varphi)$ y $b \in X$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $a \leq c$, como $V(\varphi)$ es creciente tenemos que $c \in V(\varphi)$. Luego, $V(\varphi \circ \top) \subseteq V(\varphi)$.

(e) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \top \circ \varphi \vdash \varphi$. Si $(a,b,c) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [b)$. Por hipótesis, $c \in R(a,b) \subseteq R(X,b) = R(V(\top),V(p)) \subseteq V(p) = [b)$, es decir, $b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación. Si $c \in V(\top \circ \varphi) = R(X,V(\varphi))$, existen $a \in X$ y $b \in V(\varphi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $b \leq c$, como $V(\varphi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\varphi)$. Luego, $V(\top \circ \varphi) \subseteq V(\varphi)$.

(f) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \circ \varphi \vdash \varphi$. Si $(a,b,c) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a) \cup [b)$. Por hipótesis, $c \in R(a,b) \subseteq R(V(p),V(p)) \subseteq V(p) = [a) \cup [b)$, es decir, $a \leq c \circ b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación. Si $c \in V(\varphi \circ \varphi) = R(V(\varphi),V(\varphi))$, existen $a,b \in V(\varphi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $a \leq c \circ b \leq c$. En ambos casos, como $V(\varphi)$ es creciente, tenemos que $c \in V(\varphi)$. Luego, $V(\varphi \circ \varphi) \subseteq V(\varphi)$.

(g) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \varphi \circ \varphi$. Si $a \in X$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(p \circ p) = R(V(p),V(p)) = R(a,a)$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y $a \in V(\varphi)$. Por hipótesis, $(a,a,a) \in R$, luego $a \in R(a,a) \subseteq R(V(\varphi),V(\varphi)) = V(\varphi \circ \varphi)$.

(h) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \varphi \circ \top$. Si $a \in X$, sea V una valuación tal que: $V(p) = [a)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(p \circ \top) = R(V(p),V(\top)) = R(a,X)$, es decir, existe $b \in X$ tal que $(a,b,a) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Por hipótesis, existe $b \in X$ tal que $(a,b,a) \in R$, luego $a \in R(a,b) \subseteq R(V(\varphi),X) = V(\varphi \circ \top)$.

(i) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \top \circ \varphi$. Si $a \in X$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(\top \circ p) = R(V(\top), V(p)) = R(X, a)$, es decir, existe $b \in X$ tal que $(b, a, a) \in T$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $a \in V(\varphi)$. Por hipótesis, existe $b \in X$ tal que $(b, a, a) \in R$, luego $a \in R(b, a) \subseteq R(X, V(\varphi)) = V(\top \circ \varphi)$.

(j) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \wedge (\varphi \circ \delta) \vdash \varphi \circ (\psi \wedge \delta)$. Si $(a, b, c), (d, e, c) \in R$, consideremos V una valuación tal que $V(p) = [a) \cup [d)$ $V(q) = [b)$ y $V(r) = [e)$. Entonces, $c \in R(a, b) \cap R(d, e)$ y como

$$R(a,b) \cap R(d,e) \subseteq R(V(p), V(q)) \cap R(V(p), V(r)) = V((p \circ q) \wedge (p \circ r)) \subseteq V(p \circ (q \wedge r)),$$

$c \in V(p \circ (q \wedge r))$. Luego existen $f \in [a) \cup [d)$ y $g \in [b) \cap [e)$ tales que $(f, g, c) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $c \in V((\varphi \circ \psi) \wedge (\varphi \circ \delta))$. Entonces, existen $a, d \in V(\varphi)$, $b \in V(\psi)$ y $e \in V(\delta)$ tales que $(a, b, c), (d, e, c) \in R$. Por hipótesis, existen $f \in [a) \cup [d)$ y $g \in [b) \cap [e) \subseteq V(\psi \wedge \delta)$ tales que $(f, g, c) \in R$. Como $V(\varphi)$ es creciente $f \in V(\varphi)$, por lo tanto $c \in V(\varphi \circ (\psi \wedge \delta))$.

(k) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \wedge (\delta \circ \psi) \vdash (\varphi \wedge \delta) \circ \psi$. Si $(a, b, c), (d, e, c) \in R$, consideremos V una valuación tal que $V(p) = [a)$ $V(q) = [b) \cup [e)$ y $V(r) = [d)$. Entonces,

$$c \in R(a,b) \cap R(d,e) \subseteq R(V(p), V(q)) \cap R(V(r), V(q)) = V((p \circ q) \wedge (r \circ q)) \subseteq V((p \wedge r) \circ q).$$

Luego existen $f \in [a) \cap [d)$ y $g \in V(q) = [b) \cup [e)$ tales que $(f, g, c) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sea $c \in V((\varphi \circ \psi) \wedge (\delta \circ \psi))$. Entonces, existen $a \in V(\varphi)$, $d \in V(\delta)$ y $b, e \in V(\psi)$ tales que $(a, b, c), (d, e, c) \in R$. Por hipótesis, existen $f \in [a) \cap [d)$ y $g \in [b) \cup [e)$ tales que $(f, g, c) \in R$. Como $V(\psi)$ es creciente $g \in V(\psi)$, por lo tanto $c \in V((\varphi \wedge \delta) \circ \psi)$.

2. (a) Supongamos que la siguiente regla es válida en $\mathcal{F}$:

$$\frac{\varphi \circ \psi \vdash \bot}{\varphi, \psi \vdash \bot}.$$

Dado $a \in X$, consideremos una valuación V tal que $V(p) = V(q) = [a)$. Entonces, $V(p) \cap V(q) = [a) \neq \emptyset$, por lo tanto $\langle \mathcal{F}, V \rangle \not\models_l p, q \vdash \bot$. Por hipótesis, $\langle \mathcal{F}, V \rangle \not\models_l p \circ q \vdash \bot$, es decir, $V(p \circ q) \neq \emptyset$, es decir, $R(a, a) \neq \emptyset$. Concluimos que existe $b \in X$ tal que $(a, a, b) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación y sean φ, ψ dos fórmulas verificando $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \varphi \circ \psi \vdash \bot$. Aseguramos que $V(\varphi) \cap V(\psi) = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Sea $a \in V(\varphi) \cap V(\psi)$. Por hipótesis, existe b tal que $(a, a, b) \in R$. Por lo tanto, $b \in V(\varphi \circ \psi)$, lo cual es una contradicción. Luego, $V(\varphi) \cap V(\psi) = \emptyset$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models_l \varphi, \psi \vdash \bot$.

(b) Supongamos que la siguiente regla es válida en $\mathcal{F}$:

$$\frac{\varphi, \psi \vdash \bot}{\varphi \circ \psi \vdash \bot}$$

Si $(a,b,c) \in R$, consideremos una valuación V tal que $V(p) = [a)$ y $V(q) = [b)$. Si $[a) \cap [b) = \emptyset$, entonces $V(p) \cap V(q) \subseteq \emptyset = V(\bot)$, por lo tanto $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p, q \vdash \bot$. Por hipótesis, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p \circ q \vdash \bot$, es decir, $V(p \circ q) = \emptyset$, pero $c \in R(a,b) = V(p \circ q)$, lo cual es una contradicción. Luego debe ser $[a) \cap [b) \neq \emptyset$, es decir, existe $d \in X$ tal que $a, b \leq d$

Para probar la recíproca, sea V una valuación, y sean φ, ψ dos fórmulas tales que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi, \psi \vdash \bot$. Supongamos que $V(\varphi \circ \psi) \neq \emptyset$. Entonces, existen $a \in V(\varphi)$, $b \in V(\psi)$ y $c \in X$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $a, b \leq c$. entonces $c \in V(\varphi \wedge \psi)$ lo cual es una contradicción. entonces $V(\varphi \circ \psi) = \emptyset$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi \circ \psi \vdash \bot$.

(c) Supongamos que la siguiente regla es válida en $\mathcal{F}$:

$$\frac{\varphi, \psi \vdash \delta}{\varphi \circ \psi \vdash \delta}$$

Si $(a,b,c) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$, $V(q) = [b)$ y $V(r) = [a) \cap [b)$, entonces $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p, q \vdash r$. Por hipótesis, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p \circ q \vdash \delta$, por lo tanto vemos que $c \in R(a,b) = V(p \circ q) \subseteq V(r) = [a) \cap [b)$, es decir, $a, b \leq c$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación, y sean φ, ψ, δ dos fórmulas tales que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi, \psi \vdash \delta$. Sea $c \in V(\varphi \circ \psi)$, entonces existen $a \in V(\varphi)$ y $b \in V(\psi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $a, b \leq c$, entonces $c \in V(\varphi) \cap V(\psi) \subseteq V(\delta)$. Luego, $V(\varphi \circ \psi) \subseteq V(\delta)$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi \circ \psi \vdash \delta$.

(d) Supongamos que la siguiente regla es válida en $\mathcal{F}$:

$$\frac{\varphi \circ \psi \vdash \delta}{\varphi, \psi \vdash \delta}$$

Si $a \in X$, consideremos una valuación V tal que $V(p) = V(q) = [a)$ y $V(r) = R(a,a)$, entonces $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p \circ q \vdash r$. Por hipótesis, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l p, q \vdash \delta$, por lo tanto tenemos que $a \in V(p) \cap V(q) \subseteq V(r) = R(a,a)$, es decir, $(a,a,a) \in R$.

Para probar la recíproca, sea V una valuación, y sean φ, ψ, δ fórmulas tales que $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi \circ \psi \vdash \delta$. Sea $c \in V(\varphi) \cap V(\psi)$. Por hipótesis, $(a,a,a) \in R$, entonces $a \in V(\varphi \circ \psi) \subseteq V(\delta)$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \varphi, \psi \vdash \delta$.

■

6.1.3. FI-marcos

En esta subsección consideraremos fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}$.
Recordemos que los teoremas 6.1 y 6.2 también son válidos para FI-marcos.

Teorema 6.3 *Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$ un FI-marco.*

1. *Cada fórmula en la columna de la izquierda es válida en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:*

	Fórmula	*Condición*
(a)	$(\varphi \circ \psi) \rightarrow \varphi$	$(u,v,x,z) \in R \circ T' \Rightarrow u \leq z.$
(b)	$(\varphi \circ \psi) \rightarrow \psi$	$(u,v,x,z) \in R \circ T' \Rightarrow v \leq z.$
(c)	$(\varphi \circ \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$	$(u,v,x,z) \in R \circ T' \Rightarrow (u \leq z \ \& \ v \leq z).$
(d)	$(\varphi \circ \varphi) \rightarrow \varphi$	$(u,v,x,z) \in R \circ T' \Rightarrow (u \leq z \ o \ v \leq z).$
(e)	$(\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$	$(x,y,z,t) \in R \circ T' \Rightarrow (y,x,t) \in T.$
(f)	$((\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi) \rightarrow \psi$	$(x,y,z,t) \in R \circ T' \Rightarrow (x,y,t) \in T.$
(g)	$(\varphi \circ \psi) \rightarrow (\psi \circ \varphi)$	$(x,y,z,t) \in R \circ T' \Rightarrow (y,x,t) \in R.$

2. *Cada secuente en la columna de la izquierda es localmente válido en $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ satisface la condición de primer orden de la columna de la derecha:*

	Secuente	*Condición*
(a)	$(\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi \vdash \psi$	$R \subseteq T.$
(b)	$\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi) \vdash \psi$	$R \subseteq T'.$
(c)	$\varphi \vdash \psi \rightarrow (\varphi \circ \psi)$	$T \subseteq R.$
(d)	$\varphi \vdash \psi \rightarrow (\psi \circ \varphi)$	$T \subseteq R.$

Demostración. Durante esta demostración las letras p, q y r indicaran variables proposicionales.

