Sarah E. Salvioli

SOBRE LA TEORIA DE OBJETOS GEOMETRICOS

La Plata
1970

S O B R E   L A   T E O R I A

D E

O B J E T O S   G E O M É T R I Ç O S

por

Sarah E. Salvioli

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas. Marzo de 1970.

INTRODUCCION

El concepto de objeto geométrico ha estado bajo la atención de los matemáticos desde los comienzos de este siglo. Muchos fueron los intentos realizados para clarificar y desarrollar el tema hasta la aparición en 1936-37 de los resultados publicados por J.A. Shouten, J.Haantjes y A. Wundheiler. A partir de entonces la mayoría de las publicaciones estuvieron dedicadas al estudio de situaciones particulares o a la clasificación de los objetos geométricos. Recién en 1952, con la tesis de A. Nijenhuis, apareció un tratamiento completo de la teoría. En este trabajo el problema se encara desde un punto de vista que podríamos llamar clásico o numérico: un objeto en un punto P de una variedad M es una correspondencia que asigna a cada sistema coordenado definido en P un conjunto de N números llamados componentes. El énfasis está puesto en el hecho de que si el objeto es un objeto geométrico las transformaciones de sus componentes son representaciones del grupoide de elementos de transformaciones de la variedad M.

Nuevos intentos de formular la teoría de objetos geométricos fueron hechos por Haantjes-Laman(1953) y Kuiper-Yano(1955). En ambos casos un campo de objetos geométricos es una sección de un fibrado que goza de especiales propiedades, pero en la primera de las publicaciones el espacio del objeto y el grupo de transformaciones que opera sobre él son los elementos de mayor importancia.

Nosotros presentamos aquí un tratamiento funtorial de la teoría de objetos geométricos inspirada en el "fibrado natural" de A. Nijenhuis(1958) [6]. En la sección 1 definimos un fibrado de objetos geométricos como el dato de una variedad M y una "estructura natural" sobre ella, $(M; E,\pi,\mathbb{E})$, donde $\pi: E \longrightarrow M$ es la proyección y $\mathbb{E}$ es un funtor covariante de la categoría de los abiertos de M y difeomorfismos locales entre esos abiertos y la categoría de los abiertos de E y las aplicaciones C^{∞} entre dichos abiertos. Las diferencias entre la definición de A.Nijenhuis y la nuestra son:

1. Nuestro fibrado no necesita ser localmente trivial.
2. No imponemos condiciones restrictivas ni a las fibras de E ni al grupo que pueda actuar sobre ellas.
3. Pedimos a B que satisfaga una condición adicional (iii). Esta condición, que es una idea no publicada del Dr. E. Calabi, hace posible definir en la sección 4 la derivada de Lie de un campo de objetos geométricos.

En la sección 2 definimos el levantamiento a E de una familia de campos vectoriales con dominio en la variedad M. Esto permite levantar un campo vectorial del que se desconoce su grupo local monoparamétrico de difeomorfismos, pero del que se sabe es un elemento de una familia de campos vectoriales cuya familia de difeomorfismos locales puede ser construída. Este es el caso del corchete de campos vectoriales cuyo levantamiento y propiedades son estudiadas en la sección 3.

En la sección 4 definimos la derivada de Lie de un campo de objetos geométricos y probamos algunas propiedades de la misma.

En la sección 5 definimos, para un campo fijo Φ de objetos geométricos, dos operadores diferenciales lineales $B\Phi$ y $L\Phi$ entre fibrados vectoriales de base M. Mostramos que en abiertos convenientemente elegidos esos operadores tienen orden finito e igual en cada punto y probamos varias propiedades de los mismos.

Deseo expresar aquí mi profundo agradecimiento al Dr. A. Nijenhuis, quien durante mi estadía en la Universidad de Pennsylvania (U.S.A.) como becaria del C.N.I.C.T. me asesoró y alentó en la preparación de este trabajo. Así mismo debo mi gratitud al Dr. M. Herrera quien avala esta tesis como mi asesor científico y quien con su guía y consejo hizo posible la conclusión de la misma. Por último deseo expresar mi reconocimiento al Prof. J. Bosch con quien inicié el estudio de la teoría de objetos geométricos.

Sarah Salvioli

La Plata, marzo de 1970

1. FIBRADO DE OBJETOS GEOMETRICOS

1.1. Notación.

a. Las variedades que utilizaremos en este trabajo serán todas variedades diferenciables C^{∞} por lo que omitiremos indicarlo mientras ello no conduzca a confusión.

b. Así mismo las secciones de fibrados deberán siempre suponerse aplicaciones diferenciables C^{∞}, en particular cuando dichas secciones sean campos vectoriales.

c. Si $f: M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades, denotaremos con df la aplicación tangente inducida

$$df: TM \longrightarrow TN$$

Una notación equivalente que utilizaremos en el caso de curvas

$$\gamma : R \longrightarrow M$$

será

$$\gamma_*: TR \longrightarrow TM$$

d. $C^{\infty}(M)$ denotará el anillo de las funciones C^{∞}, a valores reales sobre M. Si μ es un fibrado $\mu = (E,\pi,M)$, $C^{\infty}(\mu)$ denotará el conjunto de las secciones de μ. Si U es un abierto de M, $C^{\infty}(\mu|U)$ denotará el conjunto de las secciones de μ con dominio restringido a U.

e. Si $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ es una n-upla de enteros no negativos, pondremos $|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$ y $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$.

Si $x = (x_1,\dots,x_n)$ es una n-upla de números reales, pondremos

$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ y llamaremos D^{α} al operador diferencial

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

f. Si μ es un fibrado diferenciable, denotaremos con $J_p^k(\mu)$ al espacio de los k-jets de μ en p, y con $j_k(f)_p$ al k-jet de f en p, para $f \in C^{\infty}(\mu)$. ([9], [10]).

1.2. Definición. Una "estructura natural" sobre una variedad M está dada por una terna $(E,\pi,\mathbb{B})$ donde

E es una variedad

π: $E \longrightarrow M$ es una aplicación C^{∞}(proyección)

$\mathbb{B}$: $\mathfrak{C}_M \longrightarrow \mathfrak{C}_E$ es un funtor covariante llamado "funtor natural" que satisface:

i) si $U \in Obj.(\mathfrak{C}_M)$, $\mathbb{B}(U) = \pi^{-1}(U) \in Obj.(\mathfrak{C}_E)$.

ii) si $f \in Morf.(\mathfrak{C}_M)$ con $f\colon U \longrightarrow U'$

$$\mathbb{B}(f)\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \pi^{-1}(U'),$$

$\mathbb{B}(f) \in Morf.(\mathfrak{C}_E)$ y satisface:

a. si $f(x) = y$, $\mathbb{B}(f)(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(y)$, es decir $\pi\mathbb{B}(f) = f\pi$.

b. si $W \in Obj.(\mathfrak{C}_M)$, $W \subset U$, $\mathbb{B}(f)|\pi^{-1}(W) = \mathbb{B}(f|W)$.

iii) si N es una variedad cualesquiera y para cada $n \in N$, $f_n\colon M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo tal que la aplicación

$$\begin{aligned} H\colon N \times M &\longrightarrow N \times M \\ (n,m) &\dashrightarrow (n,f_n(m)) \end{aligned}$$

es también un difeomorfismo, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} H^{\circ}\colon N \times E &\longrightarrow N \times E \\ (n,e) &\dashrightarrow (n,\mathbb{B}(f_n)(e)) \end{aligned}$$

es también un difeomorfismo.

Nota. Si en la definición anterior imponemos a E la condición $\dim E > \dim M$ y a π la condición de que su diferencial $d\pi\colon TE \longrightarrow TM$, sea suryectivo, es posible obtener sobre $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in M$, una estructura de variedad diferenciable C^{∞} con $\dim.\pi^{-1}(x) = \dim.E-\dim.M.$

1.3. <u>Definición</u>. Una variedad M junto con una "estructura natural" $(E,\pi,\mathbb{B})$ es un <u>fibrado de objetos geométricos</u> que notaremos $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$. Una sección ϕ de $\pi\colon E \longrightarrow M$, definida sobre un subconjunto abierto U de M es un <u>campo de objetos geométricos</u> sobre U y para cada $x \in U$, $\phi(x)$ es un objeto geométrico en x.

