UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo de Tesis Doctoral.

Estudio de álgebras de Heyting débiles con operadores modales

---

Tesista: Lic. Agustin Leonel Nagy.

Directores: Dr. Sergio Arturo Celani y Dr. Hernán Javier San Martín.

Año: 2023.

Agradecimientos

Son muchas las personas e instituciones a las que debo agradecerles el apoyo y la formación que me han brindado a lo largo de estos años de trabajo. Sin ellos, este trabajo no hubiese sido posible:

A mis directores Dr. Sergio Celani y Dr. Hernán Javier San Martín, quienes me recibieron como alumno y desde el primer momento me han acompañado con inmejorable predisposición. Gracias por el gran trabajo realizado y por la paciencia, calidez y amabilidad que me brindaron en estos años. En ellos encontré un gran equipo de trabajo y sobre todo excelentes personas, siempre pendientes de mi desarrollo académico y mi bienestar personal.

A mi familia que me acompañó y me alentó en todo momento para que pueda concretar mis estudios de grado y posgrado. Gracias por levantarme en los momentos difíciles y recordarme que siempre estarán cerca cuando los necesite.

A mi novia Vicky. Gracias por estar a mi lado en todo este proceso, disfrutando juntos los buenos momentos y sobre todo bancandome en los tiempos dificiles. Sos una mujer increíble y una gran compañera. Te amo.

A Mauro, Anibal y Tomás con quienes tengo la suerte de compartir la oficina y hacen que cada día de trabajo sea muy agradable.

A todos los integrantes del grupo de Lógica de Tandil. Gracias por crear un ambiente laboral lindo, sano y proactivo.

A todo el cuerpo docente del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires quienes me han formado en mis estudios de grado.

A la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la provincia de Buenos Aires que me otorgó una beca doctoral en los primeros años de mi formación de doctorado.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), institución que me brindó una beca de finalización de doctorado.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de La Plata que me han admitido como alumno de doctorado.

A todos ellos, GRACIAS.

Indice general

Introducción general

En lógica existen diversas formas de interpretar o formalizar la noción de implicación. En la literatura existen una gran cantidad de lógicas proposicionales con distintas implicaciones (clásica, intuicionista, relevante, etc). Una implicación conectada con los orígenes de la lógica modal clásica es la *implicación estricta*. La implicación estricta, denotada por $\varphi \to \psi$, se interpreta de la siguiente forma: *Necesariamente* φ *implica* ψ . La noción de necesidad y su dual, la noción posibilidad, son los objetivos principales de la lógica modal clásica. En el contexto de la lógica modal normal la implicación estricta puede ser definida como una noción derivada o definida a partir de la implicación material $\supset$ y del operador modal $\Box$. Más precisamente, si $\{\vee, \wedge, \Box, \neg, \bot, \top\}$ es el lenguaje de la lógica modal normal, entonces la implicación estricta se define de la siguiente manera:

$$\varphi \to \psi : = \Box(\varphi \supset \psi).$$

Sin embargo, la implicación estricta también puede ser considerada como una noción primitiva, y así fue considerada como tal a principios de siglo en los trabajos de Lewis y Langford [38]. Si consideramos a la lógica modal definida a partir de un lenguaje proposicional $\{\vee, \wedge, \to, \neg, \bot, \top\}$, donde $\to$ denota el conectivo de la implicación estricta, entonces el operador modal de necesidad $\Box$ es ahora un conectivo derivado definido de la siguiente manera:

$$\Box\varphi := \top \to \varphi.$$

Naturalmente se plantea el problema de estudiar el fragmento $\{\vee, \wedge, \to, \bot, \top\}$ de la lógica modal normal. El estudio de este fragmento está estrechamente relacionado con el estudio de las *lógicas subintuicionistas.* Las lógicas subintuicionistas pueden ser definidas como aquellas lógicas en el lenguaje proposicional intuicionista que resultan de debilitar las condiciones de la semántica de Kripke para la lógica intuicionista. Es decir, la interpretación del conectivo $\to$ es igual a la interpretación de la implicación intuicionista en los marcos de Kripke, pero sin pedir las otras condiciones exigidas en los marcos de Kripke de la lógica intuicionista (ver [2, 3, 7, 18, 24, 27] entre otros).

La contraparte algebraica de las diferentes lógicas subintuicionistas está basada en subclases de la clase de álgebras cuyos miembros son las álgebras de Heyting débiles (en inglés, weak Heyting algebras). Más precisamente, un álgebra de Heyting débil (WH-álgebra para abreviar) es una álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\to$ es una operación binaria llamada implicación estricta para la cual se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:

1. $a \to a = 1$.

2. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

3. $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.

4. $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$.

Denotaremos por WH a la variedad de WH-álgebras. Dicha variedad y algunas de sus subvariedades son introducidas y estudiadas en [19]. En particular, en esta tesis estamos interesados en la subvariedad RWH, cuyos miembros son WH-álgebras que satisfacen la desigualdad $a \wedge (a \to b) \leq b$, y en la subvariedad SRL cuyos miembros son las álgebras de RWH que satisfacen la desigualdad $a \to b \leq c \to (a \to b)$ (conocidos como retículos subresiduados).

En esta tesis se estudian algunas variedades de WH-álgebras dotadas de operadores. En líneas generales las contribuciones de este trabajo se basan en el estudio de la interacción de la implicación estricta con respecto a cierto tipo de operadores unarios. Dicho estudio se realiza utilizando diferentes enfoques, a saber: 1) mediante el estudio de la representación de variedades de WH-álgebras con operadores utilizando ciertas estructuras relacionales, 2) mediante un estudio algebraico sobre un operador modal de necesidad definido sobre la variedad de RWH-álgebras y retículos subresiduados y 3) mediante diferentes dualidades topológicas y bitopológicas para la categoría SRL que tiene como objetos a retículos subresiduados y para la categoría KSRL que tiene como objetos retículos subresiduados modales.

Descripción de los capítulos Este trabajo está compuesto por 6 capítulos los cuales se detallan a continuación:

1) El primer capítulo provee las definiciones y resultados elementales de conjuntos, conjuntos ordenados, teoría de retículos, álgebra universal, topología, teoría de categorías y dualidades topológicas para retículos distributivos acotados. Todos estos elementos son necesarios para el desarrollo de los contenidos de esta tesis.

2) En el segundo capítulo de este trabajo vamos a estudiar la variedad de WH-álgebras con operadores y algunas de sus subvariedades. Puntualmente estudiaremos la representación de WH-álgebras con operadores por medio de cierta clase de estructuras relacionales y buscaremos especializar dicha representación en algunas subvariedades que resultan de especial interés.

3) En el tercer capítulo de este trabajo buscaremos establecer un cálculo de Gentzen adecuado para la lógica asociada a la variedad de WH-álgebras con operadores. En particular estudiaremos diferentes expansiones de dicho cálculo dando origen a diferentes expansiones modales de la lógica subintuicionista. Dichas expansiones son llamadas lógicas subintuicionistas modales. Asimismo, siguiendo las técnicas propias del estudio de la lógica modal por medio de semánticas relacionales, se desarrolla una semántica relacional para algunas lógicas subintuicionistas modales y se prueba que dicha semántica es correcta y completa. Los resultados presentados en este capítulo, en conjunto con los resultados del Capítulo 2, son parte del trabajo [21]. Actualmente dicho trabajo se encuentra en proceso de referato.

4) El cuarto capítulo de este trabajo está dedicado al estudio de un operador modal de necesidad sobre la variedad RWH y la variedad SRL respectivamente. Se realiza un

estudio algebraico de dicho operador en el cuál se caracterizan las congruencias por medio de cierta clase particular de filtros. Además se caracterizan las congruencias principales, las álgebras simples y subdirectamente irreducibles, las funciones compatibles y se determina que la variedad de RWH-álgebras (retículos subresiduados) dotadas de un operador modal es localmente afín completa. Asimismo se utilizan los resultados obtenidos para dar una base ecuacional para la subvariedad de RWH-álgebras (retículos subresiduados) dotados de un operador modal de necesidad y totalmente ordenadas. Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en el trabajo [22].

5) En el quinto capítulo de este trabajo se estudia la interpretación topológica y bitopológica de la implicación estricta definida en el contexto de la variedad SRL. Existen diferentes dualidades topológicas para la categoría BDL cuyos objetos son retículos distributivos acotados y sus flechas son los homomorfismos de retículos. Por un lado M. Stone obtiene una dualidad para la categoría BDL en términos de espacios topológicos espectrales, mientras que por otro lado H. Priestley desarrolla una dualidad para la categoría BDL en términos de espacios topológicos ordenados, compactos y totalmente disconexos en el orden. Tomando como base ambas dualidades, es posible establecer dualidades para estructuras más generales para las cuales el $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$-reducto resulte un retículo distributivo acotado. En este capítulo haremos uso de dichas herramientas y nos centraremos en el estudio de una dualidad de tipo espectral y una dualidad de tipo bitopológica para retículos subdiresiduados. Además se estudian las conexiones de estas dos dualidades desarrolladas con la dualidad tipo Priestley para retículos subresiduados determinada por Celani y Jansana en [19]. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [20].

6) En el sexto capítulo de este trabajo comentaremos algunas líneas de trabajo futuro tales como el estudio de la propiedad de los modelos finitos para ciertas lógicas subintuicionistas modales, la aplicación de la dualidad bitopológica para la caracterización de ciertas ecuaciones modales y el estudio del conectivo de diferencia débil.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo introduciremos nociones elementales, notación y resultados clásicos sobre conjuntos ordenados, álgebra universal, topología y teoría de categorías que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis. En particular, presentaremos algunos resultados sobre álgebras de Heyting débiles. Dado que la intención de este primer capítulo es introducir nociones elementales y fijar notación intentaremos ser lo más breve y auto contenido como sea posible. Remitimos al lector interesado a los excelentes y diversos textos en que se detallan en cada sección.

1.1 Conjuntos, relaciones y conjuntos parcialmente ordenados

Dado X un conjunto no vacío. Indicaremos $\mathcal{P}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos del conjunto X. Como es usual, para cada $U, V \in \mathcal{P}(X)$ indicaremos $U \cap V$ y $U \cup V$ a la intersección y unión de U y V. Además, para $U, V \in \mathcal{P}(X)$ utilizaremos la notación U^c para indicar el complemento de U y $U \setminus V$ para indicar la diferencia de U y V, es decir

$$U^c = \{x \in X \colon x \notin U\} \quad \text{y} \quad U \setminus V = \{x \in X \colon x \in U \wedge x \notin v\}.$$

Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia de conjuntos, definimos el producto cartesiano como el conjunto de todas las n-uplas que podemos formar tomando un elemento de cada conjunto, es decir,

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, ..., x_n) \colon x_i \in X_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}.$$

En particular, si $X_i = X$ para cada $1 \leq i \leq n$ notaremos como $\prod_{i=1}^n X = X^n$.

Sean X e Y conjuntos. Una relación binaria S definida sobre el producto $X \times Y$ es un subconjunto del producto $X \times Y$, es decir, $S \subseteq X \times Y$. Si $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$, indicaremos

$$S(U) = \{y \in Y \colon (x, y) \in S \text{ para algún } x \in U\} \quad \text{y} \quad S^{-1}(V) = \{x \in X \colon S(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

En particular, si $U = \{x\}$ y $V = \{y\}$ escribiremos $S(x)$ en lugar de $S(\{x\})$ y $S^{-1}(y)$ en lugar de $S^{-1}(\{y\})$. En caso de $X = Y$ diremos que S es una relación binaria definida sobre X.

Sea R y S dos relaciones binarias definidas sobre X. Escribiremos como $R \circ S$ a la composición de ambas relaciones, la cual se define del siguiente modo:

$$R \circ S = \{(x, z) \colon \exists y \in X \colon (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}.$$

Sea S una relación binaria definida sobre un conjunto X. Diremos que S es un *pre-orden* si la relación S es reflexiva y transitiva. Un pre-orden S se dirá *relación de orden parcial* si S es antisimétrica. En general, y cuando no haya lugar a confusión, una relación de orden parcial la denotaremos con el simbolo $\leq$ e indicaremos con $x \leq y$ a los pares $(x, y) \in \leq$. Un par $(X, \leq)$ es un *conjunto parcialmente ordenado* si $\leq$ es una relación de orden parcial sobre X. Una relación de orden parcial se dirá *relación de orden total* sobre el conjunto X si $x \leq y$ o bien $y \leq x$ para cada $x, y \in X$. El par $(X, \leq)$ se dirá *conjunto totalmente ordenado* (o cadena) si la relación $\leq$ es un orden total sobre X.

Dado $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $U \in \mathcal{P}(X)$, diremos que U es un *conjunto creciente* (upset, en inglés) si para cada $x, y \in X$, si $x \in U$ y $x \leq y$ entonces $y \in U$. Indicaremos con $\mathrm{Up}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X. De manera dual, diremos que $V \in \mathcal{P}(X)$ es un *conjunto decreciente* (downset, en inglés) si para cada $x, y \in X$, si $x \in V$ y $y \leq x$ entonces $y \in V$. Indicaremos con $\mathrm{Do}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos decrecientes de X. Sea $U \in \mathcal{P}(X)$, el conjunto creciente generado por U y el conjunto decreciente generado por U lo indicaremos como

$$[U) = \{y \in X \colon u \leq y \text{ para algún } u \in U\} \quad \text{ y } \quad (U] = \{y \in X \colon y \leq u \text{ para algún } u \in U\},$$

respectivamente. En particular, si $U = \{x\}$ escribiremos $[x)$ y $(x]$ en lugar de $[\{x\})$ y $(\{x\}]$.

Sean X e Y dos conjuntos. Una relación $f \subseteq X \times Y$ se dirá *función* si para cada elemento $x \in X$ existe un único elemento $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Como es usual, si f es una función definida sobre $X \times Y$, la denotaremos como $f \colon X \to Y$. Si $U \subseteq X$ indicaremos la imagen directa del conjunto U por medio de la función f como

$$f[U] = \{y \in Y \colon (x, y) \in f \text{ para algún } x \in U\}.$$

Si $V \subseteq Y$ indicaremos la imagen inversa de V por medio de la función f como

$$f^{-1}[V] = \{x \in X \colon f(x) \in V\}.$$

Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ dos conjuntos parcialmente ordenados y $f \colon X \to Y$ una función. Diremos que la función f *preserva el orden* (o bien que es monótona) si para cualesquiera $a, b \in X$ tales que $a \leq b$ se tiene que $f(a) \leq f(b)$. Diremos que f *invierte el orden* (o bien que f es antimonótona) si para cada $a, b \in X$ tales que $a \leq b$ se tiene que $f(b) \leq f(a)$. Diremos que f es un *isomorfismo de orden* si es biyectiva y además para cada $a, b \in X$ se tiene que $a \leq b$ si y sólo si $f(a) \leq f(b)$. De manera dual, diremos que f es un *isomorfismo de orden dual* si es una función biyectiva para cada $a, b \in X$ se tiene que $a \leq b$ si y sólo si $f(b) \leq f(a)$.

Una relación binaria $\theta \subseteq X \times X$, se dirá *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva. Si θ es una relación de equivalencia definida sobre un conjunto X y x es un elemento, indicaremos como x/θ al conjunto de todos los elementos equivalentes a x, es decir

$$x/\theta = \{y \in X \colon (x, y) \in \theta\}.$$

Escribiremos por X/θ al conjunto cociente por medio de la relación θ el cual se define del siguiente modo:

$$X/\theta = \{x/\theta\colon x \in X\}.$$

En general, si θ es una relación de equivalencia definida sobre el producto $X \times X$, escribiremos $\nu\colon X \to X/\theta$ para indicar la aplicación canónica definida por $\nu(x) = x/\theta$.

1.2 Algebra universal

En la presente sección introduciremos algunas nociones elementales sobre álgebra universal y notación que será utilizada en los próximos capítulos. Para un tratado mayor sobre las definiciones y resultados expuestos en esta sección remitimos al lector a los siguientes textos [5, 9].

Un *lenguaje algebraico* (tipo algebraico) es un par $(\mathcal{L}, ar)$ donde $\mathcal{L}$ es un conjunto de simbolos, los cuales son llamadas *operaciones elementales* y $ar\colon \mathcal{L} \to \mathbb{N}_0$ es una función que asigna a cada simbolo $f \in \mathcal{L}$ un número natural $ar(f)$, el cuál es llamado *aridad* de f. Un *álgebra* $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{L}$ es un par $\mathbf{A} = (A, \mathcal{L})$, donde A es un conjunto no vacío llamado el *universo* de $\mathbf{A}$ y $\mathcal{L}$ es el tipo de $\mathbf{A}$. En general indicaremos simplemente como A al álgebra $(A, \mathcal{L})$ cuando su lenguaje sea determinado por el contexto e indicaremos como A a su universo. Si A es un álgebra de tipo $\mathcal{L}$ y $f \in \mathcal{L}$ es un simbolo n-ario del lenguaje entonces el simbolo f induce una operación sobre el universo de A de la siguiente manera $f^{\mathbf{A}}\colon A^n \to A$, donde $f^{\mathbf{A}}(a_1, .., a_n) \in A$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de tipo $\mathcal{L}$. Diremos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada operación n-aria $f \in \mathcal{L}$, se satisface la condición $f^{\mathbf{B}}(b_1, .., b_n) = f^{\mathbf{A}}(b_1, .., b_n)$. Un subuniverso de $\mathbf{A}$ es un subconjunto $B \subseteq A$ cerrado por las operaciones del lenguaje.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras del mismo tipo. Una función $\alpha\colon A \to B$ se dirá un *homomorfismo* de álgebras si para cada operación n-aria del lenguaje $f \in \mathcal{L}$, satisface la siguiente igualdad

$$\alpha\left(f^{\mathbf{A}}(a_1, .., a_n)\right) = f^{\mathbf{B}}\left(\alpha(a_1), .., \alpha(a_n)\right).$$

El conjunto de todos los homomorfismos lo indicaremos como $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Si $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, diremos que:

1) α es un *monomorfismo* si $\alpha\colon A \to B$ es una función inyectiva. En tal caso diremos que la aplicación $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un embedding (inmersión) de A en B y lo indicaremos como $\alpha\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$.

2) α es un *epimorfismo* si $\alpha\colon A \to B$ es una función sobreyectiva. En este caso, diremos que $\mathbf{B}$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$.

3) α es un *isomorfismo* si $\alpha\colon A \to B$ es biyectiva, en tal caso diremos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isomorfas y lo indicaremos como $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Sea I un conjunto arbitrario de índices y $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de álgebras del mismo tipo, indexadas por el conjunto I. Se define el *álgebra producto* $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, cuyo universo es el conjunto $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} A_i$ y las operaciones se definen coordenada a coordenada, es decir

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, .., a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i)).$$

Sea $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ un producto de la familia de álgebras $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ todas del mismo tipo, se define el homomorfismo $\pi_j \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$, conocido como la proyección a la j-ésima coordenada, como $\pi_j(a) = a(j)$.

Sea K una clase de álgebras del mismo tipo, indicaremos como $\mathbb{H}(\mathrm{K})$, $\mathbb{I}(\mathrm{K})$, $\mathbb{S}(\mathrm{K})$ y $\mathbb{P}(\mathrm{K})$ a la clase de imágenes homomorfas, imágenes isomorfas, subálgebras y productos directos de elementos de K respectivamente. Diremos que una clase de álgebras K es una *variedad* si es cerrada por subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos de elementos de K, es decir, $\mathbb{H}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$, $\mathbb{S}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$ y $\mathbb{P}(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{L}$. Una relación de equivalencia $\theta \subseteq A \times A$ es una *congruencia* para el álgebra $\mathbf{A}$, si para cada operación n-aria del lenguaje $f \in \mathcal{L}$, se satisface la condición de compatibilidad:

$$\text{Si } (a_1, b_1), .., (a_n, b_n) \in \theta \text{ entonces } \left(f^{\mathbf{A}}(a_1, .., a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, .., b_n)\right) \in \theta.$$

Indicaremos como $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ el conjunto de las congruencias de $\mathbf{A}$ ordenado por la inclusión. Indicaremos con Δ a la congruencia identidad y ∇ la congruencia que identifica todos los elementos del universo. Sean $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{L}$, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ y $f \in \mathcal{L}$ operación n-aria. La operación f define una operación n-aria sobre el cociente de la siguiente manera:

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta.$$

De este modo, el cociente por medio de θ es un álgebra $\mathbf{A}/\theta$ cuyo universo es A/θ. Un álgebra $\mathbf{A}$ se dirá simple si $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \{\Delta, \nabla\}$.

Definición 1.2.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de tipo* $\mathcal{L}$. *Una* representación subdirecta *consta de una familia de álgebras* $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ *del mismo tipo y una función* $\alpha \colon \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *tales que:*

(1) $\alpha \colon \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *es un embedding.*

(2) *para cada* $i \in I$, $\pi_i \circ \alpha(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$.

Definición 1.2.2. *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *se dirá* subdirectamente irreducible *si para toda representación subdirecta* $\alpha \colon \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *existe un índice* $j \in I$ *tal que* $\pi_j \circ \alpha \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ *es un isomorfismo.*

El siguiente resultado es debido a Birckhoff y permite determinar que toda álgebra es la representación subdirecta de algebras subdirectamente irreducibles.

Teorema 1.2.3. *Toda álgebra* $\mathbf{A}$ *es producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles. Más aún, si* K *es una variedad, entonces todo miembro* $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ *es producto subdirecto de algebras subdirectamente irreducibles de* K.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, resulta de gran interés caracterizar las álgebras subdirectamente irreducibles de una clase de álgebras dada. El siguiente resultado permite caracterizar a las álgebras subdirectamente irreducibles en términos de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$.

Teorema 1.2.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra no trivial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) $\bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \colon \theta \neq \Delta\} \neq \Delta$.

Términos, ecuaciones y quasi-ecuaciones Dado $\mathcal{L}$ un tipo algebraico y X un conjunto numerable de variables. Se define el conjunto de los *$\mathcal{L}$-términos* recursivamente de la siguiente manera:

1) $X \cup \{f \in \mathcal{L} \colon ar(f) = 0\}$ son $\mathcal{L}$-términos.

2) Si $f \in \mathcal{L}$ es una operación n-aria del lenguaje y $p_1(x_1, ..., x_n), ..., p_n(x_1, ..., x_n)$ son términos entonces la expresión
$$f(p_1(x_1, ..., x_n), ..., p_n(x_1, ..., x_n))$$
es también un término.

Como es usual, utilizaremos la notación $Tm_{\mathcal{L}}(X)$[1] para indicar el conjunto de todos los términos de tipo $\mathcal{L}$ definidos sobre el conjunto de variables X. Notemos que el par $(Tm_{\mathcal{L}}(X), \mathcal{L})$ puede ser considerado como un álgebra de tipo $\mathcal{L}$ a la cual indicaremos como $\mathbf{Tm}_{\mathcal{L}}(X)$ y es generada por el conjunto de variables X. El álgebra de términos $\mathbf{Tm}_{\mathcal{L}}(X)$ es absolutamente libre, es decir, satisface la siguiente propiedad universal de extensión de homomorfismos (universal mapping property): Para cada $\mathbf{A}$ álgebra de tipo $\mathcal{L}$ y cada función $f \colon X \to \mathbf{A}$ existe un único homomorfismo $\hat{f} \colon \mathbf{Tm}_{\mathcal{L}}(X) \to \mathbf{A}$ de manera tal que la restricción de $\hat{f}$ sobre el conjunto X coincide con f.

Dado $p = (x_1, ..., x_n) \in Tm_{\mathcal{L}}(X)$, escribiremos $Var(p)$ para indicar el conjunto de variables $\{x_1, ..., x_n\}$ que ocurren en p. Para cada $\mathcal{L}-$álgebra $\mathbf{A}$ el término $p(x_1, ..., x_n)$ define una operación n-aria $p^{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ de la siguiente manera:

1) Si $p(x_1, ..., x_n) = x_i$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$, entonces
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = a_i$$

2) Si $p(x_1, ..., x_n) = f(p_1(x_1, ..., x_n), ..., p_k(x_1, ..., x_n))$ entonces
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1(a_1, ..., a_n), ..., p_k(a_1, ..., a_n))$$

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje algebraico y X un conjunto de generadores. Una *$\mathcal{L}$-ecuación* (o $\mathcal{L}$-identidad) sobre X es un par (p, q) de $\mathcal{L}$-términos generados por el conjunto X. En general, escribiremos como
$$p(x_1, ..., x_n) \approx q(x_1, ..., x_n),$$
para indicar la ecuación (p, q). El conjunto de todas las ecuaciones será indicado por $\mathrm{Eq}(X)$. Si $\mathbf{A}$ es un álgebra del mismo tipo entonces diremos que la ecuación $p(x_1, ..., x_n) \approx q(x_1, ..., x_n)$ es válida sobre $\mathbf{A}$ si para cada elección $(a_1, ..., a_n) \in A^n$, se verifica la igualdad
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n).$$

Si la ecuación $p(x_1, ..., x_n) \approx q(x_1, ..., x_n)$ es válida en $\mathbf{A}$ escribiremos $\mathbf{A} \models p \approx q$. Si K es una clase de algebras, diremos que la ecuación $p \approx q$ es válida sobre la clase K si para cada $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ se tiene que $\mathbf{A} \models p \approx q$. Escribimos $\mathrm{K} \models p \approx q$ para indicar que la ecuación $p \approx q$ es válida en la clase K. El siguiente Lema será de utilidad en los próximos capítulos de este trabajo y es [9, Lema 11.2]:

[1] Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional los términos son llamados fórmulas y escribiremos $Fm_{\mathcal{L}}(X)$ para indicar el conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas.

Lema 1.2.5. *Si* K *es una clase de álgebras de tipo* $\mathcal{L}$*,* X *un conjunto no vacío de generadores y* $p(x_1,...,x_n) \approx q(x_1,...,x_n)$ *es una* $\mathcal{L}$ *ecuación definida sobre* X*, entonces son equivalentes:*

(1) $\mathrm{K} \models p(x_1,...,x_n) \approx q(x_1,...,x_n)$.

(2) *Para cada* $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ *y para cada homomorfismo* $h\colon \mathbf{Tm}_{\mathcal{L}}(X) \to \mathbf{A}$ *se sigue que* $h(p) = h(q)$.

Dado Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-ecuaciones sobre un conjunto de generadores X, se define la clase de sus $\mathcal{L}$-modelos de la siguiente manera

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathbf{A}\colon \mathbf{A} \text{ es } \mathcal{L}\text{-álgebra y } \mathbf{A} \models \Sigma\}.$$

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje y X un conjunto. Una *quasi-ecuación* (o quasi-identidad) de tipo $\mathcal{L}$ definida sobre el conjunto X es una sentencia de primer orden

$$\{p_i \approx q_i\colon 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow p \approx q,$$

donde $p \approx q$ y cada $p_i \approx q_i$ son $\mathcal{L}$-ecuaciones para cada $i \in \{1,...,n\}$. Si $\mathbf{A}$ es una $\mathcal{L}$-álgebra diremos que la quasi-ecuación es válida en $\mathbf{A}$ si $\mathbf{A} \models p_i \approx q_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ implica que $\mathbf{A} \models p \approx q$. En este caso, escribiremos

$$\mathbf{A} \models \{p_i \approx q_i\colon 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow p \approx q,$$

para indicar que la quasi-ecuación es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$. Si K es una clase de $\mathcal{L}$-álgebras diremos que la quasi-ecuación $\{p_i \approx q_i\colon 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow p \approx q$ es válida en K si la quasi-ecuación es válida sobre cada miembro de la clase K. Escibiremos

$$\{p_i \approx q_i\colon 1 \leq i \leq n\} \models_{\mathrm{K}} p \approx q,$$

para indicar que la quasi-ecuación $\{p_i \approx q_i\colon 1 \leq i \leq n\} \Rightarrow p \approx q$ es válida sobre la clase K.

Definición 1.2.6. *Una clase de* $\mathcal{L}$*-álgebras* K *se dirá* clase ecuacional *si existe un conjunto de* $\mathcal{L}$*-ecuaciones* Σ *tal que* $\mathrm{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

El siguiente resultado será de gran utilidad en este trabajo.

Teorema 1.2.7. *Una clase de* $\mathcal{L}$*-álgebras* K *es una variedad si y sólo si existe un conjunto de* $\mathcal{L}$*-ecuaciones* Σ *tal que* $\mathrm{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

1.3 Topología

En el desarrollo de este trabajo sólo serán necesarias algunas nociones elementales de topología que recordaremos brevemente en esta sección. Para un tratado más general de estos conceptos referimos al lector a [41].

Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* definida sobre X es una familia de subconjuntos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $\emptyset, X \in \tau$.

2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

3) Si $\{U_1, .., U_k\} \subseteq \tau$ entonces $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau$.

El par (X, τ) se dirá *espacio topológico* si τ es una topología definida sobre el conjunto X. Como es usual para un espacio topológico (X, τ) llamaremos *conjuntos abiertos* a los elementos de la familia τ . Diremos que un subconjunto V es *cerrado* si su complemento V^c es un conjunto abierto. Un conjunto U se dirá *clopen* si es abierto y cerrado simultáneamente.

Dado (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, el menor cerrado que contiene al conjunto A se dirá la *clausura* de A respecto de la topología τ y lo indicaremos como

$$Cl_\tau(A) = \bigcap\{V : A \subseteq V \text{ y } V \text{ es } \tau\text{-cerrado}\}.$$

Si no existe lugar a confusión, indicaremos como $Cl(A)$ en lugar de $Cl_\tau(A)$. De manera dual, para un conjunto $A \subseteq X$ el mayor subconjunto abierto contenido en A se dirá *interior* de A y lo indicaremos como

$$int_\tau(A) = \bigcup\{O \in \tau : O \subseteq A\}.$$

Si no hay riesgo de confusión, indicaremos como $int(A)$ en lugar de $int_\tau(A)$.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $V \subseteq X$ un conjunto cerrado. Diremos que V es *irreducible* si no contiene propiamente a ningún otro subconjunto cerrado. Diremos que un espacio topológico es *sober* si cada subconjunto cerrado irreducible coincide con la clausura de un punto.

Dado un conjunto X y dos topologías τ, τ' definidas sobre X. Diremos que la topología τ es *más gruesa* que la topología τ' (dualmente τ' *más fina* que τ) si todo abierto de τ es un abierto de τ', en tal caso, lo indicaremos como $\tau \subseteq \tau'$.

Sea X un conjunto. Una *base* para una topología τ definida sobre X es una familia de conjuntos $\mathcal{B} \subseteq X$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$

2) Si $x \in U_1 \cap U_2$ con $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ entonces existe $U_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

Si $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X, entonces *la topología generada por* $\mathcal{B}$ es la familia de conjuntos que se obtienen al tomar uniones arbitrarias de los elementos de $\mathcal{B}$.

Si (X, τ) es un espacio topológico. Una *base* $\mathcal{B}$ *para el espacio topológico* (X, τ) es una familia de subconjuntos abiertos tales que forman una base y la topología generada por dicha base coincide con τ. Es decir, satisface las siguientes condiciones:

1) $\mathcal{B} \subseteq \tau$.

2) Para cada $U \in \tau$ y cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Sea X conjunto. Una *subbase* para una topología τ definida sobre X es una familia de subconjuntos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup\{U : U \in \mathcal{S}\} = X$. Si $\mathcal{S}$ es una subbase para una topología τ entonces dicha topología está conformada por la familia de conjuntos $U \subseteq X$ que satisfacen la siguiente condición: Para cada $x \in U$ existen $V_1, .., V_n \in \mathcal{S}$ tal que

$$x \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subseteq U.$$

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un *cubrimiento por abiertos de* X es una familia de subconjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ tales que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Un espacio topológico se dirá *compacto* si para cada cubrimiento abierto de X existe un subcubrimiento finito de X. De manera análoga un subconjunto $Y \subseteq X$ se dirá compacto si para todo cubrimiento de Y por abiertos del espacio (X, τ) existe un subcubrimiento finito de Y. Escribiremos $\mathrm{KO}(X, \tau)$ para indicar la familia de abiertos compactos de un espacio topológico (X, τ). Diremos que un espacio topológico (X, τ) es *coherente* si $\mathrm{KO}(X, \tau)$ es cerrado por intersecciones finitas y es una base para (X, τ).

Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que (X, τ) es T_0 si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$, o bien $x \notin U$ y $y \in U$. Diremos que (X, τ) es T_2 (Hausdorff) si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Dado (X, τ) un espacio topológico. Se define la relación de preorden asociada al espacio (X, τ) como sigue:

$$x \leq_\tau y \text{ si y sólo si } x \in Cl_\tau(y),$$

de manera equivalente,

$$x \leq_\tau y \text{ si y sólo si } (\forall U \in \tau)\, [x \in U \Rightarrow y \in U].$$

La relación de preorden $(X, \leq_\tau)$ es conocida como la relación de *preorden de especialización* de (X, τ). Dicha relación es una relación de orden si (X, τ) es un espacio T_0.

Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Diremos que f es una *función continua* si la pre-imagen de todo conjunto τ' abierto es un conjunto τ-abierto. Diremos que $f\colon X \to Y$ es un *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua. En caso de que $f\colon X \to Y$ sea un homeomorfismo, diremos que los espacios (X, τ) y (Y, τ') son homeomorfos.

1.4 Categorías

Sólo unas nociones elementales sobre teoría de categorías serán suficientes para el desarrollo de esta tesis. Para un tratado profundo sobre categorías remitimos al lector a [1, 4].

Definición 1.4.1. *Una* categoría C *consta de la siguiente información:*

(1) *Una colección de objetos, la cual indicaremos* $Ob(\mathsf{C})$.

(2) *Una colección de flechas, la cual indicaremos* $Fle(\mathsf{C})$.

(3) *Para cada flecha* f *existen dos objetos* $Dom(f)$ *e* $Im(f)$ *llamados propiamente* dominio *de* f *e* imagen *de* f.

(4) *Si* f, g *son dos flechas tales que* $Im(f) = Dom(g)$ *entonces existe una flecha* h *tal que* $Dom(h) = Dom(f)$ *e* $Im(h) = Im(g)$. *En este caso, la flecha* h *se llama la* composición *de las flechas* f *y* g *y la notaremos* $g \circ f$.

(5) *La composición de flechas es asociativa.*

(6) *Para cada objeto x existe una flecha identidad I_x, de manera tal que $Dom\,(I_x) = Im\,(I_x) = x$ y además para cada flecha f la flecha I_x es la identidad respecto de la operación composición.*

Usualmente para una flecha $f \in Fle(\mathsf{C})$, $x = Dom(f)$ e $y = Im(f)$ indicaremos $f\colon x \to y$, donde $x, y \in Ob(\mathsf{C})$. Diremos que una flecha $f\colon x \to y$ es un *isomorfismo* si existe otra flecha $g\colon y \to x$ tal que $g \circ f = I_x$ y $f \circ g = I_y$. Indicaremos $\mathsf{C}(x, y)$ a la colección de todas las flechas de C tal que $f\colon x \to y$. Una categoría C se dirá *pequeña* si $\mathsf{C}(x, y)$ es un conjunto para cada par de objetos $x, y \in Ob(\mathsf{C})$. En el presente trabajo solo hemos de considerar categorías pequeñas.

Si C es una categoría se define la categoría C^{op} cuyos objetos son exactamente los mismos objetos de C y sus flechas son las mismas pero con el sentido opuesto, es decir, $f \in \mathsf{C}^{op}(x, y)$ si y sólo si $f \in \mathsf{C}(y, x)$. Una *subcategoría* D de una categoría C es una categoría tal que todo objeto de D es un objeto de C y $\mathsf{D}(x, y) \subseteq \mathsf{C}(x, y)$. Diremos que la subcategoría D es *plena* si $\mathsf{D}(x, y) = \mathsf{C}(x, y)$ para cada $x, y \in D$.

Definición 1.4.2. *Sea C y D dos categorías. Un* funtor *F es una aplicación tal que:*

(1) *Si $x \in Ob(\mathsf{C})$ entonces $F(x) \in Ob(\mathsf{D})$.*

(2) *Si f es una flecha en C entonces $F(f)$ es una flecha en D.*

(3) $F(I_x) = I_{F(x)}$.

(4) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un funtor F se dirá *covariante* si mantiene el sentido de las flechas, i.e., si $f \in \mathsf{C}(x, y)$ entonces $F(f) \in \mathsf{D}(F(x), F(y))$. Usualmente escribiremos $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ para indicar que F es un funtor covariante. Un funtor se dirá *contravariante* si invierte el sentido de las flechas, es decir, si $f \in \mathsf{C}(x, y)$ entonces $F(f) \in \mathsf{D}(F(y), F(x))$. Escribiremos $F\colon \mathsf{C}^{op} \to \mathsf{D}$ para indicar que F es un funtor contravariante. Si C es una categoría entonces se define el *funtor identidad* $\mathrm{I}_{\mathsf{C}}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ tal que $\mathrm{I}_x = x$ para cada $x \in Ob(\mathsf{C})$ y $\mathrm{I}_{\mathsf{C}}(f) = f$ para cada $f \in Fle(\mathsf{C})$.

Definición 1.4.3. *Sean $F, G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un par de funtores. Una* transformación natural *$\eta\colon F \Rightarrow G$, es una aplicación que asigna a cada objeto $x \in Ob(\mathsf{C})$ una flecha $\eta_x\colon F(x) \to G(x)$, de manera tal que para cada flecha $f\colon x \to y$ se tiene que $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$.*

Definición 1.4.4. *Una* equivalencia de categorías *C y D consta de un par de funtores covariantes $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ y un par de transformaciones naturales $\sigma\colon F \Rightarrow G$ y $\epsilon\colon G \Rightarrow F$ tales que para cada objeto $C \in \mathsf{C}$ y cada objeto $D \in \mathsf{D}$, las flechas $\sigma_C\colon I_{\mathsf{C}} \to G \circ F$ y $\epsilon_D\colon I_{\mathsf{D}} \to F \circ G$ son isomorfismos. En caso de que exista una equivalencia entre las categorías C y D se dirán categorías equivalentes. Diremos que las categorías C y D son dualmente equivalentes si los funtores F y G son contravariantes. Por último, diremos que las categorías C y D son isomorfas si las transformaciones naturales σ y ϵ son exactamente la identidad.*

1.5 Retículos

Los retículos, en particular retículos distributivos acotados, son estructuras algebraicas que estarán presentes como reducto de muchas estructuras algebraicas que presentaremos en el desarrollo de esta tesis. En la presente sección brindaremos algunas definiciones y resultados elementales que serán de utilidad para esta tesis.

Para un tratado profundo de los resultados presentados en esta sección referimos al lector a los textos [5, 9, 30, 46].

Definición 1.5.1. *Un álgebra* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *de tipo* $(2, 2)$ *se dirá* retículo *si para cada* $a, b, c \in L$ *son válidas las siguientes condiciones:*

(1) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ *y* $a \vee (b \vee c) = (a \vee c) \vee b$.

(2) $a \wedge b = b \wedge a$ *y* $a \vee b = b \vee a$

(3) $a \wedge a = a$ *y* $a \vee a = a$

(4) $a \wedge (b \vee a) = a$ *y* $a \vee (b \wedge a) = a$

La noción de retículo tiene una fuerte conexión con la noción de conjunto parcialmente ordenado. En efecto, dado $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ un retículo es posible definir sobre el conjunto L una relación de orden de la siguiente manera:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a = a \wedge b \text{ si y sólo si } b = b \vee a.$$

Por otro lado, si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado para el cuál existe $\inf\{a, b\}$ y $\sup\{a, b\}$ para cada $a, b \in L$ entonces la estructura $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ puede ser considerada como un retículo, donde las operaciones $\wedge$ y $\vee$ corresponden al ínfimo y al supremo, respectivamente. De esta manera es posible considerar a un retículo o bien como un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ para el cuál siempre existen los supremos e ínfimos de conjuntos finitos, o bien como un álgebra $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ de tipo $(2, 2)$ que satisface las condiciones (1)-(4) de la Definición 1.5.1.

Definición 1.5.2. *Sea* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *un retículo. Un elemento* $a \in L$ *se dirá* primer elemento *si* $a \wedge b = a$ *para todo* $b \in L$. *De manera dual, el elemento* $a \in L$ *se dirá* ultimo elemento *si* $b \vee a = a$ *para todo* $b \in L$. *En general, si existen, indicaremos como* 0 *y* 1 *al primer y último elemento de un retículo, respectivamente. El retículo* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *se dirá* acotado *si tiene primer y último elemento.*

Definición 1.5.3. *Sea* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *un retículo. Diremos que* $\mathbf{L}$ *es* distributivo *si para cada* $a, b, c \in L$ *se verifica la siguiente condición:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{1.1}$$

La condición 1.1 es equivalente a su condición dual, es decir:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Definición 1.5.4. *Sea* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *un retículo. Un subconjunto no vacío* F *de* L *se dirá* filtro *si:*

(1) *F es un conjunto creciente respecto del orden de* **L**.

(2) *Si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$, es decir, es cerrado por ínfimos.*

Un filtro F de **L** *se dirá* propio *si $F \subset L$.*

Notemos que si **L** es un retículo con último elemento entonces F es un filtro de **L** si y sólo si $1 \in F$, F es un conjunto creciente respecto del orden de **L** y es cerrado por ínfimos.

Sea P un filtro de **L**. Diremos que P es un *filtro primo* de **L** si es filtro propio y además para cada $a, b \in L$, si $a \vee b \in P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$. Si **L** es un retículo distributivo entonces escribiremos $\mathrm{Fi}(\mathbf{L})$ y $X(\mathbf{L})$ para denotar al conjunto de todos los filtros de **L** y todos los filtros primos de **L**, respectivamente.

Sea **L** un retículo con primer elemento. Notemos que la intersección arbitraria de filtros es nuevamente un filtro, en particular la intersección de todos los filtros da como resultado $F = \{1\}$ que resulta el menor filtro de **L**. Si X es un subconjunto propio no vacío de **L** entonces el conjunto

$$\mathrm{Fi}(X) = \bigcap\{F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{L})\colon X \subseteq F\},$$

es el menor filtro que contiene a dicho conjunto. Este filtro se dirá el *filtro generado por X* y está caracterizado por el siguiente Lema.

Lema 1.5.5. *Sean* **L** *un retículo con último elemento y X un subconjunto no vacío de L. Entonces*

$$\mathrm{Fi}(X) = \{a \in L\colon \exists\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X\colon x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq a\}.$$

Definición 1.5.6. *Sea* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ *un retículo. Un subconjunto no vacío I de L se dirá* ideal *si:*

(1) *I es un conjunto decreciente respecto del orden de* **L**.

(2) *Si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$, es decir, es cerrado por supremos.*

Un ideal I se dirá propio *si $I \subset L$.*

Notemos que si **L** es un retículo con primer elemento 0 entonces I es un ideal de **L** si y sólo si $0 \in I$, es decreciente respecto del orden de **L** y es cerrado por supremos.

Un ideal I se dirá *ideal primo* de **L** si es un ideal propio y además para cada $a, b \in L$ si $a \wedge b \in I$ entonces $a \in I$ o $b \in I$. Escribiremos $\mathrm{Id}(\mathbf{L})$ y $\mathrm{J}(\mathbf{L})$ para indicar al conjunto de los ideales y al conjunto de los ideales primos de **L** respectivamente.

Sea **L** un retículo con primer elemento 0. Notemos que la intersección arbitraria de ideales es nuevamente un ideal. En particular, la intersección de todos los ideales de **L** es el ideal $I = \{0\}$ que resulta el menor ideal de **L**. Si X es un subconjunto no vacío de L entonces el conjunto

$$\mathrm{Id}(X) = \bigcap\{I \in \mathrm{Id}(\mathbf{L})\colon X \subseteq I\},$$

es el menor ideal que contiene a dicho conjunto. Este ideal se dirá el *ideal generado por X* y está caracterizado por el siguiente Lema.

Lema 1.5.7. *Sean* L *un retículo con primer elemento y* X *un subconjunto no vacío de L. Entonces*

$$\mathrm{Id}(X) = \{a \in L\colon \exists\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X\colon a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n\}.$$

Es claro a, partir de las definiciones, que las nociones de filtro e ideal son nociones duales. Más aún, si $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ es un retículo distributivo entonces $P \in X(\mathbf{L})$ si y sólo si $X \setminus P \in \mathrm{J}(\mathbf{L})$.

El siguiente resultado es de grán interés en la teoría de retículos distributivos acotado y en particular en esta tesis.

Teorema 1.5.8. *Sean* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *un retículo distributivo acotado,* $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{L})$ *y* $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{L})$. *Si* $F \cap I = \emptyset$ *entonces existe* $P \in \mathrm{X}(\mathbf{L})$ *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$.

Definición 1.5.9. *Sean* $\mathbf{L_1} = (L_1, \wedge, \vee)$ *y* $\mathbf{L_2} = (L_2, \wedge, \vee)$ *retículos. Una función* $f\colon L_1 \to L_2$ *se dirá* homomorfismo de retículos *si para cada* $a, b \in L_1$*:*

(1) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

(2) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Es sencillo verificar que tanto la función identidad como la composición de homomorfismos de retículos, en los casos que fuera posible hacerla, es nuevamente un homomorfismo de retículos.

Definición 1.5.10. *La categoría* BDL *es la categoría cuyos objetos son retículos distributivos acotados y sus flechas son los homomorfismos de retículos. Además la composición de flechas está definida como la composición usual de funciones y la identidad para dicha composición estará determinada por la función identidad.*

1.6 Dualidades para retículos distributivos acotados

Las dualidades topológicas para la categoría BDL proveen una herramienta de grán interés para la representación y el estudio de diferentes estructuras algebraicas basadas en retículos distributivos acotados. En la presente sección se recordará la dualidad de Priestley y la dualidad espectral para la categoría BDL. Para un tratado profundo de estos resultados referimos al lector a los siguientes textos [5, 6, 44, 50].

1.6.1 Dualidad de Priestley

En esta subsección comentaremos brevemente la dualidad de tipo Priestley para la categiroría BDL. La dualidad que presentaremos a continuación difiere de la dualidad original presentada en [44], ya que esta ultima utiliza como base el conjunto de los ideales primos de un retículo distributivo acotado, mientras que la que presentaremos utiliza el espectro de filtros primos de un retículo distributivo acotado. Para un tratado mas detallado de los resultados presentados en esta sección el lector puede remitirse a [25, 44].

Definición 1.6.1. *Un* espacio de Priestley *es una estructura* $(X, \leq, \tau)$ *en donde*

(1) (X,τ) *es un espacio topológico compacto.*

(2) $(X,\leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

(3) *Para cada* $x,y\in X$*, si* $x\nleq y$ *entonces existe* U *clopen creciente tal que* $x\in U$ *e* $y\notin U$*.*

Una función $f\colon (X_1,\tau_1,\leq_1)\to(X_2,\tau_2,\leq_2)$ *es un* morfismo de espacios de Priestley *si:*

(1) $f\colon (X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ *es continua.*

(2) $f\colon (X_1,\leq_1)\to(X_2,\leq_2)$ *es monótona.*

Escribiremos Pries para denotar la categoría cuyos objetos son espacios de Priestley y sus flechas son los morfismos entre estas estructuras. La composición de flechas está definida por la composición usual de funciones y la identidad para dicha composición es la función identidad.

Dado $(X,\tau,\leq)$ un espacio de Priestley. Utilizaremos la siguiente notación:

1) $D(X)$ el conjunto de todos los clopen crecientes.

2) $OpUp(X)$ el conjunto de todos los abiertos crecientes.

3) $ClUp(X)$ el conjunto de todos los cerrados crecientes.

4) $\Delta(X)$ el conjunto de todos los clopen decrecientes.

5) $OpDo(X)$ el conjunto de los abiertos decrecientes.

6) $ClDo(X)$ el conjunto de todos los cerrados decrecientes.

El siguiente Lema es parte del folklore de los espacios de Priestley. Referimos al lector a los artículos [6, 23, 25].

Lema 1.6.2. *Sean* $(X,\leq,\tau)$ *un espacio de Priestley,* C *un subconjunto cerrado creciente y* $x\in X$ *tal que* $x\notin C$*. Entonces existe* $U\in D(X)$ *tal que* $C\subseteq U$ *y* $x\notin C$*.*

Como consecuencia del Lema 1.6.2 se tiene el siguiente resultado [6, Lema 3.2]:

Corolario 1.6.3. *Sea* $(X,\tau,\leq)$ *un espacio de Priestley. Entonces:*

(1) *Todo conjunto cerrado creciente es intersección de clopens crecientes.*

(2) *Todo conjunto cerrado decreciente es intersección de clopens decrecientes.*

(3) *Todo conjunto abierto creciente es unión de clopens crecientes.*

(4) *Todo conjunto abierto decreciente es unión de clopens decrecientes.*

A continuación construiremos el funtor $\mathrm{D}\colon \mathsf{Pries}\to\mathsf{BDL}$:

Objetos Dado $(X,\tau,\leq)$ un espacio de Priestley. Consideremos la estructura

$$\mathrm{D}(X)=(D(X),\cap,\cup,\emptyset,X).$$

La estructura $\mathrm{D}(X)$ es, en efecto, un retículo distributivo acotado.