1. (a) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \rightarrow \varphi$. Si $(a,b,c) \in T$, $(d,e,b) \in R$, sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ tal que $V(p) = [d)$, $V(q) = [e)$. Como $(d,e,b) \in R$, tenemos que $b \in V(p \circ q)$. Por hipótesis, $V((p \circ q) \rightarrow p) = X$, entonces $a \in V((p \circ q) \rightarrow p)$. Luego $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(p \circ q)) \subseteq V(p)$, con lo cual, $c \in V(p) = [d)$ es decir, $d \leq c$.

   Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V, $T(a, V(\varphi \circ \psi)) \subseteq V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi \circ \psi))$, existen $b, d, e \in X$ que verifican $(a,b,c) \in T$, $(d,e,b) \in R$, $d \in V(\varphi)$ y $e \in V(\psi)$. Por hipotesis, $d \leq c \in V(\varphi)$, y el resultado se sigue.

   (b) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \rightarrow \psi$. y que $(a,b,c) \in T$, $(d,e,b) \in R$. Sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ tal que $V(p) = [d)$, $V(q) = [e)$. Como $(d,e,b) \in R$, $b \in V(p \circ q)$. Por hipótesis, $V((p \circ q) \rightarrow p) = X$, entonces $a \in V((p \circ q) \rightarrow p)$. Por lo tanto, vemos que $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(p \circ q)) \subseteq V(q) = [e)$, es decir, $e \leq c$.

   Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V verifica $T(a, V(\varphi \circ \psi)) \subseteq V(\psi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi \circ \psi))$, existen $b, d, e \in X$ tales que $(a,b,c) \in T$, $(d,e,b) \in R$, $d \in V(\varphi)$ y $e \in V(\psi)$. Por hipótesis, tenemos que $e \leq c \in V(\psi)$.

   (c) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$ y sea $(a,b,c) \in T$, $(d,e,b) \in R$. Sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$ tal que $V(p) = [d)$ y $V(q) = [e)$. Como $(d,e,b) \in R$, $b \in V(p \circ q)$. Por hipótesis, $V((p \circ q) \rightarrow (p \wedge q)) = X$, entonces $a \in V((p \circ q) \rightarrow (p \wedge q))$. Por lo tanto $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(p \circ q)) \subseteq V(p) \cap V(q) = [d) \cap [e)$, es decir, $d, e \leq c$.

   Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V se verifica que $T(a, V(\varphi \circ \psi)) \subseteq V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi \circ \psi))$,

existen $b, d, e \in X$ tales que $(a, b, c) \in T$, $(d, e, b) \in R$, $d \in V(\varphi)$ y $e \in V(\psi)$. Por hipótesis $d, e \leq c$. Por lo tanto, $c \in V(\varphi) \cap V(\psi)$.

(d) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \varphi) \rightarrow \varphi$. Si $(a, b, c) \in T$ y $(d, e, b) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [d) \cup [e)$. Entonces, $b \in V(p \circ p)$. Por hipótesis, $V((p \circ p) \rightarrow p) = X$, luego $a \in V((p \circ p) \rightarrow p)$. Por lo tanto, $c \in T(a, b) \subseteq T(a, V(p \circ p)) \subseteq V(p) = [d) \cup [e)$, es decir, $d \leq c \circ e \leq c$.

Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V, $T(a, V(\varphi \circ \varphi)) \subseteq V(\varphi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi \circ \varphi))$, entonces existen $d, e \in V(\varphi)$ y $b \in X$ tales que $(a, b, c) \in T$ y $(d, e, b) \in R$. Por hipótesis, $d \leq c \circ e \leq c$. En ambos casos $c \in V(\varphi)$.

(e) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$. Si $(a, b, c, d) \in R \circ T'$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e) \in R$ y $(c, e, d) \in T$. Sea V una valuación cumpliendo que $V(p) = [a)$ y que $V(q) = T(b, a)$. Entonces, $b \in V(p \rightarrow q)$, ya que $T(b, V(p)) = T(b, a) = V(q)$. Luego, $e \in V(p \circ (p \rightarrow q))$. Por hipótesis, $d \in T(c, e) \subseteq T(c, V(p \circ (p \rightarrow q))) \subseteq V(q)$. Como $V(q) = T(b, a)$, cuncluimos que $(b, a, d) \in T$.

Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V, $T(a, V(\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi))) \subseteq V(\psi)$. Si $c \in T(a, V((\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi))))$, existe $b \in V(\varphi \circ (\varphi \rightarrow \psi))$ tal que $(a, b, c) \in T$. Entonces, existen $d \in V(\varphi)$ y $e \in V(\varphi \rightarrow \psi)$ tales que $(d, e, b) \in R$. Por lo tanto $(d, e, a, c) \in R \circ T'$. Por hipótesis, $(e, d, c) \in T$, luego, $c \in T(e, d) \subseteq T(e, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$.

(f) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l ((\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi) \rightarrow \psi$. Si $(a, b, c, d) \in R \circ T'$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e) \in R$ y $(c, e, d) \in T$. Sea V una valuación que verifica que $V(p) = [b)$ y que $V(q) = T(a, b)$. Entonces, $a \in V(p \rightarrow q)$, .ya que $T(a, V(p)) = T(a, b) = V(q)$. Luego, $e \in V((p \rightarrow q) \circ p)$. Por hipótesis, $d \in T(c, e) \subseteq T(c, V((p \rightarrow q) \circ p)) \subseteq V(q)$. Como $V(q) = T(a, b)$, entonces $(a, b, d) \in T$.

Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V se cumple que $T(a, V((\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi)) \subseteq V(\psi)$. Si $c \in T(a, V((\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi))$ existe $b \in V((\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Entonces, existen $d \in V(\varphi \rightarrow \psi)$ y $e \in V(\varphi)$ tales que $(d, e, b) \in R$. Por lo tanto $(d, e, a, c) \in R \circ T'$. Por hipótesis, $(d, e, c) \in T$, luego $c \in T(d, e) \subseteq T(e, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$.

(g) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \circ \psi) \rightarrow (\psi \circ \varphi)$. Si $(a, b, c, d) \in R \circ T'$, existe $e \in X$ tal que $(a, b, e) \in R$ y $(c, e, d) \in T$. Sea V una valuación que verifica que $V(p) = [a)$ y que $V(q) = [b)$. Entonces, $e \in R(a, b) = V(p \circ q)$. Por hipótesis $c \in V((p \circ q) \rightarrow (q \circ p))$, es decir, $T(a, V(p \circ q)) \subseteq V(q \circ p)$. Como $d \in T(c, e)$ y $e \in V(p \circ q)$, concluimos que $c \in V(q \circ p) = R(b, a)$, es decir, $(b, a, c) \in R$.

Para la reciproca, sean $a \in X$ y $\varphi, \psi \in Fm$. Debemos probar que para cada valuación V se cumple que $T(a, V(\varphi \circ \psi)) \subseteq V(\psi \circ \varphi)$. Si $c \in T(a, V(\varphi \circ \psi))$, entonces existe $b \in V(\varphi \circ \psi)$ tal que $(a, b, c) \in T$. Entonces, existen $d \in V(\varphi)$ y $e \in V(\psi)$ tales que $(d, e, b) \in R$. Por lo tanto, $(d, e, a, c) \in R \circ T'$. Por hipótesis, $(e, d, c) \in R$, luego $c \in R(e, d) \subseteq R(V(\psi), V(\varphi)) = V(\psi \circ \varphi)$.

2. (a) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l (\varphi \rightarrow \psi) \circ \varphi \vdash \psi$. Si $(a, b, c) \in R$, sea V una valuación tal que $V(p) = [b)$ y $V(q) = T(a, b)$. Entonces $a \in V(p \rightarrow q)$. Por hipótesis, tenemos

que $c \in R(a,b) \subseteq R(V(p \to q), V(p)) = V((p \to q) \circ p) \subseteq V(q) = T(a,b)$, es decir, $(a,b,c) \in T$.

Para probar la reciproca, sean $\varphi, \psi \in Fm$ y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Si $c \in R(V(\varphi \to \psi), V(\varphi))$, existen $a \in V(\varphi \to \psi)$ y $b \in V(\varphi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $(a,b,c) \in T$. Por lo tanto $c \in T(a,b) \subseteq T(a, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Luego $V((\varphi \to \psi) \circ \varphi) \subseteq V(\psi)$.

(b) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \circ (\varphi \to \psi) \vdash \psi$. Si $(a,b,c) \in R$, sea V una valuación tal que: $V(p) = [a)$ y $V(q) = T(b,a)$. Entonces $b \in V(p \to q)$. Por hipótesis, tenemos que $c \in R(a,b) \subseteq R(V(p), V(p \to q)) = V(p \circ (p \to q)) \subseteq V(q) = T(b,a)$, es decir, $(b,a,c) \in T$.

Para probar la recíproca, sean $\varphi, \psi \in Fm$ y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Si $c \in R(V(\varphi), V(\varphi \to \psi))$, existen $a \in V(\varphi)$ y $b \in V(\varphi \to \psi)$ tales que $(a,b,c) \in R$. Por hipótesis, $(b,a,c) \in T$. por lo tanto $c \in T(b,a) \subseteq T(b, V(\varphi)) \subseteq V(\psi)$. Luego $V(\varphi \circ (\varphi \to \psi)) \subseteq V(\psi)$.

(c) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \psi \to (\varphi \circ \psi)$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$ and $V(q) = [b)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(q \to (p \circ q))$. Luego, $c \in T(a,b) = T(a, V(q)) \subseteq V(p \circ q) = R(a,b)$, es decir, $(a,b,c) \in R$.

Para probar la recíproca, sean $\varphi, \psi \in Fm$ y V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Supongamos que $a \in V(\varphi)$ y $c \in T(a, V(\psi))$, entonces existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $c \in R(a,b) \subseteq R(V(\varphi), V(\psi)) = V(\varphi \circ \psi)$. Luego, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\varphi \circ \psi)$ para cada $a \in V(\varphi)$, es decir, $V(\varphi) \subseteq V(\psi \to (\varphi \circ \psi))$.

(d) Supongamos que $\mathcal{F} \models_l \varphi \vdash \psi \to (\psi \circ \varphi)$. Si $(a,b,c) \in T$, sea V una valuación tal que $V(p) = [a)$ and $V(q) = [b)$. Por hipótesis, $a \in V(p) \subseteq V(q \to (q \circ p))$. Luego $c \in T(a,b) = T(a, V(q)) \subseteq V(q \circ p) = R(b,a)$, es decir, $(b,a,c) \in R$.

Para probar la recíproca, sean $\varphi, \psi \in Fm$ y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Supongamos $a \in V(\varphi)$, sea $c \in T(a, V(\psi))$, entonces existe $b \in V(\psi)$ tal que $(a,b,c) \in T$. Por hipótesis, $c \in R(b,a) \subseteq R(V(\psi), V(\varphi)) = V(\psi \circ \varphi)$. Luego, $T(a, V(\psi)) \subseteq V(\psi \circ \varphi)$ para cada $a \in V(\varphi)$, es decir, $V(\varphi) \subseteq V(\psi \to (\psi \circ \varphi))$.