1.4. Dado un elemento $f \in \mathrm{Morf.}(\mathbb{C}_M)$, $f\colon U \longrightarrow U'$, y un campo ϕ de objetos geométricos con dominio en U, podemos definir un nuevo campo ϕ^{*} de objetos geométricos de la siguiente manera:

$$\phi^{*}(x) = \mathbb{B}(f^{-1})\phi(f(x))$$

Que ϕ^{*} es un campo de objetos geométricos sobre U se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi^{*}"] \arrow[d, "f"'] & \pi^{-1}(U) \\ U \arrow[r, "\phi"] & \pi^{-1}(U) \arrow[u, "\mathbb{B}(f^{-1})"'] \end{tikzcd}$$

Diremos que ϕ^{*} es inducido por ϕ mediante f.

1.5. Supongamos ahora que el fibrado de objetos geométricos $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ es un fibrado localmente trivial con sistema de coordenadas $(U_i,\ \mu_i)$. Esto significa que para alguna variedad F (fibra), la aplicación

$$\mu_i\colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$$

es un difeomorfismo para cada i y que los U_i's cubren M. Podemos entonces mirar a cada campo ϕ de objetos geométricos definido sobre un abierto U de M, como a una correspondencia que a cada sistema coordenado (U_i,μ_i), $U_i \cap U \neq \emptyset$, y cada $x \in U_i \cap U$ hace corresponder un elemento de F en tal forma que si (U_j, μ_j) es otro sistema coordenado en x, el cambio de los elementos correspondientes de F está dado por un elemento $g_{ij}(x) \in G$, donde G es el grupo de transformaciones de F:

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(x) \arrow[dl, "\mu_{i,x}"'] \arrow[dr, "\mu_{j,x}"] & \\ F \arrow[rr, "g_{ij}(x)"'] & & F \end{tikzcd}$$

1.6. <u>Ejemplos de fibrados de objetos geométricos</u>. Más adelante haremos uso de fibrados de objetos geométricos derivados de uno dado, sea $(M; E, \pi, \mathbb{B})$, por lo tanto nos parece útil estudiar los mismos ahora.

A. <u>Fibrado tangente a M</u>. Este es obviamente un fibrado de objetos geométricos donde el funtor

$$\mathbb{B}' : \mathbb{C}_M \longrightarrow \mathbb{C}_{T(M)}$$

está dado por:

i) si $U \in \mathrm{Obj}.(\mathbb{C}_M)$, $\mathbb{B}'(U) = TU$.

ii) si $f \in \mathrm{Morf}.(\mathbb{C}_M)$, $\mathbb{B}'(f) = df$.

Claramente df satisface ii)a) y ii)b) de la definición 1.2. Veremos que también satisface iii). Sea para ello

$$H : N \times M \longrightarrow N \times M$$

con $H(n,m) = (n, f_n(m))$, un difeomorfismo donde N es una variedad cualesquiera y $f_n : M \longrightarrow M$ es también un difeomorfismo para cada $n \in N$. Entonces la aplicación $df_n : TM \longrightarrow TM$ es también un difeomorfismo así como $dH : T(N \times M) \longrightarrow T(N \times M)$. De esto resulta que la aplicación

$$H^* : N \times TM \longrightarrow N \times TM$$

que puede factorizarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} N \times TM & \longrightarrow & TN \times TM & \longrightarrow & TN \times TM & \longrightarrow & TN \times TM \\ (n,v(m)) & \longrightarrow & (O(n),v(m)) & \longrightarrow & (O(n),df_n v(m)) & \longrightarrow & (n,df_n v(m)) \end{array}$$

es un difeomorfismo.

B. Resulta evidente que si llamamos $\pi^*: TE \longrightarrow M$, a la proyección $\pi^*(v_e) = \pi(e)$, y $B^*: \mathbb{C}_M \longrightarrow \mathbb{C}_{TE}$, al funtor

i) $B^*(U) = T(\pi^{-1}(U))$, $U \in Obj.(\mathbb{C}_M)$,

ii) $B^*(f) = dB(f)$, $f \in Morf.(\mathbb{C}_M)$,

entònces $(M;\ TE,\ \pi^*, B^*)$ es un fibrado de objetos geométricos.

C. Supongamos que el fibrado de objetos geométricos $(M;\ E,\pi,B)$ satisface las condiciones:

a. $dim.E = m > n = dim.M$

b. $d\pi: TE \longrightarrow TM$ suryectiva.

La teoría de variedades diferenciables nos asegura entonces que $\pi^{-1}(x)$ tiene una única estructura de variedad tal que $(\pi^{-1}(x), i)$ es una subvariedad de M, donde i es la inclusión. Además $dim.\pi^{-1}(x) = m-n$. Obviamente $T(\pi^{-1}(x))$ es también una varíedad de dimensión $2(m-n)$. De esto resulta que

$$X = \bigcup_{x \in M} T(\pi^{-1}(x))$$

es una subvariedad cerrada de TE de dimensión $2m-n$. Podemos entonces construir un nuevo fibrado de objetos geométricos sobre M con los datos (X,π',B'), donde:

$$\pi': X \longrightarrow M$$

es tal que $\pi'(v_e) = \pi(e)$, es decir que π' es la composición de $p': TE \longrightarrow E$ y π, ambas aplicaciones C^∞ y ambas con diferenciales suryectivas por lo que $d\pi'$ es suryectiva.

$$B': \mathbb{C}_M \longrightarrow \mathbb{C}_X$$

es un funtor covariante que satisface

i) si $U \in Obj.(\mathbb{C}_M)$, $\mathbb{B}'(U) = \pi'^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} T(\pi^{-1}(x))$

ii) si $f \in Morf.(\mathbb{C}_M)$, $f\colon U \longrightarrow U'$, $\mathbb{B}'(f) = d\mathbb{B}(f)$

Las condiciones ii)a) y ii)b) de la definición 1.2. se cumplen obviamente, sólo nos falta ver que iii) también es satisfecha. Para ello sea N una variedad cualesquiera y sea

$$H\colon N\times M \longrightarrow N\times M$$

un difeomorfismo tal que $H(n,x) = (n,f_n(x))$, con $f_n\colon M \longrightarrow M$ difeomorfismo para cada $n \in N$. Como $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ es un fibrado de objetos geométricos

$$H^*\colon N\times E \longrightarrow N\times E$$

con $H^*(n,e) = (n,\mathbb{B}(f_n)(e))$, es un difeomorfismo y luego dH^* también lo es. Debemos probar que

$$H^{**}\colon N\times X \longrightarrow N\times X$$

con $H^{**}(n,v_e) = (n,d\mathbb{B}(f_n)(v_e))$, es un difeomorfismo. Para ello basta factorizar la aplicación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccccc} N\times X & \longrightarrow & N\times TE & \longrightarrow & TN\times TE & \xrightarrow{dH^*} & TN\times TE & \longrightarrow & N\times TE & \longrightarrow & N\times X \\ (n,v_e) & \dashrightarrow & (n,v_e) & \dashrightarrow & (0_n,v_e) & \dashrightarrow & (0_n,d\mathbb{B}(f_n)v_e) & \dashrightarrow & (n,d\mathbb{B}(f_n)v_e) & \dashrightarrow & (n,d\mathbb{B}(f_n)v_e) \end{array}$$

Resulta pues que en las condiciones a) y b) impuestas al comienzo, $(M;\ X,\pi',\mathbb{B}')$ es un subfibrado de objetos geométricos de $(M;\ TE,\pi^*,\mathbb{B}^*)$.

D. Fibrado $J^r(\delta)$ de jets de orden r de $\delta= (M;\ E,\pi,\mathbb{B})$. Sea U un abierto de M y sean ϕ, $\psi \in C^\infty(\delta|U)$, ϕ y ψ pertenecen al mismo jet de orden r en $x \in U$ si y sólo si $D^\alpha \phi(x) = D^\alpha \psi(x)$ $|\alpha|\leq r$. El conjunto $J^r_x(\delta)$

$$J^r_x(\delta) = \{ j^r_x(\phi),\ \phi \in C^{\infty}(\delta),\ x \in M \}$$

constituye la fibra en x del fibrado de objetos geométricos

$$(M;\ J^r(\delta), \pi'', \mathbb{B}'')$$

donde

1. $J^r(\delta) = \bigcup_{x \in M} J^r_x(\delta)$ tiene estructura de variedad diferenciable (Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable; Taormina, 1951)

2. $\pi'': J^r(\delta) \longrightarrow M$, $\pi''(j^r_x\phi) = x$, es C^{∞}

3. $\mathbb{B}'': \mathbb{C}_M \longrightarrow \mathbb{C}_{J^r(\delta)}$ satisface

i) si $U \in$ Obj.$(\mathbb{C}_M)$, $\mathbb{B}''(U) = \bigcup_{x \in U} J^r_x(\delta)$

ii) si $f \in$ Morf.$(\mathbb{C}_M)$, $\mathbb{B}''(f)(j^r_x\ \phi) = j^r_{f(x)}(\mathbb{B}(f)\phi)$

iii) si

$$\begin{aligned} H: N \times M &\longrightarrow N \times M \\ (n,x) &\text{----} (n, f_n(x)) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo,

$$\begin{aligned} H^{***}: N \times J^r(\delta) &\longrightarrow N \times J^r(\delta) \\ (n, j^r_x(\phi)) &\longrightarrow (n, \mathbb{B}''(f_n)(j^r_x(\phi)) = (n, j^r_{f_n(x)}(\mathbb{B}(f_n)(\phi))) \end{aligned}$$

es difeomorfismo si se tiene en cuenta que el r-jet de ϕ en x es el conjunto de todas las derivadas parciales de ϕ de orden menor o igual a r en x y que f_n y $\mathbb{B}(f_n)$ son difeomorfismos [9].