Flechas Sea $f\colon (X_1, \tau_1, \leq_1) \to (X_2, \tau_2, \leq_2)$ una flecha en la categoría Pries, consideremos la aplicación $\mathrm{D}(f)\colon \mathrm{D}(X_2) \to \mathrm{D}(X_1)$ definida por

$$\mathrm{D}(f)(U) = f^{-1}(U).$$

La aplicación $\mathrm{D}(f)$ es una flecha de la categoría BDL.

Unos simples cálculos muestran que las aplicaciones $X \to \mathrm{D}(X)$ y $f \to \mathrm{D}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{D}\colon \mathsf{Pries} \to \mathsf{BDL}$.

Definición 1.6.4. *Dado* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *un retículo distributivo acotado.* La función de Stone asociada a $\mathbf{L}$ *es una aplicación* $\sigma_{\mathbf{L}}\colon \mathbf{L} \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{L}))$ *definida por*

$$\sigma_{\mathbf{L}}(a) = \{P \in X(\mathbf{L})\colon a \in P\}. \tag{1.2}$$

A continuación construiremos el funtor $\mathrm{X}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{Pries}$:

Objetos Dado $\mathbf{L}$ un retículo distributivo acotado. Consideremos la estructura

$$\mathrm{X}(\mathbf{L}) = (X(\mathbf{L}), \tau_{\mathbf{L}}),$$

donde $\tau_{\mathbf{L}}$ es la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S}_{\mathbf{A}} = \{\sigma_{\mathbf{L}}(a)\colon a \in L\} \cup \{\sigma_{\mathbf{L}}(a)^c\colon a \in L\}.$$

La estructura $\mathrm{X}(\mathbf{L})$ es un espacio de Priestley donde además

- $D(\mathrm{X}(\mathbf{L})) = \{\sigma_{\mathbf{L}}(a)\colon a \in L\}$ y
- $\Delta(\mathrm{X}(\mathbf{L})) = \{\sigma_{\mathbf{L}}(a)^c\colon a \in L\}$.

Flechas Sea $f\colon \mathbf{L_1} \to \mathbf{L_2}$ una flecha en la categoría BDL. Consideremos la aplicación $\mathrm{X}(f)\colon \mathrm{X}(\mathbf{L_2}) \to \mathrm{X}(\mathbf{L_1})$ definida por

$$\mathrm{X}(f)(P) = f^{-1}(P).$$

Unos simples cálculos muestran que la aplicación $\mathrm{X}(f)$ es una flecha en la categoría Pries.

Unos cálculos adicionales muestran que las aplicaciones $\mathbf{L} \to \mathrm{X}(\mathbf{L})$ y $f \to \mathrm{X}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{X}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{Priest}$.

Definición 1.6.5. *Sea* $(X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley. Definimos la aplicación* $\epsilon_X\colon X \to \mathrm{X}(\mathrm{D}(X))$*, donde*

$$\epsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{D}(X)\colon x \in U\}. \tag{1.3}$$

Notemos que las aplicaciones $\mathbf{L} \to \sigma_{\mathbf{L}}$ y $X \to \epsilon_X$ definen las transformaciones naturales $\sigma\colon \mathrm{I}_{\mathsf{BDL}} \Rightarrow (\mathrm{D} \circ \mathrm{X})$ y $\epsilon\colon \mathrm{I}_{\mathsf{Priest}} \Rightarrow (\mathrm{X} \circ \mathrm{D})$, respectivamente.

Teorema 1.6.6. *El par de funtores* $\mathrm{X}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{Pries}$ *y* $\mathrm{D}\colon \mathsf{Priest} \to \mathsf{BDL}$*, en conjunto con las transformaciones naturales* σ *y* ϵ*, establecen una equivalencia dual de las categorías* BDL *y* Pries.

1.6.2 Dualidad espectral

En la presente subsección recordaremos la dualidad de tipo espectral para la categoría BDL, la cual permite establecer una equivalencia dual de BDL con respecto a la categoría Spec, cuyos objetos son ciertos espacios topológicos y sus flechas son un caso particular de funciones continuas entre estos espacios topológicos. Más detalles sobre esta dualidad puede encontrarse en [6].

Sea (X, τ) un espacio topológico. Recordemos que (X, τ) es un espacio topológico *coherente* si el conjunto $\mathrm{KO}(X, \tau)$ de abiertos compactos es cerrado por intersecciones finitas y además es una base para (X, τ). Asimismo, recordemos que (X, τ) se dirá *sobrio* (*sober*, en inglés) si todo subconjunto cerrado irreducible de (X, τ) es la clausura de un punto.

Definición 1.6.7. *Un espacio topológico* (X, τ) *se dirá* espacio topológico espectral *si es compacto, coherente,* T_0 *y sober. Una función* $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ *se dira* función espectral *si para cada* $U \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$ *se tiene que* $f^{-1}(U) \in \mathrm{KO}(X_1, \tau_1)$.

Escribiremos Spec para indicar a la categoría cuyos objetos son espacios topológicos espectrales y las flechas son las funciones espectrales. Además la composición de flechas está definida como la composición usual de funciones espectrales y la identidad para la composición resultará la función identidad. Es inmediato notar que toda función espectral es en particular una función continua.

A continuación vamos a construir el funtor $\hat{\mathrm{D}}\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{BDL}$ de la siguiente manera:

Objetos Dado (X, τ) un espacio topológico espectral. Consideremos el álgebra

$$\hat{\mathrm{D}}(X) = (\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \emptyset, X).$$

Teniendo en cuenta que (X, τ) es coherente se sigue que la estructura $\hat{\mathrm{D}}(X)$ es un retículo distributivo acotado.

Flechas Sea $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ una flecha en la categoría Spec. Consideremos la aplicación $\hat{\mathrm{D}}(f)\colon \hat{\mathrm{D}}(X_2) \to \hat{\mathrm{D}}(X_1)$ definida por

$$\hat{\mathrm{D}}(f)(U) = f^{-1}(U).$$

Unos simples cálculos muestran que la aplicación $\hat{\mathrm{D}}(f)$ es una flecha en BDL.

Es sencillo verificar que las aplicaciones $X \to \hat{\mathrm{D}}(X)$ y $f \to \hat{\mathrm{D}}(f)$ definen un funtor contravariante $\hat{\mathrm{D}}\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{BDL}$.

A continuación construiremos el funtor $\hat{\mathrm{X}}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{Spec}$ de la siguiente manera:

Objetos Dado $\mathbf{L}$ un objeto de la categoría BDL. Consideremos la estructura

$$\hat{\mathrm{X}}(\mathbf{L}) = (X(\mathbf{L}), \hat{\tau}_{\mathbf{L}})\,,$$

donde $\hat{\tau}_{\mathbf{L}}$ es la topología generada por la base $\{\sigma_{\mathbf{L}}(a) \colon a \in \mathbf{L}\}$. La estructura $\hat{\mathrm{X}}(\mathbf{L})$ es en efecto un espacio espectral.

Flechas Sea $f\colon \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_2$ una flecha en BDL. Consideremos la aplicación $\hat{\mathrm{X}}(f)\colon \hat{\mathrm{X}}(\mathbf{L}_2) \to \hat{\mathrm{X}}(\mathbf{L}_1)$ definida por

$$\hat{\mathrm{X}}(f)(P) = f^{-1}(P).$$

Una comprobación simple muestra que $\hat{\mathrm{X}}(f)$ es una flecha en Spec.

Dados $\mathrm{I}_{\mathsf{BDL}}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{BDL}$ y $\mathrm{I}_{\mathsf{Spec}}\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{Spec}$ los funtores identidad en BDL y Spec. Consideremos las transformaciones naturales $\hat{\sigma}\colon \mathrm{I}_{\mathsf{BDL}} \Rightarrow (\hat{\mathrm{D}} \circ \hat{\mathrm{X}})$ y $\hat{\epsilon}\colon \mathrm{I}_{\mathsf{Spec}} \Rightarrow (\hat{\mathrm{X}} \circ \hat{\mathrm{D}})$, donde

$$\hat{\sigma}(\mathbf{L}) = \sigma_{\mathbf{L}} \quad \text{y} \quad \hat{\epsilon}(X) = \epsilon_X$$

Teorema 1.6.8. *Los funtores* $\hat{\mathrm{X}}\colon \mathsf{BDL} \to \mathsf{Spec}$ *y* $\hat{\mathrm{D}}\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{BDL}$*, en conjunto con las transformaciones naturales* $\hat{\sigma}$ *y* $\hat{\epsilon}$ *establecen una equivalencia dual entre las categorías* BDL *y* Spec.

1.6.3 Isomorfismo entre Priest y Spec

Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley y la dualidad espectral para la categoría BDL es claro que existe una fuerte conexión entre las categorías Pries y Spec, en efecto, ambas categorías son isomorfas. En esta sección mostraremos brevemente este isomorfismo ya que estos resultados serán de gran utilidad en este trabajo . Para un tratado profundo de los resultados de esta sección referimos al lector a [6, 12]

Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio topológico de Priestley. Recordemos que $D(X)$ denota el conjunto de todos los clopen crecientes de $(X, \tau, \leq)$. Asimismo, la familia de abiertos crecientes de $(X, \tau, \leq)$ se denota $OpUp(X)$.

A continuación vamos a definir el funtor $(-)_*\colon \mathsf{Pries} \to \mathsf{Spec}$:

Objetos Dado $(X, \tau, \leq)$ un espacio topológico de Priestley, consideremos (X, τ_s) donde $\tau_s = OpUp(X)$. En sencillo verificar que el espacio topológico (X, τ_s) es un espacio topológico espectral, donde $\mathrm{KO}(X, \tau_s) = D(X)$ y $\mathrm{KO}(X, \tau_s)$ es una base para (X, τ_s). Por lo tanto,

$$(X, \leq, \tau)_* = (X, \tau_s)\,.$$

Flechas Si $f\colon (X_1, \tau_1, \leq_1) \to (X_2, \tau_2, \leq_2)$ es una flecha en la categoría Pries entonces la misma función definida entre los espacios espectrales asociados $f\colon (X_1, (\tau_s)_1) \to (X_2, (\tau_s)_2)$ es una función espectral. Por lo tanto, $f_* = f$.

A continuación vamos a definir el funtor $(-)^*\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{Pries}$:

Objetos Sea (X, τ) un espacio topológico espectral. Recordemos que el conjunto de todos los subconjuntos abiertos y compactos, denotado por $\mathrm{KO}(X, \tau)$, es una base para (X, τ) y además es cerrado bajo intersecciones finitas. Consideremos la familia de conjuntos

$$\Delta(X, \tau) = \{X \setminus U \colon U \in \mathrm{KO}(X, \tau)\}.$$

Construimos el espacio topológico de Priestley $(X, \tau^*, \leq_\tau)$ donde $\leq_\tau$ es el orden de especialización de (X, τ) y τ^* es la topología generada por la subbase $\mathrm{KO}(X, \tau) \cup \Delta(X, \tau)$. Notemos que $D(X, \tau^*) = \mathrm{KO}(X, \tau)$ y $\Delta(X, \tau^*) = \Delta(X, \tau)$. Definimos entonces

$$(X, \tau)^* = (X, \tau^*, \leq_\tau) .$$

Flechas Si (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son dos espacios espectrales y $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es una función espectral, entonces $f\colon (X_1, \tau_1^*, \leq_{\tau_1}) \to (X_2, \tau_2^*, \leq_{\tau_2})$ es una función continua y monótona. Así, $f^* = f$.

Teorema 1.6.9. *Los funtores* $(-)_*\colon \mathsf{Pries} \to \mathsf{Spec}$ *y* $(-)^*\colon \mathsf{Spec} \to \mathsf{Pries}$ *definen un isomorfismo entre las categorías* Pries *y* Spec.

1.7 Álgebras de Heyting débiles

En [19] Celani S. y Jansana R. desarrollan el estudio de una operacion binaria llamada propiamente *implicación estricta* definida sobre retículos distributivos acotados, obteniendo así una variedad de álgebras en el lenguaje intuicionista $\{\wedge, \vee, \to, 0, 1\}$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ cuyos miembros son llamados álgebras de Heyting débiles o WH-álgebras. Dicha variedad de álgebras generaliza diferentes variedades de álgebras tales como álgebras de Heyting, retículos subresiduados y algebras básicas, entre otras. En la presente sección recordaremos algunas definiciones elementales sobre la variedad de algebras de Heyting débiles y algunas de sus subvariedades que resultarán de interés en este trabajo.

Definición 1.7.1. *Un* álgebra de Heyting débil *ó* weak Heyting algebra *, es un algebra* $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 0, 0)$ *tal que* $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un retículo distributivo acotado y para cada* $a, b, c \in A$ *se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

(2) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.

(3) $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$.

(4) $a \to a = 1$.

En adelante, utilizaremos el nombre en inglés para esta clase de álgebras, es decir weak Heyting algebras. Para abreviar escribiremos la expresión A es una WH-álgebra en lugar de A es una weak Heyting algebra. La clase de WH-álgebras es una variedad, la cual será denotada por WH.

Sean $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$ y $a, b \in A$. Consideremos las siguientes condiciones:

(R) $a \wedge (a \to b) \leq b$.

(T) $a \to b \leq c \to (a \to b)$.

(B) $a \leq 1 \to a$.

Diremos que A es una RWH-algebra, si para cada $a, b \in A$ es válida la condición:

(R) $a \wedge (a \to b) \leq b$.

Es sencillo verificar que para cada RWH-álgebra se tiene que

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1.$$

Por lo tanto, $a = b$ si y sólo si $a \leftrightarrow b = 1$, donde $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$.

Una WH-álgebra A se dirá TWH-álgebra si para cada $a, b \in A$ satisface la condición

(T) $a \to b \leq c \to (a \to b)$.

Una álgebra básica es una WH-álgebra tal que para cada $a, b \in A$ satisface la condición

(B) $a \leq 1 \to a$.

Un retículo subresiduado [27] es un par (A, D), donde A es un retículo distributivo acotado, D es un subretículo acotado de A y para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{d \in D : d \wedge a \leq b\}$, el cual es denotado por $a \to b$. Es sencillo probar que $D = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}$. Notemos que los retículos subresiduados pueden considerarse como álgebras $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$. Más aún, se sigue de los resultados de [19, 27] que un álgebra es un retículo subresiduado si y sólo si es una RWH-álgebra que satisface la condición (T).

En este trabajo nos centraremos en las subvariedades

1) RWH = WH + {R}.

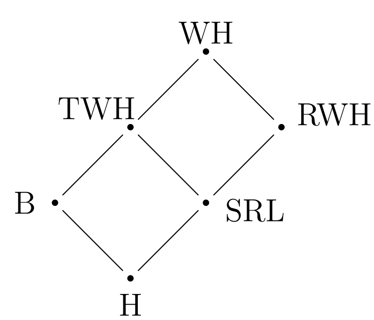
2) TWH = WH + {T}.

3) SRL = WH + {R,T}.

4) B = WH + {B}.

5) H = WH + {B,R,T} = WH + {B,R}.

Escribiremos RWH, TWH, SRL, B y H para denotar las variedades de RWH-álgebras, TWH-álgebras, retículos subresiduados, álgebras básicas y álgebras de Heyting respectivamente. Es sencillo probar que las variedades mencionadas están ordenadas, vía la relación de inclusión, obteniendose el siguiente retículo de subvariedades de la variedad WH:



1.7.1 Representación de WH-álgebras por WH-marcos

En la presente sección recordaremos la representación por marcos de Kripke para las álgebras de Heyting y extenderemos dicho resultado a la variedad WH y las subvariedades que hemos mencionado previamente.

Definición 1.7.2. *Una estructura* $(X, \leq)$ *se dirá* marco de Kripke *si* X *es un conjunto no vacío y* $\leq$ *es una relación de orden parcial.*

Sea $\mathcal{F} = (X, \leq)$ un marco de Kripke. Sobre el conjunto $\mathrm{Up}(X)$ definimos el álgebra

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, X),$$

donde la operación $U \Rightarrow V$ se define de la siguiente manera

$$U \Rightarrow V = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\}.$$

Unos simples cálculos permiten mostrar que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ es un álgebra de Heyting. Por otro lado si $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting entonces la estructura $\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \subseteq)$ es un marco de Kripke.

Definición 1.7.3. *Sea* A *un álgebra de Heyting. La estructura* $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ *es el* marco de Kripke *asociado a* A.

Sea A un álgebra de Heyting. El marco de Kripke asociado al álgebra A permite establecer una representación de A por medio de la aplicación de Stone $\sigma_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \rightarrow \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$.

Teorema 1.7.4. *Toda álgebra de Heyting* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra del álgebra asociada al marco de Kripke* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$

Es posible extender la representación de álgebras de Heyting a variedades de álgebras más generales tales como tales como WH-álgebras. Para esto se requieren estructuras relacionales más complejas que los marcos de Kripke.

Definición 1.7.5. *Diremos que una estructura relacional* $\mathcal{F} = (X, \leq, S)$ *es un* WH-marco *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) $(X, \leq)$ *es un marco de Kripke.*

(2) $\leq \circ S \subseteq S$.

Unos cálculos directos muestran que si $\mathcal{F}$ es un WH-marco entonces el álgebra asociada al WH-marco, definida por

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Rightarrow_S, \emptyset, X)\,,$$

es una WH-álgebra, donde la implicación $\Rightarrow_S$ está definida de la siguiente manera

$$U \Rightarrow_S V = \{x \in X : S(x) \cap U \subseteq V\}.$$

Definición 1.7.6. *Dado* $\mathcal{F} = (X, \leq, S)$ *un WH-marco. Diremos que* $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ *es la* WH-álgebra asociada al WH-marco $\mathcal{F}$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$. Definimos la relación binaria $S_{\mathbf{A}}$ sobre $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ de siguiente manera

$$(F, G) \in S_{\mathbf{A}} \text{ si y sólo si } \forall(a, b \in A)[a \to b \in F, a \in G \text{ entonces } b \in G] \tag{1.4}$$

Sean $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$, $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y $X \subseteq A$ entonces es posible definir el operador de clausura $D_F \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$

$$D_F(X) = \left\{a \in A \colon \exists Y \subseteq_f X \colon \bigwedge Y \to a \in F\right\},$$

donde $\bigwedge Y$ es el ínfimo de los elementos del subconjunto Y, el cuál siempre está definido ya que Y es un subconjunto finito. Además, si $Y = \emptyset$, diremos que $\bigwedge Y = 1$.

Proposición 1.7.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$*,* $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ *y* $X \subseteq A$*, entonces*

(1) $D_F(X)$ *es un filtro de* $\mathbf{A}$

(2) $(F, D_F(X)) \in S_{\mathbf{A}}$*. Más aún,* $D_F(X)$ *es el menor filtro* G *tal que* $X \subseteq G$ *y* $(F, G) \in S_{\mathbf{A}}$*.*

(3) $(F, G) \in S_{\mathbf{A}}$ *si y sólo si* $D_F(G) = G$

Demostración. Ver [19, Proposición 3.4]. □

El siguiente resultado se encuentra en [19, Lema 3.7] y brinda una generalización del teorema del filtro primo para retículos distributivos que resulta fundamental para establecer un teorema de representación de WH-algebras por medio de WH-marcos.

Teorema 1.7.8. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$*,* $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$*,* $I \in \mathrm{Id}(\mathbf{A})$ *y* $X \subseteq A$ *un subconjunto del universo de* $\mathbf{A}$ *tales que* $D_F(X) \cap I = \emptyset$*. Entonces existe* $P \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $X \subseteq P$*,* $(F, P) \in S_{\mathbf{A}}$ *y* $P \cap I = \emptyset$*.*

Corolario 1.7.9. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$*,* $P \in X(\mathbf{A})$ *y* $a, b \in A$*. Entonces* $a \to b \in P$ *si y sólo si para cada* $Q \in X(\mathbf{A})$*, si* $(P, Q) \in S_{\mathbf{A}}$ *y* $a \in Q$*, entonces* $b \in Q$*.*

Corolario 1.7.10. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$*,* $P, D \in X(\mathbf{A})$ *y* $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$*. Si* $D_P(F) \subseteq D$ *entonces existe* $Q \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $(P, Q) \in S_{\mathbf{A}}$*,* $F \subseteq Q$ *y* $Q \subseteq D$

Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$. Consideremos la estructura

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \subseteq_{\mathbf{A}}, S_{\mathbf{A}})$$

donde $S_{\mathbf{A}}$ es la relación definida en 1.4. Es sencillo verificar que $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ es un WH-marco.

Definición 1.7.11. *Sea* A *una WH-álgebra. Diremos que la estructura relacional* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ *es el* WH-marco asociado a la WH-álgebra A.

Nuevamente utilizando la aplicación de Stone $\sigma_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \to \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$ se tiene el siguiente Teorema de representación para WH-algebras:

Teorema 1.7.12. *Toda WH-álgebra* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra del álgebra asociada a su WH-marco canónico via la aplicación de Stone* $\sigma_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \to \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$*.*

Demostración. ver [19, Teorema 3.14]

□

Representacion para subvariedades: En este apartado mostraremos de que manera se puede especializar el Teorema 1.7.12 a las subvariedades RWH, TWH, SRL, B y H respectivamente.

Lema 1.7.13. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$. *Entonces*

(1) *La ecuación* (R) *es válida en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $S_{\mathbf{A}}$ *es reflexiva.*

(2) *La ecuación* (T) *es válida en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $S_{\mathbf{A}}$ *es transitiva.*

Demostración. Ver [19, Proposición 4.17] □

El siguiente resultado es una prueba alternativa del [19, Corolario 4.19]:

Lema 1.7.14. *Sea* $\mathcal{F} = (X, \leq, S)$ *un WH-marco modal. Entonces*

(1) *La relación* S *es reflexiva si y sólo si la ecuación* (R) *es válida sobre* $\mathcal{A}(\mathcal{F})$

(2) *La relación* S *es transitiva si y sólo si la ecuación* (T) *es válida sobre* $\mathcal{A}(\mathcal{F})$

Demostración. $1 \Rightarrow)$ Supongamos que la relación S es reflexiva, probaremos que para cada $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se verifica $U \cap (U \Rightarrow_S V) \subseteq V$. Sea $x \in U \cap (U \Rightarrow_S V)$, se sigue que $x \in U$ y $S(x) \cap U \subseteq V$. Ya que S es reflexiva, se sigue que $x \in S(x) \cap U \subseteq V$ de donde $x \in V$ como queríamos mostrar.

$\Leftarrow)$ Por contraposición supongamos que S no es reflexiva, es decir, existe un elemento $x \in X$ tal que $(x, x) \notin S$. Buscaremos un par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que $U \cap (U \Rightarrow_s V) \nsubseteq V$. Consideremos $U = [x)$ y $V = (x]^c$. Es claro que $x \in U$, veamos que $x \in U \Rightarrow_S V$. En efecto, sea $y \in S(x) \cap U$ entonces $(x, y) \in S$ y $x \leq y$. Si $y \notin V$ entonces $y \leq x$ de donde se sigue que $x = y$ y $(x, x) \in S$, lo que resulta imposible. Por lo tanto, $y \in V$ y se sigue que $x \in U \cap (U \Rightarrow_S V)$. Pero además, $x \leq x$ de donde se sigue que $x \notin V$. Así, la ecuación (R) no es válida en $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

$2 \Rightarrow)$ Supongamos que la relación S es transitiva, probaremos que para cada U, V y $W \in \mathrm{Up}(X)$ se verifica $U \Rightarrow_S V \subseteq W \Rightarrow_S (U \Rightarrow_S V)$. Sea $x \in U \Rightarrow_S V$ y sea $y \in S(x) \cap W$ veamos que $S(y) \cap U \subseteq V$. Sea $z \in S(y) \cap U$, se sigue que $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in S$. Ya que S es transitiva, se sigue que $(x, z) \in S$, por lo tanto $z \in S(x) \cap U$. Dado que $x \in U \Rightarrow_S V$ se sigue que $z \in V$. Así, $x \in W \Rightarrow_S (U \Rightarrow_S V)$.

$\Leftarrow)$ Por contraposición supongamos que la relación S no es transitiva, es decir, existen $x, y, z \in S$ tal que $(x, y) \in S$, $(y, z) \in S$ y $(x, z) \notin S$. Buscaremos conjuntos U, V y $W \in \mathrm{Up}(X)$ tal que $U \Rightarrow_S V \nsubseteq W \Rightarrow_S (U \Rightarrow_S V)$. Consideremos los conjuntos $U = [z)$, $V = (z]^c$ y $W = [y)$. Probaremos que $x \in U \Rightarrow_S V$ y $x \notin W \Rightarrow_S (U \Rightarrow_S V)$. En efecto, sea $a \in S(x) \cap U$, entonces $(x, a) \in S$ y $z \leq a$. Notemos que $a \in V$, de lo contrario, si $a \in V^c$ se sigue que $a \leq z$, es decir, $a = z$ y $(x, z) \in S$, lo que es una contradición. Así, $x \in U \Rightarrow_S V$. Por otro lado, notemos que $y \in S(x) \cap W$. Sin embargo, ya que $z \in S(y) \cap U$ y $z \notin V$, se sigue que $y \notin U \Rightarrow_S V$, por lo tanto, $x \notin W \Rightarrow_S (U \Rightarrow_S V)$. □

Combinando los Lemas 1.7.13 y 1.7.14 con el Teorema 1.7.12 se tiene el siguiente Corolario:

Corolario 1.7.15. *Toda RWH-álgebra* $\mathbf{A}$ *(TWH-álgebra, retículo subresiduado) es isomorfa a una subálgebra de la RWH-álgebra (TWH-álgebra, retículo subresiduado) asociada a* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$

A continuación estudiaremos la representación para algebras básicas.

Lema 1.7.16. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$ *y* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ *su WH-marco asociado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La ecuación (B) es válida sobre* $\mathbf{A}$

(2) *Para cada* $P, Q \in X(\mathbf{A})$*, si* $(P, Q) \in S_{\mathbf{A}}$ *entonces* $P \subseteq Q$

Demostración. Ver [19, Proposición 4.20] □

El siguiente resultado es una prueba alternativa de [19, Corolario 4.21]

Lema 1.7.17. *Sea* $\mathcal{F} = (X, \leq, S)$ *un WH-marco. Entonces, son equivalentes:*

(1) *La relación* S *está contenida en la relación de orden parcial* $\leq$

(2) *La ecuación (B) es válida sobre el álgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{F})$

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que la relación S está contenida en la relación de orden parcial $\leq$, mostraremos que para cada $U \in \mathrm{Up}(X)$ se verifica $U \subseteq X \Rightarrow_S U$. En efecto, sea $x \in U$ y sea $y \in S(x)$. Ya que S está contenida en la relación de orden $\leq$, se sigue que $x \leq y$. Teniendo en cuenta que U es un conjunto creciente, se sigue que $y \in U$. Así, $x \in X \Rightarrow_S U$.

$2 \Rightarrow 1)$ Por contraposición, asumiremos que la relación S no está contenida en la relación de orden $\leq$, es decir, existe un par $(x, y) \in S$ y $x \nleq y$. Probaremos que la ecuación (B) no es válida en el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Consideremos el conjunto $U = (y]^c$. Es inmediato notar que $x \in U$. Asimismo, $x \notin X \Rightarrow_S U$, en efecto, ya que $y \leq y$ se sigue que $y \in S(x) \setminus U$. Por lo tanto, la ecuación (B) no es válida sobre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. □

Combinando los Lemas 1.7.16 y 1.7.17 con el Teorema 1.7.12 tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 1.7.18. *Toda álgebra básica* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra básica del álgebra asociada a su WH-marco canónico.*

Observación 1.7.19. Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ una WH-álgebra y $\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), S_{\mathbf{A}}, \subseteq)$ su WH-marco canónico. Notemos que si la ecuación (R) es válida sobre A entonces la relación de orden $\subseteq$ está contenida en la relación $S_{\mathbf{A}}$. Asimismo, por el Lema 1.7.16 se sigue que $S_{\mathbf{A}}$ está contenida en la relación de orden $\subseteq$. En particular, si las ecuaciones (R) y (B) son válidas sobre A entonces A es un álgebra de Heyting y además $S_{\mathbf{A}} = \subseteq$. Así, se sigue que sobre álgebras de Heyting, la noción de WH-marco colapsa a la noción de marco de Kripke usual.

Capítulo 2

Álgebras de Heyting débiles con operadores

En la literatura, la lógica modal intuicionista ha sido ampliamente estudiada desde diferentes enfoques. En particular, mediante el uso de técnicas y herramientas propias del estudio de la lógica modal clásica se han desarrollado semánticas relacionales para diversas lógicas modales intuicionistas, caracterizando así a dichas lógicas como el conjunto de todas las fórmulas válidas en todos los modelos de Kripke dotados de ciertas relaciones binarias (ver, por ejemplo [8, 26, 29, 32]).

Desde un enfoque algebraico, se sabe que la semántica algebraica para la lógica intuicionista está determinada por la variedad de las álgebras de Heyting (ver [30, 46]). Existen diferentes trabajos ([29, 44, 53], entre otros) en los cuales se introducen expansiones modales para la lógica intuicionista, llamadas propiamente lógicas intuicionistas modales, probando además que dichas lógicas tienen como contraparte algebraica subvariedades de la variedad de álgebras de Heyting dotadas de operadores unarios, los cuales son llamados operadores modales. Desde este punto de vista, el estudio de variedades de álgebras de Heyting dotadas de operadores unarios cobra un grán interés. En particular, el estudio de la representación de álgebras de Heyting modales, permite relacionar la semántica algebraica y la semántica relacional estableciendo así conexiones entre las estructuras que permiten modelar lógicas intuicionistas modales.

Siguiendo esta línea, y teniendo en cuenta que las lógicas subintuicionistas tienen como contrapartida algebraica subvariedades de la variedad de las WH-álgebras (ver [7, 18]), en el presente capítulo estudiaremos operadores unarios definidos sobre la variedad de WH-álgebras. En particular estudiaremos la representación de WH-álgebras con operadores unarios por medio de cierta clase de WH-marcos dotados de relaciones binarias que permiten dar una interpretación a los operadores. En el desarrollo de este capítulo se combinan resultados propios de la representación de WH-álgebras por WH-marcos y de la representación de retículos distributivos acotados dotados dotados de operadores unarios por medio de estructuras relacionales. Es por esto que comenzaremos este capítulo recordando dichos resultados.

2.1 Retículos modales

En la presente sección recordaremos algunas definiciones y resultados elementales sobre operadores unarios definidos en retículos distributivos acotados y álgebras de Heyting. Comentaremos brevemente algunas lógicas para las cuales su semántica algebraica esta basada en retículos modales, tales como lógicas modales positivas o lógicas intuicionistas modales. En particular, analizaremos la interacción de los operadores unarios con la implicación intuicionista.

Sean $\mathbf{A}$ un retículo distributivo acotado y $f\colon A^n \to A$. Diremos que f es un operador si preserva supremos (o ínfimos) en cada coordenada. En particular, si $f\colon A \to A$, diremos que f es un operador unario. Siguiendo la terminología de [23] diremos que un operador unario $\Box\colon A \to A$ es un ínfimo homomorfismo si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Box 1 = 1$.

2) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Asimismo, diremos que un operdor unario $\Diamond\colon A \to A$ es un supremo homomorfismo si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Diamond 0 = 0$.

2) $\Diamond(a \vee b) = \Diamond(a) \vee \Diamond(b)$.

Definición 2.1.1. *Un* retículo modal *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \Box, \Diamond, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ *donde* $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un retículo distributivo acotado,* $\Box$ *es un ínfimo homomorfismo y* $\Diamond$ *es un supremo homomorfismo.*

Escribiremos ML para denotar la variedad de retículos modales (ver [13, 14, 48, 49]). Es inmediato notar que si $\mathbf{A}$ es un retículo modal entonces los operadores $\Box$ y $\Diamond$ resultan monótonos i.e. para cada $a, b \in A$ si $a \leq b$ entonces $\Box a \leq \Box b$ y $\Diamond a \leq \Diamond b$.

Existen diferentes estructuras algebraicas que tienen un reducto de retículo modal. A continuación brindamos algunos ejemplos de dichas estructuras:

a) Un retículo modal $\mathbf{A}$ se dirá álgebra modal positiva (ver [16, 17]) si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

   1) $\Box(a \vee b) \leq \Box a \vee \Diamond b$.
   2) $\Box a \wedge \Diamond b \leq \Diamond(a \wedge b)$.

   Es sencillo verificar que la clase de álgebras conformada por las álgebras modales positivas es una subvariedad propiamente contenida en la variedad ML. La variedad de algebras modales positivas conforman la semántica algebraica de la lógica modal positiva la cual resulta al considerar el fragmento sin negación de la consecuencia local definida por la clase de modelos de Kripke.

b) Una estructura $(\mathbf{B}, G, H)$ se dirá álgebra temporal si $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole y G, H son operadores unarios definidos sobre $\mathbf{B}$ tales que para cada $a, b \in B$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $G(1) = H(1) = 1$.
2) $G(a \wedge b) = G(a) \wedge G(b)$ y $H(a \wedge b) = H(a) \wedge H(b)$.
3) $a \leq G(\neg(H(\neg a))$ y $a \leq H(\neg(G(\neg a))$.

Es claro que los operadores G y H resultan ínfimo homomorfismos. Asimismo, se definen sus operadores duales $P(a) = \neg H(\neg a)$ y $F(a) = \neg G(\neg a)$ respectivamente. Es sencillo verificar que los operadores P y F resultan supremo homomorfismos. Se sigue que la clase álgebras conformada por las álgebras temporales es una variedad y además resulta ser la semántica algebraica de la menor lógica temporal $\mathbf{K}_t$ (ver [37]). Es claro que para cada álgebra temporal $(\mathbf{B}, H, G)$ se tiene como reducto un retículo modal.

c) Una IK-*álgebra* es una estructura $\mathbf{A} = (A, \rightarrow, \Box, \Diamond)$, donde $(A, \rightarrow)$ es un álgebra de Heyting, $(A, \Box, \Diamond)$ es un retículo modal y además para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Diamond(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Diamond b$.
2) $\Diamond a \rightarrow \Box b \leq \Box(a \rightarrow b)$.

La lógica intuicionista modal básica IK (ver [32, 36, 42, 43, 44, 45, 50]) es una lógica análoga a la lógica modal normal clásica K basada en la lógica intuicionista. La semántica algebraica de la lógica IK es determinada por la clase de IK-álgebras.

Teniendo en cuenta que toda IK-álgebra es en particular un álgebra de Heyting, puede probarse que para cada $a, b \in A$ la condición $\Diamond(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Diamond b$ es equivalente a diferentes condiciones como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 2.1.2. *Sean* $\mathbf{A}$ *un álgebra de Heyting,* $\Box\colon A \rightarrow A$ *un ínfimo homomorfismo y* $\Diamond\colon A \rightarrow A$ *un supremo homomorfismo. Entonces para cada* $a, b \in A$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Diamond a \wedge \Box b \leq \Diamond(a \wedge b)$.

(2) $\Box(a \rightarrow b) \leq \Diamond a \rightarrow \Diamond b$.

(3) $\Box(a \rightarrow b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$.

(4) $\Diamond(a \rightarrow b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$.

(5) $\Diamond(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Diamond b$

Demostración. Notemos que las condiciones (2) y (3) son trivialmente equivalentes debido a la ley de residuación. Asimismo, las condiciones (4) y (5) son trivialmente equivalentes. Por lo tanto, será suficiente comprobar que las condiciones (1) y (2) son equivalentes y las condiciones (1) y (5) también lo son.

$1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que la condición (1) es válida para cada $a, b \in A$. En particular, tenemos que
$$\Diamond a \wedge \Box(a \rightarrow b) \leq \Diamond(a \wedge (a \rightarrow b)).$$

Más aún, dado que la ecuación $a \wedge (a \to b) \leq b$ es válida sobre toda álgebra de Heyting y $\Diamond$ es un operador monótono se sigue que

$$\Diamond a \wedge \Box(a \to b) \leq \Diamond(a \wedge (a \to b)) \leq \Diamond b.$$

Así, $\Diamond a \wedge \Box(a \to b) \leq \Diamond b$. Teniendo en cuenta la ley de residuación se sigue la ecuación (2).

$2 \Rightarrow 1)$ Supongamos que la condición (2) es válida. Sean $a, b \in A$. Teniendo en cuenta que $b \leq a \to b$ y $a \to b = a \to (a \wedge b)$ se sigue que

$$\Box b \leq \Box(a \to b) = \Box(a \to (a \wedge b)) \leq \Diamond a \to \Diamond(a \wedge b).$$

Por lo tanto, $\Diamond a \wedge \Box b \leq \Diamond(a \wedge b)$.

$1 \Rightarrow 5)$ Supongamos que la condición (1) es válida. Sean $a, b \in A$, se sigue que

$$\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond((a \to b) \wedge a).$$

Dado que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$ y $\Diamond$ es un operador monótono se sigue que

$$\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond(a \wedge b) \leq \Diamond b,$$

por lo tanto

$$\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b.$$

$5 \Rightarrow 1)$ Supongamos que la condición (5) es válida. Sean $a, b \in A$. Dado que $\mathbf{A}$ es un álgebra de Heyting se sigue que

$$a \leq b \to a = b \to (a \wedge b),$$

Dado que $\Diamond$ es monótono se sigue que $\Diamond a \leq \Diamond(b \to (a \wedge b))$. Teniendo en cuenta nuestra hipótesis se sigue que

$$\Diamond a \leq \Diamond(b \to (a \wedge b)) \leq \Box b \to \Diamond(a \wedge b),$$

Nuevamente por la ley de residuación se sigue que $\Diamond a \wedge \Box b \leq \Diamond(a \wedge b)$. $\Box$

2.1.1 Representación de retículos modales

Como hemos mencionado en el comienzo de este capítulo, los modelos que se utilizan para el estudio de la lógica modal intuicionista están principalmente basados en dos tipos de estructuras, a saber: estructuras algebraicas, las cuales son llamadas álgebras de Heyting modales, y estructuras relacionales, conocidas como marcos de Kripke modales. La representación de álgebras por medio de estructuras relacionales permite establecer conexiones entre ambas estructuras.

El objetivo de la presente sección es recordar algunos resultados sobre marcos de Kripke modales (ver [8, 14, 16, 32, 44] entre otros). En particular, recordaremos la representación de retículos modales por medio de dichas estructuras.

Definición 2.1.3. *Una estructura relacional* $(X, \leq, R, T)$ *se dirá* marco de Kripke modal *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $(X, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

(2) $\leq \circ R \circ \leq = R \circ \leq$.

(3) $\leq^{-1} \circ\ T\ \circ \leq^{-1} = T \circ \leq^{-1}$.

En ([8, 31, 44], entre otros) se prueba que las condiciones (2) y (3) de la Definición 2.1.3 resultan equivalentes a las siguientes condiciones:

$$\leq \circ R \subseteq R \circ \leq \quad \text{y} \quad \leq^{-1} \circ T \subseteq T \circ \leq^{-1},$$

respectivamente.

Definición 2.1.4. *Sean $\mathcal{F} = (X, \leq, R, T)$ un marco de Kripke modal y $U \in \mathrm{Up}(X)$. Definimos los operadores*

$$\Box_R(U) = \{x \in X \colon R(x) \subseteq U\} \quad y \quad \Diamond_T(U) = \{x \in X \colon T(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

El siguiente resultado es [44, Proposición 2.0.8]:

Lema 2.1.5. *Sean $\mathcal{F}$ un marco de Kripke modal y $U \in \mathrm{Up}(X)$. Entonces*

(1) $\Box_R(U) \in \mathrm{Up}(X)$ *si y sólo si* $\leq \circ\ R \subseteq R \circ \leq$.

(2) $\Diamond_T(U) \in \mathrm{Up}(X)$ *si y sólo si* $\leq^{-1} \circ\ T \subseteq T \circ \leq^{-1}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de (1), la prueba para (2) es análoga. Supongamos que para cada $U \in \mathrm{Up}(X)$ es válido que $\Box_R(U) \in \mathrm{Up}(X)$ probaremos que $\leq \circ R \subseteq R \circ \leq$. Por absurdo, supongamos que existe un par (x, y) de manera tal que $(x, y) \in\ \leq \circ R$ y $(x, y) \notin R \circ \leq$. Se sigue entonces que existe un $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $(z, y) \in R$ y para cada $t \in X$ se sigue que $(x, t) \notin R$ o bien $t \nleq y$, por lo tanto se tiene que $x \in \Box_R((y]^c)$. Por nuestra hipótesis tenemos que $\Box_R((y]^c)$ es un conjunto creciente y $x \in \Box_R((y]^c)$ por lo tanto $z \in \Box_R((y]^c)$. Ya que $y \in R(z)$ tenemos que $y \nleq y$ lo que es una contradicción. Así, tenemos que $\leq \circ R \subseteq R \circ \leq$.

Recíprocamente supongamos que $\leq \circ R \subseteq R \circ \leq$ y $U \in \mathrm{Up}(X)$. Probaremos que $\Box_R(U) \in \mathrm{Up}(X)$. Sea $x \in \Box_R(U)$ y $x \leq y$. Si $z \in R(y)$ entonces $(x, z) \in\ \leq \circ R$ luego por nuestra hipótesis tenemos que $(x, z) \in R \circ \leq$ i.e., existe $t \in X$ tal que $(x, t) \in R$ y $t \leq z$. Ya que $x \in \Box_R(U)$ tenemos que $t \in U$ por lo tanto $z \in U$. Así $y \in \Box_R(U)$. $\Box$

Asimismo consideremos las relaciones

$$R_\Box := R \circ \leq \quad \text{y} \quad R_\Diamond := T \circ \leq^{-1}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.6. *Sea $\mathcal{F} = (X, \leq, R, T)$ un marco de Kripke modal y $U \in \mathrm{Up}(X)$. Entonces*

(1) $\Box_R(U) = \Box_{R_\Box}(U)$.

(2) $\Diamond_T(U) = \Diamond_{R_\Diamond}(U)$.

Demostración. Sólo haremos la prueba para (1) ya que la prueba de (2) es análoga. Sea $U \in \mathrm{Up}(X)$ y sea $x \in \Box_R(U)$ mostraremos que $R_\Box(x) \subseteq U$. En efecto, sea $y \in R_\Box(x)$. Se sigue de la definición de $R_\Box$ que existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in R$ y además $z \leq y$. Teniendo en cuenta que $x \in \Box_R(U)$ se sigue que $z \in U$. Usando que U es creciente se sigue que $y \in U$. Recíprocamente, consideremos $x \in \Box_{R_\Box}(U)$ probaremos que $R(x) \subseteq U$. Sea $y \in R(x)$. Por la reflexividad de la relación de orden parcial $\leq$ se sigue que $(x, y) \in R_\Box$. Usando que $R_\Box(x) \subseteq U$ se sigue que $y \in U$, como queríamos probar. Así, $\Box_R(U) = \Box_{R_\Box}(U)$. $\Box$

Sea $\mathcal{F} = (X, \leq, R, T)$ un marco de Kripke modal. Combinando los resultados del Lema 2.1.5 y el Lema 2.1.6 se sigue que la estructura

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \big(\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Box_{R_\Box}, \Diamond_{R_\Diamond}, \emptyset, X\big)$$

es un álgebra en el lenguaje de los retículos modales.

Lema 2.1.7. *Sea $\mathcal{F}$ un marco de Kripke modal. Entonces $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ es un retículo modal.*

Demostración. Es sencillo verificar que el álgebra

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)\,,$$

es un retículo distributivo acotado. Sólo será necesario verificar que el operador $\Box_{R_\Box}$ es un ínfimo homomorfismo y el operador $\Diamond_{R_\Diamond}$ es un supremo homomorfismo. En efecto:

1) Veamos primero que $\Box_{R_\Box}(X) = X$. Es inmediato notar que $\Box_{R_\Box}(X) \subseteq X$. Por otro lado, dado $x \in X$ se sigue que $R_\Box(x) \subseteq X$, de donde se sigue que $X \subseteq \Box_{R_\Box}(X)$. Así, $\Box_{R_\Box}(X) = X$.

2) Dados $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se sigue que

$$\begin{aligned} x \in \Box_{R_\Box}(U \cap V) \quad &\text{si y sólo si} \quad R_\Box(x) \subseteq U \cap V \\ &\text{si y sólo si} \quad R_\Box(x) \subseteq U \text{ y } R_\Box(x) \subseteq V \\ &\text{si y sólo si} \quad x \in \Box_{R_\Box}(U) \cap \Box_{R_\Box}(V). \end{aligned}$$

Una prueba análoga puede hacerse para mostrar que $\Diamond_{R_\Diamond}$ es un supremo homomorfismo. Concluimos entonces que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ es un retículo modal. $\Box$

Definición 2.1.8. *Dado $\mathcal{F}$ un marco de Kripke modal. Diremos que la estructura $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ es el* retículo modal asociado al marco $\mathcal{F}$.

Sea A un retículo modal. Consideremos la estructura

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \subseteq, R_\Box, R_\Diamond),$$

donde las relaciones $R_\Box$ y $R_\Diamond$ se definen de la siguiente manera:

$$(P, Q) \in R_\Box \text{ si y sólo si } (\forall a \in A)[\Box a \in P \Rightarrow a \in Q]. \tag{2.2}$$

$$(P, Q) \in R_\Diamond \text{ si y sólo si } (\forall a \in A)[a \in Q \Rightarrow \Diamond a \in P]. \tag{2.3}$$

Dado A un retículo modal y $P \in X(\mathbf{A})$. Definimos los conjuntos

$$\Box^{-1}(P) = \{a \in A \colon \Box a \in P\} \quad \text{y} \quad \Diamond^{-1}(P) = \{a \in A \colon \Diamond a \in P\}$$

Unos simples cálculos nos permiten verificar que para cada filtro primo P el conjunto $\Box^{-1}(P)$ es un filtro y el conjunto $\Diamond^{-1}(P)$ es un co-ideal, es decir, su complemento es un ideal. Además, sigue que las relaciones dadas en 2.2 y 2.3 pueden reescribirse de una forma más clara:

$$(P, Q) \in R_\Box \text{ si y sólo si } \Box^{-1}(P) \subseteq Q \quad \text{y} \quad (P, Q) \in R_\Diamond \text{ si y sólo si } Q \subseteq \Diamond^{-1}(P),$$

respectivamente.

Lema 2.1.9. *Si* A *un retículo modal entonces la estructura* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ *es un marco de Kripke modal.*

Demostración. Es inmediato que $(X(\mathbf{A}), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos ahora las condiciones (2) y (3) de la Definición 2.1.3. Para probar (2), bastará con probar que $\subseteq \circ R_\Box \subseteq R_\Box \circ \subseteq$. En efecto, supongamos que $(P, Q) \in \subseteq \circ R_\Box$ de donde se sigue que $P \subseteq Z$ y $\Box^{-1}(Z) \subseteq Q$ para algún $Z \in X(\mathbf{A})$. Sea $a \in \Box^{-1}(P)$, se sigue que $\Box a \in Z \subseteq Q$ de donde se sigue que $a \in Q$, por lo tanto $(P, Q) \in R_\Box$. De la reflexividad de la inclusión se sigue que $(P, Q) \in R_\Box \circ \subseteq$. La prueba para la propiedad (3) es análoga. □

Definición 2.1.10. *Dado* A *un retículo modal. Diremos que la estructura* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ *es el* marco de Kripke modal *asociado a* A.

Proposición 2.1.11. *Sea* A *un retículo modal y* $P \in X(\mathbf{A})$. *Entonces*

(1) $\Box a \notin P$ *si y sólo si existe* $Q \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $(P, Q) \in R_\Box$ *y* $a \notin Q$.

(2) $\Diamond a \in Q$ *si y sólo si existe* $Q \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $(P, Q) \in R_\Diamond$ *y* $a \in Q$.

Demostración. Haremos la prueba de (1) ya que la prueba para (2) es análoga. Comenzaremos asumiendo que $\Box a \notin P$ de donde se sigue que $a \notin \Box^{-1}(P)$. Teniendo en cuenta que $\Box^{-1}(P)$ es un filtro, se sigue entonces que $\Box^{-1}(P) \cap (a] = \emptyset$. Por el Teorema del filtro primo para retículos distributivos acotados existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $a \notin Q$, es decir $(P, Q) \in R_\Box$ y $a \notin Q$. Recíprocamente, supongamos que existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $a \notin Q$. Se sigue que $a \notin \Box^{-1}(P)$ y por lo tanto $\Box a \notin P$. □

Sean A un retículo modal y $\sigma_\mathbf{A}$ la aplicación de Stone. Como consecuencia de la Proposición 2.1.11 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.1.12. *Sean* A *un retículo modal,* $a \in A$ *y* $\sigma_\mathbf{A}$ *la aplicación de Stone. Entonces*

(1) $\sigma_\mathbf{A}(\Box a) = \Box_{R_\Box}(\sigma_\mathbf{A}(a))$.

(2) $\sigma_\mathbf{A}(\Diamond a) = \Diamond_{R_\Diamond}(\sigma_\mathbf{A}(a))$.

