OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE GEOFÍSICA – Tomo IX, N° 1 y N° 2

MODÈLES DE CARNOT POUR HOMÉOTHERMES

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR EN MÉTÉOROLOGIE

PAR

GEORGES DEDEBANT

LA PLATA

1961

MODÈLES DE CARNOT POUR HOMÉOTHERMES

Resumé

On se propose d'appliquer le deuxième Principe de la Thermodynamique au problème de la sensation thermique. Les deux sources invoquées sont la température interne de l'homéotherme et la température biologique de la Terre. On est amené à distinguer, de part et d'autre de la température de bien être, un côté chaud et un côté froid. Dans les deux cas, l'organisme fonctionne comme machine frigorifique (il dégage de la chaleur).

Par l'intermédiaire de la formule de Boltzmann reliant la probabilité à l'entropie, on calcule la proportion d'individus incommodés, en fonction d'un paramètre d'écart aux conditions de confort. Du côté chaud, les résultats coincident avec le Discomfort index expérimental de C. Thom. Du côté froid, ils sont très vraisemblables.

On analyse ensuite les effets d'humidité et de ventilation, et on étend les résultats à des sujets soumis à la radiation.

Il est donné une application spéculative au confort du voyageur spatial et une autre application au travail utilisable d'une population d'homéothermes et à son activité. On souligne le caractère statistique de la théorie.

Enfin, on conclut à la possibilité de construire un simulacre (mannequin) mesurant la sensation thermique.

MODÉLES DE CARNOT POUR HOMÉOTHERMES

par Georges Dedebant

1. *Préambule.* — Le comportement thermique des homéothermes (animaux de température interne fixe, parmi lesquels l'homme) est un théorie très complexe, qui a préoccupé les Bioclimatologistes et les Ingénieurs d'air conditionné.

D'autre part, on a souvent nié l'applicabilité de la Thermodynamique aux phénoménes de la Vie.

C'est donc avec les prudentes réserves d'usage que nous présentons un modéle de machine thermique susceptible de simuler des processus biologiques. Cependant, ce modèle d'Ingénieur parait contenir une part de réalité.

2. *Sources chaude et froide; thermostats.*—Pour obtenir un *modèle de Carnot,* il nous faut une source chaude et une source froide, et des thermostats avec lesquels ces sources échangent de la chaleur.

La source chaude est indiquée sans hésitation par la température de l'homéotherme, soit pour l'homme:

$$\Theta_1 = 273 + 37 = 310 \ {}^{\circ}\mathrm{K}.$$

Quant à la source froide (bien entendu *virtuelle*), nous suggérons de la concevoir comme la "*Température biologique de la Terre*", selon la conception de D. Brazol, [1] qui est définie par les températures sèche et humide:

$$T = 273 + 15 = 288; \quad T' = 273 + 13 = 286.$$

En bref, l'idée est la suivante:

"L'espèce humaine étant adaptée à sa planète, elle ne doit pas avoir besoin de défendre son homéothermie, dans l'état le plus probable de l'habitat terrestre"

Même chose d'ailleurs pour tout homéotherme terrestre.

Quant aux thermostats (pour des sujets abrités de la radiation et convenablement ventilés), il s'en présente très naturellement deux:

l'atmosphère sèche (température du thermométre sec), avec laquelle nous échangeons de la chaleur par conduction et convection;

et *l'atmosphère humide* (température du thermométre mouillé), avec laquelle nous échangeons de la chaleur par évaporation et transpiration.

3. *Expression des quantités de chaleur.* — Formons l'expression des quantités de chaleur *dégagées* par une source Θ dans les thermostats T et T' Elles sont proportionnelles à $(\Theta - T)$ et $(\Theta - T')$. Il y a lieu de leur attribuer le même coefficient de proportionnalité k, car la chaleur dégagée par l'évaporation:

$$L\,(W_\Theta - W')$$

---

[1] D. Brazol. Escala bioclimática universal. Colección aeronáutica argentina. Año 1955. Bs. As.

est précisément égale à la chaleur dégagée par convection:

$$C_p(\Theta - T').$$

C'est l'application du principe de l'équivalence, dont le psychromètre tire d'ailleurs sa justification.

Pour mémoire:

L = chaleur latente de vaporisation.
W_Θ = rapport de mélange actuel, à la température Θ.
W' = rapport de mélange saturé, à la température T'
C_p = chaleur spécifique de l'air, à pression constante.

On aura donc:

$$q = 2k(\Theta - X)$$

$$k > 0; \qquad X = \frac{T + T'}{2}$$

Par conséquent, pour les deux sources, nous avons:

$$\begin{cases} \overset{\nearrow}{q_0} = 2k_0(\Theta_0 - X) \\ \overset{\nearrow}{q_1} = 2k_1(\Theta_1 - X) \end{cases}$$

4. *Température de confort et température létale.* — La condition de fonctionnement d'une machine thermique entre les sources Θ et Θ_1, est que la machine *emprunte de la neg-entropie* à l'extérieur (c'est là une formulation du deuxième Principe). Elle se traduit par:

$$\frac{q_0}{\Theta_0} + \frac{q_1}{\Theta_1} \geq 0.$$

L'égalité correspond *au rendement de Carnot.*

Posant $\lambda = \dfrac{k_1}{k_0}$, elle s'écrit:

$$1 + \lambda - \frac{X}{\Theta_1}\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_0} + \lambda\right) \geq 0.$$

D'où:

$$X \leq \Theta_1 \frac{1 + \lambda}{\dfrac{\Theta_1}{\Theta_0} + \lambda} = X_M.$$

X_M est une fonction croissante de λ, qui prend les valeurs extrêmes:

$$\Theta_0 \text{ (pour } \lambda = 0) \text{ et } \Theta_1 \text{ (pour } \lambda = \infty).$$

Θ_1 est la température *létale,* au delà de laquelle l'organisme ne peut subsister à la longue. Cette limite apparait comme une *impossibilité thermodynamique* (deuxième Principe), aussi exigeante que l'interdiction du mouve-ment perpétuel de deuxième espèce, L'homéotherme ne peut la franchir qu'en abandonnant l'homéothermie (fièvre).

De fait, selon Brazol, l'état létal se produirait pour:

$$t' > 35\ {}^{\circ}\mathrm{C} \qquad (t' = T' - 273),$$

ce qui est en accord avec notre détermination, puisque:

$$37\ {}^{\circ}\mathrm{C} = \frac{t + t'}{2} \geq t' > 35\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

Quant à la température Θ_0, elle correspond (puisqu'alors $\lambda = 0$), à la situation dans laquelle la source chaude ne perdant pas de chaleur, le sujet maintient *sans effort* son homéothermie.

C'est donc la température du *maximum de bien être.*

5. *Cas du froid.* — Si $X \leq \Theta_0$, c'est X qui devient la source froide et Θ_0, le thermostat. On a maintenant une source froide dont la température dépend des circonstances atmosphériques actuelles.

Le deuxième Principe donne la condition:

$$\frac{X - \Theta_0}{X} + \lambda \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1} \geq 0.$$

D'où:

$$X \leq \frac{\Theta_0}{1 + \lambda \dfrac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1}}$$

Les limites de X sont: Θ_0 (pour $\lambda = 0$) et le *zéro absolu* $X = 0$ (pour $\lambda = \infty$).

