UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

" DEFINICION Y PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS COMPLEJAS DE UN OPERADOR ELIPTICO"

TESIS

MARIA AMELIA MUSCHIETTI

1984

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

T E S I S

"Definición y Propiedades de las Potencias Complejas de Un Operador - Elíptico"

María Amelia Muschietti

1984

Deseo manifestar especialmente mi agradecimiento al Profesor A.P. Calderón, quien me ha honrado dirigiendo mis estudios en análisis y el presente trabajo, por su paciente guía y sugerencias; y a los doctores J.E. Solomín y R.E. Gamboa Saraví a quienes debo mi interés por estos temas, por su invalorable apoyo, estímulo y colaboración.

Sea éste también mi homenaje a la memoria del Profesor Miguel Herrera.

I N D I C E

INTRODUCCION

Las potencias complejas A^s, $s \in \mathbb{C}$, de un operador pseudo-diferencial, elíptico e invertible A, que actúa sobre una variedad compacta y sin borde M, fueron definidas, bajo ciertas condiciones, por Seeley en 1966 ([7]). Tales potencias son operadores pseudo-diferenciales, de orden ms si m es el orden de A ($m > 0$), y por lo tanto tienen núcleo contínuo $K_s(x,y)$ si $Re(s)$ es suficientemente negativo. Además $K_s(x,x)$, la evaluación de dicho núcleo en la diagonal, se extiende como función meromorfa de s con polos simples sobre el eje real, y regular en los enteros $s = 0, 1, 2, \ldots$, obteniéndose fórmulas explícitas para el cálculo de $K_0(x,x)$ y de los residuos en los polos mencionados.

Una consecuencia de estos resultados es la obtención de una fórmula analítica para el índice de un operador, según un argumento de Atiyah y Bott (Seeley [7]). También dan la extensión meromorfa de la función ζ de Riemann asociada al operador A, definida como $\sum \lambda_j^s$, si A es normal y $(\lambda_j)_j$ sus autovalores. La función ζ es utilizada para el estudio del comportamiento asintótico de los autovalores, o para definir el determinante regularizado de un operador elíptico usado en aplicaciones a la física teórica (Ver seccion 3).

La finalidad de este trabajo es estudiar las potencias complejas de un operador diferencial elíptico cuyos coeficientes son sólo finitamente derivables. Por lo tanto, las estimaciones necesarias para construir tales potencias y analizar sus núcleos, se realizan precisando la cantidad de derivadas usadas en cada caso. Por otra parte, se estudia la función ζ de Riemann de un operador pseudo-diferencial con coeficientes C^{∞}, dependiente de un parámetro.

En la sección 1 se prueban los resultados básicos que se utilizarán más adelante, relativos a la continuidad de operadores definidos por una amplitud con finita cantidad de derivadas, estimándose sus normas en términos de tal amplitud. Se estudian amplitudes de orden negativo u homogéneas de grado complejo s con $\mathcal{R}e(s)=0$. El método empleado para probar la continuidad en L^{2} de un operador definido por una amplitud de orden negativo (Teorema 1.1.1) es de A.P. Calderón.

En la sección 2 se considera un operador diferencial A, elíptico, invertible, con coeficientes finitamente derivables, definido sobre una variedad compacta y sin borde, y con un cono de direcciones de mínimo crecimiento (direcciones en las que el símbolo principal $\sigma_m(A)$ no tiene autovalores) (Agmond [1]). Pueden entonces definirse las potencias A^{s}, si $\mathcal{R}e(s)<0$, mediante la fórmula espectral

$$A^{s}=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{s}(A-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

donde Γ es un camino adecuadamente elegido en el plano complejo, que recorre una semirrecta de mínimo crecimiento sobre la cual la norma en L^{2} de $(A-\lambda)^{-1}$ es del orden de $|\lambda|^{-1}$. Esto se prueba construyendo una parametriz de $A-\lambda$, cuyo orden de aproximación depende de la cantidad de derivadas de los coeficientes de A.