2. LEVANTAMIENTO DE UNA FAMILIA DE CAMPOS VECTORIALES EN UN FIBRADO DE OBJETOS GEOMETRICOS

2.1. Sea W un abierto de $R\times M$, donde R es la recta real y M una variedad.

Una familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales sobre $\pi_2(W)\subset M$, es una aplicación [7]

$$v\colon W \longrightarrow T(\pi_2(W))$$

con $v(t,x) = v_t(x)$, C^1 en t y C^∞ en x, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & T(\pi_2(W)) \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que cada par $(s,y)\in W$ determina una curva integral $c_{s,y}$ de $\{v_t\}$ definida para todo t de un entorno abierto de $s\in R$, tal que

$$v_t(c_{s,y}(t)) = c_{s,y\,*}\left(\frac{d}{dr}\right) \quad y \quad c_{s,y}(s) = y \tag{$*$}$$

donde $\frac{d}{dr}$ es el vector unitario en el origen de la recta real R. Estas curvas integrales tienen entre otras las dos siguientes propiedades:

a. cada curva integral está contenida en una curva integral maximal.

b. dos curvas integrales tienen un punto de $W\subset R\times M$ en común sí y sólo si son unibles(si coinciden en un punto común de sus dominios coinciden en la intersección de los mismos y la unión de las curvas es la curva definida en la unión de sus dominios)

La familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales define así mismo una aplicación

$$f\colon R\times R\times M \longrightarrow M$$

dada por

$$f(s,t,y) = c_{s,y}(t)$$

para $s \in \pi_1(W) \subset R$ y todo t del dominio de $c_{s,y}$ (maximal). Para cada par (s,t) fijo, f define un difeomorfismo local sobre M

$$f(s,t,y) = f_{s,t}(y)$$

y para cada s fijo, una familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales sobre M que se dirá generada por la familia $\{v_t\}$. La aplicación f goza de las siguientes propiedades:

c. $f_{t,r}(f_{s,t}(y)) = f_{s,r}(y)$. En efecto $f_{t,r}(f_{s,t}(y)) = c_{t,c_{s,y}(t)}(r) =$

$$= c_{s,y}(r) = f_{s,r}(y) .$$

d. $f_{s,t}(f_{t,s}(y)) = c_{s,c_{t,y}(s)}(t) = c_{t,y}(t) = y$, luego $f_{s,t} = f^{-1}_{t,s}$.

e. $f_{s,s} = \text{id.}$ para todo s.

Si la familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales no depende del parámetro t, la misma se reduce a un sólo campo vectorial $v = v_t$ para todo t, definido sobre un abierto U de M y por lo tanto la familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales generada por ella satisface la condición:

$$f_{s,t} = f_{o,t-s}$$

En efecto, como la curva $c_{o,y}$ es una reparametrización de $c_{s,y}$, al ser $v_t = v_{t-s}$, resultan ambas curvas soluciones de la misma ecuación diferencial que pasan por el mismo punto. Luego

$$c_{s,y}(t) = c_{o,y}(t-s).$$

Poniendo $f_t = f_{o,t}$, se tiene:

c'. $f_s f_t = f_{s+t}$ para todo s,t tal que $s+t$ pertenezca al dominio de $c_{o,x}$, $x \in U$. En efecto, si $u = t-s$ se tiene:

$f_s f_t = f_{o,s} f_{o,t} = f_{o,t-u}\, f_{o,u+s} = f_{u,t}\, f_{-s,u} = f_{-s,t} = f_{t+s}$

d'. $f_{-s} = f_s^{-1}$ pues $f_{o,s}\, f_{o,-s} = f_{o,o} = \mathrm{id.}$

e'. $f_o = f_{o,o} = \mathrm{id.}$

En consecuencia, cuando la familia $\{v_t\}$ se reduce a un solo elemento v, éste genera un <u>pseudo-grupo</u> $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales.

Dada pues la familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales definidos sobre un abierto U de una variedad M, y dada una función $k \in C^{\infty}(U)$, podemos escribir teniendo en cuenta (*):

$$v_{t_o}(f_{s,t_o}(x))(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k\, f_{s,t}(x)$$

expresión que, cuando no induzca a error, escribiremos omitiendo s. Si se tiene en cuenta además que $f_{t_o,t_o} = \mathrm{id.}$ y que $f_{t_o,t} = f_{s,t}\, f_{t_o,s} =$

$= f_{s,t}\, f_{s,t_o}^{-1}$, obtenemos la siguiente fórmula que en la práctica resulta más conveniente:

$$v_{t_o}(x)(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k f_{t_o,t}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k\, f_{s,t}\, f_{s,t_o}^{-1}$$

o sea, omitiendo s

$$v_{t_o}(x)(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k\, f_t\, f_{t_o}^{-1}(x) \qquad (1)$$

Si la familia $\{v_t\}$ no depende del parámetro t, la expresión anterior se se reduce a

$$v(f_t(x))(k) = \frac{d}{dt}\Big|_t k\, f_t(x)$$

o

$$v(x)(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\, f_t(x) \qquad (2)$$

2.2. Si $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ es un fibrado de objetos geométricos, $\{v_t\}$ una familia de campos vectoriales sobre un abierto U de M y $\{f_t\}$ la familia de difeomorfismos locales generada por $\{v_t\}$, nosotros podemos, mediante el funtor $\mathbb{B}$, definir una nueva familia $\{\mathbb{B}(f_t)\}$ de difeomorfismos locales sobre el abierto $\pi^{-1}(U)$ de E. Mediante ella podemos así mismo construir una familia de campos vectoriales sobre $\pi^{-1}(U)$, dada por

$$\mathbb{B}(v)_{t_o}(\mathbb{B}(f_{t_o}))(b)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f_t)(b)$$

donde el parámetro s ha sido suprimido, $h \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$ y $b \in \pi^{-1}(U)$. O como antes:

$$\mathbb{B}(v)_{t_o}(b)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f_{t_o,t})(b) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f_t)\mathbb{B}(f_{t_o}^{-1})(b) \quad (3)$$

Si la familia $\{v_t\}$ no depende del parámetro t obtenemos

$$\mathbb{B}(v)(b)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ \mathbb{B}(f_t)(b) \quad (4)$$

2.3. <u>Lema</u>. La familia $\{\mathbb{B}(v)_t\}$ de difeomorfismos locales sobre $\pi^{-1}(U)$, definida más arriba, satisface las siguientes dos propiedades:

a) Si $\{v_t\}$ y $\{v'_t\}$ son dos familias de campos vectoriales sobre U,

$$\mathbb{B}(v+v')_{t_o} = \mathbb{B}(v)_{t_o} + \mathbb{B}(v')_{t_o}$$

b) Si $\alpha\colon R \longrightarrow R$ es una aplicación C^∞ y $\{v_t\}$ una familia de campos vectoriales sobre U,

$$\mathbb{B}(\alpha.v)_{t_o} = \alpha(t_o).\mathbb{B}(v')_{t_o}$$

<u>Demostración</u>. a) Si $\{f_t\}$ y $\{f'_t\}$ son las familias de difeomorfismos locales generadas por $\{v_t\}$ y $\{v'_t\}$ respectivamente, para una función cualesquiera $k \in C^\infty(U)$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k\, f_{t_o,t}\, f'_{t_o,t}(x) = \frac{d}{dr}\Big|_{r=t_o} k\, f_{t_o,r}(x) + \frac{d}{ds}\Big|_{s=t_o} k\, f'_{t_o,s}(x) =$$

$$= (v_{t_o}(x) + v'_{t_o}(x))(k).$$

Pero puede escribirse $f_{t_o,t}\, f'_{t_o,t} = f^*_{t_o,t}$, por lo tanto

$$(v_{t_o} + v'_{t_o})(x)(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k\, f^*_{t_o,t}(x)$$

y aplicando la fórmula (3) de 2.2. se tiene para $b \in \pi^{-1}(U)$, $h \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$

$$B(v+v')_{t_o}(b)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\, B(f^*_{t_o,t})(b) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\, B(f_{t_o,t})\, B(f'_{t_o},t)(b) =$$

$$= \frac{d}{dr}\Big|_{r=t_o} h\, B(f_{t_o,r})(b) + \frac{d}{ds}\Big|_{s=t_o} h\, B(f'_{t_o,s})(b) =$$

$$= (B(v)_{t_o} + B(v')_{t_o})(b)(h).$$

b) Si $\alpha: R \longrightarrow R$ es una función C^∞, la misma puede considerarse como un campo vectorial sobre R que define a su vez un grupo monoparamétrico de difeomorfismos locales $\{g_t\}$, tal que

$$\alpha(g_t(t_o)) = \frac{d}{dt}\Big|_t\, g_t(t_o)$$

En particular

$$\alpha(t_o) = \alpha(g_o(t_o)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o}\, g_t(t_o).$$