Du côté du froid, il n'existe donc pas de barrière thermodynamique; mais bien entendu il peut y en avoir de nature physico-chimique et biochimique (congélation des liquides; liquéfaction des gaz; ralentissement des réactions chimiques; destruction des cellules, etc.).

La conclusion reste cependant que l'homéotherme est moins limité vers les basses températures que vers les hautes. Effectivement, l'homme a supporté — 80 °C* (pôles du froid), soit 94° en dessous des conditions optima, tandis que du côté du chaud, il n'a pas dépassé 35 °C (moyenne des températures sèche et humide), soit seulement 21° au dessus du bien être.

6. *Modèle de Carnot.* — Dorénavant, nous supposerons que la machine fonctionne avec son rendement théorique maximum:

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1}$$

On a alors la relation suivante entre λ et X:

$$\lambda = \frac{\Theta_1}{\Theta_0} \frac{X - \Theta_0}{\Theta_1 - X}.$$

* À ces très basses températures, les températures sèche et humide sont pratiquement égales, de sorte que $X \approx T$.

Le travail *absorbé* par la machine est:

$$T = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1} q_1 = 2k_0 \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0} (X - \Theta_0) \geq 0.$$

Elle fonctionne donc comme une machine *frigorifique*, rejetant dans l'ambiance ce travail sous forme de chaleur. Pour le corps humain, comme pour les nations, l'exportation est une nécessité vitale.

Le maximum de T (pour $X = \Theta_1$):

$$T_M = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - \Theta_0)^2}{\Theta_0}$$

représente la capacité potentielle maximum de réfrigération du sujet. C'est vraisemblablement une caractéristique physiologique de l'homéotherme, et k_0 en est par conséquent une autre.

La dimension de k_0 est celle d'une *entropie*; cette constante s'introduit dans notre problème biologique, à la manière de la constante k de Boltzmann, en thermodynamique.

Quant à $\lambda = \dfrac{k_1}{k_0}$, il se présente comme une variable d'évolution adimensionnelle, qui mesure l'écart d'un état dérangé à l'équilibre *stable* ($\lambda = 0$). Il est en effet naturel de considérer l'état d'adaptation aux conditions moyennes de l'habitat Terre ($X = \Theta_0$), comme un état *d'équilibre stable* pour l'homéotherme, vu que son espèce s'y maintient.

7. *Entropie de l'état dérangé.* — En conséquence, la forme la plus simple que puisse revêtir l'entropie de l'état dérangé est:

$$S = S_0 - a\lambda^2,$$

a étant une constante de la dimension d'une entropie.

Or, nous n'avons dans notre problème qu'une seule constante de cette nature: c'est k_0. Sans autre raison déterminante, nous prendrons:

$$a = k_0$$

8. *Probabilité de l'état dérangé.* — Cette probabilité peut être mesurée par la proportion des sujets *appartenant* à l'état dérangé, c'est à dire *non incommodés* par la chaleur, parmi une population N. C'est donc:

$$P = \frac{N - n}{N}$$

n = nombre de sujets incommodés.

Par analogie à la formule de Boltzmann, reliant l'entropie à la probabilité, on peut écrire:

$$S - S_0 = b \log P$$

Sans d'autre raison que celle donnée tout à l'heure, nous prendrons:

$$b = k_0$$

On obtient ainsi la formule:

$$\boxed{n = N\,(1 - e^{-\lambda^2})}$$

Cette formule a la grande nouveauté de relier par un raisonnement *a priori*, un phénomène biologique (la sensation de chaleur) à des mesures physiques (les températures). On notera qu'elle est différente de la loi de Weber-Fechner: "la sensation $\left(\frac{n}{N}\right)$ croit comme le logarithme de l'excitation (λ)" Elle a l'avantage de conduire à une *saturation* de la sensation, comme cela se produirait dans un modèle électronique du système nerveux.

9. *Echelle biothermodynamique de température.* — Nous arrivons finalement, sans introduire *aucune* constante arbitraire, et par le seul moyen des températures de l'homéotherme et de son habitat, à la formule pratique:

$$n = 100\left[1 - \exp - \left(\frac{\Theta_1}{287}\,\frac{x - 14}{\theta_1 - x}\right)^2\right]$$

$x = \dfrac{t + t'}{2}$ = moyenne (°C) des thermomètres sec et mouillé. $\theta_1 = \Theta_1 - 273$ = température (°C) fixe de l'homéotherme.

Pour l'homme:

$$\left(\frac{\Theta_1}{287}\right)^2 = 1{,}17.$$

Or, cette formule représente *très bien* les résultats expérimentaux obtenus par C. Thom aux U S (Discomfort index); qu'on en juge par le tableau suivant:

Tableau I

Incommodité causée par la chaleur

x	n théorique	n (d'après C. Thom)
14	0	
15	0,2 %	de 0 à 10 %
20	13 %	de 10 à 50 %
24	50 %	de 50 à 100 %
28	99 %	100 %
31,5	99,999 %	accidents dangereux
37	100 %	

Remarques

1. Si le rendement est inférieur à celui de Carnot, λ est plus grand pour le même X, et l'incommodité est plus forte (cas des organismes non adaptés ou déréglés: les enfants, les malades, les vieillards).

2. Plus l'homéotherme a une température interne élevée, plus s'accroit sa capacité de résistance à la chaleur. Ainsi les oiseaux et les insectes sont actifs quand l'homme est incommodé.

10. *Echelle du froid.* — Pour le rendement de Carnot, on a cette fois:

$$\lambda = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_0} \frac{\Theta_0 - X}{X}$$

Le travail absorbé est:

$$J = \frac{\Theta_1 - X}{X} q_1 = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - X)(\Theta_0 - X)}{X} \geq 0.$$

Ainsi, même du côté du froid, la machine *continue à fonctionner en frigorifique*; mais le travail absorbé croit sans limite quand $X \to 0$. On pourrait théoriquement supporter de très grands froids, mais cela coûterait de plus en plus cher.

Répétant le raisonnement déjà fait du côté chaud, on arrive à la formule:

$$n = 100 \left[1 - \exp - \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_0} \frac{\Theta_0 - X}{X} \right)^2 \right]$$

Pour mettre en évidence les résultats, il est éloquent d'etablir une correspondance entre les inconforts de la chaleur et du froid.

Si Y est la température biothermodynamique du côté froid, on a l'équivalence:

$$\lambda = \frac{\Theta_1}{\Theta_0} \frac{X - \Theta_0}{\Theta_1 - X} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_0} \frac{\Theta_0 - Y}{Y},$$

d'où l'on tire la relation *d'involution* (¹):

$$XY - \tau(X + Y) + \tau\Theta_1 = 0$$

avec

$$\tau = \frac{\Theta_0^2}{2\Theta_1 - \Theta_0} = 312$$

A $X = \Theta_0$ correspond $Y = \Theta_0$
et à $X = \Theta_1$ correspond $Y = 0$ (zéro absolu).

Numériquement, la formule s'écrit (pour l'homme):

$$Y = 312 \frac{310 - X}{312 - X} \quad \text{ou encore: } y = 39 \frac{x - 23}{x - 39}$$

(¹) C'est à dire que si $Y = \varphi(X)$, réciproquement $X = \varphi(Y)$. Donc $X = \varphi[\varphi(X)]$.