A partir de lo anterior se demuestra que A^{s} admite un desarrollo, hasta un cierto orden, en operadores definidos por símbolos homogéneos, y se estudia el núcleo $K_s(x,y)$ obteniéndose la extensión meromorfa de $K_s(x,x)$ a $\mathcal{R}e(s)<c$ (c depende de la cantidad de derivadas de

los coeficientes de A y de la dimensión de la variedad M).Las únicas singularidades de $K_s(x,x)$ son polos simples en $s = \frac{-n+j}{m}$ $j = 0,1,\ldots$, salvo en los enteros $s = 0,1,2,\ldots$, que son puntos regulares.

Finalmente en la sección 3 se prueba la dependencia analítica respecto de un parámetro ε , de la extensión del núcleo de A_ε^s evaluado en la diagonal, cuando $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ es una familia de operadores que depende analíticamente de ε.

La notación usada será la habitual. Indicaremos con $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o $\mathcal{E}^\infty$) el espacio de las funciones infinitamente derivables, $\mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o $\mathcal{E}_0^\infty$) el de las que tienen, además, soporte compacto y $\mathcal{S}$ el de las funciones rápidamente decrecientes. Si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ es un elemento del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ un multi-índice (que denotaremos siempre con letras griegas), utilizaremos las abreviaturas siguientes :

$$|x| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i \quad , \quad \alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha = \partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \quad , \quad \Delta_x = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$$

En general, $\| \ \|_X$ será la norma en un espacio X , $\|T\|_{X,Y}$ la norma de un operador T entre los espacios X e Y La letra C indicará constantes, que pueden ser distintas en cada caso.

Utilizaremos la siguiente definición de la transformada de Fourier :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{i x \cdot \xi}\, d\xi \, .$$

1. OPERADORES DEFINIDOS POR AMPLITUDES Y SIMBOLOS

1.1. Continuidad en L^p

Sea $p(x,y,\xi)$ una función continua definida para x , y , ξ en $\mathbb{R}^n$ Consideraremos los operadores P_ε , $\varepsilon > 0$, definidos por:

$$P_\varepsilon f(x) = \int p(x,y,\xi)\, \eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

donde $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty$,

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1 \\ 0 & |\xi| \geq 2 \end{cases} \qquad y \qquad f \in \mathcal{C}_0^\infty$$

Llamaremos $P = \lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon$ cuando tal límite existe.

Definición: Diremos que el operador P está definido por la amplitud $p(x,y,\xi)$ y lo indicaremos $P = \mathcal{O}p(p(x,y,\xi))$ (O más brevemente $P = \mathcal{O}p(p)$).

Teorema 1.1.1: Sea la función $p(x,y,\xi)$ con $n+1$ derivadas continuas respecto de ξ , tales que

$$(1.1) \qquad |\partial_\xi^\alpha p(x,y,\xi)| \leq B\,(1+|\xi|)^{-\delta-|\alpha|} \qquad x,y,\xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leq n+1$$

para cierto $\delta > 0$ Entonces, si $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p$, existe

$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon f = Pf$ en L^p y se verifica

$$\|Pf\|_{L^p} \leq c\, B\, \|f\|_{L^p}$$

con $c = C(n,\delta)$.

Además, P no depende de la función η .

<u>Demostración</u>: Podemos suponer que $\delta \leq 1$.