Teniendo en cuenta el Corolario 2.1.12 y el hecho de que la aplicación de Stone $\sigma_\mathbf{A}$ es un monomorfismo de retículos distributivos acotados tenemos el siguiente

Corolario 2.1.13. *Todo retículo modal* A *es isomorfo a una subálgebra del álgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$. *Dicho isomorfismo está determinado por la aplicación de Stone* $\sigma_\mathbf{A}$.

2.2 Operadores unarios sobre WH-álgebras

El Lema 2.1.2 muestra que, en el contexto de la variedad de álgebras de Heyting, existen diferentes condiciones que resultan equivalentes. Esto se debe fuertemente a la ley de residuación. Naturalmente surge el problema de estudiar la interacción del conectivo de implicación estricta con los operadores unarios en un contexto más general en el cual la ley de residuación no sea válida. Teniendo en cuenta que la variedad de álgebras de Heyting está contenida propiamente en la variedad de las WH-álgebras, en la presente sección estudiaremos operadores unarios definidos sobre WH-álgebras. Analizaremos la interacción de dichos operadores con el conectivo de implicación estricta, obteniendo así algunas subvariedades que resultan del estudio de dicha interacción. Asimismo, combinando los resultados sobre la representación de WH-álgebras y la representación para retículo modales, estudiaremos la representación de WH-álgebras con operadores.

Definición 2.2.1. *Diremos que un álgebra* $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$ *es una* WH-álgebra con operadores *o* WHO-álgebra*, si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(1) $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ *es una WH-álgebra.*

(2) $(A, \Box, \Diamond)$ *es un retículo modal.*

Se sigue de la Definición 2.2.1 que la clase de álgebras conformada por WHO-álgebras es una variedad y escribiremos WHO para denotarla. Esta variedad de álgebras generaliza diferentes estructuras que hemos mencionado previamente. Por ejemplo, diremos que una WHO-álgebra **A** es una KWHO-álgebra si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

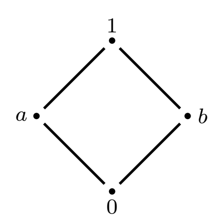
- $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.
- $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$.

Asimismo, diremos que una KWHO-álgebra **A** es una FSWHO-álgebra si para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$.
- $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$.

Notemos que, por el Lema 2.1.2, si $(\mathbf{A}, \to, \Box, \Diamond)$ es un álgebra donde $(\mathbf{A}, \to)$ es un álgebra de Heyting y $(\mathbf{A}, \Box, \Diamond)$ es un retículo modal entonces la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ es equivalente a la ecuación $\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$. Desde este punto de vista, parece que la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ es redundante en la definición de FSWHO-álgebras. Sin embargo, este hecho no es necesariamente verdadero en el contexto de la variedad WHO. A continuación veremos algunos ejemplos de WHO-álgebras para los cuales las equivalencias de las identidades del Lema 2.1.2 no son necesariamente ciertas.

Ejemplo 1. Consideremos $(\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1\})$ el retículo distributivo acotado de 4 elementos:



Teniendo en cuenta la implicación $\to\colon A \times A \to A$ definida por $x \to y = 1$ para cada $x, y \in A$. Se sigue que $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1\})$ es una WH-álgebra. Consideremos los operadores

x	$\Box x$	$\Diamond x$
0	0	0
a	b	a
b	a	b
1	1	1

Es sencillo verificar que $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond, 0, 1\})$ es una WHO-álgebra. Además, notemos que las condiciones (2),(4) y (5) son válidas sobre $\mathbf{A}$. Sin embargo notemos que

- $\Diamond a \wedge \Box b = a \wedge a \not\leq \Diamond(a \wedge b) = 0$.
- $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a = a \not\leq \Diamond b = b$.

Por lo tanto las condiciones (1) y (3) no son válidas sobre $\mathbf{A}$.

Ejemplo 2. Sea $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1\})$ el retículo distributivo acotado de 4 elementos como en el ejemplo anterior, donde a y b son los átomos. Consideremos la aplicación $\to$ definida por

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	1	1	1	1
b	0	0	1	1
1	0	0	1	1

Una prueba directa muestra que $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1\})$ es una TWH-álgebra. Más aún, consideremos los operadores unarios:

x	$\Box x$	$\Diamond x$
0	0	0
a	b	b
b	a	a
1	1	1

Es sencillo verificar que $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond, 0, 1\})$ resulta una TWH-álgebra con operadores y en particular una WHO-álgebra. Además, notemos que para cada $a, b \in A$ es válida la condición

$$\Diamond a \wedge \Box b \leq \Diamond(a \wedge b).$$

Sin embargo, notemos que:

- $1 = \Box(a \to b) \not\leq \Diamond a \to \Diamond b = 0$.
- $b = \Box(a \to b) \wedge \Diamond a \not\leq \Diamond b = 0$.
- $b = \Diamond(a \to b) \wedge \Box a \not\leq \Diamond b = 0$.
- $1 = \Diamond(a \to b) \not\leq \Box a \to \Diamond b = 0$.

Se sigue entonces que la condición (1) es válida sobre $\mathbf{A}$ pero las condiciones $(2), (3), (4)$ y (5) no son válidas sobre $\mathbf{A}$.

Ejemplo 3. Consideremos ahora $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\})$ la TWH-álgebra definida en el Ejemplo 2. Consideremos además los operadores unarios

x	$\Box x$	$\Diamond x$
0	0	0
a	b	0
b	a	1
1	1	1

Es sencillo verificar que para cada $a, b \in A$ tenemos que $\Box(a \rightarrow b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$. Sin embargo, notemos que

- $b = \Diamond(a \rightarrow a) \wedge \Box a \nleq \Diamond a = 0$.
- $b = \Diamond b \wedge \Box a \nleq \Diamond(b \wedge a) = 0$.
- $1 = \Diamond(a \rightarrow a) \nleq \Box a \rightarrow \Diamond a = 0$.

Por lo tanto, la condición (3) es válida en $\mathbf{A}$. Sin embargo, las condiciones $(1), (4)$ y (5) no son válidas sobre $\mathbf{A}$.

Ejemplo 4. Sean $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1\})$ el retículo distributivo acotado de 4 elementos y $D = \{0, a, 1\}$. Notemos que el par (A, D) es un retículo subresiduado, donde la implicación está determinada por la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	0	1
b	a	a	1	1
1	0	a	0	1

Se sigue entonces que $\mathbf{A} = (\{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\})$ es un retículo subresiduado y en particular una WH-álgebra. Consideremos además los siguientes operadores unarios:

x	$\Box x$	$\Diamond x$
0	0	0
a	0	1
b	1	0
1	1	1

Notemos que para cada $a, b \in \mathbf{A}$ tenemos que $\Box(a \rightarrow b) \leq \Diamond a \rightarrow \Diamond b$. Sin embargo vemos que:

- $1 = \Diamond(b \rightarrow 0) \nleq \Box b \rightarrow \Diamond 0 = 0$.
- $1 = \Diamond(b \rightarrow 0) \wedge \Box b \nleq \Diamond 0 = 0$.

Por lo tanto la condición (2) es válida sobre $\mathbf{A}$, pero las condiciones (4) y (5) no son válidas sobre $\mathbf{A}$.

Ejemplo 5. Consideremos $(\{0, a, 1\}, \wedge, \vee, 0, 1\})$ la cadena de tres elementos con $0 < a < 1$. Definimos la operación binaria $\rightarrow$:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	1
1	0	0	1

Es sencillo verificar que $\mathbf{A} = (\{0, a, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1\})$ es una TWH-álgebra. Consideremos además los siguientes operadores unarios:

x	$\Box x$	$\Diamond x$
0	0	0
a	0	1
1	1	1

Se sigue que el álgebra $\mathbf{A} = (A, \to, \Box, \Diamond)$ es una TWH-álgebra con operadores y en particular una WHO-álgebra. Notemos que para cada $a, b \in \mathbf{A}$ las condiciones

$$\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b \quad \mathbf{y} \quad \Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$$

son válidas sobre $\mathbf{A}$. Sin embargo,

$$1 = \Box(a \to 0) \nleq \Diamond a \to \Diamond 0 = 0.$$

Así, las condiciones (4) y (5) son válidas sobre $\mathbf{A}$ mientras que la condición (2) no es válida sobre $\mathbf{A}$.

Observación 2.2.2. Los ejemplos 1,2 y 3 muestran que la condición (1) no es equivalente a las condiciones $(2), (3), (4)$ y (5). Los ejemplos 4 y 5 muestran que la condición (2) no es equivalente con las condiciones (4) y (5). Los ejemplos 1 y 3 muestran que la condición (3) no es equivalente con las condiciones (4) y (5). Por último, ya que en cada WH-álgebra no es válida la ley de residuación se sigue que las condiciones (2) y (3) no son equivalentes, al igual que las condiciones (4) y (5). Basta tomar como operadores unarios la función identidad.

2.2.1 Representación de WHO-álgebras

Teniendo en cuenta la representación de WH-álgebras por WH-marcos y la representación de retículos modales por medio de marcos de Kripke modales introduciremos a continuación una cierta clase de WH-marcos dotados de relaciones binarias, la cual nos permite dar un teorema de representación de WHO-álgebras.

Definición 2.2.3. *Una estructura $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ se dirá* WHO-marco *si se verifican las siguientes condiciones:*

(1) $(X, \leq, S)$ *es un WH-marco.*

(2) $(X, \leq, R, T)$ *es un marco de Kripke modal.*

Escribiremos WHO para denotar la clase de todos los WHO-marcos.

Dado $\mathcal{F} \in \mathsf{WHO}$. Consideremos el álgebra

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \left(\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Rightarrow_S, \Box_{R_\Box}, \Diamond_{R_\Diamond}, \emptyset, X\right). \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.1.7, la Definición 1.7.6 y la Definición 2.2.1 se sigue que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ es una WHO-álgebra.

Definición 2.2.4. *Para cada $\mathcal{F} \in$ WHO el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ se dirá* WHO-álgebra asociada al WHO-marco $\mathcal{F}$.

Por otro lado, combinando los resultados de la Sección 1.7.1 y del Lema 2.1.9 se sigue que si $\mathbf{A} \in \mathrm{WHO}$ entonces la estructura

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \subseteq, S_{\mathbf{A}}, R_{\Box}, R_{\Diamond}), \tag{2.5}$$

es un WHO-marco.

Definición 2.2.5. *Sea* A *una WHO-álgebra. La estructura $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ es el* WHO-marco *asociado a* A.

Combinando el Teorema 1.7.12 y el Corolario 2.1.13 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.6. *Toda WHO-álgebra* A *es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$ vía la aplicación de Stone $\sigma_{\mathbf{A}}$.*

Los resultados presentados en esta sección son simplemente una combinación de los resultados sobre representación de WH-álgebras y la representación de retículos modales ya conocidos. En lo que sigue del presente capítulo estudiaremos la representación para algunas subvariedades de WHO-álgebras. En particular, buscaremos estudiar la representación para aquellas WHO-álgebras que satisfacen condiciones en las cuales la implicación mantiene algín tipo de interacción con los operadores unarios.

2.3 Ecuaciones y condiciones de primer orden

En la Sección 1.7 de este trabajo han sido caracterizados, mediante condiciones de primer orden, aquellos WH-marcos para los cuales su WH-álgebra asociada $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ satisface alguna ecuación en particular. En la presente sección nos damos a la tarea de caracterizar aquellos WHO-marcos para los cuales su álgebra asociada $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ satisface alguna de las ecuaciones que nos resultan de interés, ya que dichas ecuaciones permiten la interacción de el conectivo de implicación estricta con operadores unarios.

Consideremos la siguiente tabla de ecuaciones y condiciones

Teorema 2.3.1. *Sea $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ un WHO-marco. Entonces cada ecuación en la columna izquierda de la Tabla 2.1 es válida sobre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ si y sólo si su correspondiente condición de primer orden de la columna derecha se satisface en $\mathcal{F}$.*

Demostración. **1** $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que $R_{\Box}$ no es reflexiva. Se sigue entonces que existe $x_0 \in X$ tal que $(x_0, x_0) \notin R_{\Box}$. Buscaremos determinar un conjunto $U \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que $\Box_{R_{\Box}}(U) \nsubseteq U$. Consideremos el conjunto $U = R_{\Box}(x_0)$. Por la propia definición de la relación $R_{\Box}$ se sigue que U es un conjunto creciente. Además, notemos que el elemento x_0 es tal que $R_{\Box}(x_0) \subseteq R_{\Box}(x_0)$ por lo tanto, $x_0 \in \Box_{R_{\Box}}(U)$. Sin embargo, $x_0 \notin R_{\Box}(x_0)$, por lo tanto, $x_0 \notin U$. Así, $\Box_{R_{\Box}}(U) \nsubseteq U$ como queriamos mostrar.

Número	Ecuación	Condición
1	$\Box x \leq x$	$R_\Box$ es reflexiva
2	$x \leq \Diamond(x)$	$R_\Diamond$ es reflexiva
3	$\Box x \leq \Box^2(x)$	$R_\Box$ es transitiva
4	$\Diamond^2(x) \leq \Diamond x$	$R_\Diamond$ es transitiva
5	$\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$	$\forall x, y, z\, [Sxy \wedge R_\Box yz \Rightarrow \exists u, v\, (R_\Box xu \wedge R_\Box yv \wedge Suv \wedge v \leq z)]$
5	$\Box(x \to y) \leq \Diamond x \to \Diamond y$	$\forall x, y, z\, [Sxy \wedge R_\Diamond yz \Rightarrow \exists u, v\, (Suv \wedge R_\Box xu \wedge R_\Diamond yv \wedge z \leq v)]$
6	$\Box(x \to y) \wedge \Diamond x \leq \Diamond y$	$\forall x, y\, [R_\Diamond xy \Rightarrow \exists u, v\, (R_\Box xu \wedge Suv \wedge y \leq v \wedge R_\Diamond xv)]$
7	$\Diamond(x \to y) \leq \Box x \to \Diamond y$	$\forall x, y, z\, [R_\Diamond xy \wedge Sxz \Rightarrow \exists t\, (Syt \wedge R_\Box zt \wedge R_\Diamond zt)]$
9	$\Diamond(x \to y) \wedge \Box x \leq \Diamond y$	$R_\Diamond \subseteq (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S^{-1}$
10	$\Diamond x \to \Box y \leq \Box(x \to y)$	$R_\Box \circ S \subseteq S \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$

Table 2.1: Tabla de condiciones

$\Leftarrow$) Consideremos ahora $R_\Box$ una relación reflexiva, debemos probar que para todo conjunto creciente U se tiene que $\Box_{R_\Box}(U) \subseteq U$. Sea $x \in \Box_{R_\Box}(U)$ se sigue que $R_\Box(x) \subseteq U$. Teniendo en cuenta que $R_\Box$ es reflexiva se sigue que $x \in U$ como queríamos mostrar.

2 $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que $R_\Diamond$ no es reflexiva. Bucaremos determinar un conjunto creciente U tal que $U \nsubseteq \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. Dado que $R_\Diamond$ no es reflexiva se sigue que $(x, x) \notin R_\Diamond$ para algún $x \in X$. Consideremos el conjunto $U = R_\Diamond(x_0)^c$. Por la propia definición de la relación $R_\Diamond$ se sigue que U es un conjunto creciente. Además, se sigue que $x \in U$. Por otro lado, ya que $R_\Diamond(x) \cap R_\Diamond(x)^c = \emptyset$ se sigue que $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(U)$.

$\Leftarrow$) Asumiremos ahora que $R_\Diamond$ es reflexiva. Dado U subconjunto creciente vamos a comprobar que $U \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. En efecto, sea $x \in U$. Dado que $R_\Diamond$ es reflexiva se sigue que $R_\Diamond(x) \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ como queríamos probar.

3 $\Rightarrow$) Por contraposición, supongamos que $R_\Box$ no es transitiva, entonces existen $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in R_\Box$, $(y, z) \in R_\Box$ y $(x, z) \notin R_\Box$. Buscaremos un subconjunto creciente $U \subseteq X$ tal que

$$\Box_{R_\Box}(U) \nsubseteq \Box^2_{R_\Box}(U).$$

Consideremos el subconjunto creciente $U = R_\Box(x)$. Notemos que $x \in \Box_{R_\Box}(U)$, ya que $R_\Box(x) \subseteq R_\Box(x)$. Asimismo, $x \notin \Box^2_{R_\Box}(U)$, ya que por nuestra hipótesis $y \in R_\Box(x)$, pero notemos que $y \notin \Box_{R_\Box}(U)$ ya que $z \in R_\Box(y)$ pero $z \notin U = R_\Box(x)$. Por lo tanto, se sigue que $\Box_{R_\Box}(U) \nsubseteq \Box^2_{R_\Box}(U)$.

$\Leftarrow$) Consideremos ahora $R_\Box$ relación transitiva y U un subconjunto creciente, probaremos que $\Box_{R_\Box}(U) \subseteq \Box^2_{R_\Box}(U)$. En efecto, sea $x \in \Box_{R_\Box}(U)$ veremos que $R_\Box(x) \subseteq \Box_{R_\Box}(U)$. Sea $y \in R_\Box(x)$, debemos probar que $R_\Box(y) \subseteq U$. Sea $z \in R_\Box(y)$ y $y \in R_\Box(x)$, se sigue de la transitividad de $R_\Box$ que $z \in R_\Box(x) \subseteq U$, de donde se tiene que $z \in U$.

4 $\Rightarrow$) Por contraposición, supongamos que la relación $R_\Diamond$ no es transitiva entonces existe $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in R_\Diamond$, $(y, z) \in R_\Diamond$ y $(x, z) \notin R_\Diamond$. Consideremos el subconjunto creciente $U = R_\Diamond(x)^c$. Notemos que $y \in R_\Diamond(x)$ y además $z \in R_\Diamond(y) \cap U$, de donde se sigue que $y \in R_\Diamond(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$, es decir, $x \in \Diamond^2_{R_\Diamond}(U)$. Sin embargo, ya que $R_\Diamond(x) \cap R_\Diamond(x)^c = \emptyset$ se sigue que $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. Así, se sigue que $\Diamond^2_{R_\Diamond}(U) \nsubseteq \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ como queríamos mostrar.

$\Leftarrow$) Sea U un conjunto creciente debemos probar que $\Diamond^2_{R_\Diamond}(U) \subseteq \Diamond(U)$. En efecto, sea $x \in \Diamond^2_{R_\Diamond}(U)$, se sigue que $R_\Diamond(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in R_\Diamond(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. Ya que $y \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$, se sigue que $R_\Diamond(y) \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto existe $z \in R_\Diamond(y) \cap U$. De la transitividad de $R_\Diamond$ se sigue que $z \in R_\Diamond(x) \cap U$, es decir, $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$.

5 $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que la condición de primer orden no es válida en $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que existen $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in S$, $(y, z) \in R_\Box$ y para todo $u, v \in X$ se verifica alguna de las siguientes condiciones $(x, u) \notin R_\Box$ ó $(u, v) \notin S$ ó $(y, v) \notin R_\Box$ ó $v \nleq z$. Buscaremos conjuntos crecientes U y V de manera tal que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \nsubseteq \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V).$$

Consideremos los conjuntos $U = R_\Box(y)$ y $V = (z]^c$. Notemos que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$. En efecto, mostraremos que $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$. Sea $a \in R_\Box(x)$, debemos probar que $S(a) \cap U \subseteq V$. Sea $b \in S(a) \cap U$ entonces $(x, a) \in R_\Box$, $(a, b) \in S$ y $(y, b) \in R_\Box$ por lo tanto $b \nleq z$, es decir $b \in V$. Por otro lado, afirmamos que $x \notin \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$. En efecto, probaremos que $S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U) \nsubseteq \Box_{R_\Box}(V)$. Notemos que $y \in S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U)$, sin embargo ya que $z \in R_\Box(y)$ y $z \leq z$ se sigue que $y \notin \Box_{R_\Box}(V)$. Por lo tanto, se tiene que

$$x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \setminus \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V),$$

como queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $x, y, z \in X$ si $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in R_\Box$ entonces existen $u, v \in X$ tal que $(x, u) \in R_\Box$, $(y, v) \in R_\Box$, $(u, v) \in S$ y $v \leq z$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \subseteq \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V).$$

Sea $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$ probaremos que $x \in \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$, es decir $S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U) \subseteq \Box_{R_\Box}(V)$. En efecto, si $y \in S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U)$ y tomamos $z \in R_\Box(y)$. Por nuestra hipótesis existen $u, v \in X$ tales que $(x, u) \in R_\Box$, $(y, v) \in R_\Box$, $(u, v) \in S$ y $v \leq z$. Teniendo en cuenta que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$ tenemos que $u \in U \Rightarrow_S V$ i.e., $S(u) \cap U \subseteq V$. Luego $v \in S(u) \cap U$ por lo que $v \in V$. Ya que V es un conjunto creciente tenemos que $z \in V$. Así $y \in \Box_{R_\Box}(V)$.

6 $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que la condición de primer orden no se satisface en el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que existen $x, y, z \in X$ tales que $(x, y) \in S$, $(y, z) \in R_\Diamond$ y para cada $u, v \in X$ algunas de las siguientes condiciones se satisfacen $(u, v) \notin S$ ó $(x, u) \notin R_\Box$ ó $(y, v) \notin R_\Diamond$ ó $z \nleq v$. Buscaremos un par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \nsubseteq \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Consideremos los conjuntos $U = [z)$ y $V = R_\Diamond(y)^c$. Afirmamos que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$. En efecto, probaremos que $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$. Sea $(x, a) \in R_\Box$, veamos que $S(a) \cap U \subseteq V$. Sea $b \in S(a) \cap U$, se sigue que $(x, a) \in R_\Box$, $(a, b) \in S$ y $z \leq b$ por lo tanto $(y, b) \notin R_\Diamond$, por lo tanto $b \in V$. Por otro lado notemos que $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. En efecto, notemos que $y \in S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$, pero $y \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. Así, $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $x, y, z \in X$, si $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in R_\Diamond$ entonces existen $u, v \in X$ tal que $(x, u) \in R_\Box$, $(u, v) \in S$, $(y, v) \in R_\Diamond$ y $v \leq z$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Sea $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$, probaremos que $S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. Sea $y \in S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ entonces existe $z \in R_\Diamond(y) \cap U$. Por hipótesis existen $u, v \in X$ tal que $(x, u) \in R_\Box$, $(u, v) \in S$, $(y, v) \in R_\Diamond$ y $z \leq v$. Ya que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$ se sigue que $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$. Teniendo en cuenta que $(x, u) \in R_\Box$ se sigue que $u \in U \Rightarrow_S V$, es decir, $S(u) \cap U \subseteq V$. Por otro lado, ya que $z \in U$, $z \leq v$ y además U es un conjunto creciente, se sigue que $v \in S(u) \cap U$ y por lo tanto, $v \in V$. Ya que $v \in R_\Diamond(y) \cap V$, se sigue que $y \in \Diamond_{R_\Diamond}(V)$, como queríamos mostrar.

7 $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que la condición de primer orden no es válida en el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que existen $x, y \in X$ tal que $(x, y) \in R_\Diamond$ y para cada $u, v \in X$ se verifican algunas de las siguientes condiciones: $(x, u) \notin R_\Box$ o $(u, v) \notin S$ o $(x, v) \notin R_\Diamond$ o bien $y \nleq v$. Buscaremos un par de subconjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \nsubseteq \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Consideremos los conjuntos $U = [y)$ y $V = R_\Diamond(x)^c$. Afirmamos que

$$x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \setminus \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

En efecto, comenzaremos probando que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. Veamos que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V))$, es decir $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$. Consideremos $a \in R_\Box(x)$, veamos que $S(a) \cap U \subseteq V$. Sea $b \in S(a) \cap U$ entonces $(x, a) \in R_\Box$, $(a, b) \in S$ y $y \leq b$ por lo tanto de nuestra hipótesis se sigue que $(x, b) \notin R_\Diamond$, i.e, $b \in V$. Además ya que $R_\Diamond(x) \subseteq R_\Diamond(x)$ se sigue que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$. Veamos ahora que $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. Teniendo en cuenta que $R_\Diamond(x) \subseteq R_\Diamond(x)$, se sigue que $R_\Diamond(x) \cap R_\Diamond(x)^c = \emptyset$, de donde se sigue que $R_\Diamond(x) \cap V = \emptyset$. Así $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que la condición de primer orden es válida sobre el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que para todo $x, y \in X$ si $(x, y) \in R_\Diamond$ entonces existen $u, v \in X$ tal que $(x, u) \in R_\Box$, $(x, v) \in R_\Diamond$, $(u, v) \in S$ y $y \leq v$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Sea $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ debemos probar que $R_\Diamond(x) \cap V \neq \emptyset$. Ya que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ entonces existe $y \in R_\Diamond(x) \cap U$. Además, ya que $x \in \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$, es decir, $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$. Por nuestra hipótesis existen u, v tal que $(u, v) \in S$, $(x, u) \in R_\Box$, $(x, v) \in R_\Diamond$ y $y \leq v$. Teniendo en cuenta que $R_\Box(x) \subseteq U \Rightarrow_S V$ se sigue que $u \in U \Rightarrow_S V$, por lo tanto $S(u) \cap U \subseteq V$. Ya que $(u, v) \in S$, $y \in U$ y $y \leq v$ se sigue que $v \in S(u) \cap U \subseteq V$, de donde se sigue que $v \in R_\Diamond(x) \cap V$. Así $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

8 $\Rightarrow$) Por contraposición asumiremos que la condición de primer orden no es válida sobre el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que existen $x, y, z \in X$ tal que $(x, y) \in R_\Diamond$, $(x, z) \in S$ y para cada $t \in X$ se satisface alguna de las siguientes condiciones $(z, t) \notin (R_\Box \cap R_\Diamond)$ ó $(y, t) \notin S$. Buscaremos determinar un par de subconjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \nsubseteq \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Consideremos los subconjuntos $U = R_\Box(z)$ y $V = R_\Diamond(z)^c$. Probaremos que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V))$ y $x \notin \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. En efecto, sabemos que $y \in R_\Diamond(x)$ y además si $u \in S(y) \cap U$ entonces $(x, y) \in R_\Diamond$, $(y, u) \in S$ y $(z, u) \in R_\Box$. Por nuestra hipótesis, se sigue que $u \in R_\Diamond(z)^c = V$. Luego, se sigue que $y \in R_\Diamond(x) \cap U \Rightarrow_S V$ y por lo tanto, $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V)$. Probaremos ahora que $x \notin \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$, en efecto $(x, z) \in S$ y $R_\Box(z) \subseteq R_\Box(z)$, de donde se sigue que $z \in S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U)$, sin embargo $R_\Diamond(z) \cap R_\Diamond(z)^c = \emptyset$, de donde se sigue que $z \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$, de donde se sigue que $x \notin \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

$\Leftarrow$) Asumiremos que la condición de primer orden es válida en el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que para todo $x, y, z \in X$ si $(x, y) \in R_\Diamond$ y $(x, z) \in S$ entonces existe $t \in X$ tal que $(y, t) \in S$, $(z, t) \in R_\Box$ y $(z, t) \in R_\Diamond$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \subseteq \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Supongamos que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V)$ entonces existe $y \in R_\Diamond(x) \cap U \Rightarrow_S V$. Probaremos que $S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U) \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. Supongamos que $z \in S(x) \cap \Box_{R_\Box}(U)$ entonces por hipótesis existe $t \in X$ tal que $(y, t) \in S$, $(z, t) \in R_\Box$ y $(z, t) \in R_\Diamond$. Teniendo en cuenta que $z \in \Box_{R_\Box}(U)$ y $t \in R_\Box(z)$ se sigue que $t \in S(y) \cap U$. Ya que $y \in U \Rightarrow_S V$ se sigue que $S(y) \cap U \subseteq V$ y por lo tanto $t \in V$. Además $(z, t) \in R_\Diamond$ por lo tanto, $R_\Diamond(z) \cap V \neq \emptyset$ de donde se sigue que $z \in \Diamond_{R_\Diamond}(V)$ y por lo tanto, $x \in \Box_{R_\Box}(U) \Rightarrow_S \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

9 $\Rightarrow$) Por contraposición asumiremos que la condición de primer orden no es válida sobre el marco $\mathcal{F}$, es decir existe un par (x, y) tal que $(x, y) \in R_\Diamond$ y $(x, y) \notin (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S^{-1}$. Por lo tanto, para cada $t \in X$ se satisface alguna de las siguientes condiciones o bien $(x, t) \notin R_\Box$ ó $(x, t) \notin R_\Diamond$ ó $(y, t) \notin S$. Buscaremos determinar un par de subconjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \cap \Box_{R_\Box}(U) \nsubseteq \Box_{R_\Box}(V).$$

Consideremos los subconjuntos $U = R_\Box(x)$ y $V = R_\Diamond(x)^c$. Notemos que $x \in \Box_{R_\Box}(U)$ y $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$. Además $y \in R_\Diamond(x)$, veamos ahora que $y \in U \Rightarrow_S V$. En efecto, si $z \in S(y) \cap U$ entonces $(x, y) \in R_\Diamond$, $(x, z) \in R_\Box$ y $(z, y) \in S^{-1}$. Por nuestra hipótesis, se sigue que $(x, z) \notin R_\Diamond$, es decir, $z \in V$ y por lo tanto $y \in R_\Diamond(x) \cap U \Rightarrow_S V$, de donde se sigue que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \cap \Box_{R_\Box}(U)$ y $x \notin \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

$\Leftarrow$) Asumimos ahora que nuestra condición de primer orden en válida en el marco $\mathcal{F}$, es decir, para cada $x, y \in X$ si $(x, y) \in R_\Diamond$ entonces $(x, y) \in (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S^{-1}$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \cap \Box_{R_\Box}(U) \subseteq \Diamond_{R_\Diamond}(V).$$

Supongamos que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U \Rightarrow_S V) \cap \Box_{R_\Box}(U)$ entonces existe $y \in R_\Diamond(x) \cap U \Rightarrow_S V$ y $x \in \Box_{R_\Box}(U)$. Por hipótesis existe $t \in X$ tal que $(x, t) \in R_\Diamond$, $(x, t) \in R_\Box$ y $(y, t) \in S$. Ya que $(x, t) \in R_\Box$ y además $x \in \Box_{R_\Box}(U)$ se sigue que $t \in U$. Además, ya que $y \in U \Rightarrow_S V$, $(y, t) \in S$ se sigue que $t \in S(y) \cap U \subseteq V$, por lo que $t \in R_\Diamond(x) \cap V$. Así $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(V)$.

10 $\Rightarrow$) Por contraposición, asumiremos que la condición de primer orden no es válida sobre el marco $\mathcal{F}$, es decir, existe un par (x, y) tal que $(x, y) \in R_\Box \circ S$ y $(x, y) \notin S \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$, por lo tanto existe $z \in X$ con $(x, z) \in R_\Box$ y $(z, y) \in S$. Además para cada $t \in X$ tenemos que o bien $(x, t) \notin S$ ó $(t, y) \notin R_\Box$ ó $(t, y) \notin R_\Diamond$. Buscaremos determinar un par de subconjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ de manera tal que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V) \nsubseteq \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V).$$

Consideremos $U = [y)$ y $V = (y]^c$. Probaremos que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$ y $x \notin \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$. Probaremos primero que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$, es decir, si $a \in S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ entonces $R_\Box(a) \subseteq (y]^c$. Comenzaremos probando que si $a \in S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ entonces $(a, y) \notin R_\Box$. En efecto, si $a \in S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U)$ entonces se sigue que $(x, a) \in S$ y $R_\Diamond(a) \cap [y) \neq \emptyset$, por lo tanto existe $t \in X$ tal que $(a, t) \in R_\Diamond$ y $y \leq t$. Teniendo en cuenta que $R_\Diamond \circ \leq^{-1} = R_\Diamond$ tenemos que $(a, y) \in R_\Diamond$. Por nuestra hipótesis tenemos que $(a, y) \notin R_\Box$.

Probaremos ahora que $R_\Box(a) \subseteq (y]^c$. Supongamos por absurdo que $b \in R_\Box(a)$ y $b \leq y$. Teniendo en cuenta que $R_\Box = R_\Box \circ \leq$ tenemos que $(a, y) \in R_\Box$ lo que es una contradicción. Así $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$.

Probaremos ahora que $x \notin \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V))$. En efecto, notemos que $(x, z) \in R_\Box$ y además $y \in S(z) \cap U$, pero $y \notin V$, por lo tanto, $R_\Box(x) \nsubseteq U \Rightarrow_S V$ y por lo tanto $x \notin \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V)$.

$\Leftarrow$) Asumiremos ahora que la condición de primer orden es válida sobre el marco $\mathcal{F}$, es decir, asumiremos que $R_\Box \circ S \subseteq S \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$. Probaremos que para cada par de conjuntos $U, V \in \mathrm{Up}(X)$ se tiene que

$$\Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V) \subseteq \Box_{R_\Box}(U \Rightarrow_S V).$$

Supongamos que $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$ y $y \in R_\Box(x)$ veremos que $S(y) \cap U \subseteq V$. Si $z \in S(y) \cap U$ entonces $(x, z) \in R_\Box \circ S$. Por hipótesis existe un elemento $t \in X$ tal que $(x, t) \in S$ y $(t, z) \in (R_\Box \cap R_\Diamond)$. Teniendo en cuenta que $S(x) \cap \Diamond_{R_\Diamond}(U) \subseteq \Box_{R_\Box}(V)$ tenemos que $t \in \Box_{R_\Box}(V)$, por lo que $z \in V$. Así $x \in \Diamond_{R_\Diamond}(U) \Rightarrow_S \Box_{R_\Box}(V)$. $\Box$

2.4 Representación para algunas subvariedades de la variedad WHO

En la presente sección vamos a estudiar la representación de los miembros de las subvariedades de la variedad WHO que se obtienen al considerar las ecuaciones de la Tabla 2.1. Para esto, mostraremos que la validez de cada una de estas ecuaciones sobre cada WHO-álgebra A corresponde a una condición de primer orden sobre el marco $\mathcal{F}(\mathbf{A})$. Comenzaremos la presente sección probando algunos resultados sobre la existencia de filtros primos en WH-álgebras que serán necesarios para el resto de la misma.

Proposición 2.4.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una WHO-álgebra. Sea* $F, H \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$*, y sea* $D \in X(\mathbf{A})$*. Si* $D_F(H) \subseteq D$*, entonces existe* $Q \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $F \subseteq Q$ *y* $D_Q(H) \subseteq D$*.*

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{G \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A}) : F \subseteq G \text{ y } D_G(H) \subseteq D\}.$$

Como $F \in \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es sencillo verificar que la familia $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es inductiva, por lo tanto, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal Q en $\mathcal{F}$ el cual es un filtro propio tal que $F \subseteq Q$ y $D_Q(H) \subseteq D$. Probaremos que Q es primo. Sea $a, b \in A$ tal que $a \vee b \in Q$ pero $a, b \notin Q$. Consideremos los filtros $Q_a = \mathrm{Fi}(Q \cup \{a\})$ y $Q_b = \mathrm{Fi}(Q \cup \{b\})$. Entonces $Q_a, Q_b \notin \mathcal{F}$, y en consecuencia $D_{Q_a}(H) \nsubseteq D$ y $D_{Q_b}(H) \nsubseteq D$. Así, existen $x \in D_{Q_a}(H) \setminus D$ e $y \in D_{Q_b}(H) \setminus D$. Por lo tanto, existen $h_1, h_2 \in H$ tal que $h_1 \to x \in Q_a$ y $h_2 \to y \in Q_b$. Entonces existe $q_1, q_2 \in Q$ tal que $q_1 \wedge a \leq h_1 \to x$ y $q_2 \wedge b \leq h_2 \to y$. Sea $q = q_1 \wedge q_2 \in Q$ y $h = h_1 \wedge h_2 \in H$. Se sigue que

$$q \wedge a \leq h_1 \to x \leq h \to x \leq h \to (x \vee y)$$

y

$$q \wedge b \leq h_2 \to x \leq h \to y \leq h \to (x \vee y).$$

Luego

$$(q \wedge a) \vee (q \wedge b) = q \wedge (a \vee b) \leq h \to (x \vee y).$$

Ya que $q \wedge (a \vee b) \in Q$ tenemos que $h \to (x \vee y) \in Q$, i.e., $x \vee y \in D_Q(H) \subseteq D$. Luego $x \in D$ o $y \in D$, lo que es una contradicción. Así, Q es primo. $\square$

Proposición 2.4.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *una WH-álgebra,* $F \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ *y* $P \in X(\mathbf{A})$. *Si* $(F, P) \in S_{\mathbf{A}}$, *entonces existe* $Q \in X(\mathbf{A})$ *tal que* $F \subseteq Q$ *y* $(Q, P) \in S_{\mathbf{A}}$.

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{G \in \mathrm{Fi}(\mathbf{A}) : F \subseteq G \text{ y } (G, P) \in S_{\mathbf{A}}\}.$$

Como $F \in \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es sencillo verificar que la familia $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es inductiva, por lo tanto, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal Q en $\mathcal{F}$ el cual es un filtro propio tal que $F \subseteq Q$ y $(Q, P) \in S_{\mathbf{A}}$. Probaremos que Q es primo. Sea $a, b \in \mathbf{A}$ tal que $a \vee b \in Q$. Supongamos que $a, b \notin Q$. Consideremos los filtros $Q_a = \mathrm{Fi}(Q \cup \{a\})$ y $Q_b = \mathrm{Fi}(Q \cup \{b\})$. Luego $Q_a, Q_b \notin \mathcal{F}$, y en consecuencia $(Q_a, P) \notin S_{\mathbf{A}}$ y $(Q_b, P) \notin S_{\mathbf{A}}$. Luego existen $x, y, v, w \in A$ tal que $x \to y \in Q_a$, $v \to w \in Q_b$, $x, v \in P$, y $y, w \notin P$. Entonces existe $q_1, q_2 \in Q$ tal que $q_1 \wedge a \leq x \to y$ y $q_2 \wedge b \leq v \to w$. Sea $q = q_1 \wedge q_2 \in Q$. Notemos que $x \wedge v \in P$ y $y \vee w \notin P$. Por lo tanto,

$$q \wedge a \leq x \to y \leq (x \wedge v) \to y \leq (x \wedge v) \to (y \vee w).$$

De una manera similar tenemos que

$$q \wedge b \leq x \to y \leq (x \wedge v) \to y \leq (x \wedge v) \to (y \vee w).$$

Por lo tanto,

$$(q \wedge a) \vee (q \wedge b) = q \wedge (a \vee b) \leq (x \wedge v) \to (y \vee w).$$

Como $q \wedge (a \vee b) \in Q$, tenemos que $(x \wedge v) \to (y \vee w) \in Q$, y ya que $(Q, P) \in S_{\mathbf{A}}$ y $x \wedge v \in P$, deducimos que $y \vee w \in P$, lo que es una contradicción. Así Q es primo. $\square$

Recordemos la tabla de ecuaciones y condiciones de primer orden dada en la Sección 2.3

Número	Ecuación	Condición
1	$\Box x \leq x$	$R_\Box$ es reflexiva
2	$x \leq \Diamond(x)$	$R_\Diamond$ es reflexiva
3	$\Box x \leq \Box^2(x)$	$R_\Box$ es transitiva
4	$\Diamond^2(x) \leq \Diamond x$	$R_\Diamond$ es transitiva
5	$\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$	$\forall x, y, z\, [Sxy \wedge R_\Box yz \Rightarrow \exists u, v\, (R_\Box xu \wedge R_\Box yv \wedge Suv \wedge v \leq z)]$
5	$\Box(x \to y) \leq \Diamond x \to \Diamond y$	$\forall x, y, z\, [Sxy \wedge R_\Diamond yz \Rightarrow \exists u, v\, (Suv \wedge R_\Box xu \wedge R_\Diamond yv \wedge z \leq v)]$
6	$\Box(x \to y) \wedge \Diamond x \leq \Diamond y$	$\forall x, y\, [R_\Diamond xy \Rightarrow \exists u, v\, (R_\Box xu \wedge Suv \wedge y \leq v \wedge R_\Diamond xv)]$
7	$\Diamond(x \to y) \leq \Box x \to \Diamond y$	$\forall x, y, z\, [R_\Diamond xy \wedge Sxz \Rightarrow \exists t\, (Syt \wedge R_\Box zt \wedge R_\Diamond zt)]$
9	$\Diamond(x \to y) \wedge \Box x \leq \Diamond y$	$R_\Diamond \subseteq (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S^{-1}$
10	$\Diamond x \to \Box y \leq \Box(x \to y)$	$R_\Box \circ S \subseteq S \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$

Table 2.2: Tabla de condiciones

Teorema 2.4.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *una WHO-álgebra. Entonces cada una de las ecuaciones de la columna izquierda es válida sobre* $\mathbf{A}$ *si y sólo si su correspondiente condición de primer orden de la columna derecha es válida sobre su WHO-marco asociado* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$.

Demostración. **1** $\Rightarrow$) Supongamos que para cada $a \in A$ se satisface la ecuación $\Box a \leq a$, probaremos que la relación $R_\Box$ es reflexiva. Sea $P \in X(\mathbf{A})$ y sea $a \in \Box^{-1}(P)$, entonces $\Box a \in P$, lo que implica que $a \in P$, por lo tanto $\Box^{-1}(P) \subseteq P$, es decir, $R_\Box$ es reflexiva.

$\Leftarrow$) Por contraposición, supongamos que la ecuación $\Box a \leq a$ no es válida en $\mathbf{A}$, es decir, $\Box a \nleq a$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $\Box a \in P$ y $a \notin P$, de donde se sigue que $a \in \Box^{-1}(P)$ y $a \notin P$. Dado que $R_\Box$ es reflexiva, se sigue que $\Box^{-1}(P) \subseteq P$, por lo tanto $a \in P$ lo que es una contradicción. Así, $\Box a \leq a$ es válida en $\mathbf{A}$.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que para cada $a \in A$ se satisface la ecuación $\Box a \leq \Box^2 a$, probaremos que la relación $R_\Box$ es transitiva. En efecto, sean $P, Q, Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $\Box^{-1}(Q) \subseteq Z$ y sea $a \in \Box^{-1}(P)$, se sigue entonces que $\Box a \in P$. Por nuestra hipótesis se tiene que $\Box^2(a) \in P$ y en consecuencia $\Box a \in \Box^{-1}(P) \subseteq Q$ por lo tanto $\Box a \in Q$. Se sigue entonces que $a \in \Box^{-1}(Q) \subseteq Z$, de donde se tiene que $a \in Z$ y en consecuencia $\Box^{-1}(P) \subseteq Z$, es decir $(P, Z) \in R_\Box$ y resulta $R_\Box$ transitiva.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $\Box a \leq \Box^2 a$ no es válida en $\mathbf{A}$, es decir, $\Box a \nleq \Box^2 a$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $\Box a \in P$ y $\Box^2 a \notin P$. Teniendo en cuenta (1) de la Proposición 2.1.11, existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Q) \in R_\Box$ y $\Box a \notin Q$. Denuevo por la misma proposición existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Q, Z) \in R_\Box$ y $a \notin Z$. Por nuestra hipótesis se sigue que $(P, Z) \in R_\Box$ y dado que $\Box a \in P$ se sigue que $a \in \Box^{-1}(P) \subseteq Z$, es decir, $a \in Z$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, la ecuación $\Box a \leq \Box^2 a$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

3 $\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación $a \leq \Diamond a$ es válida en $\mathbf{A}$. Probaremos que la relación $R_\Diamond$ es reflexiva. En efecto, sea $P \in R_\Diamond$ y $a \in P$, se sigue de nuestra hipótesis que $\Diamond a \in P$ por lo tanto $a \in \Diamond^{-1}(P)$, es decir, $P \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y $R_\Diamond$ resulta reflexiva.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $a \leq \Diamond a$ no es válida sobre $\mathbf{A}$, es decir $a \nleq \Diamond a$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $a \in P$ y $\Diamond a \notin P$. Dado que $R_\Diamond$ es reflexiva se sigue que $a \in P \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, es decir, $\Diamond a \in P$, lo que resulta imposible. Por lo tanto, la ecuación $a \leq \Diamond a$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

4 $\Rightarrow$) Asumimos que la ecuación $\Diamond^2 a \leq \Diamond a$ es válida sobre $\mathbf{A}$, probaremos que la relación $R_\Diamond$ es transitiva. Sean $(P, Q) \in R_\Diamond$ y $(Q, Z) \in R_\Diamond$, veamos que $P \subseteq \Diamond^{-1}(Z)$. Sea $a \in P$, ya que $P \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$ se sigue que $\Diamond a \in Q$. Teniendo en cuenta que $Q \subseteq \Diamond^{-1}(Z)$ se sigue que $\Diamond^2 a \in Z$. Por nuestra hipótesis se sigue que $\Diamond a \in Z$ de donde se sigue que $a \in \Diamond^{-1}(Z)$.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $\Diamond^2 a \leq \Diamond a$ no es válida sobre $\mathbf{A}$, es decir, $\Diamond^2 a \nleq \Diamond a$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Diamond^2 a \in P$ y $\Diamond a \notin P$. Teniendo en cuenta que $\Diamond^2 a \in P$ y el apartado (2) de la Proposición 2.1.11 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Q) \in R_\Diamond$ y $\Diamond a \in Q$. Denuevo, por (2) de la Proposición 2.1.11 existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Q, Z) \in X(\mathbf{A})$ y $a \in Z$. Dado que $R_\Diamond$ es transitiva, se sigue que $(P, Z) \in R_\Diamond$, es decir, $Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Ya que $a \in Z$ se sigue que $\Diamond a \in P$ lo que es una contradicción. Luego, la ecuación $\Diamond^2 a \leq \Diamond a$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

5. $\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$ es válida sobre $\mathbf{A}$ y sean

$P, Q, D \in X(\mathbf{A})$ tales que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(Q,D) \in R_{\Box}$. Probaremos que

$$D_{\Box^{-1}(P)}(\Box^{-1}(Q)) \subseteq D.$$

Sea $a \in D_{\Box^{-1}(P)}(\Box^{-1}(Q))$, entonces existe $q \in \Box^{-1}(Q)$ tal que $q \to a \in \Box^{-1}(P)$. Se sigue que $\Box(q \to a) \in P$ y teniendo en cuenta nuestra hipótesis se sigue que $\Box q \to \Box a \in P$. Teniendo en cuenta que $\Box q \to \Box a \in P$, $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$ y $\Box q \in Q$ tenemos que $\Box a \in Q$. Ya que $(Q,D) \in R_{\Box}$, deducimos que $a \in D$. Por lo tanto, $D_{\Box^{-1}(P)}(\Box^{-1}(Q)) \subseteq D$. Por la Proposición 2.4.1 existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Z$ y $D_Z(\Box^{-1}(Q)) \subseteq D$. Por el Corolario 1.7.10 existe $K \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Z,K) \in S_{\mathbf{A}}$, $\Box^{-1}(Q) \subseteq K$ y $K \subseteq D$. En conclusión, para $P, Q, Z \in S_{\mathbf{A}}$ tales que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(Q,D) \in R_{\Box}$ existen $Z, K \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P,Z) \in R_{\Box}$, $(Q,K) \in R_{\Box}$, $(Z,K) \in S_{\mathbf{A}}$ y $K \subseteq D$, como queríamos probar.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $\Box(a \to b) \nleq \Box a \to \Box b$, es decir, existen $a, b \in A$ tal que $\Box(a \to b) \nleq \Box a \to \Box b$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box(a \to b) \in P$ y $\Box a \to \Box b \notin P$. De esta última afirmación y de el Corolario 1.7.9 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$, $\Box a \in Q$ y $\Box b \notin Q$. Ya que $\Box b \notin Q$, por (1) de la Proposición 2.1.11 existe $D \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Q,D) \in R_{\Box}$ y $b \notin D$. Por nuestra hipótesis existen $Z, K \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Z$, $(Z,K) \in S_{\mathbf{A}}$, $\Box^{-1}(Q) \subseteq K$ y $K \subseteq D$. Teniendo en cuenta que $\Box(a \to b) \in P$ y $(P,Z) \in R_{\Box}$ se sigue que $a \to b \in Z$. Teniendo en cuenta que $(Z,K) \in S_{\mathbf{A}}$ y $a \in K$ se sigue que $b \in K \subseteq D$. Así, $b \in D$ lo que es una contradicción y la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

6. $\Rightarrow$) Asumimos que la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ es válida sobre $\mathbf{A}$ y sea $P, Q, D \in X(\mathbf{A})$ tales que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(Q,D) \in R_{\Diamond}$. Probaremos que

$$D_{\Box^{-1}(P)}(D) \cap \Diamond^{-1}(Q)^c = \emptyset.$$

En caso contrario, existe $a \in \Diamond^{-1}(Q)^c$ y $d \in D$ tal que $d \to a \in \Box^{-1}(P)$, de donde se sigue que $\Box(d \to a) \in P$. De nuestra hipótesis, se sigue que $\Diamond d \to \Diamond a \in P$. Ya que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$ y $D \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$, tenemos que $\Diamond a \in Q$, lo que resulta una contradicción. Así, por el Teorema 1.7.8 existe un filtro primo Z tal que $D_{\Box^{-1}(P)}(D) \subseteq Z$ y $Z \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$. Teniendo en cuenta que $D \subseteq D_{\Box^{-1}(P)}(D) \subseteq Z$, tenemos que $D \subseteq Z$. Además, como $(\Box^{-1}(P), Z) \in S_{\mathbf{A}}$, por la Proposición 2.4.1 existe $K \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq K$ y $(K,Z) \in S_{\mathbf{A}}$. En conclusion hemos conseguido dos filtros primos Z y K tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq K$, $(K,Z) \in S_{\mathbf{A}}$, $D \subseteq Z$, y $Z \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ no es válida sobre $\mathbf{A}$, es decir, $\Box(a \to b) \nleq \Diamond a \to \Diamond b$ para ciertos $a, b \in \mathbf{A}$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $\Box(a \to b) \in P$ y $\Diamond a \to \Diamond b \notin P$. Por el Corolario 1.7.9 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $(P,Q) \in S_{\mathbf{A}}$, $\Diamond a \in Q$ y $\Diamond b \notin Q$. Luego, por la Proposición 2.1.11 existe $Z \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $(Q,Z) \in R_{\Diamond}$, $a \in Z$ y $b \notin Z$. Por nuestra hipótesis, existen D, K tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq K$, $(K,D) \in S_{\mathbf{A}}$, y $Z \subseteq D \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$. Ya que $\Box(a \to b) \in P$ y $\Box^{-1}(P) \subseteq K$ se sigue que $a \to b \in K$. Además, ya que $Z \subseteq D$ y $a \in Z$ se tiene que $a \in D$. Teniendo en cuenta que $(K,D) \in S_{\mathbf{A}}$, $a \to b \in K$ y $a \in D$ se sigue que $b \in D$. Ya que $b \in D \subseteq \Diamond^{-1}(Q)$ se sigue que $\Diamond b \in Q$, lo que es absurdo. Por lo tanto, la ecuación $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

7. $\Rightarrow$) Asumiremos que la ecuación $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$ y sean $P, Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P,Q) \in R_{\Diamond}$. Probaremos que

$$D_{\Box^{-1}(P)}(Q) \cap \Diamond^{-1}(P)^c = \emptyset.$$

En efecto, asumiremos por absurdo que existe $a \in D_{\Box^{-1}(P)}(Q) \cap \Diamond^{-1}(P)^c$, se sigue entonces que $\Diamond a \notin P$ y que existe un elemento $q \in Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ tal que $q \to a \in \Box^{-1}(P)$. Teniendo en cuenta que $q \to a \in \Box^{-1}(P)$ y que $q \in Q \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, se sigue que $\Box(q \to a) \wedge \Diamond q \in P$ y por lo tanto se sigue que $\Diamond b \in P$ lo que es una contradicción. Así, existe $D \in X(\mathbf{A})$ tal que $D_{\Box^{-1}(P)}(Q) \subseteq D$, $(\Box^{-1}(P), D) \in S_{\mathbf{A}}$ y $D \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Ya que $(\Box^{-1}(P), D) \in S_{\mathbf{A}}$ tenemos por la Proposición 2.4.2 que existe $K \in X(\mathbf{A})$ tal que, $\Box^{-1}(P) \subseteq K$ y $(K, D) \in S_{\mathbf{A}}$. Así, $\Box^{-1}(P) \subseteq K$, $(K, D) \in S_{\mathbf{A}}$, y $Q \subseteq D \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, que era nuestro objetivo.