■

6.2. Secuentes y reglas son necesarios

En los teoremas 6.1, 6.2 y 6.3 hemos probado como la validez de ciertas fórmulas secuentes o reglas en un I-marco pueden ser traducidas en una condición de primer orden. Probaremos en esta sección que hay familias de marcos que son definibles por la validez de un cierto secuente pero no por la validez de ningún conjunto de fórmulas. Resultados similares han sido probados por Bou en su tesis de maestria [7, Capítulo 3] para marcos binarios, los resultados aquí expuestos aplican las ideas de las mencionadas pruebas a los casos que estamos analizando.

Recordemos que los T-marcos pueden ser base de F e I-modelos. En los teoremas 6.1 ítem 2.(a) y 6.2 ítem 1.(a) hemos probado que un T-marco $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T \rangle$ satisface que $T = T'$ si y sólo si visto como I-marco $\mathcal{F} \in Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi)$ si y sólo si visto como F-marco $\mathcal{F} \in Fr_l(\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi)$.

Teorema 6.4 *1. Para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\rightarrow}$

$$Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \neq Fr_l(\{\emptyset \vdash \alpha : \alpha \in \Gamma\}).$$

2. Para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}_{\circ}$

$$Fr_l(\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi) \neq Fr_l(\{\emptyset \vdash \alpha : \alpha \in \Gamma\}).$$

Demostración. *1.* Denotemos

$$\Sigma_{\rightarrow} = \{\alpha \in Fm_{\rightarrow} : \emptyset \vdash \alpha \in Seq_l(Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi))\},$$

, es decir $\Sigma_{\rightarrow} = \{\alpha \in Fm_{\rightarrow} : \forall \mathcal{F} \in Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi), \mathcal{F} \models \alpha\}$.

En caso de que exista $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}$ tal que $Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) = Fr_l(\{\emptyset \vdash \alpha : \alpha \in \Gamma\})$, claramente $\Gamma \subseteq \Sigma_{\rightarrow}$.

Consideremos el siguiente marco $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T\rangle$ donde $X = \{a, b\}$, $\leq = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$ y $T = \{(b,a,a), (a,a,a), (a,a,b), (b,a,b)\}$, por el item 2.(a) del teorema 6.1

$$\mathcal{F} \notin Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$$

Probaremos que $\mathcal{F} \in Fr_l(\{\emptyset \vdash \alpha : \alpha \in \Sigma_{\rightarrow}\})$.

Sea $\alpha \in \Sigma_{\rightarrow}$, y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Consideremos $\mathcal{F}_1 = \langle \{a\}, =, \{(a,a,a)\}\rangle$. Es facil ver que $\mathcal{F}_1 \preccurlyeq \mathcal{F}$ y que $\mathcal{F}_1 \in Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$. Entonces, $\mathcal{F}_1 \models \alpha$. Por el teorema 5.24, $a \in V_i(\alpha) = V(\alpha) \cap \{a\}$. Luego $a \in V(\alpha)$. Como $V(\alpha)$ es un conjunto creciente, y $a \leq b$, tenemos que $V(\alpha) = \{a, b\}$ Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \models \alpha$ para cada $\alpha \in \Sigma_{\rightarrow}$ pero ya observamos que $\mathcal{F} \notin Fr_l(\varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$.

2. Denotemos

$$\Sigma_{\circ} = \{\alpha \in Fm_{\circ} : \emptyset \vdash \alpha \in Seq_l(Fr_l(\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi))\}.$$

Consideremos F-marco $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T\rangle$ donde

$$X = \{a, b\}, \quad \leq = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}, \quad T = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,b,b)\}.$$

Sea $\varphi \in \Sigma_{\circ}$, y sea V una valuación basada en $\mathcal{F}$. Considereremos $\mathcal{F}_a = \langle \{a\}, =, \{a,a,a\}\rangle$. Claramente, $\mathcal{F}_a \preccurlyeq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_a \in Fr_l(\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi)$. Luego $\mathcal{F}_a \models_l \varphi$. Entonces, por el teorema 5.24, $a \in V_i(\varphi) = V(\varphi) \cap \{a\}$. Luego, $a \in V(\varphi)$. Como $V(\varphi)$ es un conjunto creciente y $a \leq b$, tenemos que $V(\varphi) = \{a, b\}$ Por lo tanto, $\mathcal{F} \models_l \varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$ y por el ítem 1.(a) del teorema 6.2 $\mathcal{F} \notin Fr_l(\varphi \circ \psi \vdash \psi \circ \varphi)$. ∎

Hemos visto que los sequentes son necesarios para caracterizar ciertas familias de T-marcos. Ahora veremos que algo similiar ocurre con las reglas.

Denotemos $\Pi_1 = \langle \{\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi\}, \varphi \vdash \psi\rangle$. En el teorema 6.1 3.(b) hemos probado que $\mathcal{F} \models_l \Pi_1$ si y sólo si satisface

$$\forall y \in X, \exists x \in X\, (x, y, y) \in T.$$

Para simplificar la notación llamemos

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \models_l \Pi\}.$$

Teorema 6.5 *Sea* $\Gamma \cup \varphi \in Fm$. *Si para cada* $\mathcal{F} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLI})} \varphi$.

Demostración. Supongamos que el secuente $\Gamma \vdash \varphi$ es válido en cada I-marco perteneciente a $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{F} = \langle X \leq, T\rangle$ un I-marco, y sea k un elemento que no pertenece a X y la estrucura $\mathcal{F}_k = \langle X \cup \{k\}, \leq \cup \{(k,k)\}, T_k\rangle$, donde T_k esta definido como sigue:

$$(a,b,c) \in T_k \text{ si y sólo si } \begin{cases} (a,b,c) \in T \text{ o} \\ a = k \text{ y } b \leq c \text{ o} \\ a = b = c = k. \end{cases}$$

Se sigue facilmente que $\mathcal{F}_k$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}_k$ es an I-marco,
2. $\mathcal{F}_k \in \mathcal{D}$ y
3. $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{F}_k$.

Por hipótesis, $\mathcal{F}_k \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Por el teorema 5.24, $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Por lo tanto, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLI})} \varphi$. ■

Corolario 6.6 *No existe ningún conjunto de secuentes* $S \subseteq \mathbf{Seq}_{\mathcal{L}_{_}}$ *tal que*

$$Fr_l(S) = \mathcal{D}.$$

Para probar que hay familias de F-marcos que son definibles por validez de reglas pero no por secuentes, denotemos

$$\Pi_2 = \frac{\varphi \circ \psi \vdash \bot}{\varphi, \psi \vdash \bot}$$

en 6.2 ítem 2.(a) probamos que $\langle X, \leq, R\rangle \models_l \Pi_2$ si y sólo si

$$\forall x \in X, \exists z \in X, (x,x,z) \in R.$$

Denotemos

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \models_l \Pi_2\},$$

Teorema 6.7 *Sea* $\Gamma \cup \varphi \in Fm_\circ$. *Si para cada* $\mathcal{F} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLF})} \varphi$

Demostración. Supongamos que el secuente $\Gamma \vdash \varphi$ es válido en cada F-marco de $\mathbb{F}(\Pi)$. Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq R\rangle$ un F-marco y k un elemento que no pertenece a X. Consideremos la estructura $\mathcal{F}_k = \langle X \cup \{k\}, \leq \cup \{(k,k)\}, T_k\rangle$, donde T_k esta definida como sigue:

$$(a,b,c) \in T_k \text{ si y sólo si } \begin{cases} (a,b,c) \in T, \text{ o} \\ c = k \text{ y existe } u \in X \cup \{k\} \text{ tal que } a, b \leq u. \end{cases}$$

Es facil probar que $\mathcal{F}_k$ es un F-marco, que$\mathcal{F}_k \in D$ y que $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{F}_k$. Como $\mathcal{F}_k \models_l \Gamma \vdash \varphi$ por el teorema 5.24 $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Luego el secuente $\Gamma \vdash \varphi$ es válido en todo, es decir, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{DLF})} \varphi$. ■

Corolario 6.8 *No existe un conjunto* $S \subseteq \mathbf{Seq}_{\mathcal{L}_\circ}$ *tal que*

$$Fr_l(S) = \mathcal{E}.$$

6.3. Extensiones canónicas

En esta sección definiremos y analizaremos los conceptos de lógica canónica por marcos y por modelos, los cuales son muy cercanos al concepto de lógica modal canónica (ver [3]). Para esto primero definiremos el marco y el modelo canónico de una extensión de $\mathcal{S}$ (DLFI) o $\mathcal{S}$ (DLI). Y luego veremos como en el caso de extensiones autoextensionales este concepto de canonicidad esta relacionado con el concepto de clases de álgebras canónica por marcos ternarios.

Definición 6.9 *Si $\mathcal{S}$ es una extensión de $\mathcal{S}$ (DLFI), una teoría Ψ de $\mathcal{S}$ se dirá* ***prima*** *si para cada par de fórmulas φ, ψ si $\varphi \vee \psi \in \Psi$, entonces $\varphi \in \Psi$ o $\psi \in \Psi$.*

Consideremos el siguiente conjunto:

$$X_c(\mathcal{S}) = \{\Psi : \Psi \text{ es una teoría prima de } \mathcal{S}\}.$$

Sea $R_c(\mathcal{S})$ y $T_c(\mathcal{S})$ relaciones ternarias sobre $X_c(\mathcal{S})$ definidas cpmo sigue:

$(\Psi, \Delta, \Sigma) \in R_c(\mathcal{S})$ si y sólo si $\forall \varphi, \psi \in Fm$, $(\varphi \in \Psi \ \& \ \varphi \in \Delta) \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \Sigma$.
$(\Psi, \Delta, \Sigma) \in T_c(\mathcal{S})$ si y sólo si $\forall \varphi, \psi \in Fm$, $(\varphi \rightarrow \psi \in \Psi \ \& \ \varphi \in \Delta) \Rightarrow \psi \in \Sigma$.

Lema 6.10 *Para cada extensión $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ (DLFI), $\mathcal{F}_c(\mathcal{S}) = \langle X_c(\mathcal{S}), R_c(\mathcal{S}), T_c(\mathcal{S})\rangle$ es un FI-marco llamado el* ***FI-marco canónico de*** *$\mathcal{S}$.*

Demostración. Es directa de la definición. ∎

Definición 6.11 *La valuación V_c esta definida en cada variable proposicional p como sigue:*

$$V_c(\mathcal{S})(p) = \{\Psi \in X_c(\mathcal{S}) : p \in \Psi\}.$$

El FI-modelo $\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{S}), V_c(\mathcal{S})\rangle$ es llamado el ***FI-modelo canónico*** *de $\mathcal{S}$.*

El **I-marco** canónico y el **I-modelo** canónico de una extensión de $\mathcal{S}$ (DFI) se definen de manera similar.

Definición 6.12 *Una extensión $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ (DLFI) o $\mathcal{S}$ (DLI) es llamada* ***canónica por modelos*** *si es correcta y completa con respecto a su modelo canónico. Y es llamada* ***canónica por marcos*** *si es correcta y completa con respecto a su marco canónico.*

Probaremos probar que toda extensión autoextensional de $\mathcal{S}$ (DLFI) o $\mathcal{S}$ (DLI) es canónica por modelos.