Dada $f \in C_0^\infty$, escribimos

$$P_\varepsilon f(x) = \int k_\varepsilon(x,y,x-y)\, f(y)\, dy \qquad \varepsilon > 0$$

con

$$k_\varepsilon(x,y,z) = \int p(x,y,\xi)\, \eta(\varepsilon\xi)\, e^{iz\cdot\xi}\, d\xi$$

Por las propiedades de p , k_ε está acotada por una función integrable en $|z| \geq 1$ e independiente de ε Para probarlo, consideraremos γ tal que $|\gamma| = n+1$, luego:

$$(1.2)\quad z^\gamma k_\varepsilon(x,y,z) = \int \sum_{\gamma_1 \leq \gamma} c_{\gamma_1}\, \partial_\xi^{\gamma-\gamma_1} p\;\, \varepsilon^{|\gamma_1|} (\partial_\xi^{\gamma_1}\eta)(\varepsilon\xi)\, e^{iz\xi}\, d\xi$$

Dado que $\varepsilon \leq c\,(1+|\xi|)^{-1}$ sobre el soporte de $\partial_\xi^{\gamma_1}\eta$, el integrando está acotado por $c\, B(1+|\xi|)^{-n-1}$ donde c sólo depende de n y B es la constante del enunciado. En consecuencia

$$|k_\varepsilon(x,y,z)| \leq c\, B\, \frac{1}{|z|^{n+1}}$$

Probaremos también que k_ε está acotado por una función integrable en $|z| \leq 1$. Más precisamente:

$$(1.3) \qquad |k_\varepsilon(x,y,z)| \leq C\,B\,\frac{1}{|z|^{n-\delta}}$$

con $C = C(n,\delta)$. Por lo tanto, si χ es la función característica de $\{|z| \leq 1\}$,

$$|P_\varepsilon f(x)| \leq C\,B\left[\frac{1}{|z|^{n-\delta}}\,\chi + \frac{1}{|z|^{n+1}}\,(1-\chi)\right] * |f|$$

y se obtiene

$$(1.4) \qquad \|P_\varepsilon f\|_{L^p} \leq C\,B\,\|f\|_{L^p} \qquad \text{si} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Veamos (1.3). Dadas las propiedades de η , escribimos $\eta(\varepsilon\xi) = \int_\varepsilon^\infty \tilde{\eta}(t\xi)\,\frac{dt}{t}$ con $\tilde{\eta}(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\eta}{\partial\xi_i}(\xi)\,\xi_i$ Por lo tanto:

$$p(x,y,\xi)\,\eta(\varepsilon\xi) = \int_\varepsilon^\infty p_t(x,y,t\xi)\,\tilde{\eta}(t\xi)\,\frac{dt}{t}$$

si $p_t(x,y,\xi) = p(x,y,\xi/t)$, $t>0$ Si calculamos la transformada de Fourier respecto de ξ (que indicamos $\wedge_\xi$), resulta:

$$(1.5) \qquad k_\varepsilon(x,y,z) = \int_\varepsilon^\infty \left[p_t(x,y,\xi)\,\tilde{\eta}(\xi)\right]^{\wedge_\xi}(z/t)\,\frac{1}{t^n}\,\frac{dt}{t}$$

Estimemos el integrando en (1.4). Si $|\beta| \leq n+1$,

$$z^{\beta}\,\widehat{(p_t\,\tilde{\eta})}^{\xi}(z) = \sum_{\beta_1 \leq \beta} c_{\beta}\ \partial_{\xi}^{\beta_1} p_t(x,y,\xi)\ \partial_{\xi}^{\beta-\beta_1}\tilde{\eta}(\xi)$$

Luego, por la acotación de las derivadas de p en (1.1) y el hecho que $\tilde{\eta}$ tiene soporte en $1 \leq |\tilde{\eta}| \leq 2$,

$$|z^{\beta}\,\widehat{p_t\tilde{\eta}}^{\xi}(z)| \leq \int \sum c_{\beta_1}\, t^{-|\beta_1|}\, B\,(1+|\xi/t|)^{\delta-|\beta_1|}\,|\partial^{\beta-\beta_1}\tilde{\eta}(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq c\, B\, t^{\delta}$$