$\Leftarrow$) Por contraposición, asumiremos que la ecuación $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$ no es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$, es decir, existen elementos $a, b \in A$ tales que $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \not\leq \Diamond b$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \in P$ y $\Diamond b \notin P$. Por la Proposición 2.1.11 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Q) \in R_{\Diamond}$ y $a \in Q$. Luego existen $K, D \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq K$, $(K, D) \in S_{\mathbf{A}}$, y $Q \subseteq D \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Ya que $\Box(a \to b) \in P$, y $\Diamond a \in P$ se sigue que $a \to b \in K$ y $a \in Q \subseteq D$. Ya que $(K, D) \in S_{\mathbf{A}}$, $b \in D$, y en consecuencia $\Diamond b \in P$, lo que es una contradicción. Así, la ecuación $\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$.

8. $\Rightarrow$) Asumiremos que la ecuación $\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$ y sean $(P, Q) \in S_{\mathbf{A}}^{-1} \circ R_{\Diamond}$. Luego existe $D \in X(\mathbf{A})$ tal que $(D, P) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(D, Q) \in R_{\Diamond}$. Probaremos que

$$D_Q(\Box^{-1}(P)) \cap \Diamond^{-1}(P)^c = \emptyset.$$

Supongamos por absurdo que existe $a \in \Diamond^{-1}(P)^c$ y $p \in \Box^{-1}(P)$ tal que $p \to a \in Q$. Teniendo en cuenta que $Q \subseteq \Diamond^{-1}(D)$ se sigue que $\Diamond(p \to a) \in D$ y por nuestra hipótesis se sigue que $\Box p \to \Diamond a \in D$. Ya que $(D, P) \in S_{\mathbf{A}}$ y $\Box p \in P$, tenemos que $\Diamond a \in P$, lo que es imposible puesto que $a \in \Diamond^{-1}(P)^c$. Por el Teorema 1.5.8 existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $D_Q(\Box^{-1}(P)) \subseteq Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Teniendo en cuenta que $D_Q(\Box^{-1}(P)) \subseteq Z$, se sigue que $D_Q(\Box^{-1}(P)) \cap Z^c = \emptyset$. Por el Teorema 1.7.8 existe $K \in X(\mathbf{A})$ tal que $D_Q(\Box^{-1}(P)) \subseteq K$, $(Q, K) \in S_{\mathbf{A}}$ y $K \subseteq Z$. Teniendo en cuenta que $\Box^{-1}(P) \subseteq D_Q(\Box^{-1}(P))$ se sigue que $\Box^{-1}(P) \subseteq K \subseteq Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y $(Q, K) \in S_{\mathbf{A}}$. Así, $(P, K) \in R_{\Box} \cap R_{\Diamond}$ y $(Q, K) \in S_{\mathbf{A}}$.

$\Leftarrow$) Por contraposición asumiremos que la ecuación $\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$ no es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$, es decir, asumiremos que existe $a, b \in \mathbf{A}$ tal que $\Diamond(a \to b) \not\leq \Box a \to \Diamond b$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ de manera tal que $\Diamond(a \to b) \in P$ y $\Box a \to \Diamond b \notin P$. Por la Proposición 2.1.11 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Q) \in R_{\Diamond}$ y $a \to b \in Q$. Asimismo, por Corolario 1.7.9 existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Z) \in S_{\mathbf{A}}$, $\Box a \in Z$ y $\Diamond b \notin Z$. Por nuestra hipótesis, existe $H \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Q, H) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(Z, H) \in R_{\Box} \cap R_{\Diamond}$. Teniendo en cuenta que $a \to b \in Q$, $a \in \Box^{-1}(Z) \subseteq H$ y $(Q, H) \in S_{\mathbf{A}}$ se sigue que $b \in H$. Ya que $(Z, H) \in R_{\Diamond}$ se sigue que $\Diamond b \in Z$ lo que es una contradicción. Así, la ecuación $\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$.

9 $\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación $\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$ y sean $(P, Q) \in R_{\Diamond}$, probaremos que

$$D_Q(\Box^{-1}(P)) \cap \Diamond^{-1}(P)^c = \emptyset.$$

En efecto, supongamos por absurdo que existe $a \in D_Q(\Box^{-1}(P)) \cap \Diamond^{-1}(P)^c$. Entonces existe $p \in \Box^{-1}(P)$ tal que $p \to a \in Q$ y $\Diamond a \notin P$. Ya que, $(P, Q) \in R_{\Diamond}$, tenemos que $\Diamond(p \to a) \in P$. Como $\Box p \in P$, tenemos que $\Diamond(p \to a) \wedge \Box p \in P$. Por nuestra hipótesis, se sigue que $\Diamond a \in P$, lo que es una contradicción. Así, por la Proposición 1.7.8 existe $Z \in X(\mathbf{A})$

tal que $D_Q(\Box^{-1}(P)) \subseteq Z$, $(Q, Z) \in S_{\mathbf{A}}$ y $Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$. Teniendo en cuenta que $\Box^{-1}(P) \subseteq D_Q(\Box^{-1}(P)) \subseteq Z$, se sigue que $(P, Q) \in (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S_{\mathbf{A}}^{-1}$.

$\Leftarrow$) Por contraposición, asumiremos que la ecuación $\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$ no es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \in P$ y $\Diamond b \notin P$. De la Proposición 2.1.11 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ tal que $(P, Q) \in R_\Diamond$ y $a \to b \in Q$. Por hipótesis, existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$ y $(Q, Z) \in S_{\mathbf{A}}$. Ya que $\Box a \in P$ tenemos que $a \in Z$. Ya que $a \to b \in Q$, $(Q, Z) \in S_{\mathbf{A}}$, y $a \in Z$ tenemos que $b \in Z$. Finalmente, ya que $Z \subseteq \Diamond^{-1}(P)$, tenemos que $\Diamond b \in P$, que es una contradicción. Así, la ecuación $\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$ es válida sobre $\mathbf{A}$.

10 $\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$ es válida sobre el álgebra $\mathbf{A}$ y sean $(P, Q) \in R_\Box \circ S_{\mathbf{A}}$ mostraremos que existe $D \in X(\mathbf{A})$ con $(P, D) \in S_{\mathbf{A}}$, $(D, Q) \in R_\Box \cap R_\Diamond$. Ya que $(P, Q) \in R_\Box \circ S_{\mathbf{A}}$ tenemos que $(\Box^{-1}(P), Q) \in S_{\mathbf{A}}$. Además notemos que

$$D_P(\Diamond(Q)) \cap I(\Box(Q^c)) = \emptyset$$

En efecto, si $x \in D_P(\Diamond(Q)) \cap I(\Box(Q^c))$ entonces existe $a \in Q$, con $\Diamond a \to x \in P$, y $x \leq \Box q$ para algún $q \in Q^c$. Ya que $x \leq \Box q$, tenemos que $\Diamond a \to x \leq \Diamond a \to \Box q \leq \Box(a \to q) \in P$. Se sigue entonces que $a \to q \in \Box^{-1}(P)$. Ya que $(\Box^{-1}(P), Q) \in S_{\mathbf{A}}$, $a \to b \in \Box^{-1}(P)$ y $a \in Q$ se sigue que $q \in Q$, lo que es una contradicción. Por el Teorema 1.7.8 existe $D \in X(\mathbf{A})$ con $(P, D) \in S_{\mathbf{A}}$ y $(D, Q) \in R_\Diamond \cap R_\Box$.

$\Leftarrow$) Por contraposición, asumiremos que la ecuación $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$ no es válida sobre $\mathbf{A}$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ con $\Diamond a \to \Box b \in P$, $\Box(a \to b) \notin P$. De la Proposición 2.1.11 existe $Q \in X(\mathbf{A})$ con $(P, Q) \in R_\Box$ y $a \to b \notin Q$, se sigue por el Corolario 1.7.10 que existe $Z \in X(\mathbf{A})$ tal que $(Q, Z) \in S_{\mathbf{A}}$, $a \in Z$, $b \notin Z$. Por nuestra hipótesis $(P, Z) \in S_{\mathbf{A}} \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$, por lo tanto existe $D \in X(\mathbf{A})$ con $(P, D) \in S_{\mathbf{A}}$, $(D, Z) \in R_\Box \cap R_\Diamond$. Ya que $\Diamond a \to \Box b \in P$, $a \in Z$ se sigue que $\Diamond a \in D$, y $\Box b \in D$, por lo tanto $b \in Z$ lo que es una contradicción. Así, la ecuación $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$ es válida sobre $\mathbf{A}$. $\Box$

Combinando los resultados obtenidos en el Teorema 2.3.1 de la Sección 2.3 y el Teorema 2.4.3 de la presente sección, se obtiene el siguiente Corolario.

Corolario 2.4.4. *Si* V *es una subvariedad de* WHO *axiomatizada por las ecuaciones mencionadas en el Teorema 2.4.3 entonces cada miembro* $\mathbf{A}$ *de la variedad* V *es isomorfo a una subálgebra del álgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$.

Capítulo 3

Lógicas subintuicionistas modales

El término lógica subintuicionista ha sido empleado en la literatura para hacer referencia a sublógicas de la lógica intuicionista. Este tipo de lógicas son definidas semánticamente mediante modelos de Kripke utilizando la misma interpretación de los conectivos que en el caso intuicionista pero sin imponer alguna (o todas) las condiciones que se requieren para el caso intuicionista, a saber: la reflexividad, la transitividad o la persistencia. Existen diferentes trabajos sobre en el estudio de este tipo de lógicas (ver [7, 18, 24, 27, 52] entre otros). En particular, en [18] se introduce un cálculo de Gentzen adecuado para la menor lógica subintuicionista wK_σ y se estudian diferentes extensiones de dicho cálculo.

En este capítulo estudiaremos algunas expansiones de la lógica subintuicionista wK_σ. En particular, introduciremos un cálculo de Gentzen adecuado para el sistema deductivo asociado a la variedad WHO. Por otra parte, utilizando los resultados obtenidos en el Capítulo 2 de este trabajo, buscaremos determinar una semántica tipo Kripke para algunas expansiones modales de wK_σ obteniendo así una generalización de los resultados presentados en diferentes trabajos (ver [8, 29, 32, 53, 55] entre otros). Los resultados exhibidos en el presente capítulo, en conjunto con los resultados del Capítulo 2, han sido enviados para su publicación en [21]. Dicho trabajo se encuentra actualmente en proceso de referato.

Comenzaremos este capítulo introduciendo algunas nociones y resultados elementales sobre sistemas deductivos y cálculos de Gentzen.

3.1 Sistemas deductivos

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de cierto tipo. Escribiremos $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ para denotar el álgebra absolutamente libre de $\mathcal{L}$-fórmulas construidas sobre un conjunto numerable de generadores el cual llamaremos *variables proposicionales*. Asimismo, indicaremos $Fm_{\mathcal{L}}$ al universo del álgebra $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$. Diremos que una relación $\vdash$ entre un conjunto (posiblemente vacío) de fórmulas y una fórmula es una *relación de consecuencia* si satisface las siguientes propiedades:

1) Si $\varphi \in \Gamma$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$ [1]

2) Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ entonces $\Delta \vdash \varphi$

3) Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\sigma \in \mathrm{End}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$ entonces $\sigma[\Gamma] \vdash \sigma[\varphi]$

[1] Como es usual escribiremos $\Gamma \vdash \varphi$ para indicar a los pares $(\Gamma, \varphi) \in \vdash$

Diremos que un par $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ es un *sistema deductivo* si $\vdash_S$ es una relación de consecuencia definida sobre $Fm_{\mathcal{L}}$. Un sistema deductivo $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ se dice finitario si para cada conjunto de fórmulas Γ y cada fórmula φ se tiene que:

$$\Gamma \vdash_S \varphi \text{ si y sólo si existe un subconjunto finito } \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Gamma_0 \vdash_S \varphi.$$

Un *secuente* es un par (Γ, φ) donde Γ es un conjunto finito de fórmulas (posiblemente vacío) y φ es una fórmula. Diremos que un secuente (Γ, φ) es un secuente de un sistema deductivo $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ cuando $\Gamma \vdash_S \varphi$. En tal caso, la expresión $\Gamma \vdash_S \varphi$ indicará que la fórmula φ es una S-consecuencia del conjunto de fórmulas Γ o bien que φ se sigue del conjunto Γ. En caso de que φ se siga del conjunto vacío, en símbolos $\emptyset \vdash_S \varphi$, diremos que la fórmula φ es un *teorema* del sistema deductivo S. Utilizaremos la notación $\Gamma \rhd \varphi$ en lugar de (Γ, φ). El conjunto de todos los secuentes de un tipo algebraico $\mathcal{L}$ es denotado por $\mathrm{Seq}_{\mathcal{L}}$. Si no existe riesgo de confusión escribiremos Seq en lugar de $\mathrm{Seq}_{\mathcal{L}}$.

Sean $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ un sistema deductivo definido sobre el álgebra de fórmulas de tipo $\mathcal{L}$ y Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas. Diremos que Γ es una *teoría* de S si es cerrado bajo deducciones, es decir, si $\{\varphi \colon \Gamma \vdash_S \varphi\} \subseteq \Gamma$. El conjunto de todas las teorías de un sistema deductivo S se indicará como $\mathrm{Th}(S)$ y tiene estructura de sistema de clausura inductivo de donde se sigue que su operador de clausura asociado $T \colon \mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}}) \to \mathcal{P}(Fm_{\mathcal{L}})$, definido por

$$T(\Delta) = \bigcap \{\Gamma \in \mathrm{Th}(S) \colon \Delta \subseteq \Gamma\},$$

es un operador de clausura finitario. Es sencillo probar que

$$T(\Delta) = \{\varphi \in Fm_{\mathcal{L}} \colon \Delta_0 \vdash_S \varphi \text{ para algún } \Delta_0 \text{ subconjunto finito de } \Delta\}.$$

Sea $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ un sistema deductivo. Definimos la relación de Frege asociada al sistema deductivo S, la cual denotamos por $\Lambda(S)$, como la relación

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda(S) \text{ si y sólo si } \alpha \vdash_S \beta \text{ y } \beta \vdash_S \alpha.$$

La relación de Frege $\Lambda(S)$ es también llamada la relación de interderivabilidad de S y es inmediato verificar que es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$. Más aún, se sigue que

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda(S) \text{ si y sólo si } T(\alpha) = T(\beta).$$

Un sistema deductivo S se dirá *autoextensional* si su relación de Frege $\Lambda(S)$ es una congruencia sobre $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$. En tal caso, el álgebra cociente $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda(S)$ es un álgebra del mismo tipo que $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}$ y es conocida como el álgebra de Lindenbaum-Tarski asociada al sistema deductivo S.

Una de las formas más usuales de asignar una clase de álgebras a un sistema deductivo S es mediate la variedad $\mathbb{V}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda(S))$, la cuál indicaremos como $\mathrm{V}(S)$. Además, notemos que

$$\mathrm{V}(S) \models \alpha \approx \beta \text{ si y sólo si } \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}}/\Lambda(S) \models \alpha \approx \beta \text{ si y sólo si } (\alpha, \beta) \in \Lambda(S).$$

3.1.1 Sistemas deductivos con conjunción

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ un sistema deductivo. Diremos que S tiene una *conjunción* si existe un conectivo binario $\wedge \in \mathcal{L}$ tal que para cada par de variables proposicionales p, q se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $p \wedge q \vdash_S p$.

(2) $p \wedge q \vdash_S q$.

(3) $p, q \vdash_S p \wedge q$.

Una manera de definir los sistemas deductivos con conjunción es a través de una clase de álgebras K basada en semiretículos. Esta clase de álgebras las introduciremos a continuación:

Definición 3.1.1. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un conectivo binario $\wedge$. Diremos que una clase de álgebras K, de tipo $\mathcal{L}$, es una clase de álgebras basada en semiretículos si para cada miembro $\mathbf{A} \in \mathrm{K}$ y cada $a, b, c \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

(2) $a \wedge b = b \wedge a$.

(3) $a \wedge a = a$.

En este trabajo, todas las clases de álgebras que consideramos son clases basadas en semirretículos. En particular, todo miembro $\mathbf{A}$ de las clases de álgebras consideradas en este trabajo, tiene un último elemento $1^{\mathbf{A}}$, al cual simplemente lo notaremos como 1.

Definición 3.1.2. *Sea K una clase de $\mathcal{L}$-álgebras basada en semiretículos. El* sistema deductivo asociado a la clase K *consta del par $\mathcal{S}(\mathrm{K}) = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_{S(\mathrm{K})} \rangle$, donde la relación $\vdash_{S(\mathrm{K})}$ se define de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{K})} \varphi \quad &\textit{si y sólo si} \quad \mathrm{K} \models \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi \approx \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n, \\ \emptyset \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{K})} \varphi \quad &\textit{si y sólo si} \quad \mathrm{K} \models \varphi \approx 1. \end{aligned}$$

Así, para secuentes arbitrarios (Γ, φ) definimos

$$\Gamma \vdash_{S(\mathrm{K})} \varphi \textit{ si y sólo si existe } \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \subseteq \Gamma \textit{ tal que } \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{S(\mathrm{K})} \varphi.$$

Observación 3.1.3. Notemos que si K es una clase de álgebras basada en semiretículos entonces para cada par de fórmulas (α, β) se sigue que

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda(S(\mathrm{K})) \textit{ si y sólo si } \mathrm{K} \models \alpha \approx \beta.$$

De donde se sigue que $S(\mathrm{K}) = S(\mathbb{V}(\mathrm{K}))$. Más aún si K y K' son dos clases de álgebras tales que $S(\mathrm{K}) = S(\mathrm{K}')$ entonces $\mathbb{V}(\mathrm{K}) = \mathbb{V}(\mathrm{K}')$

Los sistemas deductivos autoextensionales con conjunción mantienen una fuerte relación con las clases de álgebras basadas en semiretículos. En efecto, si $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ es un sistema deductivo autoextensional con conjunción entonces para $\gamma_1, .., \gamma_n, \varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$ se sigue que

$$\begin{aligned}\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \vdash_S \varphi \text{ si y sólo si } & (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi, \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \in \Lambda(S) \\ \text{si y sólo si } & \mathrm{V}(S) \models \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi \approx \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n\end{aligned}$$

Donde $\mathrm{V}(S)$ resulta una variedad de álgebras basada en semiretículos. Por otro lado, la Definición 3.1.2 nos permite asociar a cada clase de álgebras basadas en semiretículos un sistema deductivo autoextensional con conjunción. Esta relación se establece en el siguiente resultado [35, Teorema 3.7]

Teorema 3.1.4. *Para cada lenguaje algebraico $\mathcal{L}$ con un operador binaro $\wedge$ existe un isomorfismo dual entre el conjunto de todos los sistemas deductivos autoextensionales con conjunción ordenados por extensión y el conjunto de todas las subvariedades de la variedad $\mathrm{K}_{\mathcal{L}}$ donde $\mathrm{K}_{\mathcal{L}}$ es la variedad axiomatizada por las ecuaciones de la Definición 3.1.1*

Sistema deductivo asociado a la variedad WHO**:** En adelante vamos a considerar el lenguaje subintuicionista con operadores $\mathcal{L}_{so} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond, \bot, \top\}$ de tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$. Escribiremos $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}$ para denotar el álgebra absolutamente libre de fórmulas sobre un conjunto numerable de variables proposicionales al cuál denotaremos por Prop. Asimismo, escribiremos $Fm_{\mathcal{L}_{so}}$ para denotar el universo de dicha álgebra.

Teniendo en cuenta la Definición 3.1.2 definimos el *sistema deductivo asociado a la variedad* WHO, el cual denotamos por $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$, como el par $\mathcal{S}(\mathrm{WHO}) = \left\langle Fm_{\mathcal{L}_{so}}, \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \right\rangle$ donde la relación de consecuencia se define de la siguiente manera: si $\gamma_1, ..., \gamma_n, \varphi$ es un conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas definimos

$$\begin{aligned}\{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi \quad & \text{si y sólo si} \quad \mathrm{WHO} \models \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi \approx \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n, \\ \emptyset \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi \quad & \text{si y sólo si} \quad \mathrm{WHO} \models \varphi \approx 1\end{aligned}$$

Si Γ es un conjunto arbitrario de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas y φ es una fórmula del mismo tipo definimos

$$\Gamma \vdash_{S(\mathrm{WHO})} \varphi \text{ si y sólo si existe } \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \subseteq \Gamma \text{ tal que } \{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{S(\mathrm{WHO})} \varphi.$$

3.1.2 Sistema deductivo asociado a un cálculo de Gentzen

En la presente sección recordaremos algunas definiciones elementales sobre cálculos y sistemas de Gentzen.

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\Gamma \rhd \varphi$ un $\mathcal{L}$-secuente. Definimos la clausura por sustituciones del secuente $\Gamma \rhd \varphi$ como el conjunto de $\mathcal{L}$-secuentes

$$\{h[\Gamma] \rhd h(\varphi) \colon h \in \mathrm{End}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})\}.$$

Si Π es un conjunto de secuentes y $h \in \mathrm{End}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})$ definimos el conjunto

$$h[\Pi] = \{h[\Delta] \rhd h(\alpha) \mid \Delta \rhd \alpha \in \Pi\}.$$

Definición 3.1.5. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de cierto tipo y $(\Pi, \Gamma \rhd \varphi)$ un par donde Π es un conjunto de $\mathcal{L}$-secuentes y $\Gamma \rhd \varphi$ un secuente del mismo tipo. La* regla de Gentzen *generada por el par $(\Pi, \Gamma \rhd \varphi)$ es la clausura por sustituciones de dicho par, es decir*

$$\langle \Pi, \Gamma \rhd \varphi \rangle = \{(h[\Pi], h[\Gamma] \rhd h(\varphi)) \mid h \in \mathrm{End}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}})\}.$$

En tal caso, diremos que el par $(\Pi, \Gamma \rhd \varphi)$ es un generador de la regla. Si $\langle \Pi, \Gamma \rhd \varphi \rangle$ es una regla de Gentzen con $\Pi = \emptyset$ entonces se dirá axioma de Gentzen. Un calculo de Gentzen *$\mathcal{K}$ es un conjunto de reglas de Gentzen.*

Es usual escribir

$$\frac{\Pi}{\Gamma \rhd \varphi},$$

para denotar la regla de Gentzen $\langle \Pi, \Gamma \rhd \varphi \rangle$. En este trabajo usaremos ambas notaciones según resulte conveniente.

Definición 3.1.6. *Sean $\mathcal{K}$ un cálculo de Gentzen definido sobre el conjunto de $\mathcal{L}$-secuentes, Π un conjunto de $\mathcal{L}$-secuentes y $\Gamma \rhd \varphi$ un secuente del mismo tipo. Una $\mathcal{K}$-*prueba *de $\Gamma \rhd \varphi$ a partir del conjunto de secuentes Π es una secuencia de $\mathcal{L}$-secuentes $\Delta_1 \rhd \alpha_1$,...,$\Delta_n \rhd \alpha_n$ tal que $\Delta_n = \Gamma$, $\alpha_n = \varphi$ y para cada $i = 1, ..., n$:*

(1) $\Delta_i \rhd \alpha_i \in \Pi$ *o bien*

(2) $\langle \{\Delta_j \rhd \alpha_j \mid j < i\}, \Gamma \rhd \varphi \rangle$ *es una instancia de alguna regla del cálculo $\mathcal{K}$.*

En caso de que exista una $\mathcal{K}$-prueba del secuente $\Gamma \rhd \varphi$ a partir del conjunto de secuentes Π diremos que $\Gamma \rhd \varphi$ es derivable del conjunto de secuentes Π en el cálculo $\mathcal{K}$. En caso de que el secuente $\Gamma \rhd \varphi$ sea derivable del conjunto $\Pi = \emptyset$ diremos que $\Gamma \rhd \varphi$ es derivable para el cálculo $\mathcal{K}$

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $\mathcal{K}$ un cálculo de Gentzen definido sobre el conjunto de $\mathcal{L}$-secuentes. La noción de $\mathcal{K}$-prueba nos permite definir una relación de consecuencia sobre el conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas y por lo tanto nos permite definir un sistema deductivo asociado al cálculo de Gentzen $\mathcal{K}$. Para esto, es necesario que nuestro cálculo de Gentzen contenga las siguientes reglas:

$$\text{(I)}: \frac{\emptyset}{\varphi \rhd \varphi} \qquad \text{(M)}: \frac{\Gamma \rhd \varphi}{\Gamma, \psi \rhd \varphi} \qquad \text{(C)}: \frac{\Gamma \rhd \varphi \quad \Gamma, \varphi \rhd \psi}{\Gamma \rhd \psi}.$$

Estas reglas son conocidas como regla de identidad, monotonía (o debilitamiento) a izquierda y corte, respectivamente.

Definición 3.1.7. *Sea $\mathcal{K}$ un cálculo de Gentzen definido sobre el conjunto de los $\mathcal{L}$-secuentes de manera tal que las reglas (I), (M) y (C) son reglas del cálculo. El sistema deductivo estándar asociado al cálculo $\mathcal{K}$ es el par $S_{\mathcal{K}} = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_{\mathcal{K}} \rangle$ donde la relación de consecuencia $\vdash_{\mathcal{K}}$ se define de la siguiente manera: Para cada Γ conjunto finito de $\mathcal{L}$-fórmulas y cada φ fórmula del mismo tipo*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \varphi \textit{ si y sólo si } \Gamma \rhd \varphi \textit{ es derivable en } \mathcal{K}$$

$$\vdash_{\mathcal{K}} \varphi \textit{ si y sólo si } \emptyset \rhd \varphi \textit{ es derivable en } \mathcal{K}$$

Definición 3.1.8. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje y $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ un sistema deductivo definido sobre el conjunto de las $\mathcal{L}$-fórmulas. Diremos que un cálculo de Gentzen $\mathcal{K}$ es adecuado para el sistema deductivo S si y sólo si $S_{\mathcal{K}} = S$.*

3.2 Un cálculo de Gentzen adecuado para $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$

El objetivo de la presente sección es determinar un cálculo de Gentzen adecuado para el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$. Tomaremos como punto de partida el cálculo de Gentzen dado en [7, 18] para la menor lógica subintuicionista ωK_σ y lo extenderemos con ciertas reglas necesarias para los operadores unarios.

Consideremos el siguiente cálculo Gentzen $\mathcal{G}$ sobre el conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-secuentes:

Axiomas de Gentzen

1) $\bot \rhd \varphi$.

2) $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \rhd \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$.

3) $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \rhd (\alpha \vee \beta) \to \gamma$.

4) $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \rhd (\alpha \to \gamma)$.

5) $\top \rhd \Box\top$.

6) $\Diamond\bot \rhd \bot$.

7) $\Box\alpha \wedge \Box\beta \rhd \Box(\alpha \wedge \beta)$.

8) $\Diamond(\alpha \vee \Diamond\beta) \rhd \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$.

Reglas de Gentzen

$$\mathbf{I}:\ \frac{\emptyset}{\varphi \rhd \varphi} \qquad \mathbf{M}:\ \frac{\Gamma \rhd \alpha}{\Gamma, \beta \rhd \alpha} \qquad \mathbf{C}:\ \frac{\Gamma, \alpha \rhd \varphi,\ \Gamma \rhd \alpha}{\Gamma \rhd \varphi}$$

$$\wedge_1:\ \frac{\Gamma \rhd \alpha,\ \Gamma \rhd \beta}{\Gamma \rhd \alpha \wedge \beta} \qquad \wedge_2:\ \frac{\Gamma, \alpha \rhd \varphi \quad \Gamma, \beta \rhd \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \rhd \varphi}$$

$$\vee_1:\ \frac{\Gamma, \alpha \rhd \varphi \quad \Gamma, \beta \rhd \varphi}{\Gamma, \alpha \vee \beta \rhd \varphi} \qquad \vee_2:\ \frac{\Gamma \rhd \alpha}{\Gamma \rhd \alpha \vee \beta} \qquad \vee_3:\ \frac{\Gamma \rhd \beta}{\Gamma \rhd \alpha \vee \beta}$$

$$\Box_1:\ \frac{\varphi \rhd \psi}{\Box\varphi \rhd \Box\psi} \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{T}_0}:\ \frac{\alpha \rhd \beta}{\emptyset \rhd \alpha \to \beta} \qquad \Diamond_1:\ \frac{\varphi \rhd \psi}{\Diamond\varphi \rhd \Diamond\psi}$$

Teniendo en cuenta la Definición 3.1.7 sobre el conjunto de las $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas definimos el sistema deductivo estandar asociado al cálculo $\mathcal{G}$, el cual vamos a denotar como el par $S_{\mathcal{G}} = \langle Fm_{\mathcal{L}_{so}}, \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \rangle$, donde la relación de consecuencia $\vdash_{S_{\mathcal{G}}}$ se define de la siguiente manera:

$\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi$ si y sólo si $\Gamma \rhd \varphi$ es derivable en $\mathcal{G}$.

$\emptyset \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi$ si y sólo si $\emptyset \rhd \varphi$ es derivable en $\mathcal{G}$.

Para el caso de secuentes arbitrarios, definimos

$\Gamma \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi$ si y sólo si $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi$ para algun subconjunto finito $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subseteq \Gamma$.

Lema 3.2.1. *Los siguientes* $\mathcal{L}_{so}$*-secuentes son derivables en* $\mathcal{G}$

(1) $\emptyset \rhd \varphi \to \varphi$.

(2) $\varphi \rhd \varphi \vee \psi$.

(3) $\psi \rhd \varphi \vee \psi$.

(4) $\varphi \wedge \psi \rhd \varphi$.

(5) $\psi \wedge \psi \rhd \varphi$.

(6) $\psi, \varphi \rhd \varphi \wedge \psi$.

Además

(a) ***El secuente*** $\{\alpha \to \gamma \colon \gamma \in \Gamma\} \rhd \alpha \to \varphi$ ***se sigue del secuente*** $\Gamma \rhd \varphi$.

(b) ***El secuente*** $\psi \to \alpha \rhd \varphi \to \alpha$ ***se sigue del secuente*** $\varphi \rhd \psi$.

Demostración. ver [7, Lema 3.1] $\square$

Lema 3.2.2. *Sean* α, β *dos* $\mathcal{L}_{so}$*-fórmulas y* $S_{\mathcal{G}}$ *el sistema deductivo estándar asociado al cálculo* $\mathcal{G}$*. Entonces*

(1) $\square\,(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{S_{\mathcal{G}}} \square\alpha \wedge \square\beta$.

(2) $\lozenge\,(\alpha \vee \beta) \dashv\vdash_{S_{\mathcal{G}}} \lozenge\alpha \vee \lozenge\beta$.

Demostración. (1) Sean α y β dos fórmulas. Por las reglas I y M se sigue que

$$\frac{\emptyset}{\{\alpha,\beta\} \rhd \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\emptyset}{\{\alpha,\beta\} \rhd \beta}.$$

Luego, por la regla $(\wedge_2)$ se sigue que

$$\frac{\emptyset}{\alpha \wedge \beta \rhd \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\emptyset}{\alpha \wedge \beta \rhd \beta}$$

Aplicando la regla $(\square_1)$ se sigue que

$$\frac{\emptyset}{\square(\alpha \wedge \beta) \rhd \square\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\emptyset}{\square(\alpha \wedge \beta) \rhd \square\beta}$$

Por último, usando la regla $(\wedge_1)$ se sigue que

$$\frac{\emptyset}{\square(\alpha \wedge \beta) \rhd \square\alpha \wedge \square\beta}$$

De donde se sigue que el secuente $\square(\alpha \wedge \beta) \rhd \square\alpha \wedge \square\beta$ es derivable en $\mathcal{G}$ y en consecuencia $\square(\alpha \wedge \beta) \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \square\alpha \wedge \square\beta$. Asimismo, teniendo en cuenta el axioma (7) del cálculo $\mathcal{G}$ se sigue que $\square\alpha \wedge \square\beta \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \square(\alpha \wedge \beta)$. La prueba para (2) es análoga. $\square$

Se sigue del Lema 3.2.1 que el sistema deductivo estándar $S_{\mathcal{G}}$ tiene conjunción. Por lo tanto dadas $\gamma_1, ..., \gamma_n, \varphi$ $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas se sigue que

$$\{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi \text{ si y sólo si } \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \dashv\vdash_{S_{\mathcal{G}}} \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi.$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.2.1 y el Lema 3.2.2 se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.2.3. *El sistema deductivo $S_{\mathcal{G}}$ es autoextensional.*

Demostración. Probaremos que la relación $\Lambda(S_{\mathcal{G}})$ definida por

$$(\varphi, \psi) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}}) \text{ si y sólo si } \varphi \dashv\vdash_{S_{\mathcal{G}}} \psi,$$

es una congruencia sobre el álgebra de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas. Debido a las reglas para los conectivos del cálculo $\mathcal{G}$ es sencillo verificar que si $(\varphi_1, \psi_1) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ y $(\varphi_2, \psi_2) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ entonces $(\varphi_1 * \varphi_2, \psi_1 * \psi_2) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ para $* \in \{\vee, \wedge\}$. Por lo tanto, sólo trataremos con el caso implicativo y los casos modales. Supongamos que $(\varphi_1, \psi_1) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ y $(\varphi_2, \psi_2) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$. De el hecho de que $\psi_1 \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi_1$ se sigue que el secuente $\psi_1 \rhd \varphi_1$ es derivable. Teniendo en cuenta la regla DT_0 se sigue que $\emptyset \rhd \psi_1 \to \varphi_1$ es también derivable en $\mathcal{G}$. Utilizando la regla de monotonía M se sigue que el secuente

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \rhd \psi_1 \to \varphi_1 \tag{3.1}$$

Es derivable en $\mathcal{G}$. Por otro lado, dado que $\varphi_2 \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \psi_2$ se sigue que $\varphi_2 \rhd \psi_2$ es derivable en $\mathcal{G}$. Luego, por (a) del Lema 3.2.1 se sigue que

$$\varphi_1 \to \varphi_2 \rhd \varphi_1 \to \psi_2 \tag{3.2}$$

Es también derivable en $\mathcal{G}$. Así, por el axioma (4) y la regla C tenemos que $\varphi_1 \to \varphi_2 \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \psi_1 \to \psi_2$. Un argumento similar muestra que $\psi_1 \to \psi_2 \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi_1 \to \varphi_2$ de donde se sigue que $(\varphi_1 \to \varphi_2, \psi_1 \to \psi_2) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$. Por último, si $(\varphi, \psi) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ entonces tenemos que $\varphi \dashv\vdash_{S_{\mathcal{G}}} \psi$, es decir los secuentes $\varphi \rhd \psi$ y $\psi \rhd \varphi$ son derivables en $\mathcal{G}$. Teniendo en cuenta la regla $\Box_1$ tenemos que $\Box(\varphi) \rhd \Box(\psi)$ y $\Box(\psi) \rhd \Box(\varphi)$ son derivables en $\mathcal{G}$, por lo tanto se sigue que $(\Box(\varphi), \Box(\psi)) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$. Una prueba similar muestra que si $(\varphi, \psi) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$ entonces $(\Diamond(\varphi), \Diamond(\psi)) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$. $\Box$

Teniendo en cuenta que la relación de Frege $\Lambda(S_{\mathcal{G}})$ resulta una congruencia sobre el álgebra de $\mathcal{L}_{so}$ fórmulas se sigue que el álgebra

$$\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}}) = \left(Fm_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}}), \wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond, 0^{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}})}, 1^{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}})}\right),$$

es un álgebra en el lenguaje $\mathcal{L}_{so}$ donde las operaciones son definidas de manera usual y

$$1^{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}})} := \top/\Lambda(S_{\mathcal{G}}) \text{ y } 0^{\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}})} := \bot/\Lambda(S_{\mathcal{G}})$$

Notemos además que para cualquier $\mathcal{L}_{so}$-ecuación $\alpha \approx \beta$

$$\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}}) \models \alpha \approx \beta \text{ si y sólo si } (\alpha, \beta) \in \Lambda(S_{\mathcal{G}})$$

Lema 3.2.4. *El álgebra $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S_{\mathcal{G}})$ es una WHO-álgebra.*

Demostración. Teniendo en cuenta las reglas estructurales I,M y C del cálculo $\mathcal{G}$ y las reglas para los conectivos $\wedge$ y $\vee$ se sigue que

$$(Fm/\Lambda\left(S_{\mathcal{G}}\right), \wedge, \vee, 1, 0),$$

es un retículo distributivo acotado, por lo tanto será necesario probar que son válidas las identidades de la Definición 1.7.1:

1) Sea φ una $\mathcal{L}_{so}$-fórmula probaremos que

$$\mathbf{Fm}/\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{G}}) \models \varphi \to \varphi \approx \top,$$

es decir probaremos que los secuentes $\varphi \to \varphi \rhd \top$ y $\top \rhd \varphi \to \varphi$ son derivables en $\mathcal{G}$. En virtud de la regla I se sigue que el secuente $\varphi \rhd \varphi$ es derivable. Teniendo en cuenta la regla DT_0 se sigue que $\emptyset \rhd \varphi \to \varphi$ es derivable en G. Luego, por la regla de monotonía M se sigue que $\top \rhd \varphi \to \varphi$ es derivable en $\mathcal{G}$. Un razonamiento análogo muestra que el secuente $\varphi \to \varphi \rhd \top$ es derivable.

2) Sean φ, ψ, δ $\mathcal{L}_{so}$ fórmulas probaremos que

$$\mathbf{Fm}/\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{G}}) \models \varphi \to (\psi \wedge \delta) \approx (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \delta).$$

En virtud del axioma (2) del cálculo $\mathcal{G}$ sólo será necesario probar que el secuente $\varphi \to (\psi \wedge \delta) \rhd (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \delta)$ es derivable. En efecto, por la regla $\wedge_2$ se sigue que los secuentes $(\psi \wedge \delta) \rhd \psi$ y $(\psi \wedge \delta) \rhd \delta$ son derivables. Teniendo en cuenta la propiedad (a) del Lema 3.2.1 se sigue que los secuentes $\varphi \to (\psi \wedge \delta) \rhd \varphi \to \psi$ y $\varphi \to (\psi \wedge \delta) \rhd \varphi \to \delta$ son derivables. Luego, por regla $\wedge_3$ se sigue que el secuente $\varphi \to (\psi \wedge \delta) \rhd (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \delta)$ es derivable.

3) Sean φ, ψ, δ $\mathcal{L}_{so}$ fórmulas probaremos que

$$\mathbf{Fm}/\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{G}}) \models (\varphi \vee \psi) \to \delta \approx (\varphi \to \delta) \wedge (\psi \to \delta).$$

Teniendo en cuenta el axioma (3) del cálculo $\mathcal{G}$ sólo será necesario probar que el sencuente $(\varphi \vee \psi) \to \delta \rhd (\varphi \to \delta) \wedge (\psi \to \delta)$ es derivable. Teniendo en cuenta las reglas $\vee_1$ y $\vee_2$ del cálculo $\mathcal{G}$ se sigue que los secuentes $\varphi \rhd \varphi \vee \psi$ y $\psi \rhd \varphi \vee \psi$ son derivables. Luego, por (b) del Lema 3.2.1 se sigue que $(\varphi \vee \psi) \to \delta \rhd \varphi \to \delta$ y $(\varphi \vee \psi) \to \delta \rhd \psi \to \delta$ son derivables. Por la regla $\wedge_1$ se sigue que el secuente $(\varphi \vee \psi) \to \delta \rhd (\varphi \to \delta) \wedge (\psi \to \delta)$ es derivable.

4) Sean φ, ψ, δ $\mathcal{L}_{so}$ fórmulas probaremos que

$$\mathbf{Fm}/\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{G}}) \models ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \delta)) \wedge (\varphi \to \psi) \approx (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \delta).$$

Esta identidad se satisface debido al axioma (4) del cálculo $\mathcal{G}$ y al hecho de que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ es un sistema deductivo con conjunción.

Por último, teniendo en cuenta el Lema 3.2.2 y los axiomas (5) y (6) del cálculo $\mathcal{G}$ se puede comprobar que

$$(Fm/\Lambda\left(S_{\mathcal{G}}\right), \Box, \Diamond),$$

es un retículo modal. Por lo tanto, se sigue que $\mathbf{Fm}/\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{so}})$ es un miembro de la variedad WHO. $\Box$

Con el objetivo de hacer más clara la prueba del siguiente resultado introduciremos una transformación de $\mathcal{L}_{so}$-secuentes en $\mathcal{L}_{so}$-ecuaciones mediante la aplicación

$$\rho\,(\Gamma \rhd \varphi) = \bigwedge \Gamma \wedge \varphi \approx \bigwedge \Gamma.$$

Teorema 3.2.5. *El cálculo de Gentzen $\mathcal{G}$ es adecuado para el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$. Esto es, para cada conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas Γ y cada fórmula φ del mismo tipo*

$$\Gamma \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi \textit{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Como es usual debemos comprobar que la variedad WHO satisface la ecuación $\rho\,(\Upsilon \rhd \epsilon)$, para cada $\Upsilon \rhd \epsilon$ axioma del cálculo $\mathcal{G}$. Asimismo, debemos comprobar que para cada $\langle \Pi, \Upsilon \rhd \epsilon \rangle$ regla del cálculo $\mathcal{G}$ la variedad WHO satisface la quasi-ecuación:

$$\{\rho(\Delta \rhd \alpha) \colon \Delta \rhd \alpha \in \Pi\} \Rightarrow \rho(\Upsilon \rhd \epsilon)$$

Unos cálculos directos bastan comprobar dichos enunciados. Luego, por inducción sobre la longitud de la $\mathcal{G}$-prueba de $\Gamma \rhd \varphi$ se sigue que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi$. Por la propia definición del sistema $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$ se sigue entonces que existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, .., \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\mathrm{WHO} \models \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi \approx \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n.$$

En particular, por el Lema 3.2.4, se sigue que $\mathbf{Fm}/\Lambda(S_{\mathcal{G}}) \in \mathrm{WHO}$. Teniendo en cuenta el homomorfismo canónico $\nu \colon \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}} \to \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}/\Lambda(S)$, se sigue que

$$\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \varphi \dashv\vdash_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}}} \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n.$$

Dado que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ es autoextensional y con conjunción se sigue que $\{\gamma_1, .., \gamma_n\} \vdash_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}}} \varphi$, es decir, $\Gamma \vdash_{S_{\mathcal{G}}} \varphi$. $\square$

Lógicas subintuicionistas modales: En este apartado vamos a introducir la noción de lógica subintuicionista modal mediante la extensión del sistema deductivo $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ utilizando la siguiente lista de secuentes:

$\mathrm{T}_{\Box} \colon \Box\alpha \rhd \alpha$	$w\mathrm{K}_{\Box\Diamond} \colon \Box\,(\alpha \to \beta) \wedge \Diamond\alpha \rhd \Diamond\beta$
$\mathrm{T}_{\Diamond} \colon \alpha \rhd \Diamond\alpha$	$w\mathrm{K}_{\Box\Diamond} \colon \Box\,(\alpha \to \beta) \wedge \Diamond\alpha \rhd \Diamond\beta$
$4_{\Box} \colon \Box\alpha \rhd \Box^2\alpha$	$\mathrm{FS}_1 \colon \Diamond\,(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Diamond\beta$
$4_{\Diamond} \colon \Diamond^2\alpha \rhd \Diamond\alpha$	$w\mathrm{FS}_1 \colon \Diamond\,(\alpha \to \beta) \wedge \Box\alpha \rhd \Diamond\beta$
$\mathrm{K}_{\Box} \colon \Box\,(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathrm{FS}_2 \colon \Diamond\alpha \to \Box\beta \rhd \Box\,(\alpha \to \beta)$

Lista de secuentes

Definición 3.2.6. *Un sistema deductivo $S = \langle S, \vdash_S \rangle$ se dirá* lógica subintuicionista modal *si es una extensión del sistema $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$.*

Teniendo en cuenta los resultados de [18, Sección 5], existen naturalmente dos tipos de extensiones para el sistema $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$. Dado $\Gamma \rhd \varphi$ un $\mathcal{L}_{so}$-secuente definimos las siguientes extensiones:

- $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \varphi)$ el sistema deductivo estándar asociado al cálculo de Gentzen $\mathcal{G} \cup \{\Gamma \rhd \varphi\}$.
- $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \{\Gamma \rhd \varphi\}$ el menor sistema deductivo $S = \langle Fm_{\mathcal{L}_{so}}, \vdash_S\rangle$ tal que S extiende a $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ y $\Gamma \vdash_S \varphi$.

Las extensiones mencionadas en la siguientes lista son algunas lógicas subintuicionistas modales:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{T}_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{T}_\Box & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus w\mathrm{K}_{\Box\Diamond} \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{T}_\Diamond) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{T}_\Diamond & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus w\mathrm{K}_{\Box\Diamond} \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(4_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{FS}_1) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus 4_\Box & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{FS}_1 \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(4_\Diamond) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{FS}_1) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus 4_\Diamond & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus w\mathrm{FS}_1 \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{K}_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{FS}_2) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{K}_\Box & \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{FS}_2
\end{array}$$

Lista de extensiones 1

Existe una relación entre las extensiones de la forma $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \varphi)$ y las extensiones de la forma $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \Gamma \rhd \varphi$ la cual se establece en el siguiente resultado (ver [18, Proposición 5.3]):

Lema 3.2.7. *Para cada* $R \in \{4_\Box, 4_\Diamond, \mathrm{T}_\Box, \mathrm{T}_\Diamond, \mathrm{K}_\Box, \mathrm{K}_{\Box\Diamond}, w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}, \mathrm{FS}_1, w\mathrm{FS}_1, \mathrm{FS}_2\}$ *el sistema deductivo* $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(R)$ *es una extensión propia del sistema deductivo* $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus R$.