Elle donne les résultats suivants:

Tableau II

Incommodité produite par le froid

x	14	20	24	28	31,5	37
y	14	6	— 2,5	— 18	— 44	— 273
Inconfort	0 à 10 %	10 à 50 %	50 à 100 %	100 %	dangereux	mort certaine

Cette échelle de froid est, pour le moment, purement théorique. Faisons quelques remarques à son sujet.

D'abord, aux très basses températures (vu la faiblesse des tensions de vapeur), les thermomètres sec et mouillé donnent des températures très voisines, de sorte que y sera pratiquement la température du thermomètre sec. Les accidents dangereux (homologues des coups de chaleur) commenceraient donc à partir de — 44 °C. De tels extrêmes de température n'empêchent pas en effet, la civilisation de se développer (Canada, Russie d'Europe).

Les températures des pôles du froid (— 75 °C) correspondent à 33 °C de chaleur (moyenne du sec et du mouillé), chiffre encore assez éloigné du niveau létal de D. Brazol (> 35 °C) et du nôtre (37 °C). L'homme pourrait possiblement supporter des températures encore plus basses ($\simeq$ 100 °C), à condition bien entendu de surmonter les obstacles qui ne sont pas d'ordre purement thermodynamique.

La résistance au froid s'accroit avec la température de l'homéotherme $\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial\Theta_1} < 0\right)$ En fait, le loup a une température de 39 °C et le canard sauvage, de 42 °C. On cite qu'un chien de traineau a résisté une heure à — 92 °C et quelques instants à — 160 °C.

Il n'est pas exclu d'autre part que, dans les régions très froides où le contenu de vapeur d'eau se réduit à presque rien, le gaz carbonique (CO_2) puisse jouer un rôle dans les échanges entre l'homéotherme et l'atmosphère.

11. *Échelle bio-thermodynamique complète.* — Joignant les résultats obtenus pour le chaud (que l'expérience confirme), à ceux obtenus pour le froid (par extension du modèle), nous pouvons maintenant dresser l'échelle *complète* de la température bio-thermodynamique.

Tableau III

Echelle bio-thermodynamique complète

Temp. $\frac{t+t'}{2}$		Incommodité
— 273	⟶	Mort certaine
		Dangereux
— 44		
		100 %
— 18		
		100 % à 50 %
— 2,5		
		50 % à 10 %
6		
		10 % à 0 %
14	⟶	Bien être ———
20		0 à 10 %
		10 à 50 %
24		
		50 à 100 %
28		
		100 %
31,5		
		Dangereux
37	⟶	Mort certaine

12. *Analyse de l'effet d'humidité.* — La description de la sensation de chaleur (ou de froid) par la seule température sèche, est évidemment incomplète; on peut se rendre compte des limitations de cette description en prenant les deux cas extrêmes:

Air saturé: $x = t = t' = t_h$

Air absolument sec: $W = 0$, et nous désignerons alors par ts la température d'une atmosphère totalement dépourvue de vapeur d'eau, qui donne le même degré d'inconfort (même valeur de λ) qu'une atmosphère saturée.

Nous emploierons pour calculer ts, la formule psychrométrique *théorique* (basée sur le premier Principe):

$$Cp(T - T') = L(W' - W),$$

dans laquelle nous poserons $W = 0$.

Comme:

$$W' = \frac{5}{8}\,\frac{F'}{p - F'}$$

F' = tension de vapeur saturée à T'

p = pression barométrique.

$\frac{5}{8}$ = densité (relative à l'air sec) de la vapeur d'eau.

il vient:

$$F' = \frac{8C_p}{5L} p\left(1 - \frac{F'}{p}\right)(t - t') \approx \frac{8C_p}{5L} p(t - t')$$

Adoptons les valeurs suivantes:

$$C_p \text{ (gaz biatomique)} = \frac{7}{2} R^* = \frac{7}{2} \times 0{,}287 = 1 \text{ joule/gr °C.}$$

$p = 1013$ mb.

$$L = \begin{cases} 2470 \text{ joule/gr °C} & \text{pour } t' > 0 \\ 2835 \quad " & \text{pour } t' < 0 \end{cases}$$

On obtient:

$$\begin{cases} F' = 0{,}66\,(t_s - t') & (t' > 0) \\ F' = 0{,}57\,(t_s - t') & (t' < 0) \end{cases}$$

Comme:

$$t' = 2x - t_s \quad \text{et} \quad x = t_h,$$

les équations de la correspondance

$$t_h \rightleftarrows t_s$$

sont:

$$\begin{cases} F\,(2t_h - t_s) = 1{,}32\,(t_s - t_h) & (t' > 0) \\ F\,(2t_h - t_s) = 1{,}14\,(t_s - t_h) & (t' < 0) \end{cases}$$

Les résultats numériques sont les suivants:

Tableau IV

Inconforts d'une atmosphère saturée et d'une atmosphère complètement sèche

t_h	t_s	Inconfort
		Danger
— 44	— 44,1	
		100 %
— 18	— 17	
		100 % à 50 %
— 2,5	1	
		50 % à 10 %
6	11	
		10 % à 0 %
14	21,5	
		0 à 10 %
20	30	
		10 à 50 %
24	35	
		50 à 100 %
28	41	
		100 %
31,5	46	
		Danger
37	54,5	

* R = Constante des gaz parfaits.

L'humidité accroit donc l'inconfort du côté chaud (ce qui est bien constaté) et le diminue du côté froid (ce qui est parfois discuté).

Pour les hautes températures, la sécheresse atténue notablement l'inconfort; en Tripolitaine on a enregistré le record de 54 °C; à Kasbah Tadla (Maroc) le maximum absolu est 50 °C.

Pour les très basses températures, l'effet d'humidité devient indifférent.

Remarquons que la température létale en atmosphère absolûment sèche est égale aux plus hautes températures du thermomètre sec mesurées sur notre globe (54 °C). Les régions (déserts) dans lesquelles ces extrêmes sont atteints, sont impropres à l'implantation de toute vie civilisée qui ne soit pas artificielle (comme celle des Ingénieurs du pétrole au Sahara). Du temps de la navigation au charbon, les soutiers éprouvaient des températures jusqu'à 60 °C pendant leur travail. Malgré le rythme des repos, ils ne pouvaient poursuivre leur métier que pendant un petit nombre d'années et leur taux de mortalité était très élevé.

13. *Effet de la ventilation.* — Les coefficients psychrométriques théoriques (0,66 et 0,57) ne sont atteints que pour une ventilation optima. Pour le psychromètre de Assmann (ventilation 4 à 5 m/sec), on obtient même des valeurs inférieures: 0,622 et 0,54). Sous abri météorologique, *Angot* admet les coefficients 0,79 et 0,69 (tables françaises). Enfin, dans l'air calme, ils seraient (par extrapolation) 1,4 et 1,1.

De toutes façons:

$$T' \text{ ventilé} < T' \text{ calme}$$

pour une même température sèche T et une même tension de vapeur actuelle f. Les ménagères savent bien que le vent fait sècher le linge à la corde.

L'incommodité dans l'air calme est donc plus forte du côté chaud, plus faible du côté froid (en accord avec la sensation physiologique).

Le tableau ci dessous donne la correspondance: t saturé $\to$ t sec ventilé $\to$ t sec calme.