Por lo tanto,

$$(1.6) \qquad (1+|z|)^{n+1}\ |\widehat{(p_t\,\tilde{\eta})}^{\xi}(z)| \leq c\,B\,t^{\delta}$$

donde C depende sólo de n y de η Luego, de (1.5) y (1.6) obtenemos:

$$|k_{\varepsilon}(x,y,z)| \leq c\,B \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{t^{\delta-n}}{\left[1+\left|\frac{z}{t}\right|\right]^{n+1}}\ \frac{dt}{t}$$

$$\leq \frac{c\,B}{|z|^{n-\delta}} \int_0^{\infty} \frac{s^{n-\delta}}{(1+s)^{n+1}}\ \frac{ds}{s}$$

haciendo el cambio de variables $s = \frac{|z|}{t}$ Esta última integral es finita. Hemos probado (1.3).

Veamos que $P_{\varepsilon}f$ converge en L^p cuando $\varepsilon \to 0$ Sean $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$

$$k_{\varepsilon_1}(x,y,z) - k_{\varepsilon_2}(x,y,z) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} [p_t \tilde{\eta}]^{\wedge_\xi}(z/t)\, t^{-n} \frac{dt}{t}$$

por (1.5); y usando la estimación de (1.6),

$$|k_{\varepsilon_1}(x,y,z) - k_{\varepsilon_2}(x,y,z)| \leq \frac{CB}{|z|^{n-\delta}} \int_{|z|/\varepsilon_2}^{|z|/\varepsilon_1} \frac{s^{n-\delta}}{(1+s^2)^r} \frac{ds}{s}$$

La integral tiende a cero con ε_1 , ε_2 , y está acotada en z .

Por otra parte, como en (1.2) tenemos:

$$|z^\gamma(k_{\varepsilon_1} - k_{\varepsilon_2})| \leq \int |\Sigma\, c\, \partial_\xi^{\gamma-\gamma_1} p \quad \partial_\xi^{\gamma_1}(\eta(\varepsilon_1\xi) - \eta(\varepsilon_2\xi))|\, d\xi$$

donde la integral tiende a cero con ε_1 , ε_2 , si $|\gamma| = n+1$ y no depende de z

Dado lo anterior, se obtiene:

$$\|P_{\varepsilon_1} f - P_{\varepsilon_2} f\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0]{} 0 \quad .$$

Solo falta probar que $Pf = \lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon f$ no depende de η

Sean η_1 , $\eta_2 \in C_0^\infty$ tales que $\eta_i(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ Por lo tanto, con la notación anterior,

$$\eta_1(\varepsilon\xi) - \eta_2(\varepsilon\xi) = -\int_0^\varepsilon (\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2)(t\xi) \frac{dt}{t}$$

Si llamamos $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2$ y $p^\varepsilon = \varphi_\varepsilon\, p$ con $\varphi \in C_0^\infty$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & 1 \leq |\xi| \leq 2 \\ 0 & |\xi| \leq 1/2 \end{cases} \qquad \text{y} \quad \varphi_\varepsilon(\xi) = \varphi(\varepsilon\xi)$$

obtenemos

$$p(x,y,\xi)(\eta_1-\eta_2)(\varepsilon\xi) = p^\varepsilon(x,y,\xi)(\eta_1-\eta_2)(\varepsilon\xi)$$

$$= -\int_0^\varepsilon (p^\varepsilon)_t(x,y,t\xi)\,\tilde{\eta}(t\xi)\,\frac{dt}{t}$$

Si

$$k_{i,\varepsilon}(x,y,z) = \left[\, p(x,y,\xi)\,\eta_i(\varepsilon\xi)\right]^{\wedge_\xi}(z)$$

por lo anterior,

$$k_{1,\varepsilon}(x,y,z) - k_{2,\varepsilon}(x,y,z) = -\int_0^\varepsilon \left[(p^\varepsilon)_t\,\tilde{\eta}\right]^{\wedge_\xi}(z/t)\, t^{-n}\frac{dt}{t}$$

donde la transformada de Fourier conmuta con la integral gracias a la introducción de la función φ_ε

Podemos estimar el integrando de la fórmula anterior de la misma manera que en (1.6) ya que para p^ε se verifica también

$$|\partial_\xi^\alpha p^\varepsilon(x,y,\xi)| \leq C\,B\,(1+|\xi|)^{-\delta-|\alpha|}, \qquad \text{si } |\alpha| \leq n+1$$

con la constante C independiente de ε.