Sea $k \in C^\infty(U)$ y sea $\{f_t\}$ la familia de difeomorfismos locales generada por $\{v_t\}$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\, f_{g_o(t_o),g_t(t_o)}(x) = \frac{d}{dg_t(t_o)}\Big|_{g_t(t_o)=t_o} k f_{t_o,g_t(t_o)}(x) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} g_t(t_o) =$$

$$= \alpha(t_o) \cdot v_{t_o}(x)(k) = (\alpha \cdot v)_{t_o}(x)(k).$$

Este resultado junto con la fórmula (3) de 2.2. nos conduce a la siguiente expresión, para $b \in \pi^{-1}(U)$ y $h \in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$:

$$\mathbb{B}(\alpha.v)_{t_o}(b)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ \mathbb{B}(f_{t_o}, g_t(t_o))(b) =$$

$$= \frac{d}{dg_t(t_o)}\Big|_{g_t(t_o)=t_o} h\ \mathbb{B}(f_{t_o}, g_t(t_o))(b) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} g_t(t_o) =$$

$$= \alpha(t_o)\ \mathbb{B}(v)_{t_o}(b).$$

2.4. La familia $\{\mathbb{B}(v)_t\}$ estará bien definida si dadas dos familias de campos vectoriales $\{v_t\}$ y $\{v'_t\}$ con dominio en U, tales que $v_o = v'_o$ sobre un abierto V contenido en U, entonces $\mathbb{B}(v)_o = \mathbb{B}(v')_o$ sobre $\pi^{-1}(V)$. En otras palabras, considerando las propiedades de $\{\mathbb{B}(v)_t\}$ probadas más arriba, lo que se debe cumplir es que, si el elemento v_o de una familia de campos vectoriales $\{v_t\}$ definida sobre U, es idénticamente nulo sobre un abierto V contenido en U, entonces $\mathbb{B}(v)_o = 0$ sobre $\pi^{-1}(V)$. Para demostrar que esto es cierto necesitamos el siguiente Lema [8]:

2.4.1. <u>Lema</u>. Si $\{v_t\}$ es una familia de campos vectoriales definida sobre un conjunto abierto U contenido en $\mathbb{R} \times M$, donde M es una variedad, tal que

$$v(t,x) = v_t(x) \quad \text{para cada } t \text{ fijo},$$

y

$$v(0,x) = v_o(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \pi_2(U),$$

entonces existe otra familia de campos vectoriales $\{w_t\}$ con el mismo dominio que $\{v_t\}$ y tal que

$$v_t(x) = t\ w_t(x) \quad \text{para cada } t.$$

<u>Demostración</u>. Sea $x \in \pi_2(U)$ y sea $\{x_i\}$ un sistema coordenado en x, entonces para cada $t \in \pi_1(U)$

$$v_t(x) = \sum_i v_t^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Definimos $\{w_t\}$ de la siguiente manera:

$$w_t^i(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)(ts,x)\, ds$$

lo cual nos da

$$w_t^i(x) = \frac{1}{t}\, v_t^i(x)$$

y

$$w_t(x) = \sum_i w_t^i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{t}\, v_t(x).$$

Volviendo entonces a nuestro problema vemos que existe una familia de campos vectoriales $\{w_t\}$ sobre U tal que $\{v_t\} = \{t\, w_t\}$, y en particular $v_0 = 0w_0 = 0$. Entonces, poniendo

$$\{v_t\} = \{t\, w_t\} = \{(id.\, w)_t\}$$

por la propiedad b) del Lema 2.3., tenemos:

$$\{B(v)_t\} = \{B(id.\, w)_t\} = \{t\, B(w)_t\} \quad y \quad B(v)_0 = 0B(w)_0 = 0.$$

3. LEVANTAMIENTO DE UN CORCHETE DE CAMPOS VECTORIALES EN UN FIBRADO DE OBJETOS GEOMETRICOS.

3.1. Sea $(M; E,\pi,B)$ un fibrado de objetos geométricos y sean u y v, dos campos vectoriales definidos sobre un abierto U de M. Si $\{g_t\}$ y $\{f_t\}$ son los grupos de difeomorfismos locales generados por u y v respectivamente, podemos definir una familia de difeomorfismos locales sobre U poniendo para cada t:

$$h_t = g_{-\sqrt{t}}\ f_{-\sqrt{t}}\ g_{\sqrt{t}}\ f_{\sqrt{t}}$$

La familia $\{h_t\}$ genera una familia $\{w_t\}$ de campos vectoriales sobre U, con $w_o = [v,u]$ ([1], p.18). Esto es, si $k \in C^{\infty}(U)$, por (1) de 2.1. y teniendo en cuenta que $h_o = id.$, se cumple

$$w_o(x)(k) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\ h_t(x) = [v,\ u]\ (x)(k)$$

y por fórmula (3) de 2.1., para $k' \in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$, $b \in \pi^{-1}(U)$, se obtiene

$$\begin{aligned} B([v,\ u])(b)(k') &= B(w)_o(b)(k') = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k' B(h)_t\ (b) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k' B(g_{-\sqrt{t}}) B(f_{-\sqrt{t}}) B(g_{\sqrt{t}}) B(f_{\sqrt{t}})(b) = \\ &= [B(v),\ B(u)](b)(k') \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[B(v),\ B(u)] = B([v,\ u]) \tag{5}$$

4. LA DERIVADA DE LIE DE UN CAMPO DE OBJETOS GEOMETRICOS.

4.1. Sea v un campo vectorial definido sobre un abierto U de una variedad M. Podemos considerar a v como al elemento v_o de una familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales, tal que si $\{f_t\}$ es la familia de difeomorfismos locales generada por $\{v_t\}$, es $f_o = \mathrm{id.}$. En efecto, si v representa una familia que no depende del parámetro t, $v=v_o$ y $\{f_t\}$ es un grupo de difeomorfismos locales, luego $f_o = \mathrm{id.}$. Si por el contrario, v es el elemento v_{t_o} de una familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales que genera una familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales, se puede definir una nueva familia $\{g_t\}$ de difeomorfismos locales poniendo, para cada t

$$g_t = f_{t+t_o}\, f_{t_o}^{-1}$$

lo que implica $g_o = \mathrm{id.}$. Llamemos $\{v_t'\}$ a la familia de campos vectoriales que genera a $\{g_t\}$, entonces para $k \in C^{\infty}(U)$ y $x \in U$, se tiene

$$\begin{aligned} v_o'(x)(k) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\, g_t\, g_o^{-1}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\, g_t(x) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} k\, f_{t+t_o}\, f_{t_o}^{-1} = \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=t_o} k\, f_s\, f_{t_o}^{-1} = v_{t_o}(x)(k) \end{aligned}$$

4.2. Sea v un campo vectorial definido en un abierto U de de una variedad M, base de un fibrado de objetos geométricos $(M;\, E,\pi,B)$. Supongamos que v es el elemento v_o de la familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales sobre U y que esta familia genera a su vez a la familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales con $f_o=\mathrm{id.}$. Sea ϕ un campo de objetos geométricos sobre U y para [redacted] $x \in U$ sea $U_x \subset U$ un entorno de x tal que para algún $\varepsilon > 0$

$$f_t(U_x) \subset U \qquad \text{para } |t| < \varepsilon$$

Definimos la curva

$$\gamma_x : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

por

$$\gamma_x(t) = B(f_t^{-1})\ \phi_{f_t(x)} \in \pi^{-1}(x)$$

La curva γ_x es una curva C^∞ pues es la composición de las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} (-\varepsilon,\varepsilon) & \longrightarrow & (-\varepsilon,\varepsilon)\times U & \longrightarrow & (-\varepsilon,\varepsilon)\times \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{c} & (-\varepsilon,\varepsilon)\times\pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ t & \longrightarrow & (t,f_t(x)) & \longrightarrow & (t,\phi_{f_t(x)}) & \longrightarrow & (t,B(f_t^{-1})\phi_{f_t(x)}) & \longrightarrow & B(f_t^{-1})\phi_{f_t(x)} \end{array}$$

donde la aplicación c es C^∞ por condición iii) de la definición de B.