Tableau V

Influence de l'humidité et de la ventilation

Saturé	Sec ventilé	Sec calme	Inconfort
			Danger
— 44	— 44,1	— 44,05	
— 18	— 17	— 17,5	100 %
— 2,5	1	— 1	100 à 50 %
6	11	8,5	50 à 10 %
14	21,5	18,5	10 à 0 %
20	30	26	0 à 10 %
24	35	32	10 à 50 %
28	41	36,5	50 à 100 %
31,5	46	41	100 %
37	54,5	48,5	Danger

On voit que la température létale totalement sèche est abaissée de 54°,5 (ventilé) à 48°,5 (air calme), et la limite dangereuse de 46° à 41°. Les éventails et les ventilateurs ne sont donc pas tout à fait inutiles, malgré les inconvénients qu'ils présentent pour les voies respiratoires.

Du côté des basses températures, l'effet de ventilation devient insignifiant, ce qui n'est pas d'accord avec la sensation de froid glacial que produit un fort vent.

14. *Effet du vent.* — L'effet de ventilation que nous venons d'analyser se réfère plus à la *turbulence*, qui augmente le coefficient d'échange, qu'au *flux moyen*, qui accroit le débit d'air. Un courant, même laminaire, accroit le paramètre d'écart λ. De cette manière s'expliquerait la sensation de froid glacial que donne un vent fort aux basses températures, et celle de fournaise causée par les vents chauds et secs (siroco, zonda).

15. *Effet de la radiation.* — Soit maintenant un sujet en communication non seulement avec des atmosphères sèche et humide, mais aussi avec un "thermostat de radiation", caractérisé par la température T'' qu'on peut calculer à partir de la loi de Stefan et mesurer par un thermomètre dont le bulbe est placé dans une sphère noircie.

La quantité de chaleur *dégagée* par une source Θ, en communication avec ce thermostat est:

$$q_2 = k(\Theta - T'')$$

(principe de l'équivalence et justification du thermomètre "noir").

Par conséquent, la quantité de chaleur dégagée par cette source vers les thermostats T, T', T'' est:

$$q = 3k(\Theta - Z)$$

où

$$Z = \frac{T + T' + T''}{3} = \frac{2X + T''}{3} \text{ (1)}$$

L'extension de notre modèle au cas ou le sujet est soumis à la radiation, se fera donc en remplaçant la température $X = \dfrac{T + T'}{2}$ par la température Z.

D'où il résulte que la température de confort devient:

$$\Theta_0'' = \Theta_0 + \frac{\Theta_0 - T''}{2}$$

qui sera $\gtrless \Theta_0$ selon que $T'' \lesseqgtr \Theta_0$, et que l'état létal se produira pour:

$$\Theta_1'' = \Theta_1 + \frac{\Theta_1 - T''}{2},$$

qui sera $\gtrless \Theta_1$ selon que $T'' \lesseqgtr \Theta_1$.

---

(1) Cette formule est conforme à une règle empirique de A. MISSENARD, autorité en la matière de l'influence du climat sur l'homme; "La sensation thermique reste la même si l'on élève de 2° la température des parois pour chaque degré que diminue la température de l'air".

Donnons des valeurs expérimentales. A Ezeiza (province de Bs. As., 34° lat. S.), nous avons noté comme extrême, en été, à 12 H. locales, une température de radiation

$$T'' = 54\ ^{\circ}\mathrm{C},$$

indiquée par un thermomètre placé à l'intérieur d'une sphère noircie. A ce moment, par conséquent, la température létale s'était abaissée (pour des sujets soumis au rayonnement) à:

$$37 + \frac{37 - 54}{2} = 28{,}5\ ^{\circ}\mathrm{C},$$

et la limite des accidents dangereux à:

$$31{,}5 + \frac{31{,}5 - 54}{2} = 26\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Heureusement que le maximum de température se produit 2 à 3 heures après le passage du soleil au méridien. Autre circonstance favorable est que les hautes températures noires s'obtiennent par atmosphère sèche. Ainsi pour une atmosphère complétement sèche, les chiffres précédents seraient portés à 42 °C et 38 °C respectivement. Ils donnent cependant une idée de la nocivité (sans tenir compte de l'action U. V.), des bains de soleil au moment de la culmination de l'astre, dans une ambiance déjà inconfortable par elle-même.

Un autre exemple (puisé dans la littérature sur le sujet) est la température de radiation:

$$T'' = 95\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

mesurée par une expédition au Karakorum (5.200 m. d'altitude). La température létale s'abaisse à 8 °C et celle des accidents dangereux à 0 °C. Mais la température de l'atmosphère standard à ces altitudes est — 19 °C. Par suite, un écart de 8 °C — (— 19 °C) = 27 °C doit être considéré comme hautement exceptionnel, aussi exceptionnel que serait une température de 28° (normale) + 27° = 55° en été, dans la province de Bs. Aires.

16. *Application au voyageur spatial.* — Partons du moment où la capsule est placée en orbite. L'air de la cabine, à peu près transparent à la radiation ne pourra (sinon à la longue) s'échauffer ou se refroidir que par convection avec les parois. Quant au voyageur, sa sensation de chaleur sera déterminée par les températures sèche et humide de l'air ambiant, et par la température de radiation des parois. Cette radiation est une fraction de la radiation extérieure, réglable par la proportion des surfaces noircies et réfléchissantes.

Deux cas sont à distinguer selon que la capsule est:

a) plongée dans la radiation solaire.

b) plongée dans l'ombre d'une planète (par exemple: trajet de nuit d'un satellite artificiel).

Cas a). — Géométriquement, la capsule *reçoit* par moitié le rayonnement solaire (dont la température à la distance de la Terre, determinée à partir de la constante solaire est $T'' = 450^{\circ}$ K, et à la distance d unités astronomiques: $T'' = 450\, d^{-1/2}$), et *émet* par moitié vers l'espace (dont la température sera ici estimée à $Tesp = 50^{\circ}$ K).

Désignons par μ, la proportion de surfaces "noircies" * La température de radiation des parois est donnée par:

$$\frac{\mu}{2}\,\frac{(450)^4}{d^2} - T''^4 = T''^4 - \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) T_{esp}^{\,4}$$

* Nous entendons par là que les surfaces "noircies" sont les seules émissives.

D'où:

$$T''^4 = \frac{(450)^4}{d^2}\frac{\mu}{2} + (50)^4\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

Soit T la température sèche initiale de l'air dans la cabine (au moment de la mise en orbite). Si l'on veut maintenir constante cette température, il faut éviter les échanges convectifs avec les parois, et pour cela, il faut:

$$T = T''$$

Ceci détermine la proportion adéquate de surfaces "noircies" On a:

$$\mu = 2\frac{T^4 - (50)^4}{\dfrac{(450)^4}{d^2} - (50)^4} \simeq 2\left(\frac{T}{450}\right)^4 d^2$$

Pour $T = 288^\circ$ K, on a:

$$\mu = 2\left(\frac{4}{5}\right)^8 d^2 = 0{,}34\, d^2$$

Il faudra donc pouvoir varier la proportion des surfaces noircies, selon la distance au soleil.

La distance limite que l'on pourra atteindre, en conservant l'ambience du confort, est:

$$d = \frac{1}{\sqrt{0{,}34}} = 1{,}7,$$

soit 260 millions de Km, ce qui englobe l'orbite de Mars.

Au delà, l'air de la cabine se refroidirait par convection sur les parois et tendrait à prendre leur température de radiation T'' A la distance de Jupiter ($d = 5$), on a:

$$T'' = \frac{450}{\sqrt[4]{2}\,\sqrt{d}} = 168^\circ \text{ K ou } -105\ ^\circ\text{C},$$

ce qui est à peu près à la limite biothermodynamique de l'homme.