Lema 6.13 *Para cada extensión $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ (DLFI) (o $\mathcal{S}$ (DLI)) y cada fórmula φ*

$$V_c(\mathcal{S})(\varphi) = \{\Psi \in X_c(\mathcal{S}) : \varphi \in \Psi\}$$

Demostración. Se sigue directamente por la definición de $\mathcal{F}_c(\mathcal{S})$ y $V_c(\mathcal{S})$. ∎

Teorema 6.14 *Si $\mathcal{S}$ es una extensión de $\mathcal{S}$ (DLFI) (o $\mathcal{S}$ (DLI)) entonces es correcta con respecto a su modelo canónico. Si además $\mathcal{S}$ es autoextensional, entonces $\mathcal{S}$ es canónica por modelos.*

Demostración. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Por el lema previo

$$V_c(\mathcal{S})(\Gamma) = \bigcap_{\psi \in \Gamma} V_c(\mathcal{S})(\psi) = \{\Psi \in X_c(\mathcal{S}) : \Gamma \subseteq \Psi\}.$$

Si $\Psi \in V_c(\mathcal{S})(\Gamma)$ $\Psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, tenemos que $\Psi \in V_c(\mathcal{S})(\varphi)$. Entonces, $\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{S}), V_c(\mathcal{S})\rangle \models_l \Gamma \vdash \varphi$, lo cual prueba la primer afirmación.

Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es autoextensional. La proyección $\rho : \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S}))$ define una función biyectiva de $X_c(\mathcal{S})$ al conjunto de filtros primos de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S}))$. Ahora supongamos que $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $\rho(\varphi) \notin \rho(Cn(\Gamma))$ y $\rho(Cn(\Gamma))$ es un filtro de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S}))$. A su vez, como $\mathcal{S}$ es una extensión de $\mathcal{S}$ (DLFI) (o $\mathcal{S}$ (DLI)), tenemos que $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S})) \in$ DLFI (DLI) y por lo tanto tiene un reducto de retículo distributivo. Luego existe un filtro primo P de $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S}))$ tal que $\rho(Cn(\Gamma)) \subseteq P$ y $\rho(\varphi) \notin P$. Luego, $\varphi \notin \rho^{-1}(P) \in X_c(\mathcal{S})$ y $\Gamma \subseteq \rho^{-1}(P)$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{S}), V_c(\mathcal{S})\rangle \not\models_l \Gamma \vdash \varphi$. ■

Corolario 6.15 *Si $\mathcal{S}$ una extensión autoextensional de $\mathcal{S}$ (DLFI) (o $\mathcal{S}$ (DLI)), entonces para cada secuente $\Gamma \vdash \varphi$ tenemos que*

$$\text{si } \mathcal{F}_c(\mathcal{S}) \models_l \Gamma \vdash \varphi, \text{ entonces } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi.$$

Por este corolario, podemos deducir que si queremos probar que una extensión autoextensional de $\mathcal{S}$ (DLFI) o $\mathcal{S}$ (DLI) es canónica por marcos sólo debemos probar que es correcta respecto del marco canónico.

En la prueba del teorema 6.14 observamos que el marco canónico de una extensión autoextensional $\mathcal{S}$, es isomorfo a al marco del álgebra de Lindembaum-Tarski de $\mathcal{S}$. Si probamos que para cada $\boldsymbol{A} \in \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$ el marco $\mathcal{F}(\boldsymbol{A})$ valida los secuentes de $\mathcal{S}$, es decir, $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq Seq_l(\mathcal{F}(\boldsymbol{A}))$, como $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda_{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}}(Th(\mathcal{S})) \in \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$, obtendremos que $\mathcal{S}$ es canónica por marcos. Por el lema 5.38, sabemos que $\vdash_{\mathcal{S}} \subseteq Seq_l(\mathcal{F}(\boldsymbol{A}))$ valida los secuentes de $\mathcal{S}$ si y sólo si $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})} \in \mathrm{K}_{\mathcal{S}}$. Luego si probamos que $\mathrm{K}_{\mathcal{S}}$ es una variedad de álgebras canónica por marcos ternarios, tendríamos que $\mathcal{S}$ es canónica por marcos. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 6.16 *Sea* V *una clase de* **DLFI**-*álgebras (***DLI**-*álgebras). Si* V *es canonica con respecto a FI-marcos (I-marcos) entonces $\mathcal{S}$ (V) es canónica por marcos.*

Recordemos que en el corolario 5.44 probamos que si V es una variedad de álgebras canónica por marcos ternarios entonces

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V},1)} = Seq_g\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right).$$

El teorema anterior nos permite probar un resultado análogo para la deducción local y la lógica basada en semiretículos asociada a la clase V.

Corolario 6.17 *Sea* V *una clase de* **DLFI**-*álgebras (***DLI**-*álgebras) canónica con respecto a FI-marcos (I-marcos), entonces*

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})} = Seq_l\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right).$$

Demostración. En la subsección 5.4.2 del capítulo anterior observamos que

$$\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})} \subseteq Seq_l\left(Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)\right).$$

Por el teorema anterior tenemos que el marco canónico $\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{S}), V_c(\mathcal{S})\rangle \in Fr_l\left(\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})}\right)$ y que $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{V})} = Seq_l\left(\langle \mathcal{F}_c(\mathcal{S}), V_c(\mathcal{S})\rangle\right)$ por lo tanto el resultado se sigue. ■

Ahora aplicaremos lo desarrollado en esta sección y en las anteriores para estudiar ciertas extensiones de $\mathcal{S}$ (DLFI) y $\mathcal{S}$ (DLI).

6.3.1. Lógica Monoidal basada en T-normas

La lógica Monoidal basada en T-normas ($\mathcal{MTL}$) fue introducida y estudiada por F. Esteva y L. Godo en [24] como la lógica relacionada con las t-normas continuas a izquierda como una generalización de la Lógica básica de Hájek (Ver [34]).

En [24] se prueba que el sistema deductivo $\mathcal{MTL}$ es algebrizable y que su semántica algebraica equivalente es la variedad de las **MTL**-álgebras (ver pagina 49). En particular y con la notación de esta tesis, en el mencionado artículo se prueba que $\mathcal{MTL}$ es la lógica afirmativa $\mathcal{S}(\mathsf{MTL}, 1)$.

En esta subsección probaremos que $\mathcal{S}$ (MTL) es canónica con respecto a marcos.

Teorema 6.18 *La variedad* RCID *es canónica respecto a FI-marcos.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A}$ un **RCID**-retículo. Por el Teorema 3.25, $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}) = \langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, R_A, T_{\boldsymbol{A}}\rangle$ es modelo de las siguientes fórmulas de primer orden:

1 $T = R$.

2 $(x, y, z) \in T \Rightarrow (y, x, z) \in T$.

3 $(x, y, z, t) \in T^2 \Rightarrow (x, z, y, t) \in T^2$.

4 $\forall x \exists y,\ (y, x, x) \in T$.

5 $(x, y, z) \in T \Rightarrow y \leq z$.

Debemos probar que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})} = \langle \mathcal{P}_c(X(\boldsymbol{A})), \cup, \cap, \circ_R, \rightarrow_T, \emptyset, X(\boldsymbol{A})\rangle$ es un retículo residuado conmutativo integral. Por *1*, *2* e ítem 1.(a) del Teorema 6.2 tenemos que $\circ_R$ es conmutativo. De *1*, *2*, *3* e ítems 1.(b), 1.(c). del Teorema 6.2 tenemos que $\circ_R$ es asociativo. Por *1.* e ítems 2.(a) y 2.(b) del Teorema 6.3 se sigue que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es un retículo residuado. De *1*, *4*, *5* e ítems 1.(d) y 1.(h) del Teorema 6.3 vemos que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es integral. ■

Proposición 6.19 *La variedad de* **MTL**-*álgebras es canónica con respecto a FI-marcos.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A}$ una **MTL**-álgebra. Por el teorema previo tenemos que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es un retículo residuado conmutativo e integral. Por el Teorema 3.26, $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}) = \langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, R_A, T_{\boldsymbol{A}}\rangle$ es modelo de la siguiente fórmula de primer orden:

$$(x, y, z), (x, v, w) \in T \Rightarrow (y \leq w \circ v \leq z).$$

Por 1.(e) del teorema 6.1, tenemos que $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ satisfce la condición de prelinealidad, es decir, $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})} \in \mathsf{MTL}$. ■

Del resultado anterior y el teorema 6.16, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 6.20 $\mathcal{S}(\mathsf{MTL})$ *es canónica por marcos.*

Corolario 6.21 $\vdash_{\mathcal{S}(\mathsf{MTL})} = Seq_l(Fr_l(\mathcal{S}(\mathsf{MTL})))$

Combinando este resultado y el teorema 5.43 estamos en condiciones de dar una semántica ternaria para $\mathcal{MTL}$.

Definición 6.22 *Dado $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R, T\rangle$ un FI-marco. Diremos que $\mathcal{F}$ es un MTL-marco si es modelo de las siguientes fórmulas de primer orden:*

1. $T = R$.
2. $(x, y, z) \in T \Rightarrow (y, x, z) \in T$.
3. $(x, y, z, t) \in T^2 \Rightarrow (x, z, y, t) \in T^2$.
4. $\forall x \exists y,\ (y, x, x) \in T$.
5. $(x, y, z) \in T \Rightarrow y \leq z$.
6. $(x, y, z), (x, v, w) \in T \Rightarrow (y \leq w \ o \ v \leq z)$.

Observación 6.23 *Por la condición 1, podriamos notar un MTL-marco $\langle X, \leq, R, T\rangle$ sólo como un marco ternario $\langle X, \leq, T\rangle$, y modificando como corresponde la definición de modelo.*

Por las condiciones 4 y 5 tenemos que:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } \exists c \in X,\ (c, a, b) \in T.$$

Por la proposición 6.19 y el teoremas 3.26 tenemos que $\mathcal{F}$ es un MTL-marco si y sólo si $\mathcal{F} \in Fr_l(\mathcal{S}(\mathsf{MTL}))$. De esta definción, el corolario 6.21 y el teorema 5.43, se sigue directamente el siguiente teorema.

Teorema 6.24 $\mathcal{MTL} = \mathcal{S}(\mathsf{MTL}, 1)$ *es correcta y completa con respecto a la deducción global en MTL-marcos.*

En [44] y en [52] se han dado semánticas para $\mathcal{MTL}$ e $\mathcal{IMTL}$ respectivamente. En la última sección de este capítulo veremos la conexión de estas con la semántica aquí propuesta.

En la última sección del capítulo anterior, probamos que las variedades de las **BL**-álgebras y **MV**-álgebras no son canónicas, esto impide aplicar un procedimiento similar a la Lógica Básica y a la Lógica infinito valuada de Łukasiewicz, para obtener una semántica ternaria correcta y completa para las mismas. Esto no quiere decir que no exista tal semántica, sólo indica que será necesario desarrollarla utilizando una técnica diferente.

6.3.2. Lógica subintuicionista

La noción de lógica subintuicionista fue introducida por Restall en [51] referida a una lógica proposicional definida semanticamente por medio de marcos de Kripke. Este tipo de lógicas a otras mas generales han sido estudiadas por varios autores en [15], [60], [7, Chapter 3] por mencionar algunos.

En esta sección analizaremos primero dos sistemas deductivas $s\mathbf{K}_\sigma$ y $w\mathbf{K}_\sigma$ definidos en [15]. En la notación de esta tesis $w\mathbf{K}_\sigma$ y $s\mathbf{K}_\sigma$ son exactamente $\mathcal{S}$ (WH) y $\mathcal{S}$ (WH, 1) , respectivamente.