4.3. <u>Definición</u>. Sea ϕ un campo de objetos geométricos y sea v un campo vectorial, ambos definidos sobre un abierto U de la variedad M, base de un fibrado de objetos geométricos, y tales que ambos satisfacen las condiciones establecidas en 4.2. La <u>derivada de Lie</u> del campo ϕ de objetos geométricos con respecto al campo vectorial v, en $x \in U$, está dada, para $h \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$, por

$$\underset{v}{L}\ \phi_x\ (h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o}\ h\ B(f_t^{-1})\ \phi_{f_t(x)} \tag{1}$$

Si $\{f_t\}$ es el grupo de difeomorfismos locales de v, (1) se escribe

$$\underset{v}{L}\ \phi_x\ (h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o}\ h\ B(f_{-t})\ \phi_{f_t(x)} \tag{2}$$

Si v es un elemento v_{t_o} de $\{v_t\}$, considerando 4.1., (1) se escribe

$$\underset{v}{L}\ \phi_x\ (h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o}\ h\ B(f_{t_o} f_t^{-1})\ \phi_{f_t f_{t_o}^{-1}(x)} \tag{3}$$

4.4. La derivada de Lie $\underset{v}{L}\ \phi_x$ del campo ϕ de objetos geométricos con respecto al campo vectorial v, según fué expresada en el párrafo anterior, está bien definida. Esto es, si existen dos familias de campos vectoriales $\{v_t\}$ y $\{v'_t\}$ tales que v es el elemento v_o de la primera y el elemento v'_o de la segunda, deberá cumplirse

$$L_{v_o} \Phi_x = L_{v'_o} \Phi_x$$

Para probarlo necesitamos el siguiente Lema de la teoría de familias de campos vectoriales,([2], [7]).

4.4.1. Lema. Si $\{v_t\}$ y $\{u_t\}$ son familias de campos vectoriales definidas sobre un abierto U de una variedad M, las cuales generan las familias $\{f_t\}$ y $\{f_t^{-1}\}$ de difeomorfismos locales, respectivamente, se cumple la siguiente igualdad para cada t

$$v_t = -df_t\, u_t \tag{4}$$

Demostración. De acuerdo con lo expuesto en la sección 2.1., la familia de campos vectoriales $\{v_t\}$ define una aplicación

$$f\colon R \times R \times M \longrightarrow M$$

dada por

$$f(s,t,y) = c_{s,y}(t)$$

tal que para (s,t) fijos se expresa

$$f(s,t,y) = f_{s,t}(y)$$

Si fijamos s y lo omitimos como hemos venido haciendo hasta ahora, se puede considerar a f como la aplicación

$$f\colon R \times M \longrightarrow M$$

que para cada t fijo se escribe

$$f(t,y) = f_t(y)$$

Luego, si hacemos $g_t = f_t^{-1}$ para $|t| < \varepsilon$, ε determinado por $\{v_t\}$, las aplicaciones

$$f: (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \longrightarrow U$$
$$g: (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \longrightarrow U$$

y

$$df: T((-\varepsilon,\varepsilon)\times U \longrightarrow TU$$
$$dg: T((-\varepsilon,\varepsilon)\times U \longrightarrow TU$$

satisfacen:

$$g(t,f(t,m)) = m$$
$$dg((r,t),df((r,t),(m,v))) = v(m)$$

En particular

$$df((r,t),(m,0)) = t.v_r(f_r(m))$$

En efecto, si

$$t(r) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} k_s(r)$$

para $h \in C^{\infty}(U)$ se tiene

$$df((r,t),(m,0))(h) = df(t,0)(r,m)(h) = (t,0)(r,m)(hf) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} h\ f(k_s(r),m) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} hf_{k_s(r)}(m) =$$

$$= \frac{d}{dk_s(r)}\Big|_{s=o} h\ f_{k_s(r)}(m).\ t(s) =$$

$$= t.\ v_r(f_r(m))(h).$$

Por lo tanto:

$$0_m = dg((r,t),df((r,t),(m,0))) = dg((r,t),f_r(m),t\ v_r)) =$$

$$= dg((r,0),(f_r(m),t\ v_r)) + dg((r,t),(f_r(m),0)) =$$

$$= dg_r(t\ v_r(f_r(m))) + t\ u_r(g_r(f_r(m))).$$

Entonces

$$dg_r(v_r(f_r(m))) = -u_r(m)$$

o

$$(df_r^{-1} v_r)(m) = -u_r(m)$$

Volviendo a nuestro planteo inicial vemos que para probar que

$$L_{v_o} \phi_x = L_{v'_o} \phi_x \tag{5}$$

lo que debemos ver es que, si $\{f_t\}$ es la familia de difeomorfismos locales generada por $\{v_t\}$ y $\{f'_t\}$ la generada por $\{v'_t\}$, entonces, para $h \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t^{-1})\phi_{f_t(x)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t'^{-1})\phi_{f'_t(x)}$$

Pero el primer miembro puede escribirse

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t^{-1})\phi_{f_t(x)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t^{-1})\phi_x + \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ \phi_{f_t(x)}$$

y de igual manera el segundo miembro. Luego, si como en el Lema probado más arriba, llamamos $\{u_t\}$ a la familia de campos vectoriales generada por $\{f_t^{-1}\}$ y $\{u'_t\}$ a la generada por $\{f_t'^{-1}\}$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t^{-1})\phi_{f_t(x)} = B(u_o)\phi_x + d\phi\ v_o(x) = \text{(por el Lema)} =$$
$$= d\phi\ v_o(x) - B(v_o)\phi_x \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\ B(f_t'^{-1})\phi_{f'_t(x)} = B(u'_o)\phi_x + d\phi\ v_o(x) = \text{(por el Lema)} =$$
$$= d\phi\ v'_o(x) - B(v'_o)\phi_x \tag{7}$$

Como $v_o = v'_o$, resulta, por lo visto en 2.4., que (6) y (7) implican (5).

4.5. De lo expresado en las secciones 4.3. y 4.4. se obtienen dos importantes conclusiones:

a) Las fórmulas (1)-(3) muestran que $L_v \phi_x$ es un vector tangente a la curva $\gamma_x(t) \subset \pi^{-1}(x)$) en el punto ϕ_x. Esto significa que $\underset{v}{L}\phi_x \in T_{\phi_x}E$.

Es decir que la derivada de Lie de un campo de objetos geométricos es un nuevo campo de objetos geométricos del fibrado (M; TE,π^*,$\mathbb{B}^*$)(ver (1.6.B)). Pero si tenemos en cuenta que para toda función $h \in C^\infty(E)$, constante sobre $\pi^{-1}(x)$, es $\underset{v}{L}\phi_x(h) = 0$, podemos decir que

$$\underset{v}{L}\,\phi_x \in T(\pi^{-1}(x))$$

y en el caso en que dim.E> dim.M y $d\pi$ sea suryectiva (ver (1.6.C.)) $\underset{v}{L}\,\phi_x$ es en cada punto de su dominio un objeto geométrico del fibrado (M; X,π',$\mathbb{B}'$) y un subobjeto de (M; TE,π^*,$\mathbb{B}^*$).

b) La fórmula (6) obtenida más arriba es un importante resultado de la teoría de la derivada de Lie de objetos geométricos que puede generalizarse mediante el Lema 4.4.1. y la fórmula (3). Como en lo que sigue haremos frecuente uso de ella, resultará conveniente enunciar la siguiente proposición:

4.5.1. <u>Proposición</u>. Sea v un campo vectorial definido en un abierto U de una variedad M, base de un fibrado de objetos geométricos y sea ϕ un campo de objetos geométricos con dominio en U. Entonces para cada $x \in U$ se tiene

$$\underset{v}{L}\,\phi_x = d\phi(v)(x) - \mathbb{B}(v)\phi_x \tag{8}$$

Si v es un elemento v_{t_o} de una familia $\{v_t\}$ de campos vectoriales que genera la familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales sobre U, se tendrá

$$\underset{v_{t_o}}{L}\,\phi_x = d\phi(df_{t_o}^{-1}v_{t_o})(x) - (d\mathbb{B}(f_{t_o}^{-1})\mathbb{B}(v)_{t_o}\,\phi_x \tag{9}$$