Entonces

$$|k_{1,\varepsilon}(x,y,z)-k_{2,\varepsilon}(x,y,z)| \leq c\,B \int_0^{\varepsilon} \frac{t^{\delta-n}}{(1+|\frac{z}{t}|)^{n+1}}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{c\,B}{|z|^{n-\delta}} \int_{|z|/\varepsilon}^{\infty} \frac{s^{n-\delta}}{(1+s)^{n+1}}\,\frac{ds}{s}$$

Esta última integral tiende a cero con ε y está acotada en z.

Por otra parte, nuevamente (1.2) da

$$|z^{\gamma}(k_{1,\varepsilon}-k_{2,\varepsilon})| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

si $|\gamma| = n+1$.

Luego,

$$\int p(x,y,\xi)\,(\eta_1(\varepsilon\xi)-\eta_2(\varepsilon\xi))\,e^{i(x-y)\xi} f(y)\,dy\,d\xi =$$

$$= \int (k_{1,\varepsilon}(x,y,\xi)-k_{2,\varepsilon}(x,y,\xi))\,f(y)\,dy$$

tiende a cero en L^p cuando $\varepsilon\to 0$, si $1\leq p\leq\infty$

c.q.d.

--§--

Definición: diremos que $p(x,y,\xi)$ es una amplitud de orden negativo si cumple la condición (1.1) del teorema, para algún $\delta>0$

Observación: es una consecuencia del teorema que la integral

$$\int p(x,y,\xi)\,\eta(\varepsilon\xi)\,e^{i(x-y)\xi} f(y)\,dy\,d\xi$$

tiende a cero en L^p $1\leq p\leq\infty$ cuando $\varepsilon\to 0$, si $\eta(\xi)=0$ para $|\xi|\leq 1$ y $p(x,y,\xi)$ es una amplitud de orden negativo, pues podemos escribir $\eta=\eta_1-\eta_2$ con $\eta_i\in C_0^\infty$, $\eta_i=1$ si $|\xi|\leq 1$.

——§——

Trataremos ahora el caso de operadores definidos por una amplitud $p(x,y,\xi)$ homogénea de grado complejo ib en ξ , para $|\xi|\geq 1$, $b\in\mathbb{R}$. Esto es

$$p(x,y,t\xi)=t^{ib}\,p(x,y,\xi) \quad \text{si } |\xi|\geq 1\ ,\ t\geq 1\ .$$

Si $\sigma(x,\xi)$ es una función de x , $\xi\in\mathbb{R}^n$, que no depende de y , entonces con la notación definida antes, $Op(\sigma)$ resulta

$$Op(\sigma)\,f(x)=\int\sigma(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi$$

para $f\in C_0^\infty$ Se dice que el operador $Op(\sigma)$ está definido por el símbolo $\sigma(x,\xi)$ Enunciaremos un resultado conocido para este tipo de operadores.

Lema 1.1.2: Sea $\sigma(x,\xi)$ homogénea de grado ib , $b\in\mathbb{R}$, en $|\xi|\geq 1$ con $n+1$ derivadas continuas en ξ tal que

$$|\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\leq B \qquad x\in\mathbb{R}^n\ ,\ |\xi|\leq 1\ ,\ |\alpha|\leq n+1$$

entonces $Op(\sigma)$ es continuo en L^p , $1\leq p\leq\infty$, y

$$\|Op(\sigma)\|_{L^p,L^p}\leq c\,B$$

con $C = C(n)$.