Dans l'autre sens, vers le soleil, on calcule qu'il faudrait:

$$\mu = 17\ \% \text{ pour Vénus.}$$
$$\mu = 5\ \% \text{ pour Mercure.}$$

Théoriquement (et contrairement à la légende d'Icare), on pourrait s'approcher très près du soleil avec une capsule *parfaitement* réfléchissante.

Nous n'avons pas besoin de souligner que ces raisonnements sont très spéculatifs. Ils résument cependant, très schématiquement, ce que nos connaissances actuelles permettent d'anticiper, et contiennent probablement une parcelle de réalité.

Cas b). — Rappelons que le satellite fait un tour en 1 H$\frac{1}{2}$ et passe $\frac{1}{2}$ H dans la zone de nuit. Pour cette partie du trajet, il faut substituer la température de la Terre (288° K) à celle de la radiation solaire à la distance de la Terre (450° K). Le calcul précédent donne $\mu = 2$, valeur impossible. Donc la cabine va se refroidir, même si sa surface est *complètement* noircie.

Calculons la sensation de chaleur pour $\mu = 0{,}34$. On a:

$$T'' = \sqrt[4]{0{,}17} \times 288 = 184^\circ \text{ K}$$

$$Z = \frac{2 \times 287 + 184}{3} = 253^\circ \text{ K soit } -20\ ^\circ\text{C}.$$

qui correspond à 100 % d'incommodité. Le voyageur recevrait donc une "douche froide" pendant $\frac{1}{2}$ H toutes les heures. Il conviendrait de relever la température initiale de l'air dans la cabine. Par exemple, avec $t = 22^\circ$; $t' = 18^\circ$, on est encore dans des conditions de confort. On a alors:

$$\mu = 2\left(\frac{295}{450}\right)^4 = 0{,}4$$

$$T'' = \sqrt[4]{0{,}2} \times 295 = 199^\circ \text{ K}$$

$$Z = \frac{2 \times 295 + 199}{3} = 263^\circ \text{ K, soit } -10\ ^\circ\text{C},$$

ce qui nous place dans la zone de 50 à 100 %.

Comme on ne peut pas empêcher le refroidissement de la cabine pendant le trajet de nuit, il s'ensuit qu'à la longue, l'air intérieur se refroidit par convection au contact des parois. Il y aura donc lieu de compenser cette perte soit par réglage de la proportion des surfaces noircies, soit par un réchauffage artificiel emprunté à une source d'énergie propre.

17. *Travail utilisable par l'homéotherme.* — Désignons par A le travail fourni à l'homéotherme par ses combustions internes (résultat de sa respiration et de son alimentation). C'est, pour fixer les idées une certaine fraction de la ration alimentaire exprimée en kilogrammètres, cette fraction étant égale au rendement du moteur humain. L'homéotherme doit distraire de A, le travail T destiné à être rejeté sous forme de chaleur, pour faire fonctionner le frigorifique. La partie utilisable est donc:

$$U = A - J$$

Si $U = 0$, $A = J$ est le métabolisme basal.

Comparons les travaux utilisables du même sujet, placé dans des conditions de confort comparables, du côté chaud et du côté froid (même valeur de λ). On a:

$$J = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - \Theta_0)^2}{\Theta_1} \frac{\lambda}{\dfrac{\Theta_1}{\Theta_0} + \lambda}$$

et

$$J' = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - \Theta_0)^2}{\Theta_1} \frac{\lambda(1 + \lambda)}{\left(1 + \lambda \dfrac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1}\right)^2}$$

D'où:

$$\frac{J'}{J} = \frac{\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_0} + \lambda\right)(1 + \lambda)}{1 + \lambda \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1}}$$

Ce rapport égal à $\frac{\Theta_1}{\Theta_0}$ pour $\lambda = 0$ (confort), croit indéfiniment avec λ. Ainsi:

$$J' > J$$

donc

$$U' < U,$$

ce qui veut dire en termes usuels que, du côté chaud, l'homéotherme est capable de produire *davantage* de travail que du côté froid, pour *des conditions de confort égales.* Ainsi (voir tableau III), un climat chaud entre 14° et 20° est plus favorable que le climat froid symétrique entre 6° et 14° (civilisation méditerranénne; déplacement vers des régions plus chaudes, des industries qui ne dépendent pas de l'emplacement des gisements de charbon et de minerais de fer).

18. *Activité de l'homéotherme.* — On peut la mesurer par le *rendement d'une population,* exprimée par:

$$\rho(x) = \left(1 - \frac{J}{A}\right) e^{-\lambda^2(x)}$$

Le premier facteur est une sorte de rendement théorique de Carnot, et le second est dû à l'imperfection causée par l'inconfort.

Pour que ce rendement soit positif, il faut fournir à la population une alimentation *effective* A (c'est à dire compte tenu des pertes d'assimilation), supérieure à J.

Du côté chaud, avec une alimentation effective donnée A, la population peut travailler pour des températures:

$$X < \Theta_0 + \frac{A}{2k_0} \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_0}$$

Si

$$A > J_M = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - \Theta_0)^2}{\Theta_1},$$

elle est capable de travailler dans toute l'étendue de l'échelle de température.

Du côté froid, il faut satisfaire à la condition:

$$\frac{(\Theta_0 - Y)(\Theta_1 - Y)}{Y} \leq \frac{A}{2k_0},$$

soit:

$$Y^2 - \left(\Theta_0 + \Theta_1 + \frac{A}{2k_0}\right) Y + \Theta_0 \Theta_1 \leq 0.$$

Le premier membre admet une racine inférieure à Θ_0:

$$Y_1 = \frac{1}{2}\left(\Theta_0 + \Theta_1 + \frac{A}{2k_0} - \sqrt{\left(\Theta_0 + \Theta_1 + \frac{A}{2k_0}\right)^2 - 4\,\Theta_0\,\Theta_1}\right)$$

Comme $\frac{dY_1}{dA} < 0$, on pourra maintenir un rendement positif à quelque température, en augmentant l'alimentation dans des proportions convenables.

¿Doit-on voir là l'explication de plus grand besoin en calories (graisses, alcool) des habitants des régions froides?

Mais ce besoin augmente très rapidement quand la température diminue. On peut calculer en effet qu'il triple quand on passe de $y = 0$ °C à $y = -15$ °C, se multiplie par 9 pour $y = -40$ °C et par plus de 80 pour $y = -80$ °C (!).

Comment satisfaire ces besoins sans léser les organes digestifs?

Encore une comparaison entre le côté chaud et le côté froid. Du côté chaud, on assure un rendement positif pour toute l'échelle de chaleur avec l'alimentation:

$$A = 2k_0 \frac{(\Theta_1 - \Theta_0)^2}{\Theta_1} = 1{,}76 \times 2k_0.$$

Or, du côté froid, cette alimentation satisfait seulement aux besoins jusqu'à la température $y = 1$ °C.

19. *Imitation d'un homéotherme.* — On pourrait simuler un homéotherme par un mannequin (réduit à son buste), en matière plastique perforée, pourvu de deux résistances électriques, réglées par thermostat et thermiquement isolées l'une de l'autre. J serait alors la chaleur de Joule dissipée dans les résistances pour maintenir l'homéothermie.