Veamos que $w\mathbf{K}_\sigma$ es canónica por marcos.

Teorema 6.25 *La variedad* WH *es canónica con respecto a I-marcos.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{A}$ una **WH**-algebra. Por el teorema 3.35 tenemos que $\langle X(\boldsymbol{A}), \subseteq, T_{\boldsymbol{A}} \rangle$ satisface las siguientes condiciones:

1. $(x,y,z) \in T_{\boldsymbol{A}} \Rightarrow (x,y,x,z) \in T_{\boldsymbol{A}} \circ T'_{\boldsymbol{A}}$
2. $(x,y,z) \in T_{\boldsymbol{A}} \Rightarrow y \leq z$.

Por los items 1 (b) 2 (i) del teorema 6.1, tenemos que los siguientes secuentes

$$\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \varphi \text{ and}$$
$$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \delta \vdash \varphi \rightarrow \delta,$$

son validos en $\mathcal{F}(\boldsymbol{A})$. Por lo tanto $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A})}$ es una **WH**-álgebra. ■

Denotemos $w\mathbf{K}_\sigma$-marcos a la clase de I-marcos que satisfacen las siguientes condiciones

1. $(x,y,z) \in T \Rightarrow (x,y,x,z) \in T \circ T'$
2. $(x,y,z) \in T \Rightarrow y \leq z$.

Corolario 6.26 *$w\mathbf{K}_\sigma$ es canónica por marcos y es correcta y completa respecto de la deducción local de la clase de $w\mathbf{K}_\sigma$-marcos*

Corolario 6.27 *$s\mathbf{K}_\sigma$ es correcta y completa respecto de la deducción global de $w\mathbf{K}_\sigma$-marcos.*

De igual manera se puede probar que las variedades RWH, TWH, Bas, SRL, y H son canónicas por marcos ternarios y por lo tanto las lógicas basadas en semireticulos relativas a estas variedades resultaran correctas y completas respecto de la semántica local de sus marcos ternarios.

6.4. Comparación con otras semánticas relacionales

Ahora veremos como las diferentes semánticas arriba desarrolladas se relacionan con otras introducidas por diferentes autores.

6.4.1. Lógicas subintuicionistas

La lógica $w\mathbf{K}_\sigma$ fue presentada orginalmente en [15] como el conjunto de secuentes válidos en todo marco de Kripke. Recordaremos primero esta semántica y luego la compararemos con la desarrollada en esta tesis.

Un **Marco de Kripke** es un par $\langle X, S\rangle$ donde X es un conjunto no vacío y $S \subseteq X^2$. Un **Modelo de Kripke** es un triple $\langle X, S, V\rangle$ donde $\langle X, S\rangle$ es un marco de Kripke y V es una función de $\mathbf{Fm}_{\rightarrow}$ en $\mathcal{P}(X)$ satisfaciendo:

1. $V(\top) = X$,
2. $V(\bot) = \emptyset$,
3. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$,
4. $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$,
5. $V(\varphi \rightarrow \psi) = \{x \in X : \forall y\,(y \in V(\varphi)\ \&\ (x,y) \in S \Rightarrow y \in V(\psi))\}$.

La definición de validez de un secuente en un marco de Kripke es análoga a la dada en la Definition 5.5. Si un marco de Kripke $\langle X, S\rangle$ valida un secuente $\Gamma \vdash \varphi$ lo denotaremos con $\langle X, S\rangle \overset{K}{\models} \Gamma \vdash \varphi$ para evitar confusiones con la notación para marcos ternarios.

En [15], se prueba que $\Gamma \vdash_{w\mathbf{K}_\sigma} \varphi$ si y sólo si $\langle X, S\rangle \overset{K}{\models} \Gamma \vdash \varphi$ para cada marco de Kripke $\langle X, S\rangle$.

Veamos como la semantica de Kripke desarrolada por Celani y Jansana en [15] esta relacionada con la semántica basada en $w\mathbf{K}_\sigma$-marcos.

Si $\mathcal{K} = \langle X, S\rangle$ es un marco de Kripke definimos un I-marco $\mathcal{F}_K = \langle X, =, T_S\rangle$, donde $T_S \subseteq X^3$ esta definido por

$$(x,y,z) \in T_S \text{ si y sólo si } y = z \text{ y } (x,y) \in S$$

Proposición 6.28 *$\mathcal{K} \overset{K}{\models} \Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\mathcal{F}_K \models_l \Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración. Claramente una función $V : Fm_{\rightarrow} \rightarrow P(X)$ define un modelo de Kripke basado en $\mathcal{K}$ si y sólo si $\langle \mathcal{F}_K, V\rangle$ es un I-modelo. Luego el resultado se sigue. ∎

Ahora veamos una suerte de recíproca de la proposición anterior, es decir, veremos como obtener una marco de $\mathcal{K}_\mathcal{F}$ Kripke dado un tipo especifico de I-marco $\mathcal{F}$ que valida exactamente todos los secuentes $\mathcal{F}$. Para ello necesitamos ciertas definiciones y resultados previos.

Consideremos la subclase de $w\mathbf{K}_\sigma$-marcos que satisfacen la siguiente propiedad

$$(x,y,z) \in T \Rightarrow (\exists r, y \leq r\ \&\ r \leq z\ \&\ (x,r,r) \in T). \tag{6.1}$$

Llamaremos a esta clare $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marcos. El siguiente teorema prueba que $w\mathbf{K}_\sigma$ es completa con respecto a la clase de $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marcos.

Teorema 6.29 *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un subconjunto finito de $Fm_{\rightarrow}$, entonces $\Gamma \vdash_{w\mathbf{K}_\sigma} \varphi$ si y sólo si $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$ para cada $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco $\mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que el secuente $\Gamma \vdash \varphi$ es válido en cada $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco.

Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T\rangle$ un $w\mathbf{K}_\sigma$-marco. Entonces, $\boldsymbol{A}_\mathcal{F} = \langle \mathcal{P}_c(X), \cup, \cap, \Rightarrow, \emptyset, X\rangle$ es una **WH**-álgebra. Por el ítem 2 de la proposición 3.44 tenemos que $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}_\mathcal{F})$ es un $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco, entonces $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}_\mathcal{F}) \models_l \Gamma \vdash \varphi$.

Sea $V : Fm \to P_i(X)$ una valuación basada en $\mathcal{F}$. Luego $\sigma_{\boldsymbol{A}_\mathcal{F}} \circ V$ es un homomorfismo de $\mathbf{Fm}$ en $\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}(\boldsymbol{A}_\mathcal{F})}$, es decir, $\sigma_{\boldsymbol{A}_\mathcal{F}} \circ V$ es una valuación basada en $\mathcal{F}(\boldsymbol{A}_\mathcal{F})$. Supongamos que $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, tenemos que $\sigma_{\boldsymbol{A}_\mathcal{F}} \circ V(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \subseteq \sigma_{\boldsymbol{A}_\mathcal{F}} \circ V(\varphi)$. Por lo tanto, $V(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \subseteq V(\varphi)$, es decir, $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models_l \Gamma \vdash \varphi$. Una conclusión similar se obtiene si suponemos $\Gamma = \emptyset$. Luego $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$ para cada $w\mathbf{K}_\sigma$-marco, por le corolario 6.26, $\Gamma \vdash_{w\mathbf{K}_\sigma} \varphi$.

La recíproca se sigue directamente del hecho de que cada $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco es un $w\mathbf{K}_\sigma$-marco y el corolario.6.26. ∎

Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, T\rangle$,un $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco. Consideremos el marco de Kripke $\mathcal{K}_\mathcal{F} = \langle X, S_T\rangle$, donde $S_T \subseteq X^2$ esta dada por

$$(x, y) \in S_T \text{ si y sólo si } (x, y, y) \in T.$$

Corolario 6.30 *Si $\mathcal{F}$ es un $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco, entonces:*

$$\mathcal{K}_\mathcal{F} \overset{K}{\models} \Gamma \vdash \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi.$$

Demostración. Probaremos que la inclusión $i : \mathcal{F}_{\mathcal{K}_\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$ es un I-morfismo estrictamente creciente y sobreyectivo. El hecho que que i es sobreyectivo y estrictamente creciente es trivial. Como $\mathcal{F}$ es un $w\mathbf{K}^0_\sigma$-marco, $(x, y, z) \in T_{S_T}$ si y sólo si existe $r \in X$ tal que $(x, r) \in S_T$ y $y \leq r \leq z$ si y sólo si existe $r \in X$ tal que $(x, r, r) \in T$ y $y \leq r \leq z$ si y sólo si $(x, y, z) \in T$. Luego i resulta un I-morfismo estrictamente creciente y sobreyectivo. Luego por la proposición 6.28 y por los teoremas 5.24 y 5.21 tenemos que $\mathcal{K}_\mathcal{F} \overset{K}{\models} \Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\mathcal{F}_{\mathcal{K}_\mathcal{F}} \models_l \Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\mathcal{F} \models_l \Gamma \vdash \varphi$. ∎

6.4.2. Lógicas Monoidales basadas en t-normas

En [44], Montagna y Ono desarrollan una semántica de Kripke para la extensión por predicados MTL∀ de la lógica proposicional $\mathcal{MTL}$. Para esto los autores comienzan por desarrollar un semántica de Kripke precisamente para la lógica $\mathcal{MTL}$ y es esta la que compararemos en esta subsección con la desarrollada en la sección anterior.

Recordemos primero como se define esta semántica de Kripke.

Definición 6.31 *Un **monoide linealmente ordenado acotado integral y commutativo** (MO-marco para abreviar) es una estructura $\langle M, *, \leq, 0, 1\rangle$[1] tal que*

1. *$\langle M, *, 1\rangle$ es un monoide,*
2. *$\langle M, \leq, 0, 1\rangle$ es una cadena acotada inferormente por 0 y superiormente por 1,*
3. *$a * b = b * a$, para cada $a, b \in M$,*

[1]En esta definición estamos incluyendo en la definición el 0, que si bien en [44] no se incluye en la definición original, se pide como requisito a cada Monoide el ser acotado inferiormente.

4. $a * 1 = a$, *para cada* $a \in M$,

5. *si* $a \leq b$, *entonces* $a * c \leq a * c$, *para cada* $a, b, c \in M$.

Definición 6.32 *Una* ***relación de forzamiento*** $\vDash$ *en un MO-marco* $\langle M, *, \leq, 0, 1\rangle$ *es una relación entre elementos de* M *y fórmulas en el lenguaje* $\{\circ, \rightarrow, \bot, \top\}$[2] *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $0 \vDash p$ *para cada variable proposicional* p.

2. *Si* $a \vDash p$ *y* $b \leq a$ *entonces* $b \leq p$.

3. $a \vDash \bot$ *si y sólo si* $a = 0$.

4. $1 \vDash \top$.

5. $a \vDash \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $a \vDash \varphi$ *y* $a \vDash \psi$.

6. $a \vDash \varphi \vee \psi$ *si y sólo si* $a \vDash \varphi$ *o* $a \vDash \psi$.

7. $a \vDash \varphi \circ \psi$ *si y sólo si existen* $b, c \in M$ *tales que* $b \vDash \varphi$ *y* $c \vDash \psi$ *y* $a \leq b * c$.

8. $a \vDash \varphi \rightarrow \psi$ *si y sólo si para cada* $b \in M$ *tal que* $b \vDash \varphi$ *entonces* $a * b \vDash \psi$.