Teorema 1.1.3: Sea $p(x,y,\xi)$ homogénea de grado ib en $|\xi| \geq 1$, con $n+2$ derivadas en ξ y una en las variables y', continuas, tales que

$$|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,y,\xi)| \leq B \qquad \text{si } x,y \in \mathbb{R}^n, \ |\xi| \leq 1$$
$$|\alpha| \leq 1, \ |\beta| \leq n+2$$

Entonces, si $f \in L^p$, existe el $\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon f = Pf$ en L^p y se verifica

$$\|Pf\|_{L^p} \leq cB \ \|f\|_{L^p}$$

con $c = c(n,\delta)$.

Además, P no depende de la función η

Demostración: puesto que la función p tiene una derivada continua en y,

$$p(x,y,\xi) = p(x,x,\xi) + \sum_{j=1}^n R_j(x,y,\xi)(y_j - x_j)$$

con

$$R_j(x,y,\xi) = \int_0^1 \partial_{y_j} p(x, x+t(y-x), \xi)\, dt$$

Por lo tanto, para $f \in C_0^\infty$

$$(1.7) \quad Pf(x) = Op(p(x,x,\xi))f(x) +$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int \sum_j R_j(x,y,\xi)(y_j - x_j)\eta(\varepsilon\xi)e^{i(x-y)\xi} f(y)\,dy\,d\xi$$

El operador $Op(p(x,x,\xi))$ es continuo en L^p por el lema anterior, y

$$\|Op(p(x,x,\xi))\|_{L^p,L^p} \leq cB$$

En (1.7) debemos justificar la existencia del límite en ε y la continuidad del operador que define. Tenemos:

$$\int R_j(x,y,\xi)(y_j-x_j)\eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

$$= i\int \partial_{\xi_j} R_j\, \eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

$$+ i\int R_j\, \partial_{\xi_j}\eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

$\partial_{\xi_j} R_j$ es una amplitud de orden negativo en ξ, por lo tanto, por el Teorema 1.1.1, el primer término tiene límite en L^p, cuando $\varepsilon \to 0$ y

$$\| Op(\partial_{\xi_j} R_j)\|_{L^p, L^p} \leq c\, B$$

El segundo término se puede escribir como

$$(1.8) \qquad \int k_{j,\varepsilon}(x,y,x-y)\, f(y)\, dy$$

donde

$$k_{j,\varepsilon}(x,y,z) = \int R_j(x,y,\xi)\, \partial_{\xi_j}[\eta(\varepsilon\xi)]\, e^{iz\xi}\, d\xi$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 1.1.1, si $R_j^\varepsilon = R_j\,\varphi_\varepsilon$ con $\varphi_\varepsilon(\xi) = \varphi(\varepsilon\xi)$ y $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi(\xi) = 1$ en $1 \leq |\xi| \leq 2$ se obtiene

$$(1.9) \qquad k_{j,\varepsilon}(x,y,z) = \int_0^\varepsilon \left[(R_j^\varepsilon)_t(x,y,t\xi)\, (\partial_{\xi_j}\tilde{\eta})(t\xi)\right]^{\wedge_\xi}(z)\, dt$$

Puesto que

$$|\partial_\xi^\alpha R_j(x,y,\xi)| \leq c \; (1+|\xi|)^{-|\alpha|} \qquad |\alpha| \leq n+1$$

por las propiedades de φ , entonces se tienen las mismas estimaciones para R_j^ε y podemos acotar el integrando en (1.9) por

$$c \; \frac{t^{-n}}{\left(1+\left|\frac{z}{t}\right|\right)^{n+1}}$$

Luego,

$$|k_{j,\varepsilon}(x,y,z)| \leq c \left(\int_{|z|/\varepsilon}^{\infty} \frac{s^{n+2}}{(1+s)^{n+1}} \, ds \right) \frac{1}{|z|^{n-1}}$$

La integral tiende a cero con ε y está acotada en z .