Un tel mannequin pourrait être à volonté, placé dans une soufflerie, exposé à la radiation solaire et artificielle, etc., et se prêterait ainsi à un grand nombre d'expériences difficiles à organiser sur des êtres humains.

Peut être même serait-il possible d'en réduire la taille et d'en faire un instrument de mesure susceptible d'être placé dans une capsule spatiale?

Pour faire ressortir les traits essentiels de ce travail, révélons les intentions qui nous ont guidé. Elles sont de trois sortes:

a) Soutenir que les êtres vivants, aussi bien que la matière inerte, n'échappent pas aux lois de la Physique, à condition que celles-ci aient été dégagées des faits d'observation sous une forme suffisamment générale. Dans l'espèce, il s'agit des deux sacro-saints principes de la Thermodynamique.

b) Montrer qu'un problème physiologique complexe, comme celui de la sensation thermique, ne trouve sa signification scientifique que lorsqu'il s'agit d'une *population et non d'un individu.* En d'autres termes: cette signification est d'ordre statistique.

c) Mettre en relief la généralité du contenu de la Thermodynamique statistique, dont on a vu déjà le formalisme s'appliquer à des problèmes sociaux. Nous voulons parler spécialement de la Théorie de l'Information, dont le point de départ est précisément la relation de Boltzmann entre la probabilité et l'entropie (León Brillomin).

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR EN MÉTÉOROLOGIE

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR EN MÉTÉOROLOGIE

par Georges Dedebant

1. Il semble entendu que les équations aux dérivées partielles ne sont pas la seule méthode possible de la Physique Mathématique. Leur théorie est d'ailleurs très inachevée. Mais, en dehors de leurs propres défaillances, on en fait parfois des applications plus ou moins correctes. Nous citerons quatre exemples qui se rapportent a des thèmes généralement considérés comme classiques en Météorologie théorique.

Nos sources sont:

Handbook of Meteorology - Berry, Bollay, Beers.

Physical and Dynamical Meteorology. D. Brunt.

2. En nous en excusant auprès des lecteurs mathématiciens, remettons briévement en mémoire, l'équation de la chaleur. (1)

C'est l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Traditionnellement, u est la température à l'instant t, au point x, d'une tige matérielle. L'équation s'applique aussi à 3 dimensions quand, pour des raisons de symétrie, les isothermes sont des plans paralléles (mur de Fourier).

Cette équation est d'un type particulier, parce que l'axe des x est une variété caractéristique, c'est à dire un lieu où est impossible ou indéterminé le problème de Cauchy, qui consiste a calculer $u(x, t)$ connaissant

$u(x, o)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, o)$.

Visiblement ici, ces conditions sont surabondantes, puisque si:

$$u(x, o) = \varphi(x),$$

alors, en vertu de l'équation elle-même:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, o) = a^2\varphi''(x)$$

ce qui interdit de choisir $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_o$ arbitrairement.

Nous ne nous occuperons que du cas où le domaine de x est infini, qui est d'ailleurs celui des applications météorologiques que nous avons en vue.

---

(1) J. Bass. Cours de Mathématiques. Masson et Cie. Editeurs.

La méthode de résolution consiste à chercher des solutions élémentaires, par le procédé de séparation des variables, et à les sommer ensuite, pour obtenir la solution générale, utilisant la propriété de l'équation, d'être linéaire. Posant $u = p(x)q(t)$ on trouve la solution élémentaire:

$$e^{-a^2\omega^2 t}\,[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]$$

$$A(\omega) = \text{fonction paire; } B(\omega) = \text{fonction impaire}$$

ou encore:

$$H(\omega)\, e^{i\omega x - a^2\omega^2 t}$$

ce qui amène à écrire la solution générale sous les formes:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\, e^{-a^2\omega^2 t}\, d\omega$$

ou

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{i\omega x - a^2\omega^2 t}\, d\omega$$

Le problème est ainsi ramené à déterminer $A(\omega)$ et $B(\omega)$, ou $H(\omega)$, au moyen de conditions complémentaires appropriées. Il y a deux cas classiques:

A — Condition initiale: $u(x, o) = \varphi(x)$ pour tout x,

B — Conditions aux limites:

$$u(o, t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

Cas A. Si les opérations formelles de calcul, néccesaires, sont permises, $H(\omega)$ se détermine par l'inversion de Fourier:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,\varphi(x)\, dx$$

En portant ensuite cette valeur dans l'expression de la solution générale, on obtient:

$$(A) \qquad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right]\varphi(y)\, dy,$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme condensée:

$$(A_1) \qquad u(x, t) = \overline{\varphi(x + a\sqrt{2t}\, v)}$$

la moyenne (—) étant prise avec la loi des erreurs:

$$1/\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

On démontre que, si $|\varphi(x)|$ est sommable $(-\infty, +\infty)$:

a) L'intégrale (A) est solution de l'équation de la chaleur.

b) En tout point où $\varphi(x)$ est continue, elle tend vers $\varphi(x)$ quand $t \to 0$.

Mais le calcul symbolique de Heaviside [1] permet d'élargir un peu ces conditions et il est autorisé de prendre pour fonction $\varphi(x)$ l'échelon unité $\gamma(x)$, bien qu'il ne soit pas de module sommable. On rappelle aussi que $\gamma(x)$ peut être traité comme une fonction dérivable, sa derivée étant la $\delta(x)$ de Dirac, que l'on peut concevoir comme la limite de la loi des erreurs, quand l'écart type tend vers zéro.

Avec la δ de Dirac pour $t = 0$, la formule (A) devient

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)\, \varphi(y)\, dy = \varphi(x)$$

ce qui montre que (A) satisfait la condition initiale.

Cas B. La détermination de $A(\omega)$ et de $B(\omega)$ se fait de la manière suivante. On pose $s = \omega^2 a^2$. Alors:

$$f(t) = 1/a \int_0^{\infty} 1/\sqrt{s}\, A\, e^{-st}\, ds$$

$$g(t) = 1/a^2 \int_0^{\infty} B e^{-st}\, ds$$

De sorte que $A/a\sqrt{s}$ et B/a^2 sont les originaux des images $f(t)$ et $g(t)$ dans la transformation de Laplace. On est ramené à un problème de calcul symbolique, facilité par les dictionnaires d'images.

3. Venons en aux problèmes météorologiques. Le premier est celui du REFROIDISSEMENT NOCTURNE, traité par D. Brunt.

Cet auteur veut déterminer $u(o, t)$, connaissant le gradient de temperature $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$ (qui dans son calcul est d'ailleurs une constante).

Or, cette condition complémentaire appartient au type B et en conséquence, il faudrait se donner aussi $u(0, t)$; et par malheur c'est précisément l'inconnue qu'on cherche! Ainsi, la solution donnée par Brunt:

$$u = u_0 - \mu\sqrt{t} \qquad (\mu = \text{Cte physique})$$

n'a pas plus de fondement théorique que la solution:

$$u = f(t) \qquad (f = \text{fonction arbitraire}).$$

Montrons le crûment sur le calcul de Brunt.

Référence: "Physical and dynamical Meteorology", by D. Brunt (2nd. ed.) § 89, p. 138 et suivantes.

(Nous ne reproduisons pas la signification physique des symboles).

Données

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{17}$$

$$R_v = \kappa_1 \rho_1 c_1 \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 \tag{18}$$

---

[1] Ou la théorie des distributions de L. SCHWARTZ.