Demostración. Dado que la prueba en todos los casos es análoga tomamos como ejemplo el secuente

$$\mathrm{K}_\Box\colon \Box(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Box\beta.$$

Por la propia definición de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{K}_\Box$ se sigue que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathrm{K}_\Box)$ es una extensión de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{K}_\Box$. Asimismo, por la regla DT_0 se tiene que $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ es un teorema de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathrm{K}_\Box)$. Sin embargo, $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ no es un teorema de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{K}_\Box$. Se sigue entonces que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathrm{K}_\Box)$ es una extensión propia de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}} \oplus \mathrm{K}_\Box$. $\Box$

Por razones que resultarán evidentes en los próximos resultados, en este trabajo sólo vamos a considerar las extensiones de la forma $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \varphi)$. En particular, vamos a considerar los siguientes sistemas deductivos:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{T}_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{T}_\Diamond) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(4_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{FS}_1) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(4_\Diamond) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(w\mathrm{FS}_1) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{K}_\Box) & \mathcal{S}_{\mathcal{G}}\,(\mathrm{FS}_2)
\end{array}$$

Lista de extensiones 2

A continuación consideremos la siguiente tabla de $\mathcal{L}_{so}$-secuentes y $\mathcal{L}_{so}$-ecuaciones

	Secuente	Ecuación
$\mathrm{T}_\Box$	$\Box\alpha \rhd \alpha$	$\Box a \leq a$
$\mathrm{T}_\Diamond$	$\alpha \rhd \Diamond\alpha$	$a \leq \Diamond a$
$4_\Box$	$\Box\alpha \rhd \Box^2\alpha$	$\Box a \leq \Box^2 a$
$4_\Diamond$	$\Diamond^2\alpha \rhd \Diamond\alpha$	$\Diamond a \leq \Diamond^2 a$
$\mathrm{K}_\Box$	$\Box(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Box\beta$	$\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$
$\mathrm{K}_{\Box\Diamond}$	$\Box(\alpha \to \beta) \rhd \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$	$\Box(a \to b)\wedge \leq \Diamond a \to \Diamond b$
$w\mathrm{K}_{\Box\Diamond}$	$\Box(\alpha \to \beta) \wedge \Diamond\alpha \rhd \Box\beta$	$\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$
FS_1	$\Diamond(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Diamond\beta$	$\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$
$w\mathrm{FS}_1$	$\Diamond(\alpha \to \beta) \wedge \Box\alpha \rhd \Diamond\beta$	$\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$
FS_2	$\Diamond\alpha \to \Box\beta \rhd \Box(\alpha \to \beta)$	$\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$

Tabla de secuentes y ecuaciones

Teniendo en cuenta el Teorema 3.2.5 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.8. *Para cada secuente* $\Gamma \rhd \varphi$ *de la columna izquierda de la Tabla de secuente y ecuaciones, el cálculo* $\mathcal{G} \cup \{\Gamma \rhd \varphi\}$ *es adecuado para el sistema deductivo asociado a la subvariedad de* WHO *que se obtiene al considerar la correspondiente ecuación en la columna derecha de la Tabla.*

3.3 Semántica tipo Kripke para el sistema $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$

El objetivo de esta sección es el estudio de semánticas relacionales de tipo Kripke para el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$ de manera que permita obtener una generalización adecuada de la semántica de tipo Kripke utilizadas para la lógica modal intuicionista (ver [8, 18, 29]) y de la semántica tipo Kripke subintuicionista (ver [7, 18]) simultáneamente.

Definición 3.3.1. *Sea* $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ *un WHO-marco. Una* valuación *sobre* $\mathcal{F}$ *es una función* $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$*, donde* Prop *es el conjunto de las variables proposicionales. En este caso, diremos que el par* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ *es un* WHO-modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F}$.

Observación 3.3.2. Sea $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ una valuación. Dado que $\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}$ es el álgebra absolutamente libre sobre el conjunto Prop la aplicación v se extiende de manera única mediante las siguientes clausulas

(1) $v(\top) = X$.

(2) $v(\bot) = \emptyset$.

(3) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \cap v(\psi)$.

(4) $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \cup v(\psi)$.

(5) $v(\varphi \to \psi) = \{x \in X\colon S(x) \cap v(\varphi) \subseteq v(\psi)\}$.

(6) $v(\Box(\varphi)) = \{x \in X\colon R(x) \subseteq v(\varphi)\}$.

(7) $v(\Diamond(\varphi)) = \{x \in X\colon T(x) \cap v(\varphi) \neq \emptyset\}$.

Sea $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ es un WHO-marco. Consideremos las relaciones

$$R_{\Box} := R \circ \leq \quad \text{y} \quad R_{\Diamond} := T \circ \leq^{-1} \tag{3.3}$$

Lema 3.3.3. *Sea $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ un WHO-marco, $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ una función que se extiende por las clausulas de la Observación 3.3.2 y φ una $\mathcal{L}_{so}$-fórmula. Entonces*

(1) $v(\Box\varphi) = \{x \in X\colon R_{\Box}(x) \subseteq v(\varphi)\}$.

(2) $v(\Diamond\varphi) = \{x \in X\colon R_{\Diamond}(x) \cap v(\varphi) \neq \emptyset\}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba de (1). Teniendo en cuenta la Observación 3.3.2 y la Definición 2.1.4 se sigue que

$$v(\Box\varphi) = \Box_R(v(\varphi)).$$

Luego, por Lema 2.1.6 se sigue que

$$v(\Box\varphi) = \Box_{R_{\Box}}(v(\varphi))$$

que es lo que queríamos mostrar. La prueba para (2) es análoga. $\Box$

Si $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ es un modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F}$ entonces es posible definir una función $v^*\colon \mathcal{P}(\mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}}) \to \mathrm{Up}(X)$ definida por

$$v^*(\Gamma) = \begin{cases} \bigcap\{v(\gamma)\colon \gamma \in \Gamma\} & \text{si} \quad \Gamma \neq \emptyset \\ X & \text{si} \quad \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

Es claro que si $\Gamma = \{\varphi\}$ entonces $v^*(\varphi) = v(\varphi)$. En adelante usaremos la notación v para indicar a la aplicación v^* debido a que no genera confusión alguna y nos permite evualuar conjuntos de fórmulas.

Definición 3.3.4. *Sea φ una $\mathcal{L}_{so}$-fórmula y $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un WHO-modelo basado en $\mathcal{F}$. Diremos que φ es válida en $\mathcal{M}$ si $v(\varphi) = X$. Diremos que φ es válida en $\mathcal{F}$ si es válida en todo modelo $\mathcal{M}$ basado en $\mathcal{F}$. Escibiremos $\mathcal{M} \vDash \varphi$ y $\mathcal{F} \vDash \varphi$ para indicar que la fórmula φ es válida sobre $\mathcal{M}$ y sobre $\mathcal{F}$ respectivamente.*

Definición 3.3.5. *Sea $\Gamma \rhd \varphi$ un $\mathcal{L}_{so}$-secuente y $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un WHO-modelo. Diremos que:*

(1) *El secuente $\Gamma \rhd \varphi$ es localmente válido en $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ si $v(\Gamma) \subseteq v(\varphi)$. En este caso, lo notaremos como $\mathcal{M} \vDash_l \Gamma \rhd \varphi$.*

(2) *El secuente $\Gamma \rhd \varphi$ es localmente válido en el marco $\mathcal{F}$ si $\Gamma \rhd \varphi$ es localmente válido en todo modelo $\mathcal{M}$ basado en $\mathcal{F}$. En este caso, lo notaremos con $\mathcal{F} \vDash_l \Gamma \rhd \varphi$*

Utilizando las nociones de validez local de un secuente y la noción de validez de una fórmula sobre un WHO-modelo (WHO-marco) es posible definir el sistema deductivo local para una clase de WHO-marcos:

Definición 3.3.6. *Sean* M *una clase de WHO-marcos, Γ un conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas y φ una fórmula del mismo tipo. La* relación de consecuencia local *se define de la siguiente manera:*

$$\Gamma \vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi \textit{ si y sólo si } \mathcal{F} \vDash_l \Gamma \rhd \varphi \textit{ para cada } \mathcal{F} \textit{ marco de } \mathsf{M}.$$

$$\vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi \textit{ si y sólo si } \mathcal{F} \vDash_l \varphi \textit{ para cada } \mathcal{F} \textit{ marco de } \mathsf{M}.$$

Dado $S = (Fm_{\mathcal{L}_{so}}, \vdash_S)$ un sistema deductivo definido sobre el conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas. Diremos que S está caracterizado por una clase de WHO-marcos M o bien que es fuertemente completo respecto a la clase de WHO-marcos M si para cada Γ conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas y cada φ fórmula del mismo tipo se tiene la siguiente propiedad:

$$\Gamma \vdash_S \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi.$$

En la siguiente sección estudiaremos la conexión entre la relación de consecuencia local definida por una clase de WHO-marcos con respecto al sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$. Mostraremos que el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$ es fuertemente completo respecto a la clase de los WHO-marcos.

3.4 Completitud fuerte para el sistema $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$

En la presente sección haremos uso de los resultados obtenidos en la Sección 2.4 para comprobar que el sistema deductivo asociado a la variedad WHO es fuertemente completo respecto a la lógica definida por la relación de consecuencia local asociada a la clase de todos los WHO-marcos (ver Definición 3.3.6). Es decir, para cada Γ conjunto de $\mathcal{L}_{so}$-fórmulas y φ una fórmula del mismo tipo se tiene que

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash_{l(\mathsf{WHO})} \varphi.$$

Asimismo, probaremos este mismo resultado para algunas subvariedades de WHO las cuales son axiomatizadas por las ecuaciones mencionadas en el Teorema 2.4.3. Comenzaremos esta sección introduciendo algunos operadores entre clases de marcos y clases de álgebras. Estos operadores serán de gran utilidad para el estudio de una semántica relacional para el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{WHO})$ y algunas de sus extensiones.

Sea K una clase de WHO-álgebras. Teniendo en cuenta el WHO-marco asociado a cada WHO-álgebra (ver Definición 2.2.5) es posible asociar una clase de WHO-marcos a la clase K de la siguiente manera

$$Fr(\mathrm{K}) = \{\mathcal{F}(\mathbf{A})\colon \mathbf{A} \in \mathrm{K}\}.$$

Asimismo, si M es una clase de WHO-marcos entonces teniendo en cuenta la WHO-álgebra asociada a cada marco (ver Definición 2.2.4) definimos

$$Alg(\mathsf{M}) = \{\mathcal{A}(\mathcal{F})\colon \mathcal{F} \in \mathsf{M}\}.$$

Definición 3.4.1. *Sea* K *una clase de WHO-álgebras. Diremos que una clase de WHO-marcos* M *es una* clase de WHO-marcos compañera *de la clase* K *si* $Alg(\mathsf{M}) \subseteq \mathrm{K}$ *y* $Fr(\mathrm{K}) \subseteq \mathsf{M}$

En [15] se realiza un análisis semántico de diferentes lógicas con negación. En particular, se introduce la noción de variedad de $\neg$-álgebras canónica por $\neg$-marcos, la cuál permite establecer conexiones entre los sistemas deductivos asociados a las $\neg$-álgebras y la relación de consecuencia local de diferentes clases de $\neg$-marcos. Teniendo en cuenta los resultados mencionados, haremos la siguiente definición:

Definición 3.4.2. *Una variedad de WHO-álgebras* V *se dirá* canónica por WHO-marcos *si se verifica la siguiente condición*

$$Alg(Fr(\mathrm{V})) \subseteq \mathrm{V}.$$

Lema 3.4.3. *Sea* V *una variedad de WHO-álgebras. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) V *tiene una clase de WHO-marcos compañera.*

(2) V *es canónica por WHO-marcos.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que V tiene una clase de WHO-marcos compañera. Escribiremos M para denotarla. Dado que $Fr(\mathrm{V}) \subseteq \mathsf{M}$ y además $Alg(\mathsf{M}) \subseteq \mathrm{V}$ se sigue que $Alg(Fr(\mathrm{V})) \subseteq \mathrm{V}$. Así, V es canónica por WHO-marcos.

$2 \Rightarrow 1)$ Supongamos que V es canónica por WHO-marcos. Es inmediato notar que $Fr(\mathrm{V})$ es una clase de WHO-marcos compañera de V. $\square$

La prueba del siguiente resultado es análoga a la prueba de [15, Teorema 4.10].

Teorema 3.4.4. *Sea* V *una variedad de WHO-álgebras y* M *una clase de WHO-marcos compañera de* V. *Entonces para cada* Γ *conjnuto de* $\mathcal{L}_{so}$*-fórmulas y cada* φ *fórmula del mismo tipo*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{V})} \varphi \textit{ si y sólo si } \Gamma \vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi.$$

Demostración. $\Rightarrow)$ Comenzamos asumiendo que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{V})} \varphi$. Sean $\mathcal{F} \in \mathsf{M}$ y $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ una valuación sobre $\mathcal{F}$. Se sigue de la Observación 3.3.2 que la valuación v resulta un homomorfismo de álgebras $v\colon \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}} \to \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Dado que M es una clase de WHO-marcos compañera de V se sigue que $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \in \mathrm{V}$. Por nuestra hipótesis existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ tal que

$$v(\gamma_1) \cap v(\gamma_2) \cdots \cap v(\gamma_n) \subseteq v(\varphi),$$

de donde se sigue que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} v(\gamma) \subseteq v(\varphi)$ como queríamos mostrar.

$\Leftarrow)$ Asumiremos ahora que $\Gamma \vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi$. Por absurdo, supongamos que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{S}(\mathrm{V})} \varphi$. Se sigue que existe un álgebra $\mathbf{A} \in \mathrm{V}$ y un homomorfismo $v\colon \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}} \to \mathbf{A}$ tal que para cada subconjunto finito $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ se tiene que

$$v(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge v(\gamma_n) \nleq v(\varphi).$$

Teniendo en cuenta el Lema 1.5.5 se sigue que $v(\varphi) \notin \mathrm{Fi}(v[\Gamma])$. Por el Teorema 1.5.8 existe $P \in X(\mathbf{A})$ tal que $v[\Gamma] \subseteq P$ y $v(\varphi) \notin P$. Consideremos el WHO-marco $\mathcal{F}(\mathbf{A})$. Dado que $\mathbf{A} \in \mathrm{V}$ se sigue que $\mathcal{F}(\mathbf{A}) \in \mathsf{M}$. Consideremos además la valuación $\sigma^*_{\mathbf{A}}\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X(\mathbf{A}))$ es definida por $\sigma^*_{\mathbf{A}}(p) = \{P \in X(\mathbf{A})\colon v(p) \in P\}$. Teniendo en cuenta nuestra hipótesis se sigue que existe un subconjunto finito $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\sigma^*_{\mathbf{A}}(\gamma_1) \cap \cdots \cap \sigma^*_{\mathbf{A}}(\gamma_n) \subseteq \sigma^*_{\mathbf{A}}(\varphi),$$

de donde se sigue que $\sigma^*_{\mathbf{A}}[\Gamma] \subseteq \sigma^*_{\mathbf{A}}(\varphi)$. Dado que $v[\Gamma] \subseteq P$ se sigue que $P \in \sigma^*_{\mathbf{A}}[\Gamma]$ de donde se sigue que $P \in \sigma^*_{\mathbf{A}}(\varphi)$ y en consecuencia $v(\varphi) \in P$, lo que resulta imposible. $\square$

Teniendo en cuenta el Teorema 3.4.4 se sigue que si V variedad de WHO-álgebras que tiene una clase de WHO-marcos compañera M entonces el sistema deductivo $\mathcal{S}(\mathrm{V})$ es completo respecto de la consecuencia local asociada a la clase de WHO-marcos M. En particular, cada secuente de la Tabla 3.1 tiene asociada una ecuación y una condición de primer orden. Teniendo en cuenta los resultados del Teorema 3.2.5, el Corolario 2.4.4 y el Teorema 3.4.4 podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.4.5. *Para cada secuente* $\Gamma \rhd \varphi$ *de la Tabla 3.1 se tiene que*

$$\vdash_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}\cup\{\Gamma\rhd\varphi\}}} = \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{V})} = \models_{l(\mathsf{M})},$$

donde V *es la subvariedad de* WHO *que se obtiene al considerar la ecuación correspondiente a el secuente* $\Gamma \rhd \varphi$ *y* M *es la clase de WHO-marcos que satisface la condición de primer orden correspondiente al secuente* $\Gamma \rhd \varphi$*.*

Secuente	Ecuación	Condición de primer orden
$\Box\alpha \rhd \alpha$	$\Box a \leq a$	$R_\Box$ reflexiva
$\Box^2\alpha \rhd \Box\alpha$	$\Box^2 a \leq \Box a$	$R_\Box$ transitiva
$\alpha \rhd \Diamond\alpha$	$a \leq \Diamond a$	$R_\Diamond$ reflexiva
$\Diamond\alpha \rhd \Diamond^2\alpha$	$\Diamond a \leq \Diamond^2 a$	$R_\Diamond$ transitiva
$\Box(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Box\beta$	$\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$	$\forall x, y, z\,[Sxy \wedge R_\Box yz \Rightarrow \exists u, v\,(R_\Box xu \wedge R_\Box yv \wedge Suv \wedge v \leq z)]$
$\Box(\alpha \to \beta) \rhd \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$	$\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$	$\forall x, y, z\,[Sxy \wedge R_\Diamond yz \Rightarrow \exists u, v\,(Suv \wedge R_\Box xu \wedge R_\Diamond yv \wedge z \leq v)]$
$\Box(\alpha \to \beta) \wedge \Diamond\alpha \rhd \Diamond b$	$\Box(a \to b) \wedge \Diamond a \leq \Diamond b$	$\forall x, y\,[R_\Diamond xy \Rightarrow \exists u, v\,(R_\Box xu \wedge Suv \wedge y \leq v \wedge R_\Diamond xv)]$
$\Diamond(\alpha \to \beta) \rhd \Box\alpha \to \Diamond\beta$	$\Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$	$\forall x, y, z\,[R_\Diamond xy \wedge Sxz \Rightarrow \exists t\,(Syt \wedge R_\Box zt \wedge R_\Diamond zt)]$
$\Diamond(\alpha \to \beta) \wedge \Box\alpha \rhd \Diamond\beta$	$\Diamond(a \to b) \wedge \Box a \leq \Diamond b$	$R_\Diamond \subseteq (R_\Box \cap R_\Diamond) \circ S^{-1}$
$\Diamond\alpha \to \Box\beta \rhd \Box(\alpha \to \beta)$	$\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$	$R_\Box \circ S \subseteq S \circ (R_\Box \cap R_\Diamond)$

Table 3.1: Tabla de secuentes, ecuaciones y condiciones de primer orden

Capítulo 4

Sobre un operador modal de necesidad en algunas subvariedades de la variedad de las WH-álgebras

En el inicio del Capítulo 2 del presente trabajo hemos definido dos tipos de operadores unarios. Por un lado, los ínfimo homomorfismos los cuales hemos denotado por $\Box$ y por otra parte los supremo homomorfismos que hemos denotado por $\Diamond$. Usualmente en la bibliografía el operador $\Box$ es llamado operador modal de necesidad mientras que el operador $\Diamond$ es llamado operador modal de posibilidad. Sin embargo, en este trabajo, hemos decidido reservar dichos nombres para ciertos casos particulares de operadores unarios. En particular, en el presente capítulo introduciremos la noción de operador modal de necesidad sobre las subvariedades RWH y SRL de la variedad WH y buscaremos generalizar resultados obtenidos en [13, 32, 47] para estudiar variedades de RWH-álgebras y retículos subresiduados con operadores modales respectivamente. Los resultados exhibidos en este capítulo han sido publicados en [22].

4.1 Operador de necesidad en RWH y SRL

Recordemos que si $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting y $\Box\colon A \to A$ un operador unario sobre $\mathbf{A}$ entonces diremos que el operador unario $\Box\colon A \to A$ es un ínfimo homomorfismo si para cada $a, b \in A$, se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Box 1 = 1$

2) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$

En tal caso diremos que $(\mathbf{A}, \Box)$ es una $H_\Box$-álgebra (ver [13, Definición 5.3]). La clase conformada por las $H_\Box$-álgebras forman una variedad a la cuál denotaremos por $\mathrm{H}_\Box$.

Observación 4.1.1. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de Heyting y $\Box$ un operador unario sobre $\mathbf{A}$ tal que $\Box 1 = 1$. Entonces para cada $a, b \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

A continuación daremos un ejemplo de álgebra de Heyting con un operador unario $\Box\colon A \to A$ que será muy útil.

Ejemplo 6. Sea A el álgebra de Boole de cuatro elementos, donde x y y son los átomos. En particular, es un álgebra de Heyting. Definimos el operador unario $\Box$ sobre A de la siguiente manera $\Box 0 = 0$, $\Box x = y$, $\Box y = x$ y $\Box 1 = 1$. Teniendo en cuenta que $\Box 1 = 1$ y para cada $a, b \in \mathbf{A}$ se verifica la condición $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$, se sigue que $\Box$ es un ínfimo homomorfismo.

Teniendo en cuenta la Observación 4.1.1 se sigue que las identidades $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ y $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$ son equivalentes en el marco de la variedad $\mathrm{H}_{\Box}$. A continuación exhibiremos algunos ejemplos álgebras $(A, \wedge, \vee, \to, \Box, 0, 1)$ dotadas de un operador unario $\Box$ que demuestran dichas condiciones no son necesariamente equivalentes cuando el reducto no modal no es un álgebra de Heyting sino mas bien algún álgebra más general tal como retículos subresiduados o RWH-álgebras.

Ejemplo 7. Sea A la cadena de tres elementos vista como retículo acotado, y sea $D = \{0, 1\}$. Es sencillo comprobar que el par $\mathbf{A} = (A, D)$ es un retículo subresiduado, donde la operación $\to$ está determinada por

$\to$	0	x	1
0	1	1	1
x	0	1	1
1	0	0	1

Consideremos ahora el operador unario $\Box : A \to A$ definido por $\Box 0 = x$, $\Box x = x$ y $\Box 1 = 1$. Notemos que $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ para cada $a, b \in A$. Sin embargo,

$$\Box(1 \to 0) = x \nleq 0 = \Box 1 \to \Box x.$$

Ejemplo 8. Sean A el álgebra de Boole de cuatro elementos vista como retículo distributivo acotado, donde x e y son los átomos, y $D = \{0, 1\}$. Es sencillo comprobar que el par (A, D) es un retículo subresiduado. Más aún, la operación $\to$ está determinada por

$\to$	0	x	y	1
0	1	1	1	1
x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
1	0	0	0	1

Consideremos el operador unario $\Box\colon A \to A$ definido por $\Box 0 = 0$ y $\Box x = \Box y = \Box 1 = 1$. Notemos que $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$ para cada $a, b \in A$. Sin embargo,

$$\Box x \wedge \Box y = 1 \nleq 0 = \Box(x \wedge y).$$

Los ejemplos 7 y 8 motivan la siguiente Definición.

Definición 4.1.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *una WH-álgebra y* $\Box$ *un operador unario sobre* $\mathbf{A}$*. Diremos que* $\Box$ *es un operador modal si las siguientes condiciones se satisfacen para cada* $a, b \in A$*:*

M1) $\Box 1 = 1$,

M2) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$,

M3) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

Observación 4.1.3. Notemos que si $\mathbf{A}$ es una RWH-álgebra y $\Box$ es un operador unario sobre $\mathbf{A}$ tal que satisface M2) o que satisface M1) y M3) entonces $\Box$ es una aplicación monótona, es decir, $\Box a \leq \Box b$ cuando $a \leq b$. En efecto, asumiremos en primer lugar que $\Box\colon A \to A$ es un operador unario que satisface M2) y $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$. En este caso, vemos que

$$\begin{aligned} \Box a &= \Box(a \wedge b) \\ &= \Box a \wedge \Box b \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\Box a \leq \Box b$.
Asumiremos ahora que $\Box\colon A \to A$ satisface M1) y M3). Dados $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ se sigue entonces que $a \to b = 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \Box(a \to b) \\ &\leq \Box a \to \Box b \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\Box a \to \Box b = 1$ y por lo tanto $\Box a \leq \Box b$. En particular, los operadores modales resultarán operadores monótonos definidos sobre $\mathbf{A}$.

Definición 4.1.4. *Un álgebra* $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \Box, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ *se dirá* RWH-álgebra modal*, o bien* KRWH-álgebra*, si* $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ *es una RWH-álgebra y* $\Box$ *es un operador modal sobre* $\mathbf{A}$*. Diremos que* $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \Box, 0, 1)$ *es un* retículo subresiduado modal *si* $\mathbf{A}$ *es un retículo subresiduado y* $\Box$ *es un operador modal definido sobre* $\mathbf{A}$*.*

Es claro que la clase de álgebras cuyos miembros son RWH-álgebras modales y la clase de álgebras cuyos miembros son retículos subresiduados modales forman una variedad. Escribiremos como KRWH a la variedad de álgebras cuyos elementos son las RWH-álgebras modales e indicaremos como KSRL a la variedad de álgebras cuyos elementos son los retículos subresiduados modales. Estas últimas dos variedades serán las de mayor interés en el desarrollo de este capítulo.

4.2 Congruencias y filtros abiertos modales

Un resultado de gran utilidad en el estudio de la variedad de las álgebras de Heyting es la descripción del retículo $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ de cada álgebra de Heyting $\mathbf{A}$ en función del retículo de los filtros $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$. Esto es, para cada $\mathbf{A}$ álgebra de Heyting la aplicación $F \to \Theta(F)$ definida por

$$\Theta(F) = \{(a, b) \in A \times A\colon (a \to b) \wedge (b \to a) \in F\},$$

y su inversa $\theta \to \Theta^{-1}(\theta)$ definida por

$$\Theta^{-1}(\theta) = \{a \in A\colon (a, 1) \in \theta\}$$

establecen un isomorfismo entre el retículo de filtros $\mathrm{Fi}(\mathbf{A})$ y el retículo $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Este resultado ha sido generalizado en dos sentidos. Por un lado, Celani (ver [13, Observación

5.6]), y de manera independiente Wolter (ver [53]) generalizan este resultado a la variedad $\mathrm{H}_\square$, estableciendo que existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de cualquier $\mathrm{H}_\square$-álgebra y el retículo sus filtros modales.

Por otro lado, en [27] los autores extienden el isomorfismo establecido sobre álgebras de Heyting a la variedad SRL. En particular, si $\mathbf{A} = (A, D)$ es un retículo subresiduado entonces las aplicaciones $F \to \Theta(F)$ y $\theta \to \Theta^{-1}(\theta)$ establecen un isomorfismo entre el retículo de filtros $\mathrm{Fi}(D)$ y el retículo $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ (ver [27, Teorema 2]). Asimismo, en [19] este isomorfismo se extiende a la variedad RWH. Sin embargo se debe tomar una definición adecuada de filtros, la cual introduciremos a continuación.

Definición 4.2.1. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{WH}$ *y* $F \subseteq A$. *Diremos que* F *es un* filtro abierto *si es un filtro y además para cada* $a \in A$*, si* $a \in F$ *entonces* $1 \to a \in F$.

Escribiremos $\mathrm{F}^o(\mathbf{A})$ para denotar el retículo de filtros abiertos de $\mathbf{A}$ ordenados por la inclusión. Es claro que $\mathrm{F}^o(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Fi}(\mathbf{A})$.

Observación 4.2.2. Si $\mathbf{A} \in \mathrm{H}$ entonces las identidades (R) y (B) nos permiten observar que para cada $a \in A$ se tiene que $a = 1 \to a$, por lo tanto, la noción de filtro abierto colapsa a la noción usual de filtro. Por otro lado, si (A, D) es un retículo subresiduado entonces todo filtro del subretículo D es un filtro abierto.

El siguiente resultado es el [19, Teorema 6.12]. Dicho resultado generaliza el isomorfismo entre congruencias y filtros abiertos obtenido en [27] para retículos subresiduados.

Teorema 4.2.3. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{RWH}$. *Las aplicaciones* $\theta \mapsto 1/\theta$ *y* $F \mapsto \Theta(F)$ *definen un isomorfismo de retículos entre el retículo* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *y el retículo* $\mathrm{F}^o(\mathbf{A})$.

Teniendo en cuenta que todo retículo subresiduado es en particular una RWH-álgebra se tiene el siguiente Corolario.

Corolario 4.2.4. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. *Existe un isomorfismo de retículos entre el retículo* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *y el retículo* $\mathrm{F}^o(\mathbf{A})$*, el cual es establecido por las aplicaciones* $\theta \mapsto 1/\theta$ *y* $F \mapsto \Theta(F)$.

Teniendo en cuenta estos resultados, en la presente sección estudiaremos el retículo $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ para cada miembro de la variedad KRWH. Más precisamente, mostraremos que para cada $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ existe un isomorfismo de orden entre el retículo de las congruencias de $\mathbf{A}$ y el retículo de los filtros abiertos modales de $\mathbf{A}$ (un filtro abierto modal de $\mathbf{A}$ es un filtro abierto que es cerrado para el operador modal). Asimismo daremos una caracterización del filtro abierto modal generado por un subconjunto del universo de $\mathbf{A}$. Además, presentaremos una descripción de las congruencias principales de $\mathbf{A}$. Luego introduciremos y estudiaremos una subvariedad de KRWH, la cual contiene propiamente a la subvariedad de KRWH generada por la clase de todas las álgebras totalmente ordenadas, haciendo uso de un teorema del estilo del teorema del filtro primo

Comenzaremos con algunas nociones básicas que serán de utilidad para el desarrollo de la presente sección.

Definición 4.2.5. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *y* $F \subseteq A$. *Diremos que* F *es un* filtro abierto modal *si* F *es un filtro abierto de* $\mathbf{A}$ *donde además se satisfacen la siguiente condición: si* $a \in F$ *entonces* $\square a \in F$.

Dada $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$, escribiremos $\mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$ para indicar el conjunto parcialmente ordendado de los filtros abiertos modales de $\mathbf{A}$, cuyo orden parcial está dado por la inclusión.

Teorema 4.2.6. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. *Existe un isomorfismo de orden entre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$*, el cual es establecido por las aplicaciones* $\theta \mapsto 1/\theta$ *y* $F \mapsto \Theta(F)$.

Demostración. Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Por el Teorema 4.2.3, será suficiente probar que $1/\theta$ es un filtro modal de $\mathbf{A}$. Sea $a \in 1/\theta$, i.e., $(a, 1) \in \theta$. En particular, $(\Box a, \Box 1) \in \theta$, i.e., $\Box a \in 1/\theta$. Recíprocamente, sea $F \in \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$. Nuevamente por el Teorema 4.2.3 será suficiente probar que para cada $a, b \in A$, si $a \leftrightarrow b \in F$ entonces $\Box a \leftrightarrow \Box b \in F$. En efecto, sean $a, b \in \mathbf{A}$ tal que $a \leftrightarrow b \in F$. Ya que F es un filtro abierto se sigue que $\Box(a \leftrightarrow b) \in F$. Ya que $\Box(a \leftrightarrow b) \leq \Box a \leftrightarrow \Box b$ tenemos que $\Box a \leftrightarrow \Box b \in F$, por lo tanto $(\Box a, \Box b) \in \Theta(F)$. $\Box$

En particular, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$. *Existe un isomorfismo de orden entre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *y* $\mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$*, el cual es establecido por las aplicaciones* $\theta \mapsto 1/\theta$ *y* $F \mapsto \Theta(F)$.

Observación 4.2.8. Sea $\mathbf{A}$ una WH-álgebra. Es interesante notar que para que dichas aplicaciones establezcan un isomorfismo entre $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ y $\mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$ es necesario que sea válida la siguiente condición para cada $a, b \in A$:

(R) $a \wedge (a \to b) \leq b$

Por lo tanto, estos resultados sólo pueden extenderse a KRWH y KSRL.

Corolario 4.2.9. *Sean* $\mathbf{A}$ *es una RWH-álgebra modal (retículo subresiduado modal) y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Entonces* $(a, b) \in \theta$ *si y sólo si* $(1, a \leftrightarrow b) \in \theta$.

Dada $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ y $a \in A$ definimos el término unario $\alpha_n(a)$ recursivamente como sigue:

1) $\alpha_0(a) = a$,

2) $\alpha_{n+1}(a) = \alpha_n(a) \wedge \Box^{n+1}(a)$,

Además, para $k \in \mathbb{N}$ definimos el término unario $1 \to^k (a)$ recursivamente como sigue:

1) $1 \to^0 (a) = a$

2) $1 \to^{k+1} (a) = 1 \to \big(1 \to^{(k)} (a)\big)$

Observación 4.2.10. Si $\mathbf{A} \in \mathrm{RWH}$ entonces $1 \to a \leq a$. En particular, si $m \leq n$ se sigue que

$$1 \to^n (a) \leq 1 \to^m (a),$$

Asimismo, si $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$ entonces $1 \to a = 1 \to (1 \to a)$. En particular,

$$1 \to^n (a) = 1 \to a.$$

Por último, dados $n, k \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente término unario:

$$t^k_n(a) = \alpha_n(1 \to^k a).$$

Proposición 4.2.11. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$*,* $a \in A$ *y* $j, k, n, m \in \mathbb{N}$*. Entonces*

1) $t_n^{k+1}(a) \leq 1 \to t_n^k(a)$.

2) $t_{n+1}^k(a) \leq \Box(t_n^k(a))$.

3) *Si* $a \leq b$ *entonces* $t_n^k(a) \leq t_n^k(b)$.

4) $t_n^k(a) \wedge t_n^k(b) = t_n^k(a \wedge b)$.

5) $t_n^k(a) \vee t_n^k(b) \leq t_n^k(a \vee b)$.

6) *Si* $j \leq k$ *y* $m \leq n$ *entonces* $t_n^k(a) \leq t_m^j(a)$.

Demostración. Sea $a, b \in A$ y $n, k \in \mathbb{N}$.

Comenzaremos probando 1) como sigue:

$$\begin{aligned}
1 \to t_n^k(a) &= 1 \to \left[\left(1 \to^k a\right) \wedge \cdots \wedge \Box^n \left(1 \to^k a\right)\right] \\
&= \left(1 \to^{k+1} a\right) \wedge (1 \to \Box(1 \to^k a)) \wedge \cdots \wedge (1 \to \Box^n(1 \to^k a)) \\
&= \left(1 \to^{k+1} a\right) \wedge (\Box 1 \to \Box(1 \to^k a)) \wedge \cdots \wedge (\Box^n(1) \to \Box^n(1 \to^k a)) \\
&\geq \left(1 \to^{k+1} a\right) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^{k+1} a) \\
&= t_n^{k+1}(a).
\end{aligned}$$

Ahora probaremos 2):

$$\begin{aligned}
\Box(t_n^k(a)) &= \Box((1 \to^k a) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^k a)) \\
&= \Box(1 \to^k a) \wedge \cdots \wedge \Box^{n+1}(1 \to^k a) \\
&\geq (1 \to^k a) \wedge \Box(1 \to^k a) \wedge \cdots \wedge \Box^{n+1}(1 \to^k a) \\
&= t_{n+1}^k(a)
\end{aligned}$$

Para la prueba de 3), recordemos que si $a \leq b$ entonces $1 \to a \leq 1 \to b$. Iterando este razonamiento vemos que $1 \to^k a \leq 1 \to^k b$. Por lo tanto, ya que $\Box$ es un operador monótono, se tiene que $t_n^k(a) \leq t_n^k(b)$.

El siguiente cálculo muestra 4):

$$\begin{aligned}
t_n^k(a) \wedge t_n^k(b) &= [(1 \to^k a) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^k a)] \wedge [(1 \to^k b) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^k b)] \\
&= [(1 \to^k a) \wedge (1 \to^k b)] \wedge \cdots \wedge [\Box^n(1 \to^k a) \wedge \Box^n(1 \to^k b)] \\
&= (1 \to^k (a \wedge b)) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^k (a \wedge b)) \\
&= t_n^k(a \wedge b)
\end{aligned}$$

La demostración de 5) se sigue de 3).

Para probar 6) notemos que por (1) y por la condición (R) se sigue que

$$\begin{aligned}
t_m^{j+1}(a) &\leq 1 \to t_m^j(a) \\
&\leq t_m^j(a)
\end{aligned}$$

Aplicando este argumento $k-j$ veces se sigue que $t_m^k(a) \leq t_m^j(a)$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} t_n^k(a) &= (1 \to a) \wedge \Box(1 \to a) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to^k (a)) \\ &\leq (1 \to a) \wedge \Box(1 \to a) \wedge \cdots \wedge \Box^m(1 \to^k (a)) \\ &= t_m^k(a) \\ &\leq t_m^j(a) \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. $\Box$

Observación 4.2.12. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. La desigualdad $t_n^k(a \vee b) \leq t_n^k(a) \vee t_n^k(b)$ no es necesariamente válida. El Ejemplo 6 muestra que $t_n^k(x \vee y) = 1$ y $t_n^k(x) \vee t_n^k(y) = 0$ (para $n \geq 1$). Por lo tanto, $t_n^k(x \vee y) \nleq t_n^k(x) \vee t_n^k(y)$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$).

Sean $\mathbf{A}$ una RWH-álgebra modal y X un subconjunto no vacío del universo de $\mathbf{A}$. Definimos el filtro abierto modal generado por X de la siguiente manera:

$$\mathrm{F}_m^o(X) = \bigcap \{F \in \mathrm{F}_m^o(A) \mid X \subseteq F\}.$$

En particular, si $a \in A$ entonces escribiremos $\mathrm{F}_m^o(a)$ en lugar de $\mathrm{F}_m^o(\{a\})$. El término en una variable t_n^k tendrá un rol fundamental en la descripción de el filtro abierto modal $\mathrm{F}_m^o(X)$.

Lema 4.2.13. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *y* $X \subseteq A$. *Entonces*

$$\mathrm{F}_m^o(X) = \{x \in A \mid \exists n, k \in \mathbb{N} \text{ y } \{x_1, .., x_j\} \subseteq X \colon t_n^k\,(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x\}.$$

En particular, para cada $a \in A$*,*

$$\mathrm{F}_m^o(a) = \{x \in A \mid \exists n, k \in \mathbb{N} \colon t_n^k(a) \leq x\}.$$

Demostración. Sea $X \subseteq A$. Definimos el conjunto

$$G = \{x \in A \mid \exists n, k \in \mathbb{N} \text{ y } \{x_1, .., x_j\} \subseteq X \colon t_n^k\,(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x\}.$$

Veamos primero que G es un filtro abierto modal. Es inmediato que G es un conjunto creciente y que $1 \in G$. Para probar que G es cerrado por $\wedge$ consideremos $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ y $x_1, .., x_j, z_1, ..., z_r \in X$ tal que

$$t_{n_1}^{k_1}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x,$$
$$t_{n_2}^{k_2}(z_1 \wedge \cdots \wedge z_r) \leq y.$$

Sea $n = \max\ \{n_1, n_2\}$ y $k = \max\ \{k_1, k_2\}$. Teniendo en cuenta la Proposición 4.2.11 deducimos que

$$t_n^k(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_r) = t_n^k\,(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \wedge t_n^k(z_1 \wedge \cdots \wedge z_r) \leq x \wedge y.$$

Así, G es un filtro.

Veamos ahora que G es un filtro abierto. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $x_1, .., x_j \in X$ tales que $t_n^k(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x$. Sea $z = x_1 \wedge \cdots \wedge x_j$. Es claro que, $1 \to t_n^k(z) \leq 1 \to x$. Por la Proposición 4.2.11 se deduce que $t_n^{k+1}(z) \leq 1 \to t_n^k(z)$. Entonces

$$t_n^{k+1}(z) \leq 1 \to x,$$

es decir, $1 \to x \in G$. Por lo tanto, G es un filtro abierto.

Veamos ahora que G es cerrado por $\Box$. Sea $x \in A$, $x_1, \ldots, x_j \in X$ y $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $t_n^k(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x$. Sea $z = x_1 \wedge \cdots \wedge x_j$. En particular, por Proposición 4.2.11,

$$t_{n+1}^k(z) \leq \Box(t_n^k(z)).$$

Además ya que $\Box$ es un operador monótono entonces tenemos que

$$\Box(t_n^k(z)) \leq \Box x,$$

es decir, $t_{n+1}^k(z) \leq \Box x$, lo que implica que $\Box x \in G$. Así, hemos probado que G es un filtro abierto modal. Es sencillo verificar que G es el menor filtro abierto que contiene a X. $\Box$

Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$t_n(a) = t_n^1(a) = (1 \to a) \wedge \cdots \wedge \Box^n(1 \to a).$$

Notemos que si $\mathbf{A}$ es un retículo subresiduado modal entonces $t_n^k(a) = t_n(a)$ para cada $k \geq 1$.

Corolario 4.2.14. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ *y* $X \subseteq A$. *Entonces*

$$\mathrm{F}_m^o(X) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, \{x_1, ..., x_j\} \subseteq X \colon t_n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j) \leq x\}.$$

En particular, para cada $a \in A$ *tenemos que*

$$\mathrm{F}_m^o(a) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon t_n(a) \leq x\}.$$

Corolario 4.2.15. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$, $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ *y* $a \in A$. *Entonces*

$$\mathrm{F}_m^o(F \cup \{a\}) = \{x \in A \mid \exists f \in F, n, k \in \mathbb{N} \colon f \wedge t_n^k(a) \leq x\}.$$

En particular, si $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ *entonces*

$$\mathrm{F}_m^o(F \cup \{a\}) = \{x \in A \mid \exists f \in F, n \in \mathbb{N} \colon f \wedge t_n(a) \leq x\}.$$

Sean $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{L}$ y $S \subseteq A \times A$. Recordemos que $\theta(S)$ indicará la menor congruencia θ tal que $S \subseteq \theta$. Si $S = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ escribiremos $\theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ en lugar de $\theta(\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\})$. Si $S = \{(a, b)\}$ escribiremos $\theta(a, b)$ en lugar de $\theta(\{(a, b)\})$.

Lema 4.2.16. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *y* $a, b \in A$. *Entonces* $1/\theta(a, b) = \mathrm{F}_m^o(a \leftrightarrow b)$.

Demostración. Sea θ una congruencia arbitraria de $\mathbf{A}$. En particular, se sigue del Corolario 4.2.9 que $(a, b) \in \theta$ si y sólo si $a \leftrightarrow b \in 1/\theta$. Ya que $\theta(a, b) = \bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \colon (a, b) \in \theta\}$ entonces se sigue del Teorema 4.2.13 que

$$\begin{aligned} 1/\theta(a, b) &= \bigcap\{1/\theta \colon (a, b) \in \theta\} \\ &= \bigcap\{1/\theta \colon a \leftrightarrow b \in 1/\theta\} \\ &= \mathrm{F}_m^o(a \leftrightarrow b), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\Box$

En la siguiente proposición caracterizamos las congruencias principales de las álgebras de KRWH.

Proposición 4.2.17. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *y* $a, b, x, y \in A$. *Entonces* $(x, y) \in \theta(a, b)$ *si y sólo si existen* $n, k \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n^k(a \leftrightarrow b) \leq x \leftrightarrow y$. *Más aún, si* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ *entonces* $(x, y) \in \theta(a, b)$ *si y sólo si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n(a \leftrightarrow b) \leq x \leftrightarrow y$.

Demostración. Se sigue del Corolario 4.2.9 que $(x, y) \in \theta(a, b)$ si y sólo si $x \leftrightarrow y \in 1/\theta(a, b)$. Teniendo en cuenta el Corolario 4.2.14 y el Lema 4.2.16 concluimos que $(x, y) \in \theta(a, b)$ si y sólo si existen $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $t_n^k(a \leftrightarrow b) \leq x \leftrightarrow y$. □

Sean $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ y $a, b \in A$. La inclusión $\mathrm{F}_m^o(a \vee b) \subseteq \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$ se sigue inmediatamente teniendo en cuenta que $a, b \leq a \vee b$. Sin embargo, la inclusión $\mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b) \subseteq \mathrm{F}_m^o(a \vee b)$ no es necesariamente válida. Notemos que el Ejemplo 6 muestra que $\mathrm{F}_m^o(x \vee y) = \{1\}$ y $\mathrm{F}_m^o(x) = \mathrm{F}_m^o(y) = A$, por lo tanto $\mathrm{F}_m^o(x) \cap \mathrm{F}_m^o(y) \nsubseteq \mathrm{F}_m^o(x \vee y)$.

Teorema 4.2.18. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. *Entonces* $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ *es un retículo algebraico y distributivo tal que para cada* $a, b \in A$, $\mathrm{F}_m^o(a \wedge b) = \mathrm{F}_m^o(a) \vee \mathrm{F}_m^o(b)$. *Más aún, los elementos compactos de* $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ *son los elementos de la forma* $\mathrm{F}_m^o(a)$ *para* $a \in A$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. Se sigue del Teorema 4.2.6 que $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ es un retículo algebraico y distributivo.

Sean $a, b \in A$. Notemos que $\mathrm{F}_m^o(a) \vee \mathrm{F}_m^o(b) = \mathrm{F}_m^o(\{a, b\})$. En lo que sigue veremos que $\mathrm{F}_m^o(a \wedge b) = \mathrm{F}_m^o(\{a, b\})$. Dado que $a, b \in \mathrm{F}_m^o(\{a, b\})$ entonces $a \wedge b \in \mathrm{F}_m^o(\{a, b\})$, de donde se sigue que $\mathrm{F}_m^o(a \wedge b) \subseteq \mathrm{F}_m^o(\{a, b\})$. Recíprocamente, dado que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ entonces $a \in \mathrm{F}_m^o(a \wedge b)$ y $b \in \mathrm{F}_m^o(a \wedge b)$, por lo tanto $\mathrm{F}_m^o(\{a, b\}) \subseteq \mathrm{F}_m^o(a \wedge b)$. Así,

$$\mathrm{F}_m^o(a \wedge b) = \mathrm{F}_m^o(a) \vee \mathrm{F}_m^o(b). \tag{4.1}$$

Es conocido que los elementos compactos de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ son los miembros finitamente generados $\theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ (ver [9, Teorema 5.7]). Así los elementos compactos de $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ son aquellos de la forma $1/\theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$. Pero

$$\theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = \theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \theta(a_n, b_n),$$

Luego, se sigue del Teorema 4.2.6, Lema 4.2.16 y (4.1) que

$$1/\theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = \mathrm{F}_m^o((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \leftrightarrow b_n)).$$

Por lo tanto, los elementos compactos de $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ son los elementos de la forma $\mathrm{F}_m^o(a)$ para algún $a \in A$. □

4.3 La subvariedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{M}, \mathrm{P}\}$

Motivados por el estudio de los miembros de la variedad KRWH para los cuales es válida la condición

$$t_n^k(a \vee b) = t_n^k(a) \vee t_n^k(b)$$

para cada a, b y $n, k \in \mathbb{N}$, introducimos las siguientes identidades:

P) $1 \to (a \vee b) = (1 \to a) \vee (1 \to b)$,

M) $(a \vee b) \wedge \Box(a \vee b) = (a \wedge \Box a) \vee (b \wedge \Box b)$.

Observación 4.3.1. *Notemos que la identidad* M *no es válida en el Ejemplo 6 ya que*

$$(x \vee y) \wedge \Box(x \vee y) = 1 \quad \textit{y} \quad (x \wedge \Box x) \vee (y \wedge \Box y) = 0.$$

Lema 4.3.2. *Sea* **A** *una KRWH-álgebra totalmente ordenada. Entonces las identidades* P *y* M *son válidas sobre* **A**

Demostración. Sean $a, b \in A$. Dado que **A** es totalmente ordenada se sigue entonces que $a \leq b$ o bien $b \leq a$. Asumiremos que $a \leq b$, de donde se sigue que $b = a \vee b$ y además $1 \to a \leq 1 \to b$. Notemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} 1 \to (a \vee b) & = & 1 \to b \\ & = & (1 \to a) \vee (1 \to b) \end{array}$$

Asimismo, dado que $\Box$ es un operador monótono se sigue que $\Box a \leq \Box b$ y por lo tanto

$$b \wedge \Box b = (a \wedge \Box a) \vee (b \wedge \Box b)\,.$$

Luego, se sigue que

$$\begin{array}{rcl} (a \vee b) \wedge \Box(a \vee b) & = & b \wedge \Box b \\ & = & (a \wedge \Box a) \vee (b \wedge \Box b)\,. \end{array}$$

Concluimos entonces que toda KRWH-álgebra totalmente ordenada satisface las identidades P y M. $\Box$

Teniendo en cuenta el Lema 4.3.2 se sigue que la subvariedad de KRWH generada por sus miembros totalmente ordenados está contenida en la subvariedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$. Además, notemos que las identidades P y M son independientes. En efecto, consideremos el retículo subresiduado modal dado en el Ejemplo 8. Esta álgebra dotada del operador modal identidad es un miembro de la variedad KRWH que satisface la identidad M pero no satisface la identidad P ya que

$$1 \to (x \vee y) = 1 \quad \text{y} \quad (1 \to x) \vee (1 \to y) = 0.$$

Por último, notemos que el álgebra exhibida en el Ejemplo 6 satisface la identidad P y no satisface la identidad M (ver Observación 4.3.1).

Lema 4.3.3. *Sea* **A** $\in$ KRWH. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) **A** *satisface la identidad* M.