Definición 6.33 *Un MO-modelo*[3] *será entonces un par* $\langle \mathcal{M}, \vDash\rangle$ *donde* $\mathcal{M}$ *es un MO-marco y* $\vDash$ *una relación de forzamiento en* $\mathcal{M}$.

Una fórmula φ se dira válida en un MO-modelo $\langle \mathcal{M}, \vDash\rangle$ si y sólo si $1 \vDash \varphi$, y se sirá válida en un MO-marco si es válida en cada modelo basado en el.

Esta semántica esta intimamente relacionada a la semántica algebraica sobre **MTL**-álgebras, como se puede ver en la demostración de la correctitud y completitud de la lógica $\mathcal{MTL}$ respecto de esta, en el teorema 3.1 de [44]. Independientemente de este hecho es posible dado un MO-marco y un MO-modelo definir un FI-marco y un FI-modelo respectivamente que validen exactamente las mismas fórmulas.

Para ello consideremos un MO-marco $\mathcal{M} = \langle M, *, \leq, 0, 1\rangle$ cumpliendo que $0 \neq 1$ y definamos $\mathcal{F}_{\mathcal{M}} = \langle M \setminus \{0\}, \geq, R, T\rangle$, donde claramente $\geq$ es el orden dual y R y T estan definidas como sigue

$$(a, b, c) \in R = T \text{ si y sólo si } a * b \geq c.$$

Es un ejercicio de rutina probar que de la definición de MO-marco se deduce que $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ es un MTL-marco.

Teorema 6.34 *Dado un MO-marco* $\mathcal{M}$ *tal que* $0 \neq 1$ *entonces*

$$\varphi \text{ es válida en } \mathcal{M} \text{ si y sólo si } \mathcal{F}_{\mathcal{M}} \vDash \varphi.$$

[2]Originalmente el símbolo $\top$ no esta incluido. Esta leve modificación no afecta el resultado presentado en [44] y la incluimos para ser consistentes con las definiciones y notación de esta tesis.

[3]Modelo de Kripke en [44], nombre que nos hemos atrevido a cambiar en esta tesis por obvias razones.

Demostración. Primero notemos que es facil probar por inducción en la formación de la fórmula φ que si $a \vDash \varphi$ y $b \leq a$ entonces $b \leq \varphi$.

Ahora consideremos $\vDash$ una relación de forzamiento basada en $\mathcal{M}$. Aseguramos que la función $V : \mathbf{Fm} \to \mathcal{P}(M \setminus \{0\})$ definida por,

$$V(\varphi) = \{a \in M : a \vDash \varphi \ \& \ a \neq 0\},$$

es una valuación basada en $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$. La observación al principio de esta prueva nos permite ver que $V(\varphi) \cup \{0\}$ es decrieciente en $\langle M, \leq \rangle$ por lo tanto $V(\varphi)$ es creciente en $\langle M \setminus \{0\}, \geq \rangle$. La prueba que V satisface las condiciones 1. y 2. de la definición 5.2 es trivial. Veamos que satisface la condición 3. Por la definición de R y como $\vDash$ es una relación de forzamiento tenemos que:

$$\begin{aligned} V(\varphi \circ \psi) &= \{a \in M : a \vDash \varphi \circ \psi \ \& \ a \neq 0\} \\ &= \{a \in M : \exists b, c \in M, b \vDash \varphi \ \& \ c \vDash \psi \ \& \ a \leq b * c \ \& \ a \neq 0\} \\ &= \{a \in M : \exists b, c \in M, b \in V(\varphi) \ \& \ c \in V(\psi) \ \& \ a \leq b * c \ \& \ a \neq 0\} \\ &= \{a \in M : \exists b, c \in M, b \in V(\varphi) \ \& \ c \in V(\psi) \ \& \ (b, c, a) \in R\}. \end{aligned}$$

La condición 4. se sigue de manera similar.

Ahora bien, una fórmula φ es válida en $\langle \mathcal{M}, \vDash \rangle$ si y sólo si $1 \vDash \varphi$ si y sólo si $1 \in V(\varphi)$ si y sólo si $V(\varphi) = M \setminus \{0\}$ si y sólo si $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{M}}, V \rangle \models \varphi$. Por lo tanto si $\mathcal{F}_{\mathcal{M}} \models \varphi$ entonces φ es válida en $\mathcal{M}$

De igual manera es facil ver que dada una valuación V basada en $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$, la relación definida por

$$a \vDash \psi \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } a \in V(\psi),$$

es una relación de forzamiento en $\mathcal{M}$ y φ es válida en $\langle \mathcal{M}, \vDash \rangle$ si y sólo si $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{M}}, V \rangle \models \varphi$. Con lo cual es resultado se sigue. ∎

La prueba de correctitud y completitud, en realidad todo el desarrollo de la semántica, dada en [44] es sólo para teoremas, aunque podría facilmente extenderse a secuentes. Suponemos que esto es porque el concepto de lógica, elegido por los autores en este artículo, es el clásico concepto de conjunto de teoremas, y dado que la lógica $\mathcal{MTL}$ tiene una propiedad debil de deducción es posible traducir la validez de un secuente a la validez de una fórmula, o más precisamente a la validez de alguna fórmula dentro de una familia de fórmulas construibles a partir del secuente. Por ello sólo hemos comparado los marcos para la validez de fórmulas, aunque sin mayor esfuerzo esto podría extendese a la validez de secuentes.

Involutivas

En [52], Routley y Meyer desarrollaron una semántica ternaria para la Lógica $\mathcal{IMTL}$. La mayor diferencia entre esta semántica y la desarrollada en la sección anterior para $\mathcal{MTL}$ es la necesidad de introducir una operación a los marcos ternarios para representar la negación. A su vez ellos introducen los sitemas deductivos $\mathcal{CI}$ y $\mathcal{ICI}$ probando que este último es deductivamente equivalente a $\mathcal{IMTL}$.

Los sitemas deductivos $\mathcal{CI}$ y $\mathcal{ICI}$ se encuentran se encuentran definidos en el lenguaje $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$, para la prueba de la equivalencia entre $\mathcal{ICI}$ y $\mathcal{IMTL}$ se hacen las usuales definiciones

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &=_{def} \neg(\psi \to \neg\varphi) \text{ y} \\ \bot &=_{def} \neg(\varphi \to \varphi). \end{aligned}$$

Como nuestro objetivo es simplemente comparar las semánticas, no describiremos estos sistemas deductivos ni veremos la equivalencia entre $\mathcal{ICI}$ y $\mathcal{IMTL}$, simplemente adaptaremos las semántica desarrollada para $\mathcal{ICI}$ a $\mathcal{IMTL}$ y veremos como se relaciona esta con la desarrollada en esta tesis.

Recordemos algunas definiciones. Estas definiciones están escritas siguiendo las notaciones de esta tesis y por lo tanto distintas pero equivalentes a las del artículo original.

Definición 6.35 *Un ICI-modelo es un cuadruple $\langle K, R, ^*, \vDash\rangle$ donde K es un conjunto no vacio, R es una relación ternaria en K y * es una operación en K que satisfacen las siguientes condiciones*

1. $\forall a \in K, \exists x \in K,\ (x,a,a) \in R$,
2. $\forall a,b,c,d \in K,\ (a,b,c,d) \in R^2 \Rightarrow (a,c,d) \in R$,
3. $\forall a,b,c,d \in K,\ (a,b,c,d) \in R^2 \Rightarrow (a,c,b,d) \in R \circ R'$,
4. $R = R'$,
5. $\forall a,b,c,d,e \in K\,(a,b,c),(a,d,e) \in R \Rightarrow \exists x \in K,\ (x,b,e) \in R\ o\ (x,d,c) \in R$,
6. $\forall a,b,c \in K,\ (a,b,c) \in R \Rightarrow (a,c^*,b^*) \in R$.
7. $\forall a \in K,\ \exists x \in K,\ (x,a^{**},a) \in R$.

$Y \vDash$ es una relación entre elementos de K y formulas que satisface las siguientes condiciones para todas las fórmulas φ y elementeos $a,b \in K$:

1. $a \vDash \psi$ *&* $\exists x,\ (x,a,b) \in R \Rightarrow b \vDash \psi$,
2. $a \vDash \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $a \vDash \varphi$ *y* $a \vDash \psi$.
3. $a \vDash \varphi \vee \psi$ *si y sólo si* $a \vDash \varphi$ *o* $a \vDash \psi$.
4. $a \vDash \varphi \rightarrow \psi$ *si y sólo si para cada* $b,c \in K$ *tal que* $b \vDash \varphi$ *y* $(a,b,c) \in R$ *, entonces* $c \vDash \psi$.
5. $a \vDash \varphi \circ \psi$ *si y sólo si existen* $b,c \in K$ *tales que* $b \vDash \varphi$ *y* $c \vDash \psi$ *y* $(b,c,a) \in R$.
6. $a \vDash \top$ *y* $a \nvDash \bot$ *para cada* $a \in K$.

Una fórmula φ es válida en un ICI-modelo si y sólo si $a \vDash \varphi$ para cada $a \in K$.
En [52], definen en cada ICI-modelo $\langle K, R, ^*, \vDash\rangle$ una relación $\preceq$ como sigue

$$a \preceq b \text{ si y sólo si } \exists x \in K, (x,a,b) \in R.$$

Del incisos 1 se deduce que $\preceq$ es reflexiva y de los incisos 3 y 4 se puede probar que $\preceq$ es transitiva.

Con esta nueva definición varios incisos de la definición anterior pueden ser reescritos, y es asi como en realidad los presentan en [52]. En particular el inciso 7 indica que $a^{**} \preceq a$. En [52] también se pide como condición que $a \preceq a^{**}$ pero esto se puede deducir como sigue. Dado

$a \in K$ por 1, tenemos que existe $x \in K$, $(x, a, a) \in R$. Por 4 y 6 concluimos que (x^{**}, a, a^{**}). Luego de la definción de $\preceq$ concluimos que $a \preceq a^{**}$.

El inciso 6 implica que si $a \preceq b$ entonces $b^* \preceq a^*$. A su vez, observemos que

$$a \vDash \varphi \to \bot \text{ si y sólo si } a^* \nvDash \varphi$$

Supongamos primero que $a \vDash \varphi \to \bot$. Sabemos que existe $x \in K$ tal que $(x, a, a) \in R$, luego por 4 y 6, $(a, a^*, x^*) \in R$. Por lo tanto $a^* \nvDash \varphi$, ya que si fuese así tendríamos $x^* \vDash \bot$ lo cual contradice el inciso 6. Para la recíproca supongamos supongamos que $a \nvDash \varphi \to \bot$ entonces existe $b \vDash \varphi$ y $c \in K$ tales que $(a, b, c) \in R$. Luego $(b, c^*, a^*) \in R$, entonces $(c^*, b, a^*) \in R$ y por inciso 1, tenemos que $a^* \vDash \varphi$, lo cual prueba la observación.

Nos detuvimos en esto dado que esta es la condición dada en [52] para la la negación en lugar de la condición 6 que aquí pusimos para el símbolo de constante $\bot$.

Dado un ICI modelo $\langle K, R, ^*, \vDash \rangle$, como $\preceq$ es un preorden definamos una relación de equivalencia por

$$a \approx b \text{ si y sólo si } a \preceq b \text{ y } b \preceq a.$$

un FI-marco $\mathcal{F} = \langle F, \leq, R', T' \rangle$ donde Indice

$$F = K/\approx = \{[a]_\approx : a \in K\}$$
$$([a]_\approx, [b]_\approx, [c]_\approx) \in R' = T' \text{ si y sólo si } (a, b, c) \in R.$$

Es facil probar que $\mathcal{F}$ es un MTL-marco y que la función $f : F \to F$ dada por

$$f([a]_\approx) = [a^*]_\approx$$

esta bien definida y es una función decreciente en F tal que f^2 es la identidad en F.