Solution

$$T = T_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R_v}{\rho_1 c \chi_1} \left\{ \sqrt{z_1 t}\, e^{-\frac{z^2}{4\kappa_1 t}} \qquad - z \int_{\frac{z}{2\sqrt{\kappa_1 t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right\} \tag{22}$$

et pour $z = 0$

$$T = T_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R_v}{\rho_1 c_1 \kappa_1} \sqrt{t} \tag{23}$$

Critique

Il est clair que si l'on ajoute à la solution (22), une solution de (17), de gradient nul pour $z = 0$, on obtient encore une solution du problème posé par (17) et (18).

On peut par exemple construire une solution où la loi de refroidissement est exponentielle:

$$T = T_1 + \frac{R_v}{\rho_1 c_1 \kappa_1} z - c e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa_1}}\, z \right)$$

et pour $z = 0$

$$T = T_1 - c e^{-\gamma t}$$

4. La même faute est commise dans le problème de la variation diurne de la température dans l'atmosphère, mais elle est plus instructive.

D. Brunt (loc. cit. 140, p. 229):

"Let the temperature at the ground be given by:

$$T = T_o + A \sin qt \tag{18}$$

the solution of the equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

which has this boundary condition at $z = 0$, *is*:

$$T = T_o - \beta z + A\, e^{-bz}. \sin (qt - bz);\ b^2 = q/2K".$$

En réalité, ce n'est qu'*une* des solutions du problème ainsi posé; les autres s'obtenant en ajoutant la fonction *arbitraire* (impaire en z):

$$h(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega z\, e^{-K\omega^2 t}\, d\omega$$

où $B(\omega)$ est une fonction arbitraire, de module sommable.

Par exemple $h = e^{-qt} \sin \left(\sqrt{\frac{q}{K}}\, z \right)$ ou $\Theta\ (z/2\sqrt{Kt})$.

5. Cependant ce cas mérite un peu plus de considération que le premier. Traitons le problème suivant:

"Chercher les solutions de $\dfrac{\partial T}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ $(0 \leq z \leq \infty)$ qui, por $z = 0$, se reduisent à:

$$T = T_0 + A \sin qt + B \cos qt$$

et qui, en outre, restent bornées quand $z \to \infty$ ≫.

La solution générale peut être cherchée sous la forme

$$T(z, t) = T_0 + A(z) \sin qt + B(z) \cos qt + \phi(z, t),$$

$\phi(z, t)$ étant une solution de l'équation de la chaleur, qui se réduit à 0 pour $z = 0$.

Le problème comporte l'indétermination de cette fonction qui ne pourrait être connue que si l'on se donnait $\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_o$.

L'autre partie de la solution se calcule, en introduisant la forme précédente dans l'équation de la chaleur, ce qui donne:

$$(Aq - KB'') \cos qt - (Bq + KA'') \sin qt = 0.$$

Cela n'est possible que si:

$$(2) \quad \begin{cases} 2b^2 A = B'' \\ 2b^2 B = -A'' \end{cases} \quad \text{en posant } b^2 = q/2K$$

Les solutions de ce système sont parmi celles du système:

$$(3) \quad \begin{cases} A^{(IV)} = -4b^4 A \\ B^{(IV)} = -4b^4 B \end{cases}$$

L'équation caractéristique de ces équations étant:

$$a^4 + 4b^4 = 0$$

il en résulte les solutions:

$$A \text{ ou } B = \exp[\pm (1 \pm i) bz]$$

En ajoutant la condition qu'elles restent finies pour $z = \infty$, on est restreint à:

$$e^{-bz} \begin{cases} \cos bz \\ \sin bz \end{cases}$$

Finalement, on résoud le système (2) par:

$$\begin{cases} A(z) = e^{-bz}(c_1 \sin bz + c_2 \cos bz) \\ B(z) = e^{-bz}(c_2 \sin bz - c_1 \cos bz) \end{cases}$$

Et l'on obtient:

$$u(x, t) = e^{-bz}[A \sin (qt - bz) + B \cos (qt - bz)]$$

Si, d'une façon générale, on cherche la solution qui se réduit à une fonction périodique $f(t)$, de période $2\pi/q$, on aura (en posant $x = z/\sqrt{2K}$):

$$u(x, t) = \sum_{0}^{\infty} e^{-x\sqrt{nq}}[A_n \sin n(qt - bz) + B_n \cos n(qt - bz)]$$

A_n et B_n étant les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$.

Mais la solution complète est:

$$T(x, t) = u(x, t) + \phi(x, t)$$

$\phi(x, t)$ restant une fonction indeterminée.

Si donc on compare l'analyse harmonique de la température à un niveau donné, à l'analyse harmonique au niveau du sol, on fait implicitement l'hypothèse que $\phi(x, t)$ est un élément de nature aléatoire, de valeur probable nulle. On peut le representer par $Z \cdot \phi(x, t)$, Z étant un nombre aléatoire ($\overline{Z} = 0$) et $\phi(x, t)$ une solution de l'équation de la chaleur, nulle pour $x = 0$. En somme, ce terme représenterait les variations de température de l'atmosphère qui ne seraient pas dues a l'influence du sol; et de cette manière peut se justifier la signification physique de la théorie, malgré son vice de forme mathématique.

6. Un manque de rigueur, moins grave, est commis à propos de l'advection d'une masse d'air sur une sur face (plus chaude ou plus humide). Dans ce problème t sera l'abcisse horizontale dans la direction du mouve ment, et x la coordonnée verticale.

Ce problème est traité dans:
Handbook of Meteorology, p. 464 a 467.
Physical and Dynamical Meteorology. D. Brunt. 2nd. Ed. p. 227.

On pose $v = x/a\sqrt{2t}$, et on cherche une solution ayant a priori la forme fonctionnelle $u = f(v)$.

[Le tort et l'ingéniosité du procédé est de préjuger de la forme fonctionnelle de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Cependant, en Mécanique des fluides, il constitue une méthode souvent fructueuse, qui consiste à rechercher les solutions invariantes dans un groupe G, qui laisse également invariante l'équation aux dérivées partielles (recherche des *solutions symétriques* de Garrett Birkhoff). Dans le cas de l'équation de la chaleur, on constate qu'elle est invariante dans le groupe des similitudes: $x' = \sqrt{\alpha x}$; $t' = \alpha t$; or $x/\sqrt{t}$ est un invariant de ce groupe et une solution *symétrique* sera fonction de $x/\sqrt{t}$. Il n'est pas assuré qu'elle se conforme aux conditions complémentaires du problème].

On ramène ainsi l'équation de la chaleur à l'équation differentielle:

$$f'' + vf' = 0$$

dont l'intégrale générale est:

$$u(x, t) = C\Theta(x/a\sqrt{2t}) + C_1$$

ou Θ est la fonction de répartition de la loi des erreurs:

$$\Theta(v) = 2/\sqrt{\pi} \int_{o}^{v} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

qui est égale à 1 pour $v = \infty$

On s'impose ensuite les conditions complémentaires:

$$\text{Pour} \begin{cases} t = 0; \quad u = 0 & (1) \\ x = 0; \quad u = u_0 & (2) \end{cases}$$

qui, a la vue, paraissent surabondantes.