4.6. <u>Proposición</u>. Si (M; E,π,$\mathbb{B}$) es un fibrado de objetos geométricos, ϕ un campo de objetos geométricos sobre un abierto U de M, $f\colon U \longrightarrow M$, un difeomorfismo y v un campo vectorial sobre U, entonces la siguiente expresión es satisfecha:

$$dB(f)\, \underset{v}{L}\, \phi_x = \underset{dfv}{L}\, B(f)\, \phi_x$$

Demostración. Supongamos que v es el elemento v_o de una familia de campos vectoriales, tal que la familia de difeomorfismos locales que genera satisface la condición $f_o = 0$. Entonces, para $h \in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$,

$$(\underset{dfv}{L}\, B(f)\, \phi_x)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} h\, B(f\, f_t^{-1}\, f^{-1})\, B(f)\, \phi_{ff_t f^{-1}(x)} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=o} (h\, B(f))\, B(f_t^{-1})(\phi f)_{f_t(f^{-1}(x))} =$$

$$= \underset{v}{L}(\phi f)_{f^{-1}(x)}(hB(f)) =$$

$$= (dB(f)\, \underset{v}{L}\, \phi_x)(h)$$

4.7. Corolario. En el caso particular en que el difeomorfismo f de la Proposición anterior es un elemento f_t del grupo de difeomorfismos locales generado por el campo vectorial v, se tiene, para $h \in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$,

$$dB(f_{-t}) \underset{v}{L}\, \phi_{f_t(x)}(h) = \underset{v}{L}(B(f_{-t}))\, \phi_{f_t(x)}(h) = \frac{d}{dt}\Big|_t\, h\, B(f_{-t})\phi_{f_t(x)}.$$

Demostración.

$$\frac{d}{dt}\Big|_t h\, B(f_{-t})\phi_{f_t(x)} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} h\, B(f_{-s-t})\, \phi_{f_{s+t}(x)} =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=o} h\, B(f_{-s})\, B(f_{-t})\, \phi_{f_s f_t(x)} =$$

$$= \underset{v}{L}\, B(f_{-t})\, \phi_{f_t(x)}(h) = dB(f_{-t})\, \underset{df_t v}{L}\, \phi_{f_t(x)} =$$

$$= dB(f_{-t})\, \underset{v}{L}\, \phi_{f_t(x)}.$$

puesto que en este caso es $(df_t v)(x) = v(x)$ para cada t.

4.8. Proposición. Sea ϕ un campo de objetos geométricos definido sobre un abierto U de una variedad M y sean v, u, dos campos vectoriales con dominio en U. Entonces, para cada par de números reales a, b, se satisface la siguiente expresión:

$$\underset{av+bu}{L}\,\phi_x = a\,\underset{v}{L}\,\phi_x + b\,\underset{u}{L}\,\phi_x$$

Demostración. Se deduce a partir de la Proposición 4.5.1. y de la linealidad de $d\phi$ y del operador $v \longrightarrow \mathbb{B}(v)$.

4.9. Definición. Sea $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ un fibrado de objetos geométricos y sea $\{f_t\}$ una familia de difeomorfismos locales definida sobre un abierto $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$ de $R\times M$. Un campo ϕ de objetos geométricos es invariante bajo la deformación $\{f_t\}$ si:

a. $\left.\begin{array}{l}\text{dominio}(f_t)\subset\text{dominio}(\phi)\\ \text{imagen}(f_t)\subset\text{imagen}(\phi)\end{array}\right.$ para cada $|t|<\varepsilon$

b. $\mathbb{B}(f_t)\phi = \phi_{f_t(x)}$ para cada $x\in U$ y $|t|<\varepsilon$.

4.9.1. Corolario. Si un campo de objetos geométricos es invariante bajo la deformación $\{f_t\}$, es invariante bajo $\{f_t^{-1}\}$.

Demostración. Supongamos $\mathbb{B}(f_t)\phi_x = \phi_{f_t(x)}$ y llamemos $y=f_t^{-1}(x)$

$$\mathbb{B}(f_t^{-1})\phi_x = \mathbb{B}(f_t^{-1})\phi_{f_t(y)} = \mathbb{B}(f_t^{-1})\ \mathbb{B}(f_t)\phi_y = \phi_y = \phi_{f_t^{-1}(x)}.$$

4.10. Proposición. Sea $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ un fibrado de objetos geométricos y sea $\{v_t\}$ una familia de campos vectoriales sobre un abierto U de M, la cual genera la familia $\{f_t\}$ de difeomorfismos locales. Un campo ϕ de objetos geométricos definido en U es invariante bajo la deformación $\{f_t\}$ si y sólo si $\underset{v}{L}\,\phi_x = 0$ para cada $x\in U$ y $|t|<\varepsilon$.

Demostración.

1. Si ϕ es invariante bajo la deformación $\{f_t\}$, por Cor. 4.9.1. lo es también bajo $\{f_t^{-1}\}$, por lo tanto, si $h\in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$, se tiene:

$$L_{v_{t_o}} \phi_x(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f^{-1}_{t_o,t})\phi_{f_{t_o,t}(x)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \phi_x = 0$$

2. Sea $L_v \phi_x = 0$ para cada $x \in U$ y $|t| < \varepsilon$, entonces $L_{v_{t_o}} \phi_{f_{t_o}(x)} = 0$ para $|t_o| < \varepsilon$, y por linealidad $d\mathbb{B}(f^{-1}_{t_o})\, L_{v_{t_o}} \phi_{f_{t_o}(x)} = 0$. Por lo tanto para $h \in C^{\infty}(\pi^{-1}(U))$ se tiene:

$$0 = L_{v_{t_o}} \phi_{f_{t_o}(x)}(h\ \mathbb{B}(f^{-1}_{t_o})) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f^{-1}_{t_o})\ \mathbb{B}(f_{t_o} f^{-1}_t)\ \phi_{f_t f^{-1}_{t_o}(f_{t_o}(x))} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} h\ \mathbb{B}(f^{-1}_t)\ \phi_{f_t(x)}.$$

Esto implica que la curva $\gamma_x(t) = \mathbb{B}(f^{-1}_t)\phi_{f_t(x)}$ tiene tangente 0 en cada punto, entonces es constante

$$\mathbb{B}(f^{-1}_t)\ \phi_{f_t(x)} = \phi_x$$

y

$$\phi_{f_t(x)} = \mathbb{B}(f_t)\phi_x$$

4.11. <u>Lema</u>. Sean $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ un fibrado de objetos geométricos y ϕ un campo de objetos geométricos sobre $U \subset M$. Si las familias de campos vectoriales $\{v_t\}$ y $\{u_t\}$ definidas sobre U, satisfacen la condición

$$L_{v_t}\phi_x = L_{u_t}\phi_x = 0$$

para todo $x \in U$ y $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, entonces, si $\{f_t\}$ es la familia de difeomorfismos locales generada por $\{v_t\}$, se cumple

$$L_{df_s' u_t}\phi_x = 0 \qquad \text{para } |t| < \varepsilon,\ |s| < \varepsilon$$

En particular $L_{df_s v_t}\phi_x = 0$, para $|t| < \varepsilon$, $|s| < \varepsilon$.

Demostración. Si $\underset{v_t}{L}\,\phi_x = 0$ es ϕ invariante bajo las deformaciones $\{f_t\}$ y $\{f_t^{-1}\}$. Luego

$$\underset{df_s u_t}{L}\,\phi_x = \underset{df_s u_t}{L}\,\mathbb{B}(f_s\, f_s^{-1})\,\phi_{f_s\, f_s^{-1}(x)}$$

$$= d\mathbb{B}(f_s)\,\underset{u_t}{L}\,\mathbb{B}(f_s^{-1})\,\phi_{f_s\, f_s^{-1}(x)}$$

$$= d\mathbb{B}(f_s)\,\underset{u_t}{L}\,\phi_{f_s^{-1}(x)} = 0$$

4.12. Lema. Sea $(M;\, E,\pi,\mathbb{B})$ un fibrado de objetos geométricos y llamemos ξ al fibrado tangente sobre M

$$\xi = (TM,p,M)$$

Si ϕ es un campo de objetos geométricos definido sobre un abierto U de M, el conjunto

$$G(U,\phi) = \left\{ v;\quad v \in C^{\infty}(\xi|U),\ \underset{v}{L}\,\phi_x = 0,\ \text{para todo } x \in U \right\},$$

es un subespacio vectorial de $C^{\infty}(\xi|U)$, y el conjunto

$$\mathcal{G}(U,\phi,\varepsilon) = \left\{ \{f_t\};\ \{f_t\} \text{ generado por } \{v_t\};\ v_t \in G(U,\phi),\ |t|<\varepsilon \right\}$$

es un pseudogrupo bajo la composición $\{f_t\}\cdot\{g_t\} = \{f_t\cdot g_t\}$.