A su vez si definimos $V : Fm \to \mathcal{F}$ por

$$V(\varphi) = \{[a]_\approx : a \vDash \varphi\}$$

que claro que V es una valuación en $\mathcal{F}$ que cumple que

$$V(\varphi \to \bot) = F \setminus f(V(\varphi))$$

y que una fórmula φ es válida en $\langle K, R, ^*, \vDash \rangle$ si y sólo si $\langle \mathcal{F}, V \rangle \models \varphi$.

Al igual que para el caso de $\mathcal{MTL}$ en [44], en [52] los autres consideran a la lógica como un conjunto de teoremas, por ello es que nos hemos restringido a hacer la compararción sólo en el caso de la validez de fórmulas.

Es importante remarcar que aunque hemos obtenido una dualidad para IMTL no hemos podido aún probar que esta clase de álgebras sea canónica, y conjeturamos que para poder dar una semántica relacional basandonos en esta dualidad será necesario introducir una función involutiva y decreciente como la * de la semántica antes explicada. Por esto consideramos que sería más interesante observar como modificar la semántica dada por Roblez y Méndez para aplicarla a $\mathcal{S}$ (IMTL), pero esto ya escapa a los objetivos de esta tesis y quedará para un trabajo futuro.

Índice alfabético

Álgebra, 10
  absolutamente libre, 10
  Basic, 50
  Basic Logic, 49
  cociente, 11
  de Chang, 50
  de fórmulas, 10
  de Gödel, 118
  de Heyting, 50
  de Lindembaum-Tarski, 78
  de Ockham, 34
  de términos, 10
  Involutive Monoidal T-norm based Logic , 49
  Monoidal T-norm based Logic, 49
  multi-, 9
  multi-tipada, 9
  Multiple Valued, 49
  Producto, 118
  producto
    directo, 11
    subdirecto, 12
  relevante, 68
  simple, 11
  sub, 11
  subdirectamente irreducible, 12
  trivial, 10
  weakly Heyting, 49

Abierto, 6
Anti-cadena, 4
Aridad, 9

Cadena, 4
Categoría, 7
  algebraica, 10
  dual, 8
  dualmente equivalentes, 8
  equivalentes, 8
  pequeña, 7
  subcategoría, 8
    plena, 8
Cerrado, 6
Clausura, 6
Compacto
  conjunto, 7
  elemento, 103
  retículo extensión, 103
Compatibilidad, 11
Congruencia, 11
  de Leibniz, 77
  de Tarski, 78
  propiedad de, 78
Conjunción, 79
Conjunto
  creciente, 4
  de partes, 2
  decreciente, 4
  g-cerrado, 36
  g-hereditario, 36
  numerable, 3
  R_f-cerrado, 24
  R-saturado, 32
  Unitario, 3
Continua
  función, 7
Cota
  inferior, 4
  superior, 4
Creciente
  conjunto, 4
  función, 4
  función estrictamente, 4
  principal, 4

Decreciente
  conjunto, 4

función, 4
principal, 4
DLF-álgebra, 46
DLFI-álgebra, 46
DLI-álgebra, 45

Ecuación, 11
Ecuacional
clase, 11
Elemento
abierto, 104
cerrado, 104
Espacio
¬-, 33
de Ockham, 35
de Prestley I-tipado con O-relaciones, 17
de Priestley, 12
J-, 31
relevante, 68
topológico ordenado, 12
Topologico, 6
Extensión canónica
de un álgebra, 104
de un retículo, 103
de un sistema deductivo, 144
dual de un álgebra, 104

F-marco, 83
F-modelo, 83
F-morfismo, 89
f-morfismo, 53
Fórmula
válida, 84
Fórmulas, 10
FI-marco, 83
FI-modelo, 83
FI-morfismo, 89
fi-morfismo, 53
Filtro, 5
de semiretículo, 80
primo, 5
Teorema del, 6
principal, 5
Flecha
en una categoría, 7
epi, 8
iso, 8
mono, 8
Funtor, 8

Gentzen
regla de, 77

Hausdorff, 7
Homeomorfismo, 7
Homomofismo
multi-, 9
Homomorfismo, 10
epimorfismo, 10
imagen, 10
isomorfismo, 10
monomorfismo, 10

I-marco, 83
I-modelo, 83
I-morfismo, 89
i-morfismo, 53
Ideal, 5
primo, 5
principal, 5
Infimo, 4
Interior, 6
Interpretación, 11
Irreducible
infimo completamente, 103
supremo completamente, 103
Isomorfismo natural, 8

Lógica afirmativa, 81
Lenguaje
algebraico, 10

Marco
de Kripke, 149
Marco canónico, 144
Marco ternario, 83
Matriz, 77
generalizada, 78
modelo, 78
modelo pleno, 78
reducida, 78
modelo, 77
reducida, 77
Maximal, 4
Minimal, 4

Modelo
de Kripke, 149
Modelo canónico, 144
Morfismo
Entre espacios de Priestley multi-tipados, 17
Multi-tipo algebraico, 9

O-relación, 17
Objeto
en una categoría, 7
Operador
de Leibniz, 77
suave, 104
Orden
acotado, 4
anti-cadena, 4
cadena, 4
conjunto parcialmente ordenado,, 4

RCID-retículo, 49
RCI-retículo, 49
Regla de Gentzen
globalmente válida, 84
localmente válida, 84
Relación de Frege, 78
Retículo, 5
algebraico, 103
Booleano, 6
completo, 5
con negación, 33
distributivo, 6
con fusión, 46
con fusión e implicación, 46
con implicación, 45
con operadores, 16
doblemente algebraico, 103
extensión, 103
canónica, 103
compacto, 103
completación, 103
separante, 103
implicativo, 71
multi-, 9
multi-retículo distributivo, 9
con operadores, 16
residuado conmutativo integral acotado, 49
Retículo
subresiduado, 50
Reticulo
distibutivo
J-, 31

Secuente, 77
globalmente válido, 84
localmente válido, 84
Semiretículo
filtro de , 80
sistema deductivo basado en, 80
Semiretículos
clase de, 79
Sistema deductivo
algebrizable, 79
autoextensional, 78
basado en semiretículos, 80
conjunción, 79
expansión, 77
conservativa, 77
extension, 77
finitario, 76
Fregeano, 78
plenamente autoextensional, 78
plenamente Fregeano, 79
protoalgebraico, 79
Submarco
F-, 91
FI-, 91
I-, 91
Submodelo
FI-, 91
Supremo, 4
Supremo hemimorfismo, 16
Supremo homorfismo, 31
Sustitución, 76

T-marco, 83
Términos, 10
Teoría
prima, 144
Tipo
algebraico, 10
Topología, 6
base, 7
discreta, 6

indiscreta, 7
más fina, 7
subbase, 7
Transformación natural, 8

Universo
de un álgebra, 10

Valuación, 83
Variables, 10, 76
Variedad, 11

WH-álgebra, 49

Indice de Figuras

Figura 1: Ejemplo álgebra de Ockham 40

Figura 2: Ejemplo retículo de congruencias 44

Figura 3: Retículo del álgebra de Chang 51

Figura 4: Diagrama de operadores 93

Figura 5: Extensión canónica del álgebra de Chang 106

Figura 6: Ejemplo extensión canónica 115

Figura 7: Extensión canónica del intervalo $[0, 1]$ 120

Figura 8: Diagrama de canonicidad de las subvariedades de BL 124

Indice de Símbolos

$\mathcal{P}(X)$, 2
$f \restriction Z$, 3
$\mathbb{N}$,
$\mathbb{Z}$,
$\mathbb{Q}$,
$\mathbb{R}$,
$\mathbb{Z}^+$,
$\mathbb{Z}^-$,
$\biguplus$,
θ,
$[x]_\theta$,
X/θ,
X^n,
$X^{<\infty}$,
$R(x)$,
$R^{-1}(x)$,
$R(U_1,\ldots,U_n)$,
$R(x_1,\ldots,x_n)$,
R^{-1},
$S \circ T$,
T',
S^2,
$S(a,V)$,
$\leq$, 4
$\langle X,\leq\rangle^1$,
$\langle X,\leq\rangle^{-1}$,
$\mathcal{P}_c(X)$,
$\mathcal{P}_d(X)$,
$[Y)$,
$(Y]$,
$[x)$,
$(x]$,
$\vee$,
$\wedge$,
$\boldsymbol{L}^1$
$\boldsymbol{L}^{-1}$
$Fi(\boldsymbol{L})$, 5
$Id(\boldsymbol{L})$,
$X(\boldsymbol{L})$,
$F(X)$,
$\langle X,\tau\rangle$, 6
$X \setminus F$,
$Cl(Y)$,
$Int(Y)$,
T_2, 7
$\mathfrak{C}$,
$Obj\mathfrak{C}$,
$Fle\mathfrak{C}$,
dom,
cod,
id_x,
$\mathfrak{C}(x,y)$,
$\mathfrak{C}^{op}$, 8
$\mathbf{1}_{\mathfrak{C}}$,
$\langle I,J,ar\rangle$, 9
$ar(f)$,
$f^{\boldsymbol{A}}$,
ar, 10
$\langle J,ar\rangle$,
$Hom(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,
$\mathcal{L}$,
$\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}(X)$,
φ, 11
$Var(\varphi)$,
$\varphi^{\boldsymbol{A}}$,
$\boldsymbol{A}/\theta$,
$Con(\boldsymbol{A})$,
Id_A,
$\mathbb{H}(\mathsf{K})$
$\mathbb{I}(\mathsf{K})$
$\mathbb{S}(\mathsf{K})$