2) *Para cada* $a, b \in A$ *y* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(a \vee b) = \alpha_n(a) \vee \alpha_n(b)$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ satisface la identidad M. Haremos la prueba por inducción. El caso $n = 0$ es inmediato. Supongamos que la identidad es válida para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces se sigue de la hipótesis inductiva y de la identidad M que

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(a) \vee \alpha_{n+1}(b) &= [\alpha_n(a) \wedge \Box(\alpha_n(a))] \vee [\alpha_n(b) \wedge \Box(\alpha_n(b))] \\ &= (\alpha_n(a) \vee \alpha_n(b)) \wedge \Box(\alpha_n(a) \vee \alpha_n(b)) \\ &= \alpha_n(a \vee b) \wedge \Box(\alpha_n(a \vee b)) \\ &= \alpha_{n+1}(a \vee b). \end{aligned}$$

Así, hemos probado que para cada $a, b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(a \vee b) = \alpha_n(a) \vee \alpha_n(b)$. La afirmación recíproca es inmediata (considerar el caso $n = 1$). □

Corolario 4.3.4. *Sea* $\mathrm{A} \in \mathrm{KRWH}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$.

(2) *Para cada* $a, b \in A$ *y* $n, k \in \mathbb{N}$, $t_n^k(a \vee b) = t_n^k(a) \vee t_n^k(b)$.

Más aún, si $\mathbf{A}$ *satisface* M *y* P *entonces para cada* $a, b \in A$, $\mathrm{F}_m^o(a \vee b) = \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$.

Demostración. Supongamos que es válida la afirmación (1). Se sigue de la identidad P que

$$1 \to^k (a \vee b) = (1 \to^k a) \vee (1 \to^k b)$$

para cada $a, b \in A$ y $k \in \mathbb{N}$. Así, se sigue del Lema 4.3.3 que para cada $a, b \in A$ y $n, k \in \mathbb{N}$, $t_n^k(a \vee b) = t_n^k(a) \vee t_n^k(b)$. Recíprocamente, supongamos válida la afirmación (2). De nuevo, por el Lema 4.3.3, la identidad P se obtiene de considerar $k = 1$, $n = 0$ y la identidad M considerando $k = 0$, $n = 1$.

Supongamos ahora que $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$. Veremos que $\mathrm{F}_m^o(a \vee b) = \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$. La inclusión $\mathrm{F}_m^o(a \vee b) \subseteq \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$ es inmediata. Recíprocamente, sea $x \in \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$, entonces existen $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $t_{n_1}^{k_1}(a) \leq x$ and $t_{n_2}^{k_2}(b) \leq x$. Sean $n = \max\{n_1, n_2\}$ y $k = \max\{k_1, k_2\}$. En particular, $t_n^k(a) \leq x$ y $t_n^k(b) \leq x$. Así,

$$t_n^k(a \vee b) = t_n^k(a) \vee t_n^k(b) \leq x,$$

es decir $x \in \mathrm{F}_m^o(a \vee b)$. Por lo tanto, $\mathrm{F}_m^o(a \vee b) = \mathrm{F}_m^o(a) \cap \mathrm{F}_m^o(b)$. □

El siguiente resultado es una generalización del Teorema del filtro primo en el marco de la variedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$.

Teorema 4.3.5. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$, $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ *e* I *un ideal tales que* $F \cap I = \emptyset$. *Entonces existe un filtro abierto modal primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$.

Demostración. Consideremos la familia

$$\Sigma = \{H \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A}) \mid F \subseteq H \text{ and } H \cap I = \emptyset\}.$$

Teniendo en cuenta que $F \in \mathcal{F}$ se sigue que $\Sigma \neq \emptyset$. Es sencillo comprobar que la familia Σ es inductiva. Luego, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal P en Σ. Notemos que en particular $P \neq A$.

Para comprobar que P es primo supongamos que existen $a, b \in A$ tal que $a \vee b \in P$ y supongamos que $a, b \notin P$. Consideremos los filtros $P_a = \mathrm{F}_m^o(P \cup \{a\})$ y $P_b = \mathrm{F}_m^o(P \cup \{b\})$. Dado que P es un subconjunto propio de P_a y P_b respectivamente, por la maximalidad de P en Σ, se tiene que $P_a \cap I \neq \emptyset$ y $P_b \cap I \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta el Lema 4.2.15 existen $x, y \in I$, $p_1, p_2 \in P$ y $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $t_{n_1}^{k_1}(a) \wedge p_1 \leq x$ y $t_{n_2}^{k_2}(b) \wedge p_2 \leq y$. Consideremos $n = \max\{n_1, n_2\}$, $k = \max\{k_1, k_2\}$ y $p = p_1 \wedge p_2$, el cual es un elemento de P. Entonces $t_n^k(a) \wedge p \leq x$ y $t_n^k(b) \wedge p \leq y$. En particular, $t_n^k(a) \wedge p \leq x$ y $t_n^k(b) \wedge p \leq y$. Así, se sigue del Corolario 4.3.4 y de la distributividad del retículo subyacente de $\mathbf{A}$ que

$$t_n^k(a \vee b) \wedge p = (t_n^k(a) \wedge p) \vee (t_n(b) \wedge p) \leq x \vee y.$$

Teniendo en cuenta que $p \in P$ y $a \vee b \in P$ entonces $t_n^k(a \vee b) \wedge p \in P$. Por tanto, $x \vee y \in P$, lo que es una contradicción, ya que $x, y \in I$ e I es un ideal. □

Corolario 4.3.6. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$*,* $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ *y* $a \notin F$*. Entonces existe* P *un filtro abierto modal primo de* $\mathbf{A}$ *tal que* $F \subseteq P$ *y* $a \notin P$*.*

Corolario 4.3.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$*. Entonces todo filtro abierto modal que es propio se escribe como intersección de filtros abiertos modales primos. Más aún, si* $\mathbf{A}$ *no es trivial entonces la intersección de todos los filtros abiertos modales primos de* $\mathbf{A}$ *es igual a* $\{1\}$*.*

Demostración. Dado $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ propio. Es claro que

$$F \subseteq \bigcap \{P \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})\colon F \subseteq P\}.$$

Por otro lado, si $a \notin F$ se sigue entonces que $F \cap (a] = \emptyset$. En efecto, si $z \in F \cap (a]$ entonces $z \leq a$ y además $z \in F$. Dado que F es abierto se sigue que $1 \to z \in F$. Teniendo en cuenta que $1 \to z \leq 1 \to a$ se sigue que $1 \to a \in F$. Dado que $1 \to a \leq a$ se sigue que $a \in F$ lo que es una contradicción. Por el Teorema 4.3.5 existe $Q \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})$ tal que $F \subseteq Q$ y $a \notin Q$, de donde se sigue que

$$F = \bigcap \{P \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})\colon F \subseteq P\},$$

lo que concluye la prueba. □

4.4 Aplicaciones de los resultados obtenidos

En esta sección utilizaremos los resultados obtenidos en la Sección 4.3 con el objetivo de estudiar las variedades KRWH y KSRL. Comenzaremos estudiando los miembros simples y subdirectamente irreducibles de las variedades mencionadas por medio del estudio de los filtros abiertos modales, obteniendo así una caracterización en base al término unario estudiado en la sección previa. Asimismo, haremos uso de la descripción de las congruencias principales para estudiar las funciones compatibles en KRWH y KSRL.

4.4.1 Álgebras simples y subdirectamente irreducibles

En esta sección buscaremos dar una caracterización de los miembros simples y subdirectamente irreducibles de KRWH y KSRL. En particular, el siguiente resultado provee una generalización de [19, Teorema 6.17] y [13, Teorema 5.11].

Teorema 4.4.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es simple.*

(2) *Para cada* $a \in A$ *tal que* $a \neq 1$ *existen* $n, k \in \mathbb{N}$ *tales que* $t_n^k(a) = 0$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que $\mathbf{A}$ es simple. Entonces $\mathrm{F}_m^o(\mathbf{A}) = \{\{1\}, A\}$. Sea $a \in A$, $a \neq 1$. Es claro que $\mathrm{F}_m^o(a) \neq 1$, por lo tanto $\mathrm{F}_m^o(a) = A$. Dado que $0 \in A$ entonces se sigue del Lema 4.2.13 que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $t_n^k(a) = 0$.

$2 \Rightarrow 1)$ Recíprocamente, supongamos que para cada $a \in A$ tal que $a \neq 1$ existen $n, k \in \mathbb{N}$ tal que tales que $t_n^k(a) = 0$. Sea $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ tal que $F \neq \{1\}$. Es claro que existe $a \in F$ con $a \neq 1$. Por hipótesis existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $t_n^k(a) = 0$, lo que implica que $0 \in F$, i.e., $F = A$. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es simple. $\square$

Corolario 4.4.2. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es simple.*

(2) *Para cada* $a \in A$ *tal que* $a \neq 1$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n(a) = 0$.

El siguiente resultado es una generalización de [19, Teorema 6.17] y [13, Teorema 5.13].

Teorema 4.4.3. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *tal que* $\mathbf{A}$ *es no trivial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) *Existe* $a \neq 1$ *tal que para cada* $b \neq 1$ *existen* $n, k \in \mathbb{N}$ *tales que* $t_n^k(b) \leq a$.

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$ Supongamos que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible. Entonces existe $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ tal que $F \neq \{1\}$ y $F \subseteq H$ para cada $H \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ tal que $H \neq \{1\}$. Dado que $F \neq \{1\}$ entonces existe $a \in F$ tal que $a \neq 1$. Sea $b \in A$ con $b \neq 1$. Entonces $\mathrm{F}_m^o(b) \neq \{1\}$, por lo tanto $F \subseteq \mathrm{F}_m^o(b)$. Así, $a \in \mathrm{F}_m^o(b)$. Se sigue del Lema 4.2.13 que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $t_n^k(b) \leq a$.

$2) \Rightarrow 1)$ Recíprocamente, supongamos que es válida la afirmación 2). Entonces $\mathrm{F}_m^o(a) \neq \{1\}$. Sea $F \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ tal que $F \neq \{1\}$. Probaremos que $\mathrm{F}_m^o(a) \subseteq F$, lo que es equivalente a probar que $a \in F$. Teniendo en cuenta que $F \neq \{1\}$ existe $b \neq 1$ tal que $b \in F$. Se sigue de la hipótesis que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $t_n^k(b) \leq a$. Dado que $b \in F$ entonces $t_n^k(b) \in F$, por lo tanto $a \in F$. Se sigue del Teorema 1.2.4 que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible. $\square$

Corolario 4.4.4. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ *tal que* $\mathbf{A}$ *es no trivial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible.*

(2) *Existe* $a \neq 1$ *tal que para cada* $b \neq 1$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n(b) \leq a$.

4.4.2 Funciones compatibles

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{L}$ y $f : A^n \to A$ una función n-aria. Recordemos que f se dice compatible respecto de una congruencia θ de $\mathbf{A}$ si verifica la siguiente condición de compatibilidad:

$$\text{Si } (a_i, b_i) \in \theta \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ y } ar(f) = n \text{ entonces } (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

Diremos que f es una función compatible de $\mathbf{A}$ si es compatible con todas las congruencias de $\mathbf{A}$. Notemos que f es una función compatible si y sólo si $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Con}(\mathbf{A}, f)$. Una función obtenida por composición de operaciones básicas del álgebra y por parámentros (función polinómica) es compatible en cada álgebra. Las funciones polinómicas [1] son los ejemplos mas simples que podemos exhibir de funciones compatibles.

El siguiente resultado es una consecuencia de los teoremas 4.2.3 y 4.2.6.

Lema 4.4.5. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{RWH}$ *y* $\Box : A \to A$ *un operador modal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Box$ *es compatible.*

(2) $\mathrm{F}^o(\mathbf{A}) = \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$.

Proposición 4.4.6. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{RWH}$ *y* $\Box : A \to A$ *un operador modal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Box$ *es compatible.*

(2) *Para cada* $a \in A$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \to^n a \leq \Box a$.

Demostración. Supongamos que $\Box$ es compatible y sea $a \in A$. Se sigue del Lema 4.4.5 que $\mathrm{F}^o(a) = \mathrm{F}^o_m(a)$. Dado que $a \in \mathrm{F}^o(a)$ se sigue entonces que $\Box a \in \mathrm{F}^o(a)$, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \to^n a \leq \Box a$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $a \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \to^n a \leq \Box a$. Veremos que $\mathrm{F}^o(\mathbf{A}) = \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$. Dado que $\mathrm{F}^o_m(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{F}^o(\mathbf{A})$, será suficiente probar que $\mathrm{F}^o(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$. Sea $F \in \mathrm{F}^o(\mathbf{A})$ y $a \in F$. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \to^n a \leq \Box a$. Ya que $a \in F$ entonces $1 \to^n a \in F$ por lo tanto $\Box a \in F$. Así, $F \in \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$. Entonces $\mathrm{F}^o(\mathbf{A}) = \mathrm{F}^o_m(\mathbf{A})$. Se sigue del Lema 4.4.5 que $\Box$ es compatible. $\Box$

Corolario 4.4.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$ *y* $\Box : A \to A$ *un operador modal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Box$ *es compatible.*

(2) *Para cada* $a \in A$ *es válida condición* $1 \to a \leq \Box a$.

Más aún, si $\mathbf{A}$ *es un álgebra de Heyting entonces* $\Box$ *es compatible si y sólo si* $a \leq \Box a$ *para cada* $a \in A$.

[1] Dado un número natural n, un polinomio n-ario sobre un álgebra A es una función obtenida de evaluar $m - n$ variables de t^A por elementos fijos de A para cierto término m-ario t $(m \geq n)$.

Teniendo en cuenta el Corolario 4.4.7 surge naturalemente la siguiente pregunta. ¿Existe un álgebra de Heyting **A** y un operador modal sobre **A** tal que $\Box$ resulte ser no compatible? La respuesta es positiva. En efecto, consideremos el Ejemplo 6 y notemos que $x \nleq \Box x$. Entonces entonces se sigue del Corolario 4.4.7 que $\Box$ no es una función compatible. Ejemplos de operadores modales compatibles sobre álgebras de Heyting son los operadores frontales introducidos y estudiados por Esakia en [28] (ver también [11]).

Sean $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ y $f : A \to A$ una función. Teniendo en cuenta la Proposición 4.2.17 y el hecho de que f es compatible si y sólo si $(f(a), f(b)) \in \theta(a, b)$ para cada $a, b \in A$, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.4.8. (1) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$. *Entonces* f *es compatible si y sólo si para cada* $a, b \in A$ *existen* $n, k \in \mathbb{N}$ *tales que* $t_n^k(a \leftrightarrow b) \leq f(a) \leftrightarrow f(b)$.

(2) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$. *Entonces* f *es compatible si y sólo si para cada* $a, b \in A$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n(a \leftrightarrow b) \leq f(a) \leftrightarrow f(b)$.

Sean **A** un álgebra de un tipo $\mathcal{L}$, $f : A^n \to A$ una función y $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Para $i = 1, \ldots, n$ definimos la función unaria $f_i^{\hat{a}} : A \to A$ de la siguiente manera:

$$f_i^{\hat{a}}(b) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Observación 4.4.9. Notemos que es posible obtener la siguiente caracterización para la compatibilidad de funciones n-arias f sobre un álgebra **A**. Las siguientes condiciones son equivalentes

(1) $f : A^n \to A$ es compatible.

(2) para cada $\hat{a} \in A^n$ y cada $i = 1, \ldots, n$ las funciones $f_i^{\hat{a}} : A \to A$ son compatibles.

$1) \Rightarrow 2)$ Sean $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $\hat{a} = (a_1, .., a_n) \in A^n$ y $i \in \{1, ..., n\}$. Consideremos además $(a, b) \in \theta$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} f_i^{\hat{a}}(a) & = & f(a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_n) \\ & \equiv & f(a_1, .., a_{i-1}, b, a_{i+1}, .., a_n) \\ & = & f_i^{\hat{a}}(b) \end{array}$$

de donde se sigue que $f_i^{\hat{a}}$ es compatible.

$2) \Rightarrow 1)$ Sean $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ y $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in \theta$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} f(a_1, ..., a_n) & = & f_1^{(a_1, ..., a_n)}(a_1) \\ & \equiv & f_1^{(a_1, ..., a_n)}(b_1) \\ & = & f_2^{(b_1, a_2, ..., a_n)}(a_2) \\ & \equiv & f_2^{(a_1, a_2, ..., a_n)}(b_2) \\ \vdots & & \vdots \\ & = & f_n^{(b_1, b_2, ..., a_n)}(a_n) \\ & \equiv & f_n^{(b_1, b_2, ..., a_n)}(b_n) \\ & = & f(b_1, ..., b_n) \end{array}$$

de donde se sigue que $f : A^n \to A$ es compatible.

Teniendo en cuenta el Lema 4.4.8 y la Observación 4.4.9 es posible establecer una caracterización de las funciones compatibles n-arias como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 4.4.10. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$ *y* $f : A^n \to A$ *una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f *es compatible.*

(2) *Para cada* $\hat{a}, \hat{b} \in A^n$ *existen* $j, k \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(a_i \leftrightarrow b_i) \leq f(\hat{a}) \leftrightarrow f(\hat{b}).$$

Demostración. Supongamos que f es compatible y sean $\hat{a}, \hat{b} \in A^n$. Así, para cada $i = 1, \ldots, n$ existen $j_i, k_i \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned}
t_{j_1}^{k_1}(a_1 \leftrightarrow b_1) &\leq f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightarrow f(b_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n) \\
t_{j_2}^{k_2}(a_2 \leftrightarrow b_2) &\leq f(b_1, a_2, \ldots, a_n) \leftrightarrow f(b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n) \\
&\vdots \\
t_{j_n}^{k_n}(a_n \leftrightarrow b_n) &\leq f(b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n) \leftrightarrow f(b_1, \ldots, b_n).
\end{aligned}$$

Sean $j = \max\{j_1, \ldots, j_n\}$ y $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Teniendo en cuenta que en la variedad de RWH álgebras se satisface la identidad $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$, obtenemos, luego de aplicar iteradamente dicha identidad, que

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(a_i \leftrightarrow b_i) \leq f(\hat{a}) \leftrightarrow f(\hat{b}).$$

Recíprocamente, supongamos que la condición 2) es verdadera. Sean $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ y $\hat{a}, \hat{b} \in A^n$ tales que $(a_i, b_i) \in \theta$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Se sigue de la Observación 4.2.9 que $a_i \leftrightarrow b_i \in 1/\theta$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, ya que $1/\theta \in \mathrm{F}_m^o(\mathbf{A})$ obtenemos $\bigwedge_{i=1}^n t_j^k(a_i \leftrightarrow b_i) \in 1/\theta$. Dado que $\bigwedge_{i=1}^n t_j^k(a_i \leftrightarrow b_i) \leq f(\hat{a}) \leftrightarrow f(\hat{b})$, se sigue que $f(\hat{a}) \leftrightarrow f(\hat{b}) \in 1/\theta$, i.e., $(f(\hat{a}), f(\hat{b})) \in \theta$. Por lo tanto, f es compatible. □

Corolario 4.4.11. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ *y* $f : A^n \to A$ *una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f *es compatible.*

(2) *Para cada* $\hat{a}, \hat{b} \in A^n$ *existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j(a_i \leftrightarrow b_i) \leq f(\hat{a}) \leftrightarrow f(\hat{b}).$$

Un álgebra $\mathbf{A}$ se dirá *afín completa* si cada función compatible de $\mathbf{A}$ está dada por un polinomio de $\mathbf{A}$. Dicha álgebra es *localmente afín completa* si cada función compatible de $\mathbf{A}$ está dada por un polinomio sobre cada subconjunto finito de A. Diremos que una variedad de álgebras es *localmente afín completa* si cada álgebra de la misma es localmente afín completa. Es sabido que la variedad de álgebras de Boole es afín completa y que la variedad de álgebras de Heyting es localmente afín completa pero no afín completa (ver [10]).

En [47] se prueba que la variedad RWH es localmente afín completa. En lo que sigue veremos que este resultado puede ser extendido al marco de la variedad KRWH.

Observación 4.4.12. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$*,* $f : A^n \to A$ *una función compatible y* B *un subconjunto finito de* A^n*. Sea* j *y* k *los máximos de los números naturales asociados en el Teorema 4.4.10 a todos los pares* $(\hat{b}, \hat{x})$ *donde* $\hat{x}$ *y* $\hat{b}$ *varía sobre todas las n-uplas de* B*. En particular, se sigue de la Proposición 4.2.11 que*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(b_i \leftrightarrow x_i) \leq f(\hat{b}) \leftrightarrow f(\hat{x}).$$

Teorema 4.4.13. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathrm{KRWH}$*,* $f : A^n \to A$ *una función compatible,* B *un subconjunto finito de* A^n *y* $\hat{x} \in B$*. Sea*

$$T_{\hat{x}} = \{\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(b_i \leftrightarrow x_i) \wedge f(\hat{b}) : \hat{b} \in B\},$$

donde j *y* k *son los números naturales dados en la Observación 4.4.12. Entonces,* $f(\hat{x}) = \bigvee T_{\hat{x}}$*.*

Demostración. Sea $\hat{x} \in B$. Para cada $\hat{b} \in B$, se sigue de la Observación 4.4.12 que

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(b_i \leftrightarrow x_i) \leq f(\hat{b}) \to f(\hat{x}).$$

Esta desigualdad implica que

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(b_i \leftrightarrow x_i) \wedge f(\hat{b}) \leq f(\hat{x}).$$

Lo que prueba que $f(\hat{x})$ es una cota superior de $T_{\hat{x}}$.

Por otro lado, ya que $x_i \leftrightarrow x_i = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $\Box 1 = 1$ se tiene que

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_j^k(x_i \leftrightarrow x_i) \wedge f(\hat{x}) = f(\hat{x}),$$

Así $f(\hat{x}) \in T_{\hat{x}}$. Por lo tanto, $f(\hat{x}) = \bigvee T_{\hat{x}}$. $\Box$

Corolario 4.4.14. *Las variedades* KRWH *y* KSRL *son localmente afín completas.*

Parte de los resultados obtenidos en esta sección sobre congruencias principales y funciones compatibles pueden verse como casos particulares de resultados presentados en [22]. Sin embargo, con el fin hacer esta tesis lo más autocontenida posible hemos decidido hacer en detalle todas las pruebas.

4.5 La subvariedad de KRWH generada por cadenas

El objetivo principal de la presente sección es dar una base ecuacional para la subvariedad de KRWH generada por la subclase de sus miembros totalmente ordenados.

Un álgebra de Heyting es llamada un álgebra de Gödel si satisface la identidad

$$(a \to b) \vee (b \to a) = 1.$$

Estas álgebras, también conocidas en la literatura bajo el nombre de álgebras de Heyting prelineales, son una clase particular de álgebras basadas en t-normas de gran interés para la lógica difusa [34]. Las álgebras de Gödel fueron consideradas por Horn en [33] como un paso intermedio entre los cálculos proposicionales clásico e intuicionista respectivamente y fueron estudiadas por Monteiro [40] y Martínez [39] entre otros. En particular, la variedad cuyos miembros son las álgebras de Gödel coincide con la subvariedad cuyos miembros son las álgebras de Heyting generada por la clase de álgebras de Heyting totalmente ordenadas. En [5, Capítulo IX] y en [40] hay otras caracterizaciones de las álgebras de Gödel.

Consideremos las siguientes identidades en el lenguaje de las WH-álgebras:

P1) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1.$

P2) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c).$

P3) $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c).$

En [12, Teorema 4.2] se prueba que en el marco de las WH-álgebras las identidades $\mathrm{P1}$, $\mathrm{P2}$ y $\mathrm{P3}$ son equivalentes. Diremos que una RWH álgebra es una weak Gödel álgebra si satisface alguna de las identidades equivalentes mencionadas.

Definición 4.5.1. *Una RWH-álgebra modal se dirá weak Gödel álgebra modal si satisface la identidad* M *y su* $\{\wedge, \vee, \to, 0, 1\}$*-reducto es una weak Gödel algebra.*

Escribiremos MWG para indicar la variedad de las weak Gödel álgebras modales, i.e.,

$$\mathrm{MWG} = \mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P1}, \mathrm{M}\}.$$

Notemos que el álgebra considerada en el Ejemplo 6 es un miembro de $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P1}\}$ y no es un miembro de $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{M}\}$ (ver Observación 4.3.1). Además notemos que toda álgebra de Heyting que no es un álgebra de Gödel puede ser considerada como un miembro de la variedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{M}\}$ (considerando como operador modal el operador identidad) y además no es un miembro de la variedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P1}\}$. Así, las identidades $\mathrm{P1}$ y M son independientes.

Es interesante notar que la variedad MWG es una subvariedad propia de la variedad $\mathrm{KRWH}+\{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$. En efecto, cada álgebra de Heyting que no es un álgebra de Gödel puede ser considerada como un miembro de KRWH (considerando como operador modal al operador identidad): esta álgebra es un miembro de la variedad $\mathrm{KRWH} + \{\mathrm{P}, \mathrm{M}\}$ y no es un miembro de la variedad MWG.

Escribiremos C para indicar la clase de los miembros totalmente ordenados de la variedad KRWH y $\mathrm{V(C)}$ para la subvariedad de KRWH generada por la subclase C.

Teorema 4.5.2. $\mathrm{V(C)} = \mathrm{MWG}.$

Demostración. Comenzaremos por mostrar que $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{MWG}$. En efecto, sea $\mathbf{A}$ una KRWH-álegbra totalmente ordenada. Una prueba análoga al Lema 4.3.2 muestra que la identidad M es válida sobre $\mathbf{A}$. Asimismo, dados $a, b \in A$ se tiene que $a \leq b$ o bien que $b \leq a$. Asumimos $a \leq b$. Se sigue entonces que $a \to b = 1$ y por lo tanto $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$, de donde se sigue que la identidad $\mathrm{P1}$ es válida en $\mathbf{A}$. Así,

$$\mathrm{V(C)} \subseteq \mathrm{MWG}.$$

Para mostrar la inclusión en el otro sentido, será suficiente con mostrar que todo miembro no trivial y subdirectamente irreducible de la variedad MWG es un miembro de la clase C. Sea $\mathbf{A}$ un miembro no trivial y subdirectamente irreducible de la variedad MWG y supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \nleq b$ y $b \nleq a$, i.e., $a \to b \neq 1$ y $b \to a \neq 1$. Dado que $\mathbf{A} \in \mathrm{MWG}$ tenemos que

$$(a \to b) \vee (b \to a) = 1,$$

por lo tanto, se sigue del Corolario 4.3.4 que

$$\mathrm{F}_m^o(a \to b) \cap \mathrm{F}_m^o(b \to a) = \{1\}.$$

Se sigue que $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta\}$ no tiene elemento mínimo. Por lo tanto, A no es un álgebra subdirectamente irreducible, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{A} \in \mathrm{C}$. $\square$

Es interesante notar que dado que el operador identidad sobre cualquier RWH-álgebra es un operador modal entonces la siguiente propiedad se sigue de los argumentos usados para probar el Teorema 4.5.2:

- Las variedades MWG y $\mathrm{SRL} + \{\mathrm{M}, \mathrm{P1}\}$ coinciden con las subvariedades de RWH y SRL generada por la clase de sus miembros totalmente ordenados respectivamente (esta propiedad se sigue también de los resultados de [12]). Más aún, la variedad de álgebras de Gödel coincide con la subvariedad de la variedad de las álgebras de Heyting generada por la clase de sus miembros totalmente ordenados.

Además, la misma prueba hecha en el Teorema 4.5.2 muestra la siguiente propiedad:

- La variedad $\mathrm{KSRL} + \{\mathrm{M}, \mathrm{P1}\}$ coincide con la subvariedad de SRL generada por la subclase de sus miembros totalmente ordenados. Más aún, la variedad de las álgebras de Gödel modales (i.e., álgebras de Heyting modales que satisfacen $\mathrm{P1}$ y M) coincide con la subvariedad de álgebras de Heyting modales generadas por la clase de álgebras de Heyting modales totalmente ordenadas.

Finalizamos esta sección dando una prueba alternativa del Teorema 4.5.2.

Teorema 4.5.3. $\mathrm{MWG} = \mathbb{ISP}(\mathrm{C})$. *En particular,* $\mathrm{V(C)} = \mathrm{MWG}$.

Demostración. La inclusión $\mathbb{ISP}(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{MWG}$ se sigue del hecho de que $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{MWG}$. Para probar la inclusión recíproca, sea $\mathbf{A} \in \mathrm{MWG}$. Se sigue de la Observación 4.2.9 y del Corolario 4.3.7 que la aplicación

$$\varphi : \mathbf{A} \to \prod_{P \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})} \mathbf{A}/\Theta(P)$$

definida por $\varphi(a) = (a/\Theta(P))_{P \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})}$ es un monomorfismo. Además, se sigue de [12, Corolario 4.8] que $A/\Theta(P)$ es una cadena para cada $P \in \mathrm{X}_m^o(\mathbf{A})$. Así, $\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}(\mathrm{C})$. Por lo tanto, hemos probado que

$$\mathrm{MWG} = \mathbb{ISP}(\mathrm{C}).$$

Finalmente, dado que $\mathbb{ISP}(\mathrm{C})$ es una variedad concluimos que $\mathrm{V}(\mathrm{C}) = \mathbb{ISP}(\mathrm{C})$, i.e., $\mathrm{V}(\mathrm{C}) = \mathrm{MWG}$. $\square$

Capítulo 5

Dualidades topológicas para retículos subresiduados

Recordemos que un retículo subresiduado es un par (A, D), donde A es un retículo distributivo acotado y D es un subretículo acotado de A que satisface la siguiente condición de residuación restringida al subretículo D: para cada $a, b \in A$ existe $c \in D$ tal que para cada $d \in D$, $a \wedge d \leq b$ si y sólo si $d \leq c$. El elemento c es denotado por $a \to b$ [1]. Más aún, se tiene que

$$a \to b = \max\{d \in D \colon a \wedge d \leq b\} \tag{5.1}$$

De esta manera un retículo subresiduado (A, D) puede ser considerado como un álgebra en el lenguaje intuicionista $\{\wedge, \vee, \to, 0, 1\}$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ donde el conectivo $\to$ definido en 5.1 es muy cercano a la implicación intuicionista. Más aún, si $D = A$ se sigue que (A, D) es un álgebra de Heyting. Asimismo, en [27] los autores establecen una base ecuacional que caracteriza a la clase de los retículos subresiduados probando así que la clase conformada por los retículos subresiduados es una variedad de álgebras que contiene propiamente a la variedad de álgebras de Heyting. En [19] se prueba que la variedad de retículos subresiduados es equivalente a la subvariedad de WH cuyos miembros satisfacen las condiciones

(R) $a \wedge (a \to b) \leq b$.

(T) $a \to b \leq c \to (a \to b)$.

obteniendo así una axiomatización de la variedad cuyos miembros son retículos subresiduados como subvariedad de WH. Dicha axiomatización permite especializar la dualidad tipo Priestley para las WH-álgebras presentada en [19] obteniendose así una dualidad para la categoría SRL cuyos objetos son retículos subresiduados y las flechas son homomorfismos de álgebras.

Por otro lado, en [6] se prueba que para cada retículo distributivo acotado $\mathbf{A}$ y cada subretículo D la familia $\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) \colon a \in D\}$ es una base para una topología sobre $X(\mathbf{A})$ y que además es más gruesa que la topología espectral usual asociada a $\mathbf{A}$. Inspirados por este hecho y teniendo en cuenta el rol que tiene el subretículo D en la definición de la implicación 5.1, en el presente capítulo desarrollaremos una dualidad bitopológica para la categoría

[1] El retículo D dotado de la operación $a \to b$ es un álgebra de Heyting.

SRL. Asimismo, desarrollaremos una dualidad de tipo espectral para la categoría SRL. Finalmente, buscaremos adaptar las dualidades obtenidas para retículos subresiduados a el caso particular de los retículos subresiduados modales estudiados en el capítulo 4 de este trabajo. Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en el artículo [20].

5.1 Dualidad de Priestley para retículos subresiduados

En [19] S. Celani y R. Jansana consideran la categoría WH cuyos objetos son WH-álgebras, sus flechas son homomorfismos de WH-álgebras, la composición de flechas está determinada por la composición usual de funciones y la identidad para la composición está determinada por el homomorfismo identidad. Además, tomando como base la dualidad tipo Priestley para retículos distributivos acotados, determinan una dualidad tipo Priestley para la categoria WH y para algunas subcategorías plenas. En particular, desarrollan una dualidad de tipo Priestley para la subcategoría plena SRL, cuyos objetos son retículos subresiduados. En la presente sección recordaremos dichos resultados.

Definición 5.1.1. *Diremos que una estructura $(X, \leq, \tau, S)$ es un SRL-espacio de Priestley, en adelante SRL-espacio, si se verifican las siguientes condiciones:*

(1) $(X, \leq, \tau)$ *es un espacio de Priestley.*

(2) $(X, \leq, S)$ *es un WH-marco.*

(3) *Para cada clopen creciente U, el conjunto $S^{-1}(U)$ es un clopen.*

(4) *Para cada $x \in X$, el conjunto $S(x)$ es cerrado para la topología τ.*

(5) *La relación S es reflexiva y transitiva.*

Definición 5.1.2. *Diremos que una función $f\colon (X_1, \tau_1, \leq_1, S_1) \to (X_2, \tau_2, \leq_2, S_2)$ es un morfismo de SRL-espacios si satisface las siguientes propiedades:*

(1) $f\colon X_1 \to X_2$ *es continua y preserva el orden.*

(2) *Si $(x, y) \in S_1$ entonces $(f(x), f(y)) \in S_2$.*

(3) *Si $(f(x), y) \in S_2$ entonces existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in S_1$ y $f(z) = y$.*

Escribiremos SRLS para denotar la categoría cuyos objetos son SRL-espacios, las flechas son los morfismos entre estas estructuras, la composición de flechas está determinada por la composición usual de funciones y la identidad para la composición está determinada por la función identidad.

Observación 5.1.3. Teniendo en cuenta la Observación 1.7.19 se sigue que los SRL-espacios son una generalización natural de los espacios de Esakia utilizados para establecer una dualidad para álgebras de Heyting. En efecto, si $(X, \leq, S)$ es un SRL-espacio con $S = \leq$ entonces $(X, \leq, S)$ colapsa a un marco de Kripke y la estructura $(X, \leq, \tau, S)$ colapsa a un espacio de Esakia (ver [6])

A continuación describiremos los funtores que nos permiten establecer la dualidad tipo Priestley para la categoría SRL.

Consideremos el funtor $\mathrm{D}\colon \mathsf{SRLS} \to \mathsf{SRL}$ definido de la siguiente manera:

Objetos: Dado $(X, \leq, \tau, S)$ un objeto de la categoría SRLS. Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados sabemos que el álgebra $(D(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un retículo distributivo acotado. En particular, en [19, Teorema 4.12 (2)] se prueba que

$$\mathrm{D}(X) = (D(X), \cap, \cup, \Rightarrow_S, \emptyset, X)\,,$$

es un retículo subresiduado.

Flechas Sea $f\colon (X_1, \leq_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \leq_2, \tau_2, S_2)$ una flecha en la categoría SRLS. En [19, Teorema 4.14 (1)] se prueba que la aplicación $\mathrm{D}(f)\colon \mathrm{D}(X_2) \to \mathrm{D}(X_1)$ definida por $\mathrm{D}(f)(U) = f^{-1}(U)$ es una flecha en SRL.

Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley para la categoría BDL se sigue que las aplicaciones $X \mapsto \mathrm{D}(X)$ y $f \mapsto \mathrm{D}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{D}\colon \mathsf{SRLS} \to \mathsf{SRL}$.

Consideremos ahora el funtor $\mathrm{X}\colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{SRLS}$ definido de la siguiente manera:

Objetos Dado $\mathbf{A}$ un objeto de la categoría SRL. En particular, $\mathbf{A}$ posee un reducto de retículo distributivo acotado. Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley se tiene que $(X(\mathbf{A}), \tau_{\mathbf{A}}, \subseteq)$ es un espacio de Priestley. En particular, en [19, Teorema 4.12 (1)] se prueba que la estructura

$$\mathrm{X}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \subseteq, \tau_{\mathbf{A}}, S_{\mathbf{A}})\,,$$

es un SRL-espacio donde la relación $S_{\mathbf{A}}$ es la relación definida en 1.4

Flechas Sea $f\colon \mathbf{A_1} \to \mathbf{A_2}$ una flecha en la categoría SRL. Consideremos la aplicación $\mathrm{X}(f)\colon \mathrm{X}(\mathbf{A_2}) \to \mathrm{X}(\mathbf{A_1})$, definida por

$$X(f)(P) = f^{-1}(P).$$

En [19, Teorema 4.14 (2)] se prueba que $\mathrm{X}(f)$ es una flecha en la categoría SRLS.

Es sencillo verificar, teniendo en cuenta la dualidad de Priestley para BDL, que las aplicaciones $\mathbf{A} \mapsto \mathrm{X}(A)$ y $f \mapsto \mathrm{X}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{X}\colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{SRLS}$.

Consideremos las transformaciones naturales

$$\sigma\colon \mathrm{I}_{\mathsf{SRL}} \Rightarrow (\mathrm{D} \circ \mathrm{X}) \quad \text{y} \quad \epsilon\colon \mathrm{I}_{\mathsf{SRLS}} \Rightarrow (\mathrm{X} \circ \mathrm{D}),$$

definidas de la siguiente manera:

1) $\mathbf{A}$ es un objeto de SRL entonces $\sigma_{\mathbf{A}}$ es la aplicación de Stone

2) Si $(X, \tau, \leq, S)$ es objeto de SRLS entonces consideramos la aplicación $\epsilon_X : X \to \mathrm{X}(\mathrm{D}(X))$ definida por
$$\epsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{D}(X) : x \in U\}.$$

Por los resultados de [19, Sección 4.1] se sigue que la aplicación $\sigma_{\mathbf{A}}$ es un isomorfismo de retículos subresiduados. Además, se sigue que ϵ_X es una flecha en SRLS. Obtenemos entonces el siguiente resultado

Teorema 5.1.4. *Los funtores* $\mathrm{X}\colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{SRLS}$ *y* $\mathrm{D}\colon \mathsf{SRLS} \to \mathsf{SRL}$*, en conjunto con las transformaciones naturales* σ *y* ϵ*, establecen una equivalencia dual entre las categorías* SRL *y* SRLS.

5.2 Dualidad espectral para retículos subresiduados

Siguiendo la línea de la dualidad tipo Priestley para la categoría SRL y teniendo en cuenta la estrecha relación de las categorías Pries y Spec en la presente sección estudiaremos una dualidad de tipo espectral para la categoría SRL.

Comenzaremos por definir la categoría que tiene por objetos a los espacios espectrales pre-ordenados y sus flechas serán funciones espectrales que satisfacen ciertas condiciones respecto al pre-orden de los espacios.

Definición 5.2.1. *Un espacio topológico espectral pre-ordenado, en adelante espacio p-espectral, es una estructura* (X, τ, S) *que satisface las siguientes propiedades:*

(1) (X, τ) *es un espacio topológico espectral.*

(2) S *es una relación de pre-orden sobre* X.

(3) $S^{-1}(U \setminus V)^c \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *para cada* $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$.

(4) $S(x) = \bigcap\{U \in \mathrm{KO}(X, \tau) : S(x) \subseteq U\}$ *para cada* $x \in X$.

Diremos que una función $f : (X_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \tau_2, S_2)$ *entre espacios p-espectrales es una función p-espectral si satisface las siguientes condiciones:*

(1) $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ *es una función espectral.*

(2) *Para cada* $x, y \in X_1$*, si* $(x, y) \in S_1$ *entonces* $(f(x), f(y)) \in S_2$.

(3) *Para cada* $x \in X_1$ *y* $z \in X_2$*, si* $(f(x), z) \in S_2$ *entonces existe* $y \in X_1$ *tal que* $(x, y) \in S_1$ *y* $f(y) = z$.

Escribiremos pSpec para denotar a la categoría cuyos objetos son espacios p-espectrales y las flechas son las funciones p-espectrales, donde además la composición de flechas es la composición usual de funciones p-espectrales y la identidad para la composición de flechas es la función identidad.

Algunos comentarios con respecto a la definición dada anteriormente:

- En particular si (X, τ, S) es un espacio topológico p-espectral entonces $X \in \mathrm{KO}(X, \tau)$, por lo tanto $X \Rightarrow_S U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ para cada $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$.
- Si $f : X \to Y$ es una función y $U \subseteq X$, definimos
$$f[U] = \{f(u) : u \in U\}.$$
Las condiciones 2) y 3) de la definición de morfismos en pSpec son equivalentes a la siguiente condición: para cada $x \in X_1$, $f[S_1(x)] = S_2(f(x))$.

Observación 5.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico T_0. Es claro que $(X, \leq_\tau)$ es un poset. Ya que cada conjunto abierto es un conjunto creciente entonces $\mathrm{KO}(X, \tau) \subseteq \mathrm{Up}(X)$. Sea S la relación binaria sobre X tal que $(X, \leq_\tau, S)$ es un WH-marco. También supongamos que $\mathrm{KO}(X, \tau)$ es cerrado bajo $\cap, \cup, \Rightarrow_S$ y X. Entonces $\mathrm{KO}(X, \tau)$ y $\mathrm{Up}(X)$ pueden ser vistos como álgebras en el lenguaje $\{\cap, \cup, \Rightarrow_S, \emptyset, X\}$. Más aún, $\mathrm{KO}(X, \tau)$ es una subálgebra de $\mathrm{Up}(X)$ en este sentido.

Consideremos el funtor $\hat{\mathrm{D}}\colon \mathsf{pSpec} \to \mathsf{SRL}$ definido de la siguiente manera:

Objetos Dado (X, τ, S) un espacio topológico p-espectral. Consideremos la estructura
$$\hat{\mathrm{D}}(X) = (\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \Rightarrow_S, \emptyset, X)\,.$$

Lema 5.2.3. *Si* (X, τ, S) *es un objeto de la categoría* pSpec *entonces* $\hat{\mathrm{D}}(X)$ *es un objeto de la categoría* SRL.

Demostración. Sea (X, τ, S) un espacio p-espectral. Teniendo en cuenta la Observación 5.2.2 sólo será necesario probar que $(X, \leq_\tau, S)$ es un WH-marco. Sea $(x, y) \in \leq_\tau \circ S$, entonces existe $z \in X$ tal que $x \leq_\tau z$ y $(z, y) \in S$. Supongamos que $(x, y) \notin S$, entonces existe $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ tal que $y \notin U$ y $S(x) \subseteq U$. Ya que $y \in S(z)$ y $y \notin U$ tenemos que $S(z) \nsubseteq U$, i.e., $z \in (X \Rightarrow_S U)^c$, el cual es un conjunto cerrado. Ya que $x \in \overline{\{z\}}$ entonces $x \in (X \Rightarrow_S U)^c$. Así, $S(x) \nsubseteq U$, lo que es una contradicción. $\square$

Flechas Sea $g : (X_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \tau_2, S_2)$ una flecha de la categoría pSpec. Consideremos la aplicación $\hat{\mathrm{D}}(g) : \hat{\mathrm{D}}(X_2) \to \hat{\mathrm{D}}(X_1)$ definida por
$$\hat{\mathrm{D}}(g)(U) = g^{-1}(U).$$

Lema 5.2.4. *Sea* $g : (X_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \tau_2, S_2)$ *una flecha en la categoría* pSpec. *Entonces* $\hat{\mathrm{D}}(g)$ *es una flecha de la categoría* SRL.

Demostración. Sea $g : (X_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \tau_2, S_2)$ una flecha en la categoría pSpec. En particular, $\hat{\mathrm{D}}(g)$ es un morfismo de retículos distributivos acotados. Ya que g es una flecha en pSpec entonces $S_2(g(x)) = g[S_1(x)]$, así, una comprobación simple y directa muestra que $g^{-1}(U \Rightarrow_{S_2} V) = g^{-1}(U) \Rightarrow_{S_1} g^{-1}(V)$ para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$. Por lo tanto $\hat{\mathrm{D}}(g)$ es una flecha en SRL. $\square$

Teniendo en cuenta la dualidad espectral para la categoría BDL se sigue que las aplicaciones $X \mapsto \hat{\mathrm{D}}(X)$ y $f \mapsto \hat{\mathrm{D}}(f)$ definen un funtor contravariante $\hat{\mathrm{D}}\colon \mathsf{pSpec} \to \mathsf{SRL}$.

A continuación vamos a construir el funtor $\hat{\mathrm{X}}\colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{pSpec}$:

Objetos Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. Dado que el $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$-reducto de $\mathbf{A}$ es un retículo distributivo acotado se sigue que el par $(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ es un espacio espectral. En particular, consideremos la estructura

$$\hat{\mathrm{X}}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}, S_{\mathbf{A}}),$$

donde $S_{\mathbf{A}}$ es la relación definida en la ecuación 1.4.

Lema 5.2.5. *Si* $\mathbf{A}$ *es un objeto de la categoría* SRL *entonces* $\hat{\mathrm{X}}(\mathbf{A})$ *es un objeto de la categoría* pSpec.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. Se sigue de la dualidad espectral para BDL que $(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ es un espacio espectral y se sigue del Lema 1.7.13 que $S_{\mathbf{A}}$ es un pre-orden. Sean $U, V \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$. Entonces existen $a, b \in A$ tales que $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ y $V = \sigma_{\mathbf{A}}(b)$. Se sigue del Teorema 1.7.12 que $U \Rightarrow_{S_{\mathbf{A}}} V = \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b) \in \mathrm{KO}(X(A), \hat{\tau}_A)$. Por último, veamos que

$$S_{\mathbf{A}}(P) = \bigcap\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : S_{\mathbf{A}}(P) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)\}.$$

para cada $P \in X(\mathbf{A})$. Sean $P \in X(\mathbf{A})$ y $Q \in \bigcap\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : S_A(P) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)\}$. Supongamos que $Q \notin S_{\mathbf{A}}(P)$, por lo tanto, existen $a, b \in A$ tales que $a \to b \in P$, $a \in Q$ and $b \notin Q$. Notemos que $1 \to (a \to b) = a \to b$ y $a \to b \in P$ entonces $S_{\mathbf{A}}(P) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b)$. En particular, $a \to b \in Q$. Ya que Q es un filtro tenemos que $a \wedge (a \to b) \in Q$. Teniendo en cuenta que $a \wedge (a \to b) \leq b$ y el hecho de que Q es un conjunto creciente deducimos que $b \in Q$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : S_{\mathbf{A}}(P) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)\} \subseteq S_{\mathbf{A}}(P)$. La afirmación recíproca es inmediata. $\square$

Flechas Sea $f : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ una flecha en la categoría SRL. Consideremos la aplicación $\hat{\mathrm{X}}(f) : \hat{\mathrm{X}}(\mathbf{A}_2) \to \hat{\mathrm{X}}(\mathbf{A}_1)$ definida por

$$\hat{\mathrm{X}}(f)(P) = f^{-1}(P).$$

De los resultados propios de la dualidad espectral para BDL se sigue que $\hat{\mathrm{X}}(f)$ es una función espectral. En particular del Teorema [19, Teorema 4.14] se sigue que $\mathrm{X}(f)$ es un morfismo de espacios espectrales pre-ordenados.

Por la dualidad espectral para BDL se sigue que las aplicaciones $\mathbf{A} \mapsto \hat{\mathrm{X}}(\mathbf{A})$ y $f \mapsto \hat{\mathrm{X}}(f)$ definen un funtor contravariante $\hat{\mathrm{X}} \colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{pSpec}$. Asimismo, definimos las transformaciones naturales

$$\hat{\sigma} \colon \mathrm{I}_{\mathsf{SRL}} \Rightarrow \hat{\mathrm{D}} \circ \hat{\mathrm{X}} \;\; y \;\; \hat{\epsilon} \colon \mathrm{I}_{\mathsf{pSpec}} \Rightarrow \hat{X} \circ \hat{\mathrm{D}},$$

donde $\hat{\sigma}(\mathbf{A}) = \sigma_{\mathbf{A}}$ y $\hat{\epsilon}(X) = \epsilon_X$. Es inmediato notar que la aplicación $\sigma_{\mathbf{A}}$ es un isomorfismo en la categoría SRL. El siguiente resultado nos ayudará a comprobar que la aplicación $\epsilon_X \colon X \to \hat{\mathrm{X}}(\hat{\mathrm{D}}(X))$ es un isomorfismo en la categoría pSpec.

Lema 5.2.6. *Sea* (X, τ, S) *un objeto de la categoría* pSpec. *Entonces* $\epsilon_X \colon X \to \hat{\mathrm{X}}(\hat{\mathrm{D}}(X))$ *es un isomorfismo en la categoría* pSpec.