Demostración.

1. a) $\underset{\bar{0}}{L}\,\phi_x = d\phi\,\bar{0}(x) - \mathbb{B}(\bar{0})\phi_x = \bar{0}$, entonces $\bar{0} \in G(U,\phi)$.

   b) si $v \in G(U,\phi)$, $\underset{-v}{L}\,\phi_x = -\underset{v}{L}\,\phi_x = 0$, entonces $-v \in G(U,\phi)$

   c) si $v,\ u \in G(U,\phi)$, $a,b \in R$, $\underset{av+bu}{L}\,\phi_x = (a\underset{v}{L} + b\underset{u}{L})\,\phi_x = 0$, entonces $av+bu \in G(U,\phi)$

2. a) La familia $\{f_t\}$ con $f_t = id.$ para todo t está en $\mathcal{G}(U,\phi,\varepsilon)$ pues

$\overline{0} \in G(U,\phi)$.

b) si $\{f_t\} \in \mathcal{G}(U,\phi,\varepsilon)$, entonces $\{f^{-1}\}$ también pertenece.

c) sean $\{f_t\}$ y $\{g_t\} \in \mathcal{G}(U,\phi,\varepsilon)$, tales que la composición $f_t \cdot g_t$ existe para $|t| < \varepsilon$. Entonces si $k \in C^{\infty}(U)$ y $|t_o| < \varepsilon$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_o} k(f_t \cdot g_t)(g_{t_o}^{-1} \cdot f_{t_o}^{-1})(x) =$$

$$= \frac{d}{dr}\Big|_{r=t_o} k\ f_r g_{t_o}\ g_{t_o}^{-1} f_{t_o}^{-1}(x) + \frac{d}{ds}\Big|_{s=t_o} k\ f_{t_o} g_s\ g_{t_o}^{-1} f_{t_o}^{-1}(x) =$$

$$= v_{t_o}(x)(k) + (df_{t_o} u_{t_o})(x)(k) =$$

$$= (v_{t_o} + df_{t_o} u_{t_o})(x)(k) \in G(U,\phi)$$

por la primera parte de este Lema y Lema 4.11. Luego $\{f_t \cdot g_t\}$ es un elemento de $\mathcal{G}(U,\phi,\varepsilon)$.

5. LOS OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES $B\Phi$ Y $L\Phi$.

5.1. Definición. Sea M una variedad y sean μ y ω dos fibrados diferenciables sobre M. Un operador diferencial lineal P de μ en ω es una aplicación C-lineal

$$P:\ C^{\infty}(\mu) \longrightarrow C^{\infty}(\omega)$$

tal que

$$\text{sop.}(P(s)) \subset \text{sop.}(s) \tag{10}$$

para cada $s \in C^{\infty}(\mu)$.

El operador P se dice de orden k si k es el menor entero positivo ($k \leq \infty$), tal que para cada $m \in M$ y cada $f \in C^{\infty}(\mu)$ (ver 1.1.)

$$j_k(f)_m = 0 \qquad \text{implica} \qquad P(f)(m) = 0.$$

5.2. Recordaremos aquí una versión debida a R.Narasimhan [4], de un teorema de Peetre: Sea M una variedad de dimensión n y sean μ y ω dos fibrados vectoriales sobre M. Si P es un operador diferencial lineal de μ en ω, entonces cada $m \in M$ tiene un entorno U difeomorfo a un abierto Ω de R^n, tal que $\mu|U$ y $\omega|U$ son triviales y el operador restringido a los mismos tiene la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k < \infty} a_{\alpha}(m)\ D^{\alpha} \tag{11}$$

donde, si s,r son los rangos de μ y ω resectivamente, los $a_{\alpha}(m)$ son $s \times r$-matrices.

Nota. El teorema de Peetre dice que para cada $m \in M$ existe un entorno abierto U de m donde el orden k del operador es finito. Por lo tanto el orden será finito en todo abierto relativamente compacto de M.

5.3. Sea $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ un fibrado de objetos geométricos y sea ϕ un campo de objetos geométricos definido sobre un abierto U de M. Si (TE,p',E) es el fibrado tangente a E, su restricción a $\pi^{-1}(U)$ es un nuevo fibrado vectorial $(T\pi^{-1}(U),p',\pi^{-1}(U))$, y el "pull back" de este fibrado por ϕ ([3], pag.38,39)

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(T(\pi^{-1}(U))) & \xrightarrow{p'^*(\phi)} & T(\pi^{-1}(U)) \\ {\scriptstyle \phi^*(p')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ U & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \end{array}$$

es un fibrado vectorial μ donde

$$\phi^*(T(\pi^{-1}(U))) = \bigcup_{x\in U} T_{\phi_x}(\pi^{-1}(U))$$

$$\phi^*(p') = \pi p' \text{ (con las corresp. restric.)}$$

$$\mu = \left(\bigcup_{x\in U} T_{\phi_x}(\pi^{-1}(U)),\ \phi^*(p'),U\right)$$

Si llamamos nuevamente ξ al fibrado tangente sobre M

$$\xi = (TM,\ p,\ M)$$

podemos definir el operador

$$\mathbb{B}\phi\ :\ C^{\infty}(\xi\,|U) \longrightarrow C^{\infty}(\mu)$$

dado por

$$\mathbb{B}\phi(v)(x) = \mathbb{B}(v)\phi_x$$

i) $\mathbb{B}(\phi(v))$ es una sección de μ

ii) $\mathbb{B}\phi$ es un operador diferencial lineal:

a) es lineal por Lema 2.3.

b) satisface la condición (10) de la definición 5.1. En efecto:

sop.$(v) = \{\overline{x \in \text{dom.}(v);\ v(x) \neq 0}\}$, por lo tanto $\complement$(sop.(v)) es abierto y si

$z \in \complement(\text{sop.}(v))$ existe un entorno U_z de z tal que $U_z \cap (\text{sop.}(v)) = \emptyset$. Entonces $v(y) = 0$ para todo $y \in U_z$ y $\mathbb{B}\phi(v)(z) = \mathbb{B}(v)\phi_z = 0$ por 2.4. (z no puede ser punto frontera).

Entonces por 5.2. para cada $x \in U \subset M$, existe un entero $0 < k < \infty$ tal que

$$\mathbb{B}\phi(v)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k < \infty} b_\alpha(x)\, D^\alpha(v)(x) \tag{12}$$

con las identificaciones $\xi_x \sim R^n$, $\mu_x \sim R^m$ ($m = \dim.E$).

Con lo que queda probado que $\mathbb{B}\phi$ es un operador diferencial lineal.

Supongamos ahora que el fibrado de objetos geométricos $(M;\ E,\pi,\mathbb{B})$ es tal que cada fibra $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad (cerrada) de E. Entonces (ver (1.6.B))

$$X = \bigcup_{x \in M} T(\pi^{-1}(x))$$

es una subvariedad cerrada de Te y el fibrado (X,p',E) es un subfibrado vectorial del fibrado tangente a E (TE,p',E). En estas condiciones si ϕ es un campo de objetos geométricos definido sobre un abierto U de M, el "pull back" de (X,p',E) por ϕ

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(X) & \xrightarrow{p'^*(\phi)} & X \\ {\scriptstyle \phi^*(p')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ U & \xrightarrow{\phi} & E \end{array}$$

es un nuevo fibrado vectorial ω donde

$$\phi^*(X) = \bigcup_{x \in U} T_{\phi_x}(\pi^{-1}(x))$$

$\phi^*(p') = \pi p' = \pi'$ (con las coresp. restric.)

$$\omega = \Big(\bigcup_{x \in U} T_{\phi_x}(\pi^{-1}(x)),\ \pi',U\Big)$$

Podemos entonces definir un nuevo operador

$$L\phi : C^{\infty}(\xi|U) \longrightarrow C^{\infty}(\omega)$$

dado por

$$L\phi(v)(x) = \underset{v}{L}\phi_x$$

Por proposición 4.5.1. sabemos que

$$\underset{v}{L}\,\phi_x = d\phi(v)(x) - \mathbb{B}(v)\phi_x$$

$$= d\phi(v)(x) - \sum_{|\alpha|\leq k<\infty} b_\alpha(x)\ D^\alpha(v)(x)$$

esto es

$$\underset{v}{L}\,\phi_x = \sum_{|\alpha|\leq k<\infty} a_\alpha(x)\ D^\alpha(v)(x) \tag{13}$$

De donde resulta evidente que $L\phi$ es un operador diferencial lineal que en cada $x \in U$ tiene el mismo orden que $\mathbb{B}\phi$.