Además, si $|\gamma| = n+1$

$$|z^\gamma k_{j,\varepsilon}(x,y,z)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

En consecuencia $k_{j,\varepsilon}$ está acotada por una función de z que tiende a cero en L^1 Luego (1.8) tiende a cero en L^p cuando $\varepsilon \to 0$.

c.q.d.

--§--

1.2. Normas de operadores y funciones

Dada una función $p(x,\xi)$, $x\in\mathcal{U}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ abierto en $\mathbb{R}^n$, con u derivadas continuas en x y t derivadas continuas en ξ y dado $k\in\mathbb{R}$ definimos la norma

$$\|p\|^k_{u,t} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{U}\\ \xi\in\mathbb{R}^n\\ |\alpha|\leq u,\ |\beta|\leq t}} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)}{(1+|\xi|)^{k-|\beta|}} \right|$$

Si la función depende además de la variable $y\in\mathcal{U}$, con v derivadas continuas en y, definimos análogamente

$$\|p\|^k_{u,v,t} = \sup_{\substack{x\in\mathcal{U}\\ y\in\mathcal{U}\\ \xi\in\mathbb{R}^n\\ |\alpha|\leq u,\ |\beta|\leq v\\ |\gamma|\leq t}} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x,y,\xi)}{(1+|\xi|)^{-k-|\gamma|}} \right|$$

Nota: Cuando no nos interese la cantidad de derivadas de p en la variable ξ no lo indicaremos en la norma. Por ejemplo $\|p\|^k_u$ será $\|p\|^k_{u,t}$ para algún t

Buscamos estimaciones de las normas de operadores definidos por una amplitud $p(x,y,\xi)$ en términos de las normas definidas antes. En los dos lemas que siguen se obtienen dichas estimaciones para el caso de amplitudes de orden negativo u homogéneas de grado σ en ξ, con $\mathrm{Re}(\sigma)=0$.

Indicamos con $\| \ \|_{k,l}$ la norma de un operador entre los espacios de Sobolef H^k y H^l

<u>Lema 1.2.1</u>: Sea $p(x,y,\xi)$ función definida en $\mathcal{U}\times\mathcal{U}\times\mathbb{R}^n$ con soporte compacto en las variables x e y y con derivadas continuas de modo que la norma

$$\| p \|^{-k-\delta}_{|t+k|,\,|t|,\,n+1} \quad , \quad \delta > 0 \quad t, k \text{ enteros } k \geq 0$$

sea finita. Entonces, $\mathcal{O}_p(p(x,y,\xi))$ está bien definido como operador de H^t en H^{t+k} y además

$$\| \mathcal{O}_p(p) \|_{t,\,t+k} \leq C \quad \| p \|^{-k-\delta}_{|t+k|,\,|t|,\,n+1}$$

donde la constante C depende de t, k y δ

<u>Demostración</u>: Sea

$$P_\varepsilon f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int p(x,y,\xi)\, \eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

donde $\eta \in C_0^\infty$, $\eta(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$, $f \in C_0^\infty$ .Por el Teorema 1.1.1, $\mathcal{O}_p(p) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon$, ya que

$$\| p \|^{-\delta}_{0,0,n+1} < \infty$$

Supongamos en primer lugar que $t \geq 0$ y sea $|\alpha| \leq t + k$

Luego,

$$D^\alpha P_\varepsilon f(x) = \int \sum_{\alpha_1 \leq \alpha} C_{\alpha_1}\, \partial_x^{\alpha_1} p(x,y,\xi)\, \eta(\varepsilon\xi)\, \xi^{\alpha-\alpha_1} e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi$$

Para $\alpha_1 \leq \alpha$ como $|\alpha - \alpha_1| \leq t + k$ se puede elegir $\gamma \leq \alpha - \alpha_1$ tal que $|\alpha - \alpha_1 - \gamma| \leq t$ y $|\gamma| \leq k$; por lo tanto

$$\xi^{\alpha-\alpha_1} e^{i(x-y)\xi} = c\, \xi^{\gamma}\, \partial_y^{\alpha-\alpha_1