Demostración. Por la dualidad espectral para BDL sabemos que la aplicación ϵ_X es un homeomorfismo de espacios espectrales. Por lo tanto, será suficiente probar que para cada $x, y \in X$, $(x, y) \in S$ si y sólo si $(\hat{\epsilon}(x), \hat{\epsilon}(y)) \in S_{\hat{\mathrm{D}}(X)}$. Sean $x, y \in X$. Supongamos que $(x, y) \in S$. Sean $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ tales que $U \Rightarrow_S V \in \hat{\epsilon}(x)$ y $U \in \hat{\epsilon}(y)$, i.e., $S(x) \cap U \subseteq V$ y $y \in U$. Teniendo en cuenta que $y \in S(x) \cap U$ obtenemos que $y \in V$. Así, $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \in S_{\hat{\mathrm{D}}(X)}$. Recíprocamente, supongamos que $(x, y) \notin S$, entonces existe $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ tal que $y \notin U$ y $S(x) \subseteq U$. Por lo tanto, $X \Rightarrow_S U \in \epsilon_X(x)$, $X \in \epsilon_X(y)$ y $U \notin \epsilon_X(y)$. Así, $(\epsilon_X(x), \epsilon_X(y)) \notin S_{\hat{\mathrm{D}}(X)}$. $\square$

Teorema 5.2.7. *Los funtores contravariantes* $\hat{\mathrm{X}} : \mathsf{SRL} \to \mathsf{pSpec}$ *y* $\hat{\mathrm{D}} : \mathsf{pSpec} \to \mathsf{SRL}$*, en conjunto con las transformaciones naturales* $\hat{\sigma}$ *y* $\hat{\epsilon}$*, establecen una equivalencia dual entre las categorías* SRL *y* pSpec.

5.3 Dualidad bitopológica para retículos subresiduados

En esta sección estudiaremos una nueva dualidad de tipo bitopológica para retículos subresiduados. Además, estudiaremos la manera en la que se relaciona la dualidad bitopológica con las dualidades tipo Priestley y tipo espectral para los retículos subresiduados.

Un espacio bitopológico es una estructura (X, τ, τ') donde (X, τ) y (X, τ') son espacios topológicos. Teniendo en cuenta la definición de retículos subresiduados y los resultados exhibidos en [6], presentaremos una categoría cuyos objetos son ciertos espacios bitopológicos y probaremos que esta categoría es dualmente equivalente a SRL.

Definición 5.3.1. *Un* espacio bitopológico subresiduado *es un espacio bitopológico* (X, τ, τ') *que satisface las siguientes condiciones:*

(1) (X, τ) *es un espacio espectral.*

(2) (X, τ') *es coherente.*

(3) $\mathrm{KO}(X, \tau') \subseteq \mathrm{KO}(X, \tau)$.

(4) $int_{\tau'}(U^c \cup V) \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *para cada* $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$.

Definición 5.3.2. *Diremos que una función* $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ *es un* morfismo de espacios bitopológicos subresiduados *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ *y* $f : (X_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2')$ *son funciones espectrales.*

(2) $int_{\tau_1'}(f^{-1}(U^c \cup V)) \subseteq f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V))$ *para cada* $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$.

Escribiremos BS para denotar la categoría cuyos objetos son espacios bitopológicos subresiduados y cuyas flechas son los morfismos de espacios bitopológicos subresiduados, donde además la composición de flechas está dada por la composición usual de funciones y la identidad para la composición está dada por la función identidad.

Algunos comentarios sobre la definición anterior:

- Notemos que si (X, τ, τ') es un objeto de la categoría BS entonces $\tau' \subseteq \tau$ y además
$$\begin{aligned} \mathrm{KO}(X, \tau') &= \mathrm{KO}(X, \tau) \cap \tau' \\ &= \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau) : int_{\tau'}(U) = U\}. \end{aligned}$$

- Ademas, si $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ es una flecha en la categoría BS entonces $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ y $f : (X_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2')$ son funciones continuas.

Observación 5.3.3. Sea $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ una flecha en BS. Entonces

$$int_{\tau_1'}(f^{-1}(U^c \cup V)) = f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V))$$

para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$. En vista de la definición de morfismo de espacios bitopológicos subresiduados, solo será necesario probar que $f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V)) \subseteq int_{\tau_1'}(f^{-1}(U^c \cup V))$ para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$. En efecto, sean $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, \tau_2)$. Ya que $int_{\tau_2'}(U^c \cup V) \subseteq U^c \cup V$ entonces $f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V)) \subseteq f^{-1}(U^c \cup V)$. Teniendo en cuenta que $f : (X_1, \tau_1') \to (X_2.\tau_2')$ es una función espectral deducimos que $f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V)) \in \tau_1'$, así $f^{-1}(int_{\tau_2'}(U^c \cup V)) \subseteq int_{\tau_1'}(f^{-1}(U^c \cup V))$.

Consideremos el funtor $\mathrm{G} \colon \mathsf{BS} \to \mathsf{SRL}$ definido de la siguiente manera:

Objetos Sea (X, τ, τ') un espacio bitopológico subresiduado. Para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ definimos

$$U \to_{\tau'} V = int_{\tau'}(U^c \cup V). \tag{5.2}$$

Si no hay ambiguedad o confusión, escribiremos $U \to V$ en lugar de $U \to_{\tau'} V$. Sea (X, τ, τ') es un objeto de BS. Entonces, $(\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un retículo distributivo acotado. Más aún, se sigue que $\mathrm{KO}(X, \tau') = \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau) : X \to U = U\}$ y $(\mathrm{KO}(X, \tau'), \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un subretículo acotado de $(\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \emptyset, X)$. Se sigue de la definición de los objetos de BS que $(\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \to, \emptyset, X)$ es un álgebra ya que $U \to V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. Definimos la siguiente álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$:

$$\mathrm{G}(X) = (\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \to, \emptyset, X)$$

Lema 5.3.4. *Si (X, τ, τ') es un objeto de la categoría BS entonces $\mathrm{G}(X)$ es un objeto de la categoría SRL.*

Demostración. Sea $(X, \tau, \tau') \in \mathsf{BS}$. Sean U, V y W elementos de $\mathrm{KO}(X, \tau)$. Es inmediato que $U \to U = X$. Además,

$$\begin{aligned} U \to (V \cap W) &= int_{\tau'}(U^c \cup (V \cap W)) \\ &= int_{\tau'}(U^c \cup V) \cap int_{\tau'}(U^c \cup W) \\ &= (U \to V) \cap (U \to W) \end{aligned}$$

Un argumento similar muestra que las ecuaciones $(U \cup V) \to W = (U \to W) \cap (V \to W)$ y $(U \to V) \cap (V \to W) \subseteq U \to W$ son válidas para cada $U, V, W \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. Para probar que $U \cap (U \to V) \subseteq V$, sea $x \in U \cap (U \to V)$. Entonces $x \in U$ y $x \in int_{\tau'}(U^c \cup V) \subseteq U^c \cup V$, entonces $x \in V$. Así, $U \cap (U \to V) \subseteq V$. Finalmente, teniendo en cuenta que $int_{\tau'}(U^c \cup V) \subseteq int_{\tau'}(W^c \cup int_{\tau'}(U^c \cup V))$ deducimos que $U \to V \subseteq W \to (U \to V)$. $\square$

Flechas Sea $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ una flecha en la categoría BS. Consideremos la aplicación $\mathrm{G}(f) : \mathrm{G}(X_2) \to G(X_1)$ definida por por $\mathrm{G}(f)(U) = f^{-1}(U)$. Esta función es un homomorfismo de retículos distributivos acotados. Más aún, se sigue de la observación 5.3.3 que

$$\mathrm{G}(f)(U \to V) = \mathrm{G}(f)(U) \to \mathrm{G}(f)(V)$$

para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau_2)$. Por lo tanto, obtenemos el siguiente Lema.

Lema 5.3.5. *Sea* $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ *una flecha en la categoría* BS. *Entonces* $\mathrm{G}(f)$ *es una flecha en la categoría* SRL.

Es sencillo verificar que las aplicaciones $(X, \tau, \tau') \mapsto \mathrm{G}(X)$ y $f \mapsto \mathrm{G}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{G} : \mathsf{BS} \to \mathsf{SRL}$.

A continuación definimos el funtor $\mathrm{F} \colon \mathsf{SRL} \to \mathsf{BS}$ de la siguiente manera:

Objetos Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. Recordemos que $\hat{\tau}_{\mathbf{A}}$ ha sido definida como la topología sobre $X(\mathbf{A})$ generada por la base $\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in A\}$. Más aún, ya que $D = \{a \in A \colon a = 1 \to a\}$ es un subretículo acotado de $\mathbf{A}$ entonces es inmediato que $\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in D\}$ es también una base para una topología sobre $X(\mathbf{A})$, la cual será denotada por $\overline{\tau}_{\mathbf{A}}$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}) = \{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in A\}$, en el siguiente lema probaremos que $\mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}}) = \{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in D\}$.

Lema 5.3.6. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. *Entonces* $\mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}}) = \{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in D\}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. Sea $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in D$ tal que $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a_1) \cup \cdots \cup \sigma_{\mathbf{A}}(a_n)$. Por lo tanto $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ con $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Ya que D es un subretículo acotado de A entonces $a \in D$. Recíprocamente consideremos el conjunto $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ para algun $a \in D$. En particular, $\sigma_{\mathbf{A}}(a) \in \overline{\tau}_{\mathbf{A}}$. Teniendo en cuenta que $\sigma_{\mathbf{A}}(a) \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ concluimos que $\sigma_{\mathbf{A}}(a) \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$. □

Dado $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ un retículo distributivo acotado y $a, b, c \in A$. Notemos que $a \wedge c \leq b$ si y sólo si $\sigma_{\mathbf{A}}(c) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b)$. Esta observación elemental será usada en la prueba del siguiente Lema.

Lema 5.3.7. *Si* $\mathbf{A}$ *es un objeto de la categoría* SRL, *entonces* $(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}, \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$ *es un objeto de la categoría* BS.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. En particular, $(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ es un espacio espectral. Se sigue del Lema 5.3.6 que $(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$ es coherente. Es inmediato notar que $\mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ ya que $\{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in D\} \subseteq \{\sigma_{\mathbf{A}}(a) : a \in A\}$. Finalmente veremos que $int_{\tau'}(U^c \cup V)$ es un elemento de $\mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$, donde $\tau' = \overline{\tau}_{\mathbf{A}}$. Sean $U, V \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$. Entonces existen $a, b \in A$ tales que $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ y $V = \sigma_{\mathbf{A}}(b)$. Más aún, $a \to b \in D$. Veremos que

$$int_{\tau'}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b)) = \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b).$$

Sea $P \in int_{\tau'}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b))$. Entonces existe $c \in D$ tal que $c \in P$ y $\sigma_{\mathbf{A}}(c) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b)$, así $a \wedge c \leq b$. Ya que $a \to (a \wedge c) = a \to c$ entonces $a \to c \leq a \to b$. Ya que $c = 1 \to c \leq a \to c$, entonces $c \leq a \to b$. Así, $a \to b \in P$ pues $c \in P$. Recíprocamente, sea $P \in \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b)$, entonces $a \to b \in P$. Ya que $a \wedge (a \to b) \leq b$ concluimos que $P \in \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b)$. Luego $P \in int_{\tau'}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b))$. Por lo tanto, $int_{\tau'}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b)) = \sigma_{\mathbf{A}}(a \to b)$. □

Dado $\mathbf{A}$ un objeto en la categoría SRL, definimos $\mathrm{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}, \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$.

Flechas Sea $f : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ una flecha en la categoría SRL. Definimos $\mathrm{F}(f) : \mathrm{F}(\mathbf{A}_2) \to \mathrm{F}(\mathbf{A}_1)$ por $\mathrm{F}(f)(P) = f^{-1}(P)$. En particular,

$$\mathrm{F}(f)^{-1}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a)) = \sigma_{\mathbf{A_2}}(f(a))$$

para cada $a \in A_1$. Usaremos este hecho en la demostración del siguiente Lema.

Lema 5.3.8. *Si* $f : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *es una flecha en* SRL*, entonces la aplicación* $\mathrm{F}(f)$ *es una flecha en* BS.

Demostración. Sea $f : \mathbf{A_1} \to \mathbf{A_2}$ una flecha en la categoría SRL. En particular, la aplicación $\mathrm{F}(f) : (X(\mathbf{A_2}), \hat{\tau}_{\mathbf{A_2}}) \to (X(\mathbf{A_1}), \hat{\tau}_{\mathbf{A_1}})$ es una función espectral. Sea $a \in A_1$ tal que $1 \to a = a$, así $f(a) \in A_2$ y $1 \to f(a) = f(a)$. Además, $\mathrm{F}(f)^{-1}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a)) = \sigma_{\mathbf{A_2}}(f(a))$. Se sigue del Lema 5.3.6 que la aplicación $\mathrm{F}(f) : (X(\mathbf{A_2}), \overline{\tau}_{\mathbf{A_2}}) \to (X(\mathbf{A_1}), \overline{\tau}_{\mathbf{A_1}})$ es una función espectral también. Finalmente, sea $U, V \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A_1}), \hat{\tau_{\mathbf{A_1}}})$. Entonces existen $a, b \in A_1$ tales que $U = \sigma_{\mathbf{A_1}}(a)$ y $V = \sigma_{\mathbf{A_1}}(b)$. Entonces se sigue de la prueba del Lema 5.3.7 que

$$int_{\overline{\tau}_{\mathbf{A_2}}}(\mathrm{F}(f)^{-1}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A_1}}(b))) = \sigma_{\mathbf{A_2}}(f(a \to b)),$$

$$\mathrm{F}(f)^{-1}(int_{\overline{\tau}_{\mathbf{A_1}}}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A_1}}(b))) = \mathrm{F}(f)^{-1}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a \to b)).$$

Así,

$$int_{\overline{\tau}_{\mathbf{A_2}}}(\mathrm{F}(f)^{-1}(\sigma_{\mathbf{A_2}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A_2}}(b))) = \mathrm{F}(f)^{-1}(int_{\overline{\tau}_{\mathbf{A_1}}}(\sigma_{\mathbf{A_1}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A_1}}(b))).$$

Por lo tanto, $\mathrm{F}(f)$ es una flecha en la categoría BS. $\square$

Así, se sigue que las aplicaciones $\mathbf{A} \mapsto \mathrm{F}(\mathbf{A})$ y $f \mapsto \mathrm{F}(f)$ definen un funtor contravariante $\mathrm{F} : \mathsf{SRL} \to \mathsf{BS}$.

Sea (X, τ, τ') un objeto de la categoría BS. Entonces se sigue de los Lemas 5.3.6, 5.3.7 y 5.3.4 que

$$\begin{aligned}
\mathrm{KO}(X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}) &= \{\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) : U \in \mathrm{KO}(X,\tau) \text{ y } X \to U = U\} \\
&= \{\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) : U \in \mathrm{KO}(X,\tau) \cap \tau'\} \\
&= \{\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) : U \in \mathrm{KO}(X,\tau')\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{KO}(X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}) = \{\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) : U \in \mathrm{KO}(X,\tau')\}. \tag{5.3}$$

Nuestro próximo objetivo es mostrar que si (X, τ, τ') es un objeto de la categoría BS entonces la aplicación

$$\widetilde{\epsilon}_X : (X, \tau, \tau') \to (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \hat{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}, \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$$

definida por $\widetilde{\epsilon}_X(x) = \{U \in \mathrm{KO}(X,\tau) : x \in U\}$ es un isomorfismo en BS.

Proposición 5.3.9. *Sea* (X, τ, τ') *un objeto de la categoría* BS. *Entonces la función*

$$\widetilde{\epsilon}_X : (X, \tau, \tau') \to (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \hat{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}, \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$$

es un isomorfismo en BS.

Demostración. Sea (X,τ,τ') un objeto de BS. En particular, $\widetilde{\epsilon}_X : (X,\tau) \to (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \hat{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$ es un isomorfismo de espacios espectrales.

Consideremos ahora

$$\widetilde{\epsilon}_X : (X,\tau') \to (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}).$$

Consideremos un elemento de $\mathrm{KO}(X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$. Se sigue de (5.3) que este elemento es de la forma $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)$ para algún $U \in \mathrm{KO}(X,\tau')$. Ya que $\widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)) = U$ deducimos que $\widetilde{\epsilon}_X$ es una función espectral. Por otro lado, consideremos la aplicación

$$\widetilde{\epsilon}_X^{-1} : (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}) \to (X,\tau').$$

Sea $U \in \mathrm{KO}(X,\tau')$. En particular, $(\widetilde{\epsilon}_X^{-1})^{-1}(U) = \sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)$. Se sigue de (5.3) que $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) \in \mathrm{KO}(X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$. Así, $\widetilde{\epsilon}_X^{-1}$ es también una función espectral. Así, $\widetilde{\epsilon}_X$ y $\widetilde{\epsilon}_X^{-1}$ son funciones espectrales.

Ahora consideremos la aplicación

$$\widetilde{\epsilon}_X : (X,\tau,\tau') \to (X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \hat{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)}, \overline{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$$

y dos elementos arbitrarios de $\mathrm{KO}(X(\mathrm{KO}(X,\tau)), \hat{\tau}_{\mathrm{KO}(X,\tau)})$. Esos dos elementos tienen la forma $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)$ y $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V)$ par algún $U,V \in \mathrm{KO}(X,\tau)$. Probaremos que

$$\widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) \to \sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V)) = \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)) \to \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V)).$$

Ya que $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}$ es un isomorfismo de retículos subresiduados tenemos que $\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) \to \sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V) = \sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U \to V)$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U) \to \sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V)) &= \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U \to V)) \\ &= U \to V \\ &= \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(U)) \to \widetilde{\epsilon}_X^{-1}(\sigma_{\mathrm{KO}(X,\tau)}(V)). \end{aligned}$$

Luego $\widetilde{\epsilon}_X$ es una flecha en la categoría BS. Un argumento similar muestra que $\widetilde{\epsilon}_X^{-1}$ es una flecha en la categoría BS. Por lo tanto, $\widetilde{\epsilon}_X$ es un isomorfismo en BS. $\square$

Si $\mathbf{A} \in \mathsf{SRL}$ escribiremos $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}$ para la función $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}} : \mathbf{A} \to \mathrm{G}(\mathrm{F}(\mathbf{A}))$ definida por $\widetilde{\sigma}_{\mathbf{A}}(a) = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ para cada $a \in A$.

Proposición 5.3.10. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. *Entonces la función* $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}} : \mathbf{A} \to \mathrm{G}(\mathrm{F}(\mathbf{A}))$ *es un isomorfismo en la categoría* SRL.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{SRL}$. Claramente, $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}$ es un homomorfismo de retículos distributivos acotados. Sea $\tau' = \overline{\tau}_{\mathbf{A}}$. Se sigue de la prueba del Lema 5.3.7 que para cada $a,b \in A$, $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}(a \to b) = int_{\tau'}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)^c \cup \sigma_{\mathbf{A}}(b))$, i.e., $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}(a \to b) = \widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}(a) \to_{\tau'} \widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}(b)$. Por lo tanto, $\widetilde{\sigma_{\mathbf{A}}}$ es un isomorfismo en SRL. $\square$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.11. *Los funtores contravariantes* $\mathrm{F} : \mathsf{SRL} \to \mathsf{BS}$ *y* $\mathrm{G} : \mathsf{BS} \to \mathsf{SRL}$ *definen un equivalencia dual, cuyos isomorfismos naturales son* $\widetilde{\sigma}$ *y* $\widetilde{\epsilon}$.

Las dualidades para la categoría SRL presentadas en este capítulo pueden ser resumidas en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{SRLS} \arrow[r, shift left, "\mathrm{D}"] & \mathsf{SRL} \arrow[l, shift left, "\mathrm{X}"] \arrow[r, shift left, "\hat{\mathrm{X}}"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{F}"] & \mathsf{pSpec} \arrow[l, shift left, "\hat{\mathrm{D}}"] \\
 & \mathsf{BS} \arrow[u, shift left, "\mathrm{G}"] &
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta las dualidades presentadas resulta evidente que existe una fuerte conexión entre las categorías SRLS, pSpec y BS. En efecto, en la siguiente sección probaremos que las categorías mencionadas son isomorfas.

5.4 Isomorfismos de categorías

En el desarrollo de este capítulo hemos presentado diferentes categorías que son dualmente equivalentes a la categoría SRL, a saber: la categoría SRLS, la categoría pSpec y la categoría BS. El propósito de esta sección es mostrar que, en efecto, las categorías SRLS, pSpec y BS son isomorfas.

5.4.1 Isomorfismo de categorías SRLS y pSpec

En la presente subsección presentaremos un par de funtores que establezcan un isomorfismo entre las categorías SRLS y pSpec.

Observación 5.4.1. Recordemos que si (X,τ) es un espacio topológico T_0 entonces es posible definir el orden de especialización de (X,τ) de la siguiente manera:

$$x \leq_\tau y \textit{ si y sólo si } x \in Cl_\tau(\{y\}).$$

Si (X,τ) es un espacio topológico coherente y $x, y \in X$. Es claro que $x \leq_\tau y$ si y sólo si para cada $U \in \mathrm{KO}(X,\tau)$, si $x \in U$ entonces $y \in U$. Esta observación elemental será de gran utilidad a lo largo de esta sección.

Lema 5.4.2. *Si (X,τ,S) es un objeto en la categoría* pSpec *entonces $(X,\leq_\tau,\tau^*,S)$ es un objeto de* SRLS.

Demostración. Sea (X,τ,S) objeto de pSpec. En particular, $(X,\leq_\tau,\tau^*)$ es un espacio de Priestley y S es un pre-orden. Ahora probaremos que $(X,\leq_\tau,S)$ es un WH-marco. Sea $x \leq_\tau y$ y $(y,z) \in S$. Necesitamos probar que $z \in S(x)$. Notemos que por la reflexividad de S y $x \leq_\tau y$ entonces $y \in \bigcap\{V \in \mathrm{KO}(X,\tau) : S(x) \subseteq V\}$. En efecto, sea $V \in \mathrm{KO}(X,\tau)$ tal que $S(x) \subseteq V$. Entonces $x \in S(x) \subseteq V$, es decir $x \in V$. Teniendo en cuenta que $x \leq_\tau y$ tenemos que $y \in V$. Así,

$$y \in \bigcap\{V \in \mathrm{KO}(X,\tau) : S(x) \subseteq V\} = S(x).$$

Entonces $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in S$, teniendo en cuenta la transitividad de S se sigue que $z \in S(x)$. Veamos ahora que $S(x)$ es cerrado para (X, τ^*). Dado $x \in X$ consideremos $y \notin S(x)$. Entonces existe $U \in \mathrm{KO}(X, \tau) = D(X, \tau^*)$ tal que $y \notin U$ y $S(x) \subseteq U$, es decir $y \in U^c \subseteq S(x)^c$ y U^c es un abierto (X, τ^*). Así, $S(x)$ es cerrado en (X, τ^*) para cada $x \in X$. Finalmente, sea W un clopen en (X, τ^*), Entonces existen $U, V \in D(X, \tau^*) = \mathrm{KO}(X, \tau)$ tal que $W = U \setminus V$. Luego $S^{-1}(W)^c = S^{-1}(U \setminus V)^c \in \mathrm{KO}(X, \tau) = \mathrm{D}(X, \tau^*)$. Por lo tanto $S^{-1}(W)$ es un clopen en (X, τ^*). □

Recordemos que dado $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley entonces la estructura (X, τ_s) es un espacio topológico espectral, donde $\tau_s = OpUp(X)$. Teniendo en cuenta esta observación se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.4.3. *Sea* $(X, \leq, \tau, S)$ *un objeto de la categoría* SRLS. *Entonces* (X, τ_s, S) *es un objeto de* pSpec.

Demostración. Es claro, por la relación en las dualidades de retículos distributivos, que (X, τ_s) es un espacio espectral y S es un pre-orden. Sea $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau_s) = D(X)$. Luego $S^{-1}(U \setminus V)^c$ es un clopen en (X, τ). Ya que $(X, \leq, S)$ es un WH-marco se sigue que $S(y) \subseteq S(x)$ cuando $x \leq y$, lo cual implica que $S^{-1}(U \setminus V)^c = \{x \in X : S(x) \cap U \subseteq V\}$ es un conjunto creciente en $(X, \leq)$. Así, $S^{-1}(U \setminus V)^c \in \mathrm{D}(X) = \mathrm{KO}(X, \tau_s)$. Finalmente mostraremos que para cada $x \in X$ tenemos que

$$S(x) = \bigcap \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau_s) : S(x) \subseteq U\}.$$

Sea $x \in X$. La inclusión $S(x) \subseteq \bigcap \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau_s) : S(x) \subseteq U\}$ es inmediata. Recíprocamente, sea $y \notin S(x)$. Sabemos que $S(x)$ es cerrado en (X, τ). Además $S(x)$ es un subconjunto creciente para $(X, \leq)$. En efecto, sea $y, z \in X$ tal que $y \in S(x)$ y $y \leq z$. Teniendo en cuenta que $(X, \leq, S)$ es un WH-marco tenemos que $S(z) \subseteq S(y)$. Ya que S es reflexiva se sigue que $z \in S(z)$, por lo que $z \in S(y)$. Así, $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in S$, luego la transitividad de S implica que $z \in S(x)$. Por lo tanto, $S(x)$ es un conjunto creciente. Ya que $y \notin S(x)$ entonces se sigue del Lema 1.6.2 que existe $U \in D(X)$ tal que $S(x) \subseteq U$ y $y \notin U$. Ya que $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_s)$ tenemos que $y \notin \bigcap \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau_s) : S(x) \subseteq U\}$, que era nuestro objetivo. □

Especializando los funtores $(-)_*\colon$ Pries $\to$ Spec y $(-)^*\colon$ Spec $\to$ Pries en las categorías SRLS y pSpec respectivamente, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.4.4. *Las categorías* SRLS *y* pSpec *son isomorfas.*

5.4.2 Isomorfismo de categorías SRLS y BS

Teniendo en cuenta los resultados de la subsección previa, para mostrar que las categorías SRLS, BS y pSpec son isomorfas, será suficiente mostrar que las categorías BS y SRLS son isomorfas.

Dado X un conjunto, $U \in \mathcal{P}(X)$ y S una relación binaria definida sobre X. Recordemos que un subconjunto U se dirá S-cerrado si $S(x) \subseteq U$ para cada $x \in U$. Sea $(X, \leq, \tau, S)$ un objeto de SRLS. Escribimos $D_S(X)$ para indicar el subconjunto de $D(X)$ que además son S-cerrados. Además definimos $\tau_S = \{U \in \tau_s : X \Rightarrow_S U = U\}$. Se sigue de la reflexividad de S que $\tau_S = \{U \in \tau_s : U \text{ es } S\text{-cerrado}\}$. Notemos que (X, τ_S) es un espacio topológico.

Lema 5.4.5. *Sea* $(X, \leq, \tau, S)$ *es un objeto de* SRLS. *Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(1) $U \Rightarrow_S V \in D_S(X)$ *para cada* $U, V \in D_S(X)$.

(2) *Si* $(x, y) \notin S$ *entonces existe* $U \in D_S(X)$ *tal que* $x \in U$ *y* $y \notin U$.

(3) $D_S(X)$ *es una base para una topología sobre* X. *Más aún, la topología generada por* $D_S(X)$ *es igual a* τ_S *y* $D_S(X) = \mathrm{KO}(X, \tau_S)$.

Demostración. Comencemos con la prueba de 1). Sea $U, V \in D(X)$. Se sigue del Teorema 1.7.12 que $U \Rightarrow_S V \in D(X)$. El hecho de que $U \Rightarrow_S V$ es S-cerrado se sigue de la reflexividad y transitividad de S.

Ahora probaremos 2). Sea $x, y \in X$ tal que $(x, y) \notin S$. Ya que $S(x)$ es un subconjunto cerrado es un espacio de Priestley entonces existen $U, V \in D(X)$ tal que $S(x) \cap (U \setminus V) = \emptyset$ y $y \in U \setminus V$. Entonces $x \in U \Rightarrow_S V$ y $y \notin U \Rightarrow_S V$. En efecto, supongamos que $y \in U \Rightarrow_S V$, i.e., $S(y) \cap U \subseteq V$. Ya que $y \in S(y) \cap U$ entonces $y \in V$, lo que es una contradicción. El hecho de que $U \Rightarrow_S V \in D_S(X)$ se sigue de la condición 1).

3) Se sigue de una comprobación directa que $D_S(X)$ es una base para una topología sobre X. En lo que sigue probaremos que la topologia generada por la base $D_S(X)$ es igual a τ_S. Es inmediato que todo elemento de la topología generada por $D_S(X)$ es un elemento de τ_S. Recíprocamente, consideremos $U \in \tau_S$ y $x \in U$. En particular, $S(x) \subseteq U$. Sea $y \notin U$, entonces $(x, y) \notin S$. Así, por la condición 2) existe $W_y \in D_S(X)$ tal que $x \in W_y$ y además $y \notin W_y$. Por lo tanto, $U^c \subseteq \bigcup_{y \notin S(x)} W_y^c$. Ya que U^c es cerrado en (X, τ) y $(X, \leq, \tau)$ es un espacio de Priestley se sigue que U^c es compacto en (X, τ). Entonces existe una cantidad finita $W_{y_1}, \ldots, W_{y_n}$ tal que $U^c \subseteq W_{y_1}^c \cup \cdots \cup W_{y_n}^c$. Por lo tanto, $x \in W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_n} \subseteq U$. Teniendo en cuenta que $W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_n} \in D_S(X)$, tenemos que la topología generada por la base $D_S(X)$ es τ_S.

Por último mostraremos que $D_S(X) = \mathrm{KO}(X, \tau_S)$. Sea $U \in D_S(X)$, entonces $U \in D(X)$ y U es S-cerrado. En particular, $U \in \tau_S$. Además, notemos que U es cerrado en (X, τ), por lo tanto es compacto en (X, τ). Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq D_S(X)$ tal que $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Ya que $\{U\}_{i \in I} \subseteq \tau$ entonces existen finitos $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ tal que $U \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Así, $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_S)$. Recíprocamente, sea $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_S)$. Entonces existen $V_1, \ldots, V_k \in D_S(X)$ tal que $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, por lo tanto $U \in D(X)$. Más aún, U es S-cerrado, ya que $V_1, \ldots, V_k$ son S-cerrados. Luego, $U \in D_S(X)$. Por lo tanto, $D_S(X) = \mathrm{KO}(X, \tau_S)$. $\square$

Lema 5.4.6. *Sea* $(X, \leq, \tau, S)$ *un objeto de* SRLS. *Entonces* (X, τ_s, τ_S) *es un objeto de* BS.

Demostración. Sea $(X, \leq, \tau, S)$ un objeto de SRLS. En particular, (X, τ_s) es un espacio espectral. Se sigue del Lema 5.4.5 que (X, τ_S) es coherente. Sea $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau_s) = D(X)$. Veamos que $U \Rightarrow_S V = U \to V$, donde $\to$ fue definida en (5.2) de la Sección 5.3. En efecto, sea $x \in U \Rightarrow_S V$. La reflexividad de S muestra que $U \Rightarrow_S V \subseteq U^c \cup V$. Por lo tanto, $x \in U \to V$. Recíprocamente, sea $x \in U \to V$. Luego existe $W \in D_S(X)$ tal que $x \in W \subseteq U^c \cup V$. Por el Lema 5.4.5 tenemos que $U \Rightarrow_S V \in D_S(X)$, por lo que $S(x) \subseteq W \subseteq U^c \cup V$, es decir $S(x) \cap U \subseteq V$. Así, $x \in U \Rightarrow_S V$. Hemos probado que $U \Rightarrow_S V = U \to V$. Se sigue del Teorema 5.1.4 que $U \Rightarrow_S V \in \mathrm{KO}(X, \tau_s)$, por lo tanto $U \to V \in \mathrm{KO}(X, \tau_s)$. Así, $(X, \tau_s, \tau_S) \in$ BS. $\square$

Sea $(X, \leq_i, \tau_i)$ espacios de Priestley para $i = 1, 2$. Escribiremos como $(X, (\tau_i)_s)$ en lugar de (X, τ_{is}) para $i = 1, 2$.

Lema 5.4.7. *Sea $f : (X_1, \leq_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \leq_2, \tau_2, S_2)$ una flecha en la categoría* SRLS. *Entonces $f : (X_1, (\tau_1)_s, \tau_{S_1}) \to (X_2, (\tau_2)_s, \tau_{S_2})$ es una flecha en la categoría* BS.

Demostración. Sea $f : (X_1, \leq_1, \tau_1, S_1) \to (X_2, \leq_2, \tau_2, S_2)$ una flecha en la categoría SRLS. Es sabido que $f : (X_1, (\tau_1)_s) \to (X_2, (\tau_2)_s)$ es una función espectral. Consideremos $f : (X_1, \tau_{S_1}) \to (X_2, \tau_{S_2})$. Sea $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_{S_2}) = D_S(X_2)$. Ya que $U \in D(X_2)$ y f es un morfismo de espacio de Priestley entonces $f^{-1}(U) \in D(X_1)$. Una comprobación directa basada en el hecho de que U es S_2-cerrado y $(f(x), f(y)) \in S_2$ cuando $(x, y) \in S_1$ muestra que $f^{-1}(U)$ es S-cerrado. Entonces $f^{-1}(U) \in D_S(X_1) = \mathrm{KO}(X_1, \tau_{S_1})$. Así, f es también una función espectral. Por último, sean $U, V \in \mathrm{KO}(X_2, (\tau_2)_s) = D(X_2)$. Se sigue de la prueba del Lema 5.4.6 que $U \to V = U \Rightarrow_S V$. Además, se sigue del Teorema 5.1.4 que $f^{-1}(U \Rightarrow_S V) = f^{-1}(U) \Rightarrow_S f^{-1}(V)$, por lo que $f^{-1}(U \to V) = f^{-1}(U) \to f^{-1}(V)$. Por lo tanto, $f : (X_1, (\tau_1)_s, \tau_{S_1}) \to (X_2, (\tau_2)_s, \tau_{S_2})$ es una flecha en la categoría BS. □

Una prueba simple muestra que las aplicaciones $(X, \tau, \leq, S) \mapsto (X, \tau_s, \tau_S)$ y $f \mapsto f$ definen un funtor covariante de la categoría SRLS hacia la categoría BS.

Lema 5.4.8. *Sea (X, τ, τ') un objeto de* BS. *Entonces $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'})$ es un objeto de* SRLS.

Demostración. Sea (X, τ, τ') un objeto de BS. Entonces $(X, \leq_\tau, \tau^*)$ es un espacio de Priestley y $\leq_{\tau'}$ es un preorden. Se sigue entonces que $\mathrm{KO}(X, \tau') \subseteq \mathrm{KO}(X, \tau)$ y (X, τ') es coherente y que $(X, \leq_\tau, \leq_{\tau'})$ es un WH-marco. El hecho de que (X, τ') es coherente también muestra que $\leq_{\tau'} (x)$ es cerrado en (X, τ^*) para cada $x \in X$. Ahora probaremos que para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$, $U \Rightarrow V = U \to V$, donde $U \Rightarrow V = U \Rightarrow_{\leq_{\tau'}} V$. Sea $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. Sea $x \in U \Rightarrow V$. Entonces $\leq_{\tau'} (x) \cap U \subseteq V$, por lo que $\leq_{\tau'} (x) \subseteq U^c \cup V$. Sea $y \in U \setminus V$, se sigue que $(x, y) \notin \leq_{\tau'}$. Ya que $\mathrm{KO}(X, \tau')$ es coherente entonces existen $W_y \in \mathrm{KO}(X, \tau')$ tal que $x \in W_y$ y $y \notin W_y$. Hemos probado que $U \setminus V \subseteq \bigcup_{(x,y) \notin \leq_{\tau'}} W_y^c$. Ya que cada $W_y \in \mathrm{KO}(X, \tau') \subseteq \mathrm{KO}(X, \tau) = \mathrm{D}(X)$ y $U \setminus V$ es cerrado en el espacio de Priestley (X, τ^*) entonces existen $W_{y_1}, \ldots, W_{y_n}$ tal que $U \setminus V \subseteq W_{y_1}^c \cup \cdots \cup W_{y_n}^c$. Así, $W_{y_1}^c \cap \cdots \cap W_{y_n}^c \in \tau'$ y $x \in W_{y_1}^c \cap \cdots \cap W_{y_n}^c \subseteq U^c \cup V$, por lo que $x \in U \to V$. Recíprocamente, sea $x \in U \to V$. Ya que (X, τ') es coherente existen $W \in \mathrm{KO}(X, \tau')$ tal que $x \in W \subseteq U^c \cup V$. Sea $y \in \leq_{\tau'} (x) \cap U$, i.e., $x \leq_{\tau'} y$ y $y \in U$. Ya que $x \in W$ entonces $y \in W$, por lo que $y \in V$. Así, $x \in U \Rightarrow V$. Hemos probado que para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ tenemos que

$$U \Rightarrow V = U \to V. \tag{5.4}$$

Sea Z un clopen en (X, τ), entonces existen $U, V \in D(X)$ tal que $Z = U \setminus V$. Más aún, una comprobación directa basada en que $\leq_{\tau'}$ es un preorden muestra la igualdad $(\leq_{\tau'}^{-1} (Z))^c = U \Rightarrow V$. Pero por (5.4) tenemos que $U \Rightarrow V = U \to V$, por lo que $(\leq_{\tau'}^{-1} (Z))^c = U \to V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. Por lo tanto, $\leq_{\tau'}^{-1} (Z)$ es un clopen en (X, τ^*). □

Sea $(X, \tau, \tau') \in$ BS. Por el Lema 5.4.8 se sigue que $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'}) \in$ SRLS. Es interesante notar que la relación $\leq_\tau$ es un orden y que la relación $\leq_{\tau'}$ es un pre-orden el cual no es necesariamente un orden.

Observación 5.4.9. Sea (X, τ, τ') un objeto de BS. Por el Lema 5.4.8 tenemos que la estructura $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'})$ es un objeto de SRLS. Más aún, teniendo en cuenta la prueba del Lema 5.4.8 se sigue que $X \Rightarrow U = X \to U$ para cada $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. Entonces

$$\begin{aligned} D_{\leq_{\tau'}}(X) &= \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau) : X \Rightarrow U = U\} \\ &= \{U \in \mathrm{KO}(X, \tau) : X \to U = U\} \\ &= \mathrm{KO}(X, \tau'). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_{\leq_{\tau'}}(X) = \mathrm{KO}(X, \tau').$$

Lema 5.4.10. *Sea* $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ *una flecha en la categoría* BS. *Entonces* $f : (X_1, \leq_{\tau_1}, \tau_1^*, \leq_{\tau_1'}) \to (X_2, \leq_{\tau_2}, \tau_2^*, \leq_{\tau_2'})$ *es una flecha en la categoría* SRLS.

Demostración. Sea $f : (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ una flecha en la categoría BS. Teniendo en cuenta el isomorfismo de las categorías Pries y Spec se sigue que $f : (X_1, \leq_{\tau_1}, \tau_1^*) \to (X_2, \leq_{\tau_2}, \tau_2^*)$ es un morfismo de espacios de Priestley. El hecho de que para cada $x, y \in X_1$ es válido que $(f(x), f(y)) \in \leq_{\tau_2'}$ cuando $(x, y) \in \leq_{\tau_1'}$ se sigue de que $f : (X_1, \leq_{\tau_1'}) \to (X_2, \leq_{\tau_2'})$ es una función espectral.

Sea $S_i = \leq_{\tau_i'}$ para $i = 1, 2$. Consideremos $x \in X_1$ y $z \in X_2$ tal que $(f(x), z) \in S_2$. Necesitamos probar que existe $y \in S_1(x)$ tal que $f(y) = z$. Supongamos que para cada $y \in S_1(x)$ se tiene que $f(y) \neq z$. Entonces existen $U_y, V_y \in D(X_1) = \mathrm{KO}(X, \tau_1)$ tal que $f(y) \in U_y \setminus V_y$ y $z \notin U_y \setminus V_y$. Así,

$$S_1(x) \subseteq \bigcup_{y \in S_1(x)} f^{-1}(U_y \setminus V_y).$$

Ya que $S_1(x)$ es cerrado en (X_1, τ_1^*) entonces existe $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ tal que $S_1(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{y_i} \setminus V_{y_i})$, i.e.,

$$\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(U_{y_i}^c \cup V_{y_i}) \subseteq S_1(x)^c.$$

Una comprobación directa muestra que $S_1(x)^c$ es abierto en (X_1, τ_1'). Entonces usando que f es una flecha en la categoría BS obtenemos que

$$\bigcap_{i=1}^n f^{-1}(int_{\tau_2'}(U_{y_i}^c \cup V_{y_i})) \subseteq S_1(x)^c,$$

lo que es equivalente a

$$S_1(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^n [f^{-1}(int_{\tau_2'}(U_{y_i}^c \cup V_{y_i})]^c.$$

Ya que $x \in S_1(x)$ entonces existe $j = 1, \ldots, n$ tal que $f(x) \notin int_{\tau_2'}(U_{y_j}^c \cup V_{y_j})$. Más aún, ya que $z \notin U_{y_j} \cap V_{y_j}^c$ entonces $z \notin int_{\tau_2'}(U_{y_j} \cap V_{y_j}^c)$. Se sigue de $(f(x), z) \in S_2$ que $f(x) \notin int_{\tau_2'}(U_{y_j} \cap V_{y_j}^c)$. Así, $f(x) \in \emptyset$, lo que es una contradicción. $\square$

Una comprobación directa muestra que las aplicaciones $(X, \tau, \tau') \mapsto (X, \tau^*, \leq_\tau, \leq_{\tau'})$ y $f \mapsto f$ establecen un funtor covariante desde la categoría BS hacia la categoría SRLS.

Teorema 5.4.11. *Las categorías* SRLS *y* BS *son isomorfas.*

Demostración. Sea $(X, \leq, \tau, S)$ un objeto de la categoría SRLS, entonces $(X, \tau_s, \tau_S) \in$ BS. Luego la estructura $(X, \leq_{\tau_s}, \tau_s^*, \leq_{\tau_S}) \in$ SRLS. Sabemos que $\leq = \leq_{\tau_s}$. Además, para $x, y \in X$ se sigue del Lema 5.4.5 que $x \leq_{\tau_S} y$ si y sólo si para cada $U \in D_S(X)$, si $x \in U$ entonces $y \in U$. De nuevo, por el Lema 5.4.5 la última condición es equivalente a decir que $(x, y) \in S$. Así, $S = \leq_{\tau_S}$.

Recíprocamente, sea $(X, \tau, \tau') \in$ BS entonces $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'}) \in$ SRLS. Luego, la estructura $(X, \tau_s^*, \tau_{\leq_{\tau'}}^*) \in$ BS. Sabemos que $\tau = \tau_s^*$. Definimos $S = \leq_{\tau'}$. Mostraremos que $\tau' = \tau_S^*$. El hecho de que $\tau' \subseteq \tau_S^*$ es inmediato. Recíprocamente, sea $U \in \tau_S^*$. Sea $x \in U$. Entonces se sigue del Lema 5.4.5 que existe $V \in D_S(X)$ tal que $x \in V \subseteq U$, por lo tanto, por la Observación 5.4.9 se sigue que $V \in \mathrm{KO}(X, \tau')$. Luego, $\tau_S^* \subseteq \tau'$. Por lo tanto, $\tau' = \tau_S^*$. $\square$

5.5 Dualidades topológicas para KSRL

En la presente sección utilizaremos como base las dualidades para retículos subresiduados desarrolladas a lo largo de este capítulo para obtener una dualidad para retículos subresiduados dotados de un operador modal de necesidad. En particular, buscaremos determinar dualidades para retículos subresiduados modales en términos los espacios de Priestley, espectrales y bitopológicos subresiduados, respectivamente. Comenzaremos nuestro estudio estableciendo la dualidad de tipo bitopológica para retículos subresiduados modales y luego, utilizaremos los isomorfismos establecidos en las secciones 5.4.1 y 5.4.2 para determinar la dualidad de tipo Priestley y la dualidad de tipo espectral para retículos subresiduados modales.

Recordemos que un retículo subresiduado modal es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, 0, 1)$ tal que $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ es un retículo subresiduado y $\Box\colon A \rightarrow A$ es un operador unario tal que para cada $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\Box 1 = 1$

2) $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$

3) $\Box(a \rightarrow b) \leq \Box a \rightarrow \Box b$

Escribiremos KSRL para denotar la categoría cuyos objetos son retículos subresiduados modales y sus flechas son homomorfismos entre estas estructuras. Además, la composición de flechas y la flecha identidad están determinados por la composición usual de funciones y el homomorfismo identidad, respectivamente.

Observación 5.5.1. Sea $\mathbf{A} \in \mathrm{KSRL}$ y $a \in D$ entonces $a = 1 \rightarrow a$. En particular notemos que

$$\Box a = \Box(1 \rightarrow a) \leq \Box 1 \rightarrow \Box a = 1 \rightarrow \Box a.$$

Además, para cada $a \in A$ la condición $1 \rightarrow \Box a \leq \Box a$ es válida sobre cada retículo subresiduado modal, de donde se sigue que

$$\Box a = 1 \rightarrow \Box a.$$

Este hecho será utilizado a lo largo de esta sección.

5.5.1 Dualidad bitopológica para KSRL

En esta sección utilizaremos los resultados propios de la Sección 4.3 para establecer una dualidad de tipo bitopológica para la categoría KSRL. Comenzaremos esta sección introduciendo los objetos y las flechas de la categoría que resultará dualmente equivalente a la categoría a KSRL.

Definición 5.5.2. *Una estructura* (X, τ, τ', R) *se dirá* espacio bitopológico subresiduado modal *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) (X, τ, τ') *es un espacio bitopológico subresiduado,*

(2) $R(x) = \bigcap\{U \in \mathrm{KO}(X, \tau)\colon R(x) \subseteq U\}$ *para cada* $x \in X$*,*

(3) *Para cada* $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *el conjunto* $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *y*

(4) *Para cada* $U \in \mathrm{KO}(X, \tau')$ *el conjunto* $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X, \tau')$

Definición 5.5.3. *Diremos que una función* $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_1', R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_2', R_2)$ *es un morfismo de espacios bitopológicos subresiduados modales si:*

(1) $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_1') \to (X_2, \tau_2, \tau_2')$ *es un morfismo de espacios bitopológicos subresiduados,*

(2) *Si* $(x, y) \in R_1$ *entonces* $(f(x), f(y)) \in R_2$

(3) *Si* $(f(x), z) \in R_2$ *entonces existe* $y \in R_1(x)$ *tal que* $f(y) \in Cl_{\tau_2}(z)$.

Escribiremos KBS para denotar la categoría cuyos objetos son los espacios bitopológicos subresiduados modales y las flechas son los morfismos de espacios bitopológicos subresiduados modales. Además, la composición de flechas está determinada por la composición usual de funciones y la identidad para dicha composición será la función identidad.

Definimos el funtor $\mathcal{G}\colon \mathsf{KBS} \to \mathsf{KSRL}$ de la siguiente manera:

Objetos Sea (X, τ, τ', R) un objeto de la categoría KBS. Consideremos la estructura

$$\mathcal{G}(X) = (\mathrm{KO}(X, \tau), \cap, \cup, \to_{\tau'}, \Box_R, \emptyset, X)$$

Teorema 5.5.4. *Si* (X, τ, τ', R) *es un objeto de la categoría* KBS *entonces* $\mathcal{G}(X)$ *es un objeto de la categoría* KSRL.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 5.3.4 y la Definición del operador $\Box_R$ sólo será necesario comprobar que se verifica la condición $\Box_R(U \to V) \subseteq \Box_R(U) \to \Box_R(V)$ para cada $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. En efecto, consideremos $x \in \Box_R(U \to V)$. Ya que $U, V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ se sigue que $U \to V \in \mathrm{KO}(X, \tau)$. En particular, notemos que $U \to V \in \mathrm{KO}(X, \tau) \cap \tau' = \mathrm{KO}(X, \tau')$ por lo tanto resultará abierto en τ', de donde se sigue que $\Box_R(U \to V) \in \mathrm{KO}(X, \tau')$. Más aún, notemos que $\Box_R(U \to V) \cap \Box_R(U) \subseteq \Box_R(V)$. En efecto, sea $x \in \Box_R(U \to V) \cap \Box_R(U)$ y consideremos $y \in R(x)$ entonces $y \in (U \to V) \cap U \subseteq V$ de donde se sigue que $R(x) \subseteq V$, es decir, $x \in \Box_R(V)$. Así, se sigue que $\Box_R(U \to V) \subseteq \Box_R(U) \to \Box_R(V)$ y por lo tanto $\mathcal{G}(X)$ es un retículo subresiduado modal. $\Box$

Flechas Sea $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_1', R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_2', R_2)$ una flecha en la categoría KBS. Consideremos la aplicación $\mathcal{G}(f)\colon \mathcal{G}(X_2) \to \mathcal{G}(X_1)$ definida por

$$\mathcal{G}(f)(U) = f^{-1}(U).$$

Teorema 5.5.5. *Sea* $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_1', R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_2', R_2)$ *una flecha en la categoría* KBS *entonces* $\mathcal{G}(f)$ *es una flecha en la categoría* KSRL.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 5.3.5 sólo será necesario probar

$$f^{-1}(\Box_{R_2}(U)) = \Box_{R_1}(f^{-1}(U))$$

Para simplificar la notación escribiremos

$$\Box_1(U) = \Box_{R_1}(U) \quad \text{y} \quad \Box_2(U) = \Box_{R_2}(U).$$

Consideremos $x \in f^{-1}(\Box_2(U))$, es decir $f(x) \in \Box_2(U)$, probaremos que $x \in \Box_1(f^{-1}(U))$. En efecto, si $y \in R_1(x)$ entonces $(x, y) \in R_1$. Ya que f es una flecha en la categoría KBS se sigue que $(f(x), f(y)) \in R_2$. Ya que $f(x) \in \Box_2(U)$ se sigue que $f(y) \in U$, es decir $y \in f^{-1}(U)$, de donde se sigue que $x \in \Box_1(f^{-1}(U))$. Recíprocamente consideremos $x \in \Box_1(f^{-1}(U))$ veamos que $x \in f^{-1}(\Box_2(U))$ i.e, $f(x) \in \Box_2(U)$. En efecto, sea $z \in R_2(f(x))$ entonces $(f(x), z) \in R_2$. Ya que f es una flecha en la categoría KBS se sigue que existe $y \in X_1$ tal que $(x, y) \in R_1$ y además $f(y) \in Cl_{\tau_2}(z)$. Teniendo en cuenta que $x \in \Box_1(f^{-1}(U))$ se sigue que $y \in f^{-1}(U)$, es decir $f(y) \in U$. Teniendo en cuenta que $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_2)$ y $f(y) \in U$ se sigue que $z \in U$. Así, $x \in f^{-1}(\Box_2(U))$ y por lo tanto se sigue que

$$\Box_1(f^{-1}(U)) = f^{-1}(\Box_2(U))$$

como queríamos mostrar. $\Box$

Una comprobación directa muestra que las aplicaciones $X \mapsto \mathcal{G}(X)$ y $f \mapsto \mathcal{G}(f)$ definen el funtor contravariante $\mathcal{G}\colon$ KBS $\to$ KSRL.