5.4. Supongamos ahora que ϕ y ϕ' son dos campos de objetos geométricos definidos sobre un abierto U de M, con

$$\phi_{x_o} = \phi'_{x_o}$$

y supongamos que para algún abierto $W \subset U$ existen k y k' tales que, si $x \in W$

$$\mathbb{B}(v)\phi_x = \sum_{|\alpha|\leq k<\infty} b_\alpha(x)\ D^\alpha(v)^{(x)}$$

$$\mathbb{B}(v)\phi'_x = \sum_{|\alpha|\leq k'<\infty} b'_\alpha(x)\ D^\alpha(v)(x)$$

Como $\phi_{x_o} = \phi'_{x_o}$ resulta

$$\mathbb{B}(v)\phi_{x_o} = \mathbb{B}(v)\phi'_{x_o}$$

y entonces se tiene

$$k = k'$$

$$b_\alpha(x_o) = b'_\alpha(x_o)$$

para cada α, $|\alpha| \leq k = k'$.

5.5. <u>Lema</u>. Sea $L\phi$: $C^\infty(\xi|U) \longrightarrow C^\infty(\omega)$, el operador diferencial lineal definido en 5.3. Si el orden de $L\phi$ es $k < \infty$ en un abierto $W \subset U$ y si $f: U \longrightarrow f(U) \subset M$ es un difeomorfismo, entonces el orden de $LB(f)\phi$ es también k.

<u>Demostración</u>. Si el orden de $L\phi$ en W es k, significa que k es el menor entero positivo tal que para $v \in C^\infty(\xi|U)$ y $x \in W$

$$j_k(v)(x) = 0 \quad \text{implica} \quad L\phi(v)(x) = 0$$

Si $u \in C^\infty(\xi|f(U))$ resulta que $j_k(u)(f(x)) = 0$ implica $j_k(df^{-1}u)(x) = 0$
En efecto, sean $\{x_i\}$ y $\{x_i f\} = \{y_i\}$ sistemas coordenados en x y f(x) respectivamente, entonces

$$D^\alpha(df^{-1}u)^i(x) = D^\alpha\Big(\sum_{j=1}^{n} u^i(f(x)) \frac{\partial(f^{-1})^i}{\partial y_j}(f(x)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{|\alpha|}{|\beta|} D^{\alpha-\beta} u^j(f(x))\, D^\beta\Big(\frac{\partial(f^{-1})^i}{\partial y_j}\Big)(f(x))$$

donde $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ recorre todas las n-uplas que satisfacen:

1. $\beta_i = \alpha_i$ si $|\beta| = |\alpha|$
2. $\beta_i \leq \alpha_i$ si $|\beta| < |\alpha|$
3. cada β debe ser repetida hasta que la suma de sus β_i's de α_i, si $\beta_i < \alpha_i$, $\beta_i \neq 0$.

Es decir que, siendo f difeomorfismo, $D^\alpha(u)(f(x)) = 0$ ($|\alpha| \leq k$) implica $D^\alpha(df^{-1}u)(x) = 0$ ($|\alpha| \leq k$), luego $L_{df^{-1}u}\,\phi(x)$. Entonces

$$0 = \underset{df^{-1}u}{L} B(f^{-1})\, B(f)\, \phi\, (x) = dB(f^{-1})\, \underset{u}{L}(B(f)\phi)\, (f(x)) = 0$$

Es decir que

$$\text{si } D^{\alpha}(u)(f(x)) = 0 \ (|\alpha| \leq k) \quad \text{entonces} \quad \underset{u}{L}(B(f)\phi)(f(x)) = 0.$$

siendo k el menor entero positivo que satisface esta condición. Si hubiese un entero $k' < k$ que la cumpliese, realizando el preceso en forma inversa resultaría k' el orden de $L\phi$.

5.6. Sea, como antes

$$\xi = (TM, p, M)$$

y sea U un abierto de M tal que U sea homeomorfo a R^n y $\xi|U$ trivial. Es posible introducir una topología en $C^{\infty}(\xi|U)$ definiendo un sistema fundamental de entornos para cada $v \in C^{\infty}(\xi|U)$, de la siguiente manera|4|:

$$\mathcal{B}\,(m, v, K, \varepsilon) = \{ u \in C^{\infty}(\xi|U);\ \|u-v\|_m^K < \varepsilon \}$$

donde m es un entero positivo arbitrario, K recorre todos los subconjuntos compactos de U y ε todos los números reales positivos. Recordemos que si $u \in C^{\infty}(\xi|U)$ y $S \subset U$

$$\| u \|_m^S = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in S} |D^{\alpha} U(x)| \qquad (=\infty \text{ si } S \neq \text{ compacto})$$

Esta topología satisface:

a) tiene una base numerable

b) $\{v_i\} \longrightarrow v \Longleftrightarrow D^{\alpha} v_i \longrightarrow D^{\alpha} v$ uniformemente sobre conjuntos compactos, para $|\alpha| \leq k$ (todo α si $v \in C^{\infty}(\xi|U)$).

c) es metrizable

d) es completa.

5.7. Sea ahora un subconjunto abierto W de M, homeomorfo a un abierto Ω de R^n, tal que $\xi|W$ y $\omega|W$, tal como se definieron en 5.3., sean triviales y para el cual la expresión (11) de 5.2. aplicada a $L\phi$ sea

sea satisfecha. El teorema de Peetre nos asegura la existencia de tal abierto.

5.7.1. Lema. Sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una sucesión de campos vectoriales en $C^\infty(\xi|W)$, tal que

$$\{v_i\}_{i\in I} \longrightarrow v$$

uniformemente sobre cada compacto $S \subset W$. Si para un campo de objetos geométricos ϕ definido en W, $x \in W$ y todo $i \in I$, se cumple

$$\underset{v_i}{L}\,\phi_x = 0$$

entonces

$$\underset{v}{L}\,\phi_x = 0 \qquad \text{para todo } x \in W.$$

Demostración. Supongamos que $L\phi = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(\cdot)\, D^\alpha$, sobre W. Entonces

$$0 = \underset{v_i}{L}\,\phi_x = \sum_{|\alpha|\leq m<\infty} a_\alpha(x)\, D^\alpha(v_i)(x)$$

y

$$0 = \lim_{i\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq m<\infty} a_\alpha(x)\, D^\alpha(v_i)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m<\infty} a_\alpha(x) \lim_{i\to\infty} D^\alpha(v_i)(x) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m<\infty} a_\alpha(x)\, D^\alpha(v)(x) = \underset{v}{L}\,\phi_x$$

5.7.2. Lema. Sean W y ϕ los mismos elementos definidos más arriba, entonces

$$G(W,\phi) = \{ v;\ v \in C^\infty(\xi|W),\ \underset{v}{L}\phi_x = 0 \text{ para todo } x \in W \}$$

es un subespacio vectorial cerrado de $C^\infty(\xi|W)$.

Demostración.

a. $G(W,\phi)$ es un subespacio vectorial de $C^\infty(\xi|W)$ por Lema 4.12.

b. Si $\{v_i\}$ está en $G(W,\phi)$, y $\{v_i\} \longrightarrow v$, por Lema 5.7.1. $v \in G(W,\phi)$.

REFERENCIAS

|1| Bishop R. and Crittenden R.; Geometry of Manifolds, Academic Press, N.York, 1964.

|2| Frölicher A. and Nijenhuis A.; A theorem on stability of complex structures. Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.,43, 239-241,(1957).

|3| Lang S.; Introduction to Differentiable Manifolds, Interscience Publishers, N.York, 1962.

|4| Narasimhan, R.; Analysis on Real and Complex Manifolds, North Holland, Amsterdam, 1968.

|5| Nijenhuis, A; Theory of geometric objects. Doctoral thesis. Amsterdam, 1952.

|6| Nijenhuis, A.; Geometric Aspects of formal differential operations on tensor fields. Proc. International Congress of Math.. 14-21, August, 1958.

|7| Nijenhuis, A.; Special topics in geometry. Lecture Notes. University of Washington, 1957.

|8| Nomizu, K.; Lie groups and differential geometry. Math. Soc. of Japan, pp. 8, 1956.

|9| Palais, R.; Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. Annals of Mathematics Studies 57, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965, ch. IV.

|10| Palais, R.; Foundations of Global Non-Linear Analysis,Benjamin, N.York, 1968.