$\mathbb{P}(\mathsf{K})$ 11
$\mathbb{V}(\mathsf{K})$,
$s \approx t$,
$\boldsymbol{A} \models s \approx t$,
$\boldsymbol{A} \models \Sigma$,
π_i, 12
BDL,
PE, 13
$D(\boldsymbol{X})$,
$\mathrm{D}(\boldsymbol{X})$,
$\mathrm{D}(f)$,
$\sigma_{\boldsymbol{L}}$,
$\mathrm{P}(\boldsymbol{L})$,
$\mathrm{P}(h)$,
$\varepsilon_{\boldsymbol{X}}$, 14
$\mathbf{MDLO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$, 16
$\mathbf{MPSO}_{\langle I,J,ar,\Sigma\rangle}$, 18
$\mathrm{X}(-)$
R_f,
P^1,
P^{-1},
$\mathrm{H}(-)$,
f_R,
U^1, 19
U^{-1},
$MaxR_f^{-1}(P)$, 24
$\theta(Y)$,
$\mathcal{C}_{\boldsymbol{J}}$, 25
$Cl_{\mathcal{C}_J}(Y)$,
Y_ω,
$R_{\boldsymbol{M}}$, 27
$\boldsymbol{M}_R$,
j^*, 32
$MaxR(x)$,
$\neg$, 33
$\neg_R$,
$R^*_\neg$, 34
g_R, 36
$g_{\boldsymbol{O}}$,
$\mathbf{P}_{m,n}$, 37
$\mathbf{K}_{p,q}$,
$Con_{m,n}(\boldsymbol{O})$, 39
$Con_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{A})$,
$\mathcal{I}(\theta)$, 40
$Fix_{m,n}(\mathbf{X})$, 41
$G(\mathbf{X})$, 41
$\Omega_{m,n}(\mathbf{X})$,
$\boldsymbol{A}_{\mathcal{F}}$, 47
$\rightarrow_T$, 48
$\circ_R$,
$\mathcal{F}_n$,
$T_{\boldsymbol{A}}$, 50
$R_{\boldsymbol{A}}$,
T^s, 52
$C_c(\mathrm{P}(\boldsymbol{A}))$, 69
$\beta(a)$, 72
P_a,
$S_{\boldsymbol{A}}$, 73
$\mathcal{S}$, 76
$\vdash_{\mathcal{S}}$,
$Th(\mathcal{S})$, 77
$Cn(\Gamma)$,
$Fi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{A})$,
$\Omega_{\boldsymbol{A}}$,
$Alg^*\mathcal{S}$,
$Clo_{\mathcal{C}}$, 78
$\widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C})$,
$Alg\mathcal{S}$
$\mathrm{K}_{\mathcal{S}}$,
$\mathbb{P}s$,
$\Lambda_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{C})$,
$Th^\Gamma(\mathcal{S})$, 79
$\mathcal{C}^F$,
$\mathcal{S}(\mathsf{K})$, 80
$\mathsf{K}^{\mathcal{L}}_{\wedge}$, 81
$\mathcal{S}(\mathsf{V},1)$,
$\models_l$, 84
$\models_g$,
$\prod_U$, 88
$\mathbb{P}_F$, 89
$\mathbb{P}u_F$,
$\mathbb{U}_F$,
V_g, 90
W^g,
$\preccurlyeq$, 91
$\mathbb{H}_F$, 92
$\mathbb{S}_F$,
$Fr_l(\Pi)$,
$Fr_g(\Pi)$,

$Alg_l(\Pi)$, 92
$Alg_g(\Pi)$,
$Seq_l(\Lambda)$,
$Seq_g(\Lambda)$,
$Alg(\Lambda)$,
$Fr(\mathsf{K})$, 93
M^{∞}, 103
J^{∞},
$\boldsymbol{L}^{\sigma}$,
$K(\boldsymbol{L}^{\sigma})$, 104
$O(\boldsymbol{L}^{\sigma})$,
f^{σ},
f^{π},
$\boldsymbol{A}^{\sigma}$, 105
$\boldsymbol{A}^{\pi}$,
$\oplus$,
ŁΠG, 118
S_n^{ω},
G_n, 119
B,
$X_c(\mathcal{S})$, 144
$R_c(\mathcal{S})$,
$T_c(\mathcal{S})$,
$\mathcal{F}_c(\mathcal{S})$,
$V_c(\mathcal{S})$
$\mathcal{MTL}$, 146
$\mathcal{IMTL}$, 147
$s\mathbf{K}_{\sigma}$, 148
$w\mathbf{K}_{\sigma}$,
$\overset{K}{\models}$, 149
$w\mathbf{K}_{\sigma}^{0}$,
$\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$, 151

Bibliografía

[1] M. Ardeshir and W. Ruitenburg. Basic propositional calculus i. *Mathematical Logic Quarterly*, 44:317–343, 1998.

[2] J. Berman. Distributive lattices with an additional unary operation. *Aequationes Mathematicae*, 16:165–171, 1977.

[3] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53. Cambridge University Press, 2001.

[4] W. J. Blok and D. Pigozzi. Algebraizable Logics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 77(396), 1989.

[5] T. S. Blyth. *Lattices and Ordered Algebraic Structures.* Springer-Verlag London Limited, 2005.

[6] T.S. Blyth and J.C. Varlet. *Ockham Algebras.* Oxford University Press, 1994.

[7] F. Bou. Implicación estricta y lógicas subintuicionistas. Master's thesis, Departament de gica i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona, 2001.

[8] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra.* Electronic version, 2000.

[9] L. M. Cabrer. Non canonicity of bl-algebras. *Report on Mathematical Logic (en referato).*

[10] L. M. Cabrer and S. A. Celani. Priestley Dualities for Lattice-Ordered Algebraic Structures, including MTL, IMTL and MV-algebras. *Central European Journal of Mathematics*, 4(4):600–623, 2006.

[11] L.M. Cabrer and S. A. Celani. Some remarks on ockham congruences. *Actas del VIII Congreso Dr. Antonio Monteiro*, pages 25–32, 2005.

[12] S. A. Celani. Distributive Lattices with a Negation Operator. *Mathematical Logic Quarterly*, 45(2):208–218, 1999.

[13] S. A. Celani. Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 28:999–1010, 2004.

[14] S. A. Celani and R. Jansana. Bounded distributive lattices with strict implication. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 24:999–1010, 2004.

[15] S.A. Celani and R. Jansana. A closer look at some subintuitionistic logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 42(4):225–255, 2001.

[16] R. Cignoli. Quantifiers on distributive lattices. *Discrete Mathematics*, 96:183–197, 1991.

[17] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Kluwer Ac. Publ., 2000.

[18] R. Cignoli, S. Lafalce, and A. Petrovich. Remarks on priestley duality for distributive lattices. *Order*, 8:299–315, 1991.

[19] R. Cignoli and A. Torrens. An algebraic analysis of product logic. *Multiple valued Logic*, 5:45–65, 2000.

[20] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to Lattices an Order*. Cambrige University Press, 1990.

[21] A. DiÑola, F. Esteva, P. Garcia, L. Godo, and S. Sessa. Subvarieties of BL-algebras generated by single-component chains. *Archive for Mathematical Logic*, 41:673–685, 2002.

[22] R. Dwinger and Balbes P. *Distributive Latiices*. University of Missoury Press, 1974.

[23] G. Epstein and A. Horn. Logics which are characterized by subresiduated lattices. *Zeitschrift fur Mathematiche Logik und Grundlagen der Mathematik*, 22:199–210, 1976.

[24] F. Esteva and L. Godo. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124:271–288, 2001.

[25] J. M. Font and R. Jansana. *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Lecture Notes in Logic 7. Springer-Verlag Berlin, 1996.

[26] J. M. Font, R. Jansana, and Pigozzi. A Survey of Abstract Algebraic Logic. *Studia Logica*, 74:1397, 2003.

[27] J.M. Font, À.J. Gil, A. Torrens, and V. Verdú. On the infinite-valued *l*ukasiewicz logic that preserves degrees of truth. *Archive for Mathematical Logic*, 45:839–868, 2006.

[28] N. Galatos, P Jipsen, T. Kowalski, and H. Ono. *Residuated lattices : an algebraic glimpse at substructural logics*. Elsevier, 2007.

[29] M. Gehrke and B. Jónsson. Bounded distributive lattices with operators. *Mathematica Japonica*, 40(2):207–215, 1994.

[30] M. Gehrke and B. Jónsson. Bounded distributive lattice expansions. *Mathematica Scandinavica*, 94:13–45, 2004.

[31] M. Gehrke and H.A. Priestley. Canonical extensions of double quasioperator algebras: An algebraic perspective on duality for certain algebras with binary operations. *Preprint*.

[32] M. Gehrke and H.A. Priestley. Non-canonicity of MV-algebras. *Houston Journal of Mathematics*, 28(3):449–455, 2002.

[33] P. Hájek. Basic fuzzy logic and bl algebras. *Soft Computing*, 2(3):124–128, 1998.

[34] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of *Trends in Logic - Studia Logica Library*. Kluwer, 1998.

[35] J.B. Hart, L. Rafter, and C. Tsinakis. The structure of commutative residuated lattices. *International Journal of Algebra and Computation*, 12(4):509–524, 2002.

[36] R. Jansana. Selfextensional logics with a conjuntion. *Studia Logica*, 84:63–104, 2006.

[37] P. Jipsen and C. Tsinakis. A survey of residuated lattices. In *Ordered algebraic structures*, volume 7 of *Dev. Math.*, pages 19–56. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[38] B. Jónsson and A. Tarski. Boolean Algebras with Operators I. *American Journal of Mathematics*, 73:891–939, 1951.

[39] B. Jónsson and A. Tarski. Boolean Algebras with operators II. *American Journal of Mathematics*, 74:127–162, 1952.

[40] Y. Komori. Super-łukasiewics propositional logics. *Nagoya Mathematical Journal*, 84:119–133, 1981.

[41] N. G. Martínez. A topological duality for some lattice ordered algebraic structures including l-groups. *Algebra Universalis*, 31:516–541, 1994.

[42] N. G. Martínez. A simplified duality for implicative lattices and -groups. *Studia Logica*, 56(1/2):185–204, 1996.

[43] N.G. Martinez and H.A. Priestley. On priestley spaces of lattice-ordered algebraic structures. *Order*, 15:297–323, 1998.

[44] F. Montagna and H. Ono. Kripke semantics, undecidability and standard completnes for esteva and godo's logic mtl∀. *Studia Logica*, 71:227–245, 2002.

[45] H. Ono. Substructural logics and resiuated lattices. *Trends in Logic*, 20:177–212, 2003.

[46] F. Paoli. *Substructural Logic: A Primer*. Kluwer, Dordrecht., 2002.

[47] A. Petrovich. Distributive lattices with an operator. *Studia Logica*, 56:205–224, 1996.

[48] H. A. Priestley. Representation of Distributive Lattices by means of Ordered Stone Spaces. *Bulletin of London Mathematical Society*, 2:186–190, 1970.

[49] H. A. Priestley. Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. *Procedings of London Mathematical Society*, 24(3):507–530, 1972.

[50] A. Pynko. Definitional equivalence and algebraizability of generalized logical systems. *Annañs of Pure and Applied Logic*, 98:1–68, 1999.

[51] G. Restall. Subintuitionistic logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35(1):116–129, 1994.

[52] G. Robles and J. M. Méndes. Relational Ternary Semantics for a Logic Equvalent to Involutive Monoidal T-Norm Based Logic IMTL. *Bulletin of the Section of Logic*, 34(2):1–16, 2005.

[53] P. J. V. Rodrigues and H. J. Silva. Ockham congruences whose quotient algebras are boolean. *Communications in Algebra*, 31(11):5391–5404, 2003.

[54] V. Sofronie-Stokkermans. Duality and Canonical Extensions of Bounded Distributive Lattices with Operators, and Applications to the Semantics of Non-Classical Logics I. *Studia Logica*, 64:93–132, 2000.

[55] V. Sofronie-Stokkermans. Duality and Canonical Extensions of Bounded Distributive Lattices with Operators, and Applications to the Semantics of Non-Classical Logics II. *Studia Logica*, 64:151–172, 2000.

[56] V. Sofronie-Stokkermans. Resolution-based decision procedures for the universal theory of some classes of distributive lattices with operators. *Journal of Symbolic Computation*, 36:891–924, 2003.

[57] A. Trybulec. Many sorted algebras. *Journal of Formalized Mathematics*, 6:1–6, 2003.

[58] A. Urquhart. Distributive Lattices with a Dual Homomorphic Operation. *Studia Logica*, 39:201–209, 1979.

[59] A. Urquhart. Duality for Algebras of Relevant Logics. *Studia Logica*, 56:263–276, 1996.

[60] H. Wansing. Displaying as temporalizing: Sequent systems for subintuitionistic logics. *Collection: Logic, Language and Computation, Appl. Log. Ser.*, 5:159–178, 1997.