Et l'on donne la solution de Jeffreys [1] comme satisfaisant à l'équation de la chaleur et à ces conditions complementaires. Voici cette solution:

$$u(x, t) = u_0[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})]$$

La solution de Jeffreys ne tend vers *aucune limite*, lorsque $x \to 0$ et $t \to 0$ séparément. Mais non plus les conditions complementaires ne precisent la valeur imposée à $u(0, 0)$, puisqu'elle serait 0 selon (1) et u_0 selon (2). On ne peut dire qu'il y ait contradiction. Cependant on doit constater qu'on aurait la même solution, en posant les conditions:

$$\text{Pour} \begin{cases} t = 0; \quad x > 0; \quad u = 0 & (1') \\ x = 0; \quad t > 0; \quad u = u_0 & (2') \end{cases}$$

$$\text{Pour } t = 0; \quad x = 0; \quad u = \textit{n'importe quoi.}$$

Si nous parlons de la tige et de la chaleur, cela voudrait dire que les températures seraient déterminées quelle qu'ait été la température initiale de son extrémité.

Pour concilier les choses, il faut traduire mathématiquement l'idée physique fondamentale, d'une subite variation de u, quand fait irruption la masse d'air advective. Dans le problème du refroidissement nocturne, l'analogue est la passage du terminateur (coucher du soleil); nous pensons aussi en Météorologie Dynamique, à l'arrivée de la ligne de grains (front froid). Ces phénoménes sont bien exprimés par la fonction δ de Dirac. Cela nous amène à poser la condition complémentaire:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \varphi'(x) = a\delta(x),$$

qui signifie qu'au point $(0, 0)$, le gradient de u est infini (et d'ailleurs négatif dans notre problème).

Par intégration on obtient la condition initiale équivalente:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = a\gamma(x) + \beta$$

Pour traduire la condition (1'): $u(x, 0) = 0$ pour $x > 0$, il faut $a + \beta = 0$, ce qui nous donne la condition initiale (A'):

$$(A') \qquad u(x, 0) = \varphi(x) = \beta[1 - \gamma(x)]$$

Cette condition ne tombe plus dans le cas où $\varphi(x)$ est continu (au point $x = 0$), pour lequel la formule (A) du § 2, est en général demontrée. Mais nous avons dit opportunément que l'échelon unité $\gamma(x)$ pouvait être accepté comme fonction $\varphi(x)$.

Comme elle est du type (A), elle *suffit* à déterminer la solution, et nous n'avons pas besoin de la condition (2'):

$$u(x, 0) = u_0 \qquad t > 0,$$

trop stricte, du problème météorologique.

---

[1] JEFFREYS. Philosophical magazine, 1918.

La formule A (§ 2) donne l'expression suivante de la solution admettant la condition initiale (A'):

$$u(x, t) = \frac{\beta}{2}\left[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})\right]$$

Nous n'avons pas eu besoin non plus d'invoquer des considérations de similitude.

Il reste cependant à déterminer la constante arbitraire β, mais pour ce faire, une condition aussi stricte que (2') n'est pas nécessaire. Il nous suffira la condition à l'infini:

$$u(0, \infty) = u_0$$

qui est physiquement imposée.

Alors $\beta/2 = u_0$, et l'on confirme la solution de Jeffreys:

$$u(x, t) = u_0\,[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})]$$

Le progrés que nous avons fait est d'avoir précisé les conditions compleméntaires nécessaires et suffisantes. Elles sont en résumé:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 2u_0\,[1 - \gamma(x)] & (1'') \\ u(0, \infty) = u_0 & (2'') \end{cases}$$

La question de savoir quelle valeur attribuer à $u(0, 0)$ se trouve résolue par (1''). Il y a en réalité deux valeurs extrêmes:

$$u(-0{,}0) = 2u_0; \qquad u(+0, 0) = 0$$

Nous dirons que la solution du problème est:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(1 - \Theta) & \text{pour } x > 0,\ t > 0 \\ 2u_0 & \text{pour } x = 0,\ t = 0 \end{cases}$$

La valeur $u(-0{,}0) = 2u_0$ peut paraitre à première vue, choquante. Nous lui voyons au contraire, une signification physique réelle. Dans la théorie instrumentale, c'est le phénoméne de *lancer*, qui fait que l'instrument dépasse l'amplitude de la perturbation quand on l'applique trop brusquement. Dans l'atmosphère, c'est la *survente* momentanée accompagnant le passage de la ligne de grains (advection d'une masse d'air pourvue une grande énergie cinétique).

7. Pour finir, l'équation de la chaleur nous permettra de faire saisir sur un exemple, l'incorrection parfois grave, que l'on commet en négligeant des termes d'une équation aux dérivées partielles, sous prétexte de leur petitesse.

Soit l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

On peut la considerer comme exprimant la vitesse d'un fluide visqueux, dans un écoulement à une dimension

Si l'on néglige le terme $u \dfrac{\partial u}{\partial x}$, sous prétexte qu'il est "a priori" du second ordre (comme on le fait dans la théorie météorologique des perturbations), on obtient l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

Or, dans ce cas simple, le problème sans approximation peut être traité sans difficulté. Si l'on pose en effect:

$$u = -\frac{\partial}{\partial x} \log z \tag{3}$$

z verifie l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right] = 0$$

Par conséquent, à toute solution z de l'équation de la chaleur (2), correspond une solution de l'équation (1), par l'intermédiaire de la formule (3).

Soit $z(x, t)$ la solution de (2) qui se réduit à:

$$z(x, 0) = \exp\left(-\int^x \varphi(x)\, dx\right)$$

pour $t = 0$.

La fonction $u(x, t) = -\dfrac{\partial}{\partial z} \log z(x, t)$, sera la solution de (1) qui se réduit à $\varphi(x)$ pour $t = 0$.

Recourant à la formule A (§ 2), on a:

$$z(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y) dy\right] dy$$

Et l'on en déduit:

$$u = -\frac{\partial \log z}{\partial x} = \frac{1}{2t}\, \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y)\right] dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y)\right] dy}$$

Considérons à présent, le problème "*approché*", qui consiste a prendre la fonction $u(x, t)$ solution de (2) et se réduisant à $\varphi(x)$ pour $t = 0$.

La formule A (§ 2) donne la valeur:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2} + \log \varphi(y)\right] dy$$

On conçoit que, des expressions ci dessus de u et de u_1, vont sortir des formes fonctionnelles très differentes.

Pour le cas banal $\varphi(y) = u_0$, il y a encore coincidence. Mais dèjà pour $\varphi(y) = y$, on trouve: $u_1 = x$; $u = x/(1 + t)$.

Le terme en $u \dfrac{\partial u}{\partial x}$, que nous prétendions négliger parce que petit "a priori", est $x/(1 + t)^2$, soit exactement égal et de signe contraire au terme $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ que nous avons conservé comme seul digne de considération.

Des réflexions de cette sorte sont de nature à inspirer un certain scepticisme sur le bien fondé d'ine théorie qui admet de telles approximations, sans qu'il soit besoin d'invoquer des vues plus transcendantes et de plus grande valeur constructive, telles que le changement complet de la nature topologique des solutions quand on modifie, même très peu, un coefficient (en somme le problème de la turbulence). Nous pensons, en disant cela, à l'admirable ouvrage de Garrett-Birkhoff, sur l'Hydrodynamique. Mais un tel livre supposerait pour être profitable, que la Météorologie théorique ait surmonté le stade encore empirique de ses applications mathématiques.

Se terminó de imprimir el día 13 de Octubre de 1961, en la Imprenta López, Perú 666 - Buenos Aires - República Argentina.