A continuación vamos a construir el funtor $\mathcal{F}\colon$ KSRL $\to$ KBS de la siguiente manera:

Objetos Sea A un objeto de la categoría KSRL. Consideremos la estructura

$$\mathcal{F}(\mathbf{A}) = (X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}, \overline{\tau}_{\mathbf{A}}, R_\Box),$$

donde

1) $(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}}, \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$ es el espacio bitopológico subresiduado asociado al reducto de retículo subresiduado
2) la relación $R_\Box$ es la definida en la ecuación 2.2 de la Sección 2.2.

Teorema 5.5.6. *Si* A *es un objeto de la categoría* KSRL *entonces* $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ *es un objeto de la categoría* KBS

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 5.3.7 será necesario comprobar las siguientes condiciones:

1) Para cada $P \in X(\mathbf{A})$ el conjunto $R_\Box(P) = \bigcap\{U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})\colon R_\Box(P) \subseteq U\}$.
2) Para cada $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ el conjunto $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ y
3) Para cada $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$ el conjunto $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$.

Comenzamos mostrando 1). Consideremos $P \in X(\mathbf{A})$. Notemos que

$$\begin{aligned}(P, Q) \in R_\Box \quad & \text{si y sólo si} \quad \Box^{-1}(P) \subseteq Q \\ & \text{si y sólo si} \quad Q \in \sigma_{\mathbf{A}}(a) \text{ para cada } a \in \Box^{-1}(P) \\ & \text{si y sólo si} \quad Q \in \bigcap\{\sigma_{\mathbf{A}}(a)\colon a \in \Box^{-1}(P)\}\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.1.11 se sigue que

$$R_{\Box}(P) = \bigcap\{\sigma_{\mathbf{A}}(a)\colon R_{\Box}(P) \subseteq \sigma_{\mathbf{A}}(a)\}.$$

Dado que $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$ si y sólo si $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ para algún $a \in A$ se sigue la afirmación.

Mostraremos ahora 2). Consideremos $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \hat{\tau}_{\mathbf{A}})$. Se sigue que $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ para algún elemento $a \in A$. Teniendo en cuenta el Teorema de representación para retículos modales se sigue que

$$\sigma_{\mathbf{A}}(\Box a) = \Box_{R_{\Box}}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)).$$

Por último, haremos la prueba de 3). Dado $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A}), \overline{\tau}_{\mathbf{A}})$. Se sigue que $U = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ para algún $a \in D$. Teniendo en cuenta la Observación 5.5.1 se sigue que $\Box a \in D$. Luego, teniendo en cuenta el Teorema de representación para retículos modales se sigue que

$$\Box_{R_{\Box}}(\sigma_{\mathbf{A}}(a)) = \sigma_{\mathbf{A}}(\Box a).$$

Dado que $\Box a \in D$ se sigue la afirmación. □

Flechas Sea $f\colon \mathbf{A_1} \to \mathbf{A_2}$ una flecha en KSRL. Consideremos la aplicación $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(\mathbf{A_2}) \to \mathcal{F}(\mathbf{A_1})$ definida por

$$\mathcal{F}(f)(P) = f^{-1}(P).$$

Lema 5.5.7. *Si $f\colon \mathbf{A_1} \to \mathbf{A_2}$ es una flecha en* KSRL *entonces $\mathcal{F}(f)$ es una flecha en* KBS.

Demostración. Sea $f\colon \mathbf{A_1} \to \mathbf{A_2}$ una flecha en SRL. Por el Lema 5.3.8 será necesario comprobar que:

1) Si $(P, Q) \in R_{\Box_2}$ entonces $(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) \in R_{\Box_1}$ y
2) Si $P \in X(\mathbf{A_2})$ y $Z \in X(\mathbf{A_1})$ son tales que $(f^{-1}(P), Z) \in R_{\Box_1}$ entonces existe $Q \in X(\mathbf{A_2})$ tal que $f^{-1}(Q) \in Cl_{\hat{\tau}_{\mathbf{A_1}}}(Z)$.

Comenzamos comprobando 1). Sea $a \in \Box^{-1}\left(f^{-1}(P)\right)$ se sigue entonces que $f\left(\Box a\right) \in P$. Dado que f es una flecha en KSRL se sigue que $\Box(f(a)) \in P$ y por lo tanto $f(a) \in \Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y por lo tanto $a \in f^{-1}(Q)$, como queríamos mostrar.

Para la prueba de (2) asumiremos que $P \in X(\mathbf{A}_2)$ y $Z \in X(\mathbf{A}_1)$ son filtros primos tales que $(f^{-1}(P), Z) \in R_{\Box_1}$. Debemos probar que existe $Q \in X(\mathbf{A}_2)$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $f^{-1}(Q) \in Cl_{\hat{\tau}_{\mathbf{A_1}}}(Z)$. Para esto, notemos que

$$\Box^{-1}(P) \cap I\left(f\left(Z^c\right)\right) = \emptyset$$

En efecto, supongamos que $a \in \Box^{-1}(P) \cap I\left(f\left(Z^c\right)\right)$ entonces $\Box a \in P$ y además existe $z \in Z^c$ tal que $a \leq f(z)$. Ya que $\Box a \leq \Box(f(z))$ se sigue $\Box(f(z)) \in P$. Teniendo en cuenta que f es una flecha de KSRL se sigue que $f(\Box(z)) \in P$ y por lo tanto $z \in \Box^{-1}(f^{-1}(P))$. Ya que $\Box^{-1}(f^{-1}(P)) \subseteq Z$ se sigue que $z \in Z$ lo que resulta imposible. Por el Teorema 1.5.8 existe $Q \in X(\mathbf{A}_2)$ tal que $\Box^{-1}(P) \subseteq Q$ y $Q \cap f(Z^c) = \emptyset$. Por lo tanto $(P, Q) \in R_{\Box_2}$ y además

$$Z^c \subseteq f^{-1}\left(f(Z^c)\right) \subseteq f^{-1}(Q)^c,$$

de donde se sigue que $f^{-1}(Q) \subseteq Z$. Afirmamos entonces que $f^{-1}(Q) \in Cl_{\hat{\tau}_{\mathbf{A_1}}}(Z)$. En efecto, sea $U \in \mathrm{KO}(X(\mathbf{A_1}), \hat{\tau}_{\mathbf{A_1}})$ tal que $f^{-1}(Q) \in U$. Se sigue que $U = \sigma_{\mathbf{A_1}}(a)$ y por lo tanto $a \in f^{-1}(Q) \subseteq Z$, es decir $Z \in \sigma_{\mathbf{A_1}}(a)$ como queríamos mostrar. □

Unos simples calculos mustran que las aplicaciones $\mathbf{A} \to \mathcal{F}(\mathbf{A})$ y $f \to \mathcal{F}(f)$ establecen un funtor contravariante $\mathcal{F}\colon$ KSRL $\to$ KBS.

Teniendo en cuenta los resultados de la Sección 5.3 se sigue que si $\mathbf{A}$ es un retículo subresiduado entonces la aplicación $\widetilde{\sigma}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \to \mathrm{G}(\mathrm{F}(\mathbf{A}))$ definida por $\widetilde{\sigma}_{\mathbf{A}}(a) = \sigma_{\mathbf{A}}(a)$ resulta un isomorfismo en la categoría SRL. En particular, por el Corolario 2.1.12 se sigue que si $\mathbf{A}$ un objeto de la categoría KSRL entonces la aplicación $\widetilde{\sigma}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \to \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathbf{A}))$ es un isomorfismo en la categoría KSRL. Asimismo, para cada (X, τ, τ') objeto de la categoría BS sabemos que la aplicación $\widetilde{\epsilon}_X\colon X \to \mathrm{F}(\mathrm{G}(X))$ definida por $\widetilde{\epsilon}_X(x) = \epsilon_X(x)$ es un isomorfismo en la categoría BS. Nuestro próximo objetivo será mostrar que la aplicación $\widetilde{\epsilon}_X$ es una flecha en KBS.

Lema 5.5.8. *Para cada (X, τ, τ', R) objeto de la categoría* KBS *la aplicación $\widetilde{\epsilon}_X\colon X \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(X))$ es un isomorfismo en la categoría* KBS*.*

Demostración. Será suficiente comprobar que $(x, y) \in R$ si y sólo si $(\widetilde{\epsilon}_X(x), \widetilde{\epsilon}_X(y)) \in R_{\Box_R}$. En efecto, sea $(x, y) \in R$ y consideremos $U \in \Box_R^{-1}(\widetilde{\epsilon}_X(x))$ entonces $x \in \Box_R(U)$ y por lo tanto $R(x) \subseteq U$, de donde se sigue que $y \in U$. Luego, $U \in \widetilde{\epsilon}_X(y)$ de donde se sigue que $(\widetilde{\epsilon}_X(x), \widetilde{\epsilon}_X(y)) \in R_{\Box_R}$. Recíprocamente supongamos que $(\widetilde{\epsilon}_X(x), \widetilde{\epsilon}_X(y)) \in R_{\Box_R}$. Mostraremos que $(x, y) \in R$. En caso contrario $(x, y) \notin R$. Dado que $R(x) = \bigcap\{U \in \mathrm{KO}(X, \tau)\colon R(x) \subseteq U\}$ existe $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ tal que $R(x) \subseteq U$ y $y \notin U$ de donde se sigue que $x \in \Box_R(U)$ e $y \notin U$. Por la definición de $\widetilde{\epsilon}_X$ se sigue que $U \in \Box_R^{-1}(\widetilde{\epsilon}_X(x)) \setminus \widetilde{\epsilon}_X(y)$ de donde se sigue que $(\widetilde{\epsilon}_X(x), \widetilde{\epsilon}_X(y)) \notin R_{\Box_R}$ lo que es imposible. Luego, $(x, y) \in R$ y el resultado se sigue. $\Box$

Teniendo en cuenta los resultado de esta sección tenemos el siguiente

Teorema 5.5.9. *Los funtores $\mathcal{F}\colon$ KSRL $\to$ KBS y $\mathcal{G}\colon$ KBS $\to$ KSRL, en conjunto con las transformaciones naturales $\widetilde{\sigma}$ y $\widetilde{\epsilon}$, establecen una equivalencia dual de categorías.*

5.5.2 Dualidad de Priestley para KSRL

En esta sección utilizaremos la dualidad bitopológica para la categoría KSRL y los resultados de la Sección 5.4.1 para establecer una dualidad de Priestley para la categoría KSRLS. Comenzaremos esta sección definiendo los objetos y las flechas de la categoría que resultará dual a KSRL.

Definición 5.5.10. *Una estructura $(X, \leq, S, R, \tau)$ es un* SRL espacio modal *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) *$(X, \leq, \tau, S)$ es un SRL-espacio.*

(2) *Para cada $U \in D(X)$ el conjunto $\Box_R(U) \in D(X)$*

(3) *Para cada $x \in X$, $R(x)$ es cerrado creciente.*

(4) *Para cada $U \in D_S(X)$ el conjunto $\Box_R(U) \in D_S(X)$*

Definición 5.5.11. *Sean $(X_i, \leq_i, S_i, R_i, \tau_i)$ con $i = 1, 2$, SRL espacios modales. Una función $f\colon X_1 \to X_2$ es un morfismo de SRL espacios modales si verifica las siguientes condiciones:*

(1) *$f\colon (X_1, \leq_1, S_1, \tau_1) \to (X_2, \leq_2, S_2, \tau_2)$ es un morfismo de SRL-espacios.*

(2) *Si $(x, y) \in R_1$ entonces $(f(x), f(y)) \in R_2$*

(3) ***Si*** $(f(x), z) \in R_2$ ***entonces existe*** $y \in X_1$ ***tal que*** $(x, y) \in R_1$ ***y*** $f(y) \leq z$.

Escribiremos KSRLS para denotar la categoría cuyos objetos son SRL espacios modales y sus flechas son morfismos de SRL espacios modales. Asimismo, la composición de flechas y la flecha identidad para dicha composición están dados por la composición usual de funciones y la función identidad, respectivamente.

Observación 5.5.12. De acuerdo con el isomorfismo de las categorías BS y SRLS tenemos que si (X, τ, τ') es un objeto de BS entonces $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'})$ es un objeto de la categoría SRLS. Más aún*:*

1) $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ ***si y sólo si*** $U \in D(X, \leq_\tau, \tau^*)$ ***y***

2) $U \in \mathrm{KO}(X, \tau')$ ***si y sólo si*** $U \in D_{\leq_{\tau'}}(X, \leq_\tau, \tau^*)$

Lema 5.5.13. *Si* (X, τ, τ', R) *es un objeto de la categoría* KBS *entonces* $(X, \leq_\tau, \tau^*, \leq_{\tau'}, R)$ *es un objeto de la categoría* KSRLS.

Demostración. Teniendo en cuenta la Observación 5.5.12 sólo será necesario comprobar que para cada $x \in X$ el conjunto $R(x)$ es un cerrado creciente de $(X, \leq_\tau, \tau^*)$. Por nuestra hipótesis se sigue que $R(x) = \bigcap\{U \in \mathrm{KO}(X, \tau)\colon R(x) \subseteq U\}$. Dado que $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ si y sólo si $U \in D(X, \leq_\tau, \tau^*)$ el resultado se sigue. □

Lema 5.5.14. *Sea* $f : (X_1, \tau_1, \tau_1', R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_2', R_2)$ *una flecha en la categoría* KBS. *Entonces* $f : (X_1, \leq_{\tau_1}, \tau_1^*, \leq_{\tau_1'}, R_1) \to (X_2, \leq_{\tau_2}, \tau_2^*, \leq_{\tau_2'}, R_2)$ *es una flecha en la categoría* KSRLS.

Nuevamente, teniendo en cuenta el isomorfismo de las categorías BS y SRLS se sigue que si $(X, \leq, \tau, S)$ es un objeto de la categoría SRLS entonces (X, τ_s, τ_S) es un objeto de la categoría BS. Más aún, se sigue que:

1) $U \in D(X)$ si y sólo si $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_s)$ y

2) $U \in D_S(X)$ si y sólo si $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_S)$

Tenemos entonces los siguientes resultados:

Lema 5.5.15. *Si* $(X, \tau, \leq, S, R)$ *es un objeto de la categoría* KSRLS *entonces* (X, τ_s, τ_S, R) *es un objeto de la categoría* KBS.

Lema 5.5.16. *Sea* $f : (X_1, \leq_1, \tau_1, S_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, \tau_2, S_2, R_2)$ *una flecha en la categoría* KSRLS. *Entonces* $f : (X_1, (\tau_1)_s, \tau_{S_1}, R_1) \to (X_2, (\tau_2)_s, \tau_{S_2}, R_2)$ *es una flecha en la categoría* KBS.

Teniendo en cuenta los resultados presentados en esta sección se sigue el

Corolario 5.5.17. *Las categorías* KSRLS *y* KBS *son isomorfas.*

Por último, se sigue de una composición adecuada de funtores el siguiente resultado.

Corolario 5.5.18. *Las categorías* KSRLS *y* KSRL *son dualmente equivalentes.*

5.5.3 Dualidad espectral para KSRL

En la presente sección utilizaremos la dualidad bitopológica para la categoría KSRL y los isomorfismos de la sección 5.4.2 para establecer una dualidad espectral para la categoría KSRL. Comenzaremos esta sección introduciendo los objetos y flechas de la categoría que será dual a KSRL.

Definición 5.5.19. *Una estructura (X, τ, S, R) se dirá p-espacio espectral modal si satisface las siguientes condiciones:*

(1) (X, τ, S) *es un p-espacio espectral*

(2) *Para cada* $x \in X$ *el conjunto* $R(x)$ *es saturado para* τ

(3) *Para cada* $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *los conjuntos* $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X, \tau)$

(4) *Si* $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *y es cerrado para* S *entonces* $\Box_R(U) \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ *y es cerrado para* S.

Definición 5.5.20. *Una función* $f\colon (X_1, \tau_1, S_1, R_1) \to (X_2, \tau_2, S_2, R_2)$ *se dirá función p-espectral modal si satisface las siguientes condiciones:*

(1) f *es una función p-espectral.*

(2) *Si* $(x, y) \in R_1$ *entonces* $(f(x), f(y)) \in R_2$.

(3) *Si* $(f(x), z) \in R_2$ *entonces existe* $y \in R_1(x)$ *tal que* $z \in Cl_{\tau_2}(\{f(y)\})$

Escribiremos KpSpec para denotar la categoría cuyos objetos son p-espacios espectrales modales y cuyas flechas son funciones p-espectrales modales. Además, la composición de flechas está dada por la composición usual de funciones y la identidad para dicha composición está dada por la función identidad.

Dado (X, τ, τ') un objeto de la categoría BS. Teniendo en cuenta los resultados de los lemas 5.4.3 y 5.4.8 se sigue que $(X, \tau, \leq_{\tau'})$ es un objeto de la categoría pSpec. Más aún, se sigue que $U \in \mathrm{KO}(X, \tau')$ si y sólo si $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ y además es cerrado para la relación $\leq_{\tau'}$. Teniendo en cuenta esta observación se tiene el siguiente resultado:

Lema 5.5.21. *Si* (X, τ, τ', R) *es un objeto de la categoría* KBS *entonces* $(X, \tau, \leq_{\tau'}, R)$ *es un objeto de la categoría* KpSpec. *Además, si* $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_1', R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_2', R_2)$ *es una flecha en la categoría* KBS *entonces* $f\colon (X_1, \tau_1, \leq_{\tau_1'}, R_1) \to (X_2, \tau_2, \leq_{\tau_2'}, R_2)$ *es una flecha en la categoría* KpSpec.

Asimismo, dado (X, τ, S) un objeto de la categoría pSpec se sigue de los lemas 5.4.2 y 5.4.6 que (X, τ, τ_S) es un objeto de la categoría BS. Más aún, $U \in \mathrm{KO}(X, \tau)$ y es cerrado para la relación S si y sólo si $U \in \mathrm{KO}(X, \tau_S)$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 5.5.22. *Si* (X, τ, S, R) *es un objeto de la categoría* KpSpec *entonces* (X, τ, τ_S, R) *es un objeto de la categoría* KBS. *Además, si* $f\colon (X_1, \tau_1, S_1, R_1) \to (X_2, \tau_2, S_2, R_2)$ *es una flecha en la categoría* KpSpec *entonces* $f\colon (X_1, \tau_1, \tau_{S_1}, R_1) \to (X_2, \tau_2, \tau_{S_2}, R_2)$ *es una flecha en la categoría* KBS.

Teniendo en cuenta los isomorfismos de la Sección 5.4 tenemos el siguiente resultado

Corolario 5.5.23. *Las categorías* KBS *y* KpSpec *son isomorfas.*

Asimismo, teniendo en cuenta la dualidad bitopológica para la categoría KSRL tenemos el siguiente resultado

Corolario 5.5.24. *Las categorías* KSRL *y* KpSpec *son dualmente equivalentes.*

Capítulo 6

Trabajo Futuro y Conclusiones

Para finalizar este trabajo en el presente capítulo mencionaremos algunas lineas de posibles trabajos a futuro y desarrollaremos las conclusiones que se desprenden de los resultados obtenidos.

6.1 Propiedad de los modelos finitos

Dado $S = \langle Fm_{\mathcal{L}}, \vdash_S \rangle$ sistema deductivo definido sobre el conjunto de las fórmulas de un tipo $\mathcal{L}$ dado. Recordemos que S está caracterizado por una clase de marcos de Kripke M si para cada Γ conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas y cada φ fórmula del mismo tipo se tiene que

$$\Gamma \vdash_S \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash_{l(\mathsf{M})} \varphi.$$

Diremos que el sistema deductivo S tiene la *propiedad de los modelos finitos* si para cada fórmula φ que no es un teorema de S existe un modelo finito de S el cual refuta φ, es decir para cada fórmula φ tal que $\emptyset \nvdash_S \varphi$ existe un modelo finito $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ basado en un marco $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$, tal que:

(1) Para cada $\psi \in \mathbf{Fm}$, si $\vdash_S \psi$ entonces $\mathcal{M} \vDash \psi$.

(2) $\mathcal{M} \nvDash \varphi$

En particular, por el Teorema 3.4.4 se sigue que para cada $\mathcal{L}_{so}$-fórmula φ,

$$\emptyset \vdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi \text{ si y sólo si } \emptyset \vdash_{l(\mathsf{WHO})} \varphi$$

Existen diferentes técnicas para construir modelos finitos. Tomando como base los trabajos [32, 51] donde se estudia la propiedad de los modelos finitos para lógicas intuicionistas modales, trataremos de extender estos resultados a diferentes lógicas subintuicionistas modales a través de la técnica de los filtrados.

Filtrados para WHO-modelos Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ y Σ un subconjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas. Definimos la relación de equivalencia $\sim_\Sigma$ sobre el conjunto X de la siguiente manera:

$$x \sim_\Sigma y \text{ si y sólo si } (\forall \varphi \in \Sigma)\, [x \in v(\varphi) \text{ si y sólo si } y \in v(\varphi)] \tag{6.1}$$

Si bien hemos introducido la notación x/θ para indicar la clase de equivalencia de un elemento x por medio de la relación de equivalencia θ y X/θ para indicar el conjunto cociente en esta sección utilizaremos la siguiente notación: indicaremos como $[x]$ la clase de equivalencia del elemento x y $[X]$ el conjunto cociente de X por la relación de equivalencia $\sim_\Sigma$.

Definición 6.1.1. *Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un WHO-modelo basado en $\mathcal{F}$ y Σ un conjunto finito de fórmulas cerrado por subfórmulas. Una estructura*

$$\mathcal{M}_\Sigma = ([X], \leq_\Sigma, S_\Sigma, R_\Sigma, T_\Sigma, v_\Sigma)$$

se dirá filtración *de $\mathcal{M}$ a través del conjunto Σ si satisface las siguientes condiciones:*

(1) ***Para cada** $p \in \mathrm{Prop}$, $v_\Sigma(p) = \{[x] \colon x \in v(p)\}$*

(2) ***Si** $x \leq y$ **entonces** $[x] \leq_\Sigma [y]$*

(3) ***Si** $(x, y) \in S$ **entonces** $([x], [y]) \in S_\Sigma$*

(4) ***Si** $(x, y) \in R$ **entonces** $([x], [y]) \in R_\Sigma$*

(5) ***Si** $(x, y) \in T$ **entonces** $([x], [y]) \in T_\Sigma$*

(6) ***Si** $[x] \leq_\Sigma [y]$, $\varphi \in \Sigma$ **y** $x \in v(\varphi)$ **entonces** $y \in v(\varphi)$*

(7) ***Si** $([x], [y]) \in R_\Sigma$, $\varphi \in \Box^{-1}(\Sigma)$ **y** $x \in v(\Box(\varphi))$ **entonces** $y \in v(\varphi)$*

(8) ***Si** $([x], [y]) \in T_\Sigma$, $\varphi \in \Diamond^{-1}(\Sigma)$ **y** $y \in v(\varphi)$ **entonces** $x \in v(\Diamond\varphi)$*

(9) ***Si** $([x], [y]) \in S_\Sigma$, $\varphi \to \psi \in \Sigma$, $x \in v(\varphi \to \psi)$ **y** $y \in v(\varphi)$ **entonces** $y \in v(\psi)$*

Sea $\mathcal{M}_\Sigma$ una filtración del WHO-modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ a través del conjunto Σ. La estructura

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_\Sigma) = (\mathrm{Up}([X]), \cap, \cup, \Rightarrow_{S_\Sigma}, \Box_{R_\Sigma}, \Diamond_{T_\Sigma}, \emptyset, [X]_\Sigma),$$

es un álgebra en el lenguaje $\mathcal{L}_{so}$. Más aún, resulta una WHO-álgebra. Además, notemos que la aplicación $v_\Sigma \colon \mathrm{Prop} \to \mathcal{A}(\mathcal{F}_\Sigma)$ puede ser extendida a un homomorfismo $v_\Sigma \colon \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{so}} \to \mathcal{A}(\mathcal{F}_\Sigma)$ siguiendo las cláusulas de la Observación 3.3.2. Teniendo en cuenta las condiciones (2)-(9) de la Definición 6.1.1 es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 6.1.2. *Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un WHO-modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{M}_\Sigma$ una filtración de $\mathcal{M}$ a través de un conjunto finito de fórmulas Σ. Entonces para cada fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que*

$$v_\Sigma(\varphi) = \{[x] \in [X] \colon x \in v(\varphi)\}$$

Demostración. La prueba se sigue por inducción sobre la longitud en la construcción de la formula φ. Será necesario probar la afirmación para las fórmulas $\Box(p)$, $\Diamond(p)$ y $p \to q$ con $p, q \in \mathrm{Prop}$. La prueba para las fórmulas modales puede encontrarse en [31], por lo tanto, solo haremos la prueba el caso implicativo. Sea $[x] \in v_\Sigma(p \to q)$, $(x, y) \in S$ y $y \in v(p)$. Luego por la hipótesis inductiva, condición (1) y condición (3) de la Definición 6.1.1 tenemos que $[y] \in v_\Sigma(p)$ y $([x], [y]) \in S_\Sigma$. Por hipótesis tenemos que $[y] \in v_\Sigma(q)$, por lo tanto $y \in v(q)$ y $x \in v(p \to q)$.

Recíprocamente supongamos que $x \in v(p \to q)$, $([x], [y]) \in S_\Sigma$ y $[y] \in v_\Sigma(p)$. Ya que $p \to q \in \Sigma$, por la condición (8) de la Definición 6.1.1 tenemos que $y \in v(q)$ lo que implica que $[y] \in v_\Sigma(q)$ y $[x] \in v_\Sigma(p \to q)$. $\Box$

Observación 6.1.3. Sean $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ es un WHO-modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ y Σ un conjunto finito de fórmulas cerrado bajo subfórmulas. Notemos que en general la estructura

$$\mathcal{F}_\Sigma = ([X], \leq_\Sigma, S_\Sigma, R_\Sigma, T_\Sigma)$$

no es un WHO-marco. Este hecho dependerá en gran medida de la definición de las relaciones sobre el cociente.

A continuación, a partir de un WHO-modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ y de un conjunto de fórmulas cerrado por subfórmulas Σ, vamos a construir una estructura relacional sobre el conjunto cociente $[X]$ y probaremos que en efecto, dicha estructura es un WHO-marco.

Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ un WHO-modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F}$ y Σ un conjunto finito de formulas cerrado por subformulas. Consideremos la estructura

$$\mathcal{M}^* = ([X], \leq^*, R^*, T^*, S^*, v^*)\,, \tag{6.2}$$

donde $[X]$ es el conjunto cociente por medio de la relación definida en 6.1, v^* es el homomorfismo obtenido por el Teorema 6.1.2 y las relaciones se definen de la siguiente manera:

(1) $[x] \leq^* [y]$ si y sólo si para todo $\varphi \in \Sigma$, si $x \in v(\varphi)$ entonces $y \in v(\varphi)$

(2) $([x], [y]) \in R^*$ si y sólo si para toda $\varphi \in \Box^{-1}(\Sigma)$, si $x \in v(\Box(\varphi))$ entonces $y \in v(\varphi)$

(3) $([x], [y]) \in T^*$ si y sólo si para toda $\varphi \in \Diamond^{-1}(\Sigma)$, si $y \in v(\varphi)$ entonces $x \in v(\Diamond\varphi)$

(4) $([x], [y]) \in S^*$ si y sólo si para cada φ, ψ con $\varphi \to \psi \in \Sigma$, si $x \in v(\varphi \to \psi)$, $y \in v(\varphi)$ entonces $y \in v(\psi)$

Lema 6.1.4. *La estructura $\mathcal{M}^*$ es un filtrado de $\mathcal{M}$ a través de Σ y $([X], \leq^*, S^*, R^*, T^*)$ es un WHO-marco.*

Demostración. Comenzaremos por mostrar que, en efecto, las relaciones $\leq^* .R^*, T^*$ y S^* verifican las condiciones (2)-(9) de la Definición 6.1.1, para esto solo será necesario comprobar las condiciones $2, 3, 4$ y 5.

(2) Sean $x, y \in X$ comprobaremos que $[x] \leq^* [y]$. En efecto, sea $\varphi \in \Sigma$ y sea $x \in v(\varphi)$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ es un modelo y que $v(\varphi)$ es un conjunto creciente se sigue que $y \in v(\varphi)$ y por lo tanto $[x] \leq^* [y]$

(3) Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in R$, comprobaremos que $([x], [y]) \in R^*_\Box$. En efecto, sea $\varphi \in \Box^{-1}(\Sigma)$ y $x \in v(\Box\varphi)$. Dado que $R(x) \subseteq v(\varphi)$ se sigue que $y \in v(\varphi)$ que era nuestro objetivo.

(4) Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \in T$, comprobaremos que $([x], [y]) \in R^*_\Diamond$. En efecto, sea $\varphi \in \Diamond^{-1}(\Sigma)$ y $y \in v(\varphi)$. Dado que $y \in T(x) \cap v(\varphi)$ se sigue que $x \in v(\Diamond\varphi)$ que era nuestro objetivo.

(5) Sean $(x, y) \in S$ comprobaremos que $([x], [y]) \in S^*$. En efecto, sean φ, ψ formulas tales que $\varphi \to \psi \in \Sigma$, $x \in v(\varphi \to \psi)$ e $y \in v(\varphi)$. Se sigue que $S(x) \cap v(\varphi) \subseteq v(\psi)$, por lo tanto $y \in v(\psi)$.

Se sigue entonces que $\mathcal{M}^*$ es un filtrado de $\mathcal{M}$ a través de Σ. Además, es sencillo verificar que $\leq^*$ es una relación reflexiva y transitiva sobre $[X]$. Por último, bastará comprobar que se verifican las siguientes condiciones:

1) $\leq^* \circ R^* \subseteq R^* \circ \leq^*$

2) $\leq^{*^{-1}} \circ T^* \subseteq T^* \circ \leq^{*^{-1}}$

3) $\leq^* \circ S^* \subseteq S^*$

1) Supongamos que $([x],[y]) \in \leq^* \circ R^*$ probaremos que $([x],[y]) \in R^* \circ \leq^*$. Por definición de la composición de relaciones existe $[z] \in [X]$ con $[x] \leq^* [z]$ y $([z],[y]) \in R^*$. Sea $\varphi \in \Box^{-1}(\Sigma)$ y $x \in v(\Box(\varphi))$. Ya que $[x] \leq^* [z]$ se sigue que $z \in v(\Box(\varphi))$ lo que implica que $y \in v(\varphi)$ y $([x],[y]) \in R^*$. Por la reflexividad de la relación $\leq^*$ se sigue la prueba.

2) Una prueba análoga a la dada en (1) puede ser usada para probar esta propiedad.

3) Sea $([x],[y]) \in \leq^* \circ S^*$ probaremos que $([x],[y]) \in S^*$. Por hipótesis existe $[z] \in [X]$ tal que $[x] \leq^* [z]$ y $([z],[y]) \in S^*$. Sea φ y ψ fórmulas tales que $\varphi \to \psi \in \Sigma$, $x \in v(\varphi \to \psi)$ y $y \in v(\varphi)$. Luego $z \in v(\varphi \to \psi)$ lo que implica $y \in v(\psi)$. Así $([x],[y]) \in S^*$. □

Teniendo en cuenta los Teoremas 4.4.10, 6.1.2 y el Lema 6.1.4 es posible probar el siguiente resultado

Teorema 6.1.5. *El sistema deductivo* $\mathcal{S}$ (WHO) *tiene la propiedad de los modelos finitos*

Demostración. Sea φ una fórmula tal que $\nvdash_{\mathcal{S}(\mathrm{WHO})} \varphi$. Por el Teorema 3.4.4 tenemos que $\emptyset \not\models_{\mathsf{WHO}} \varphi$ i.e., existe un WHO-marco $\mathcal{F} = (X, \leq, S, R, T)$ y una valuación $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ tal que $v(\varphi) \neq X$. Consideremos $\Sigma := Sub(\varphi)$ i.e., el conjunto finito de subfórmulas de φ y consideremos la filtración $\mathcal{M}^*$. Por el Lema 6.1.4 tenemos que $\mathcal{M}^*$ es un WHO-modelo basado en el WHO-marco $\mathcal{F}^* = ([X], \leq^*, S^*, R^*, T^*)$. Asimismo, el modelo $\mathcal{M}^* = (\mathcal{F}^*, v^*)$ es finito y por el Teorema 6.1.2 tenemos que $v^*(\varphi) \neq [X]$ lo que concluye la prueba. □

Queda como trabajo pendiente estudiar si es posible encontrar una filtración adecuada para las subclases de WHO-marcos definidos por las condiciones de primer orden dadas en la Tabla 2.2. Si es posible probar dicho resultado, las lógicas subintuicionistas estudiadas en este trabajo tendrán también la propiedad de los modelos finitos.

6.2 Diferencia debil y álgebras temporales

Recordemos que la lógica proposicional intuicionista **Int** puede ser definida semánticamente como el conjunto de todas las fórmulas válidas por la clase de todos los modelos de Kripke $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ donde $\mathcal{F} = (X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ es una valuación. Notemos que v puede ser extendida a un homomorfismo de álgebras $v\colon \mathbf{Fm} \to \mathcal{A}(\mathcal{F})$ donde

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \emptyset, X)\,, \tag{6.3}$$

y la implicación $U \Rightarrow V$ es definida por

$$U \Rightarrow V = \{x \in X \colon [x) \cap U \subseteq V\}$$

Diremos que una fórmula en el lenguaje intuicionista φ es válida sobre el modelo de Kripke $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ si $v(\varphi) = X$. Diremos que una fórmula φ es válida sobre el marco de Kripke

$\mathcal{F} = (X, \leq)$ si para toda valuación $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathcal{A}(\mathcal{F})$ se tiene que $v(\varphi) = X$. Si este es el caso, escribiremos $\mathcal{F} \vDash \varphi$. Es sencillo comprobar que

$$\emptyset \vdash_{\mathbf{Int}} \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{F} \vDash \varphi \text{ para cada } \mathcal{F} \text{ marco de Kripke},$$

para cada φ fórmula en el lenguaje intuicionista.

Asimismo, desde el punto de vista algebraico es un hecho conocido que la semántica algebraica para la lógica proposicional intuicionista **Int** está determinada por la variedad H cuyos miembros son álgebras de Heyting. Recordemos que un álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y el par $(\wedge, \to)$ es un par residuado, es decir para cada $a, b, c \in A$:

$$a \wedge b \leq c \text{ si y sólo si } b \leq a \to c.$$

En [54] el autor propone el uso de un conectivo dual al conectivo de la implicación, propiamente llamado *co-implicación* con el objetivo de obtener una ley de residuación dual respecto al conectivo de la disyunción, es decir, este nuevo conectivo, al cuál denotaremos como $a \leftarrow b$, debe satisfacer la siguiente ley de residuación dual: para cada $a, b, c \in A$

$$a \leftarrow b \leq c \text{ si y sólo si } b \leq a \vee c.$$

Diremos entonces que un álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting Brouwer si $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting y $(A, \wedge, \vee, \leftarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting dual simultáneamente. Se define entonces la variedad HB cuyos miembros son algebras de Heyting Brouwer.

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L}_{HB} = \{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \bot, \top\}$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$. Se define la lógica **HB** (a nivel de teoremas) como el conjunto de todas las fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}_{HB}$ tales que $\mathrm{HN} \models \varphi \approx 1$.

Nuevamente en [54], se propone un estudio semantico para la lógica **HB** desde el punto de vista de la semántica relacional definida por la clase de todos los modelos de Kripke $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, v)$ donde $\mathcal{F} = (X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $v\colon \mathrm{Prop} \to \mathrm{Up}(X)$ es una valuación la cuál puede ser extendida a un homomorfismo $v\colon \mathbf{Fm}_{\mathcal{L}_{HB}} \to \mathcal{A}(\mathcal{F})$ donde

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = (\mathrm{Up}(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftarrow, \emptyset, X)\,.$$

La implicación $\Rightarrow$ es definida como en 6.3 y la co-implicación es definida por

$$U \Leftarrow V = \{x \in X\colon (x] \cap (U \setminus V) \neq \emptyset\} \tag{6.4}$$

Si interpretamos con la semántica de Kripke a los elementos del conjunto X como puntos en el tiempo la interpretación de la co-implicación $\varphi \leftarrow \psi$ en un momento $x \in X$ es dada por

$$x \in v(\varphi \leftarrow \psi) \text{ si y sólo si } (x] \cap v(\varphi) \setminus v(\psi) \neq \emptyset,$$

es decir, en algún momento del pasado la fórmula φ ha sido verdadera pero la formula ψ no ha sido verdadera. Esto lleva a pensar a que en las álgebras de Heyting-Brouwer los conectivos de implicación y co-implicación se comportan como operadores temporales.

Se propone como trabajo futuro generalizar el trabajo [54] al contexto de la implicación estricta y al contexto de una co-implicación más general, llamada diferencia debil, que permita establecer la conexión de la implicación estricta y la diferencia débil con álgebras temporales. El trabajo está actualmente en desarrollo en conjunto con el Dr. Sergio Celani y el Dr. William Javier Zuluaga Botero.

6.3 Conclusiones

En vista de los resultados obtenidos en este trabajo es claro que el estudio de operadores unarios definidos sobre estructuras más generales que las álgebras de Heyting requieren de un análisis cuidadoso desde diferentes enfoques:

(1) Desde un punto de vista algebraico en el Capítulo 4 de este trabajo se puede advertir que algunos de los resultados conocidos sobre álgebras de Heyting con un operador modal de necesidad se generalizan de buena manera sobre ciertas subvariedades de WH-álgebras, en particular aquellas en las cuales es válida la ecuación (R). $a \wedge (a \to b) \leq b$. Sin embargo, sin esta ecuación la mayoria de estos resultados no son válidos. Será interesante entonces dar respuesta a las preguntas que surgen al pensar los resultados del capítulo (3) sobre las variedades de álgebras Basicas, THW-álgebras y WH álgebras en general dotadas de un operador modal de necesidad. Asimismo en el Capítulo 2 es posible observar que la interacción de la implicación estricta con los operadores modales es diferente con la interacción que se puede observar en el caso de la implicación intuicionista.

(2) Desde un punto de vista lógico se puede observar en el Capítulo 3 que en el marco de las lógicas subintuicionistas es posible definir diferentes lógicas subintuicionistas modales, las cuales pueden colapsar a una misma lógica en el caso de que el fragmento no modal restulte una lógica intuicionista.

(3) Desde el punto de vista relacional, es claro que la semántica relacional que hemos definido para la lógica subintuicionista modal es más compleja que la utilizada para el caso intuicionista modal. Asimismo, las condiciones de primer orden que caracterizan los marcos adecuados para ciertas lógicas subintuicionistas son mas complejas que las condiciones de primer orden que caracterizan los marcos adecuados para las mismas lógicas intuicionistas modales.

(4) Por último, en el Capítulo 5 hemos desarrollado una dualidad de tipo bitopológica para la categoría SRL. La interpretación topológica de la implicación estricta para el caso subresiduado mantiene una interpretación de la implicación como el interior, respecto de una topología en particular, de un conjunto. Esta interpretación es muy cercana a la obtenida por Esakia en el caso de álgebras de Heyting, sin embargo, en el caso subresiduado la topología a considerar es más chica que la utilizada en el caso de las álgebras de Heyting. Aunque este tipo de dualidades es posible obtenerla en el caso SRL no es posible obtener un resultado similar para subvariedades de WH más generales, ya que no es posible representar a la implicación estricta como interior respecto de alguna topología para los casos más generales.

Bibliografía

[1] ADAMEK, J., HERRLICH, H., AND STRECKER, G. E. *Abstract and Concrete Categories : The Joy of Cats*. Wiley, New York, 1990.

[2] ARDESHIR, M., AND RUITENBERG, W. Basic propositional calculus i. *Mathematical Logic Quarterly 44*, 3 (1998), 317–343.

[3] ARDESHIR, M., AND RUITENBURG, W. Basic propositional calculus ii. interpolation. *Arch. Math. Log. 40* (07 2001), 349–364.

[4] AWODEY, S. *Category Theory*. Oxford Logic Guides. OUP Oxford, 2010.

[5] BALBES, R., AND DWINGER, P. *Distributive lattices*. University of Missouri Press, 1974.

[6] BEZHANISHVILI, G., BEZHANISHVILI, N., GABELAIA, D., AND KURZ, A. Bitopological duality for distributive lattices and heyting algebras. *Mathematical Structures in Computer Science 20* (06 2010), 359–393.

[7] BOU, F., AND JANSANA, R. *Implicación estricta y lógicas subintucionistas.* Tesis de Maestría, Universitat de Barcelona, 2001.

[8] BOŽIĆ, M., AND DOŠEN, K. Models for normal intuitionistic modal logics. *Studia Logica 43*, 3 (1984), 217–245.

[9] BURRIS, S., AND SANKAPPANAVAR, H. *A Course in Universal Algebra*. Dover Publications, Incorporated, 2012.

[10] CAICEDO, X., AND CIGNOLI, R. An algebraic approach to intuitionistic connectives. *Journal of Symbolic Logic 66*, 4 (2001), 1620–1636.

[11] CASTIGLIONI, J. L., SAGASTUME, M., AND SAN MARTIN, H. J. On frontal heyting algebras. *Reports on Mathematical Logic.*, 45 (2010), 201–224.

[12] CELANI, S. N-linear weakly heyting algebras. *Mathematical Logic Quarterly 52* (08 2006).

[13] CELANI, S. Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2006* (10 2006).

[14] CELANI, S. Notes on the representation of distributive modal algebras. *Miskolc Mathematical Notes 9* (09 2008), 81–89.

[15] CELANI, S. A semantic analysis of some distributive logics with negation. *Reports on Mathematical Logic 48* (01 2013).

[16] CELANI, S., AND JANSANA, R. A new semantics for positive modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic 38* (01 1997), 1–18.

[17] CELANI, S., AND JANSANA, R. Priestley duality, a sahlqvist theorem and a goldblatt-thomason theorem for positive modal logic. *Logic Journal of the IGPL 7*, 6 (1999), 683–715.

[18] CELANI, S., AND JANSANA, R. A closer look at some subintuitionistic logics. *Notre Dame J. Formal Logic 42* (10 2001).

[19] CELANI, S., AND JANSANA, R. Bounded distributive lattices with strict implication. *Math. Log. Q. 51* (05 2005), 219–246.

[20] CELANI, S. A., NAGY, A. L., AND SAN MARTÍN, H. J. Dualities for subresiduated lattices. *Algebra universalis 82* (2021), 1–22.

[21] CELANI, S. A., NAGY, A. L., AND SAN MARTÍN, H. J. A semantical analysis of some subintutionistic modal logics. *Studia Logica (En referato)* (2023).

[22] CELANI, S. A., NAGY, A. L., AND SAN MARTÍN, H. J. The variety of modal weak gödel algebras. *Fuzzy Sets and Systems 456* (2023), 125–143. Logic (214 p.).

[23] CIGNOLI R., L. S., AND PETROVICH, A. Remarks on priestley duality for distributive lattices. *Order 8* (1991), 299–315.

[24] CORSI, G. Weak logics with strict implication. *Mathematical Logic Quarterly 33*, 5 (1987), 389–406.

[25] DAVEY, B., AND PRIESTLEY, H. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press, 2002.

[26] DOŠEN, K. *Modal Translations in K and D*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1993, pp. 103–127.

[27] EPSTEIN, G., AND HORN, A. Logics wich are characterized by subresiduated lattices. *Math. Logik Grundlagen Math.*, 22 (1976), 199–210.

[28] ESAKIA, L. The modalized heyting calculus: a conservative modal extension of the intuitionistic logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics 16*, 3-4 (2006), 349–366.

[29] FISCHER SERVI, G. Axiomatizations for some intutionistic modal logics. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, 42 (1984), 179–194.

[30] FONT, J. *Abstract Algebraic Logic - An Introductory Textbook*. 04 2016.

[31] HASIMOTO, Y. Finite model property for some intuitionistic modal logics. *Bulletin of the Section of Logic 30*, 2 (2001), 87–97.

[32] HASIMOTO, Y. Heyting algebras with operators. *Math. Log. Quart. 47* (2001), 187–196.

[33] HORN, A. Logic with truth values in a linearly ordered heyting algebra. *Journal of Symbolic Logic 34* (1969), 395 – 408.

[34] HÁJEK, P. Metamathematics of fuzzy logic. *Kluwer Academic Publishers 4* (1998).

[35] JANSANA, R. Selfextensional logics with a conjunction. *Studia Logica 84*, 1 (2006), 63–104.

[36] KOJIMA, K. Relational and neighborhood semantics for intuitionistic modal logic. *Reports on Mathematical Logic.*, 47 (2012), 87–113.

[37] KOWALSKI, T. Varieties of tense algebras. *Reports on Mathematical Logic* (1998), 53–95.

[38] LEWIS, C. I., AND LANGFORD, C. H. *Symbolic Logic*, vol. 170. New York: Dover Publications, 1959.

[39] MARTÍNEZ, G., AND PRIESTLEY, H. On priestley spaces of lattice-ordered algebraic structures. *Order*, 15 (1998), 297–323.

[40] MONTEIRO, A. Sur les algebres de heyting symétriques. *Portugaliae Mathematica*, 39 (1980).

[41] MUNKRES, J. *Topology*. No. 2. Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[42] ONO, H. On some intutionistic modal logics. *Publication of the Research Institute for Math. Sc.*, 13 (1977), 687–722.

[43] ORLOWSKA, E., AND REWITZKY, I. Discrete dualities for heyting algebras with operators. *Fundamenta Informaticae*, 81 (2007), 275–295.

[44] PALMIGIANO, A. Dualities for intuitionistic modal logics. *In Liber Amicorum for Dick de Jongh, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam,* (2004), 151–197.

[45] RUEDA, L. Linear heyting algebras with a quantifier. *Annals of Pure and Applied Logic*, 108 (2001), 327–343.

[46] SAGASTUME, M., AND SAN MARTÍN, H. J. *Álgebra del cálculo proposicional.* Instituto de Matemática IMABB, 2019.

[47] SAN MARTIN, H. J. Compatible operations in some subvarieties of the variety of weak heyting algebras. *8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology* (2013).

[48] SOFRONIE-STOKKERMANS, V. Duality and canonical extensions of bounded distributive lattices with operators, and applications to the semantics of non-classical logics i. *Studia Logica*, 64 (2000), 93–132.

[49] SOFRONIE-STOKKERMANS, V. Duality and canonical extensions of bounded distributive lattices with operators, and applications to the semantics of non-classical logics ii. *Studia Logica*, 64 (2000), 151–172.

[50] STONE, M. Topological representation of distributive lattices and brouwerian logics. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 67 (1938), 1–25.

[51] TAKANO, M. Finite model property for an intuitionistic modal logic. *Nihonkai Math. J.*, 14 (2003), 125–132.

[52] VISSER, A. . A propositional logic with explicit fixed points. *Studia Logica.*, 40 (1981), 155–175.

[53] WOLTER, F. Superintutionistic companions of classical modal logics. *Studia Logica.*, 58 (1997), 229–259.

[54] WOLTER, F. On logics with co-implication. *Journal of Philosophical Logic.*, 27 (1998), 353–387.

[55] WOLTER, F., AND ZAKHARYASCHEV, M. On the relation between intuitionistic and classical modal logics. *Algebra and Logic.*, 36 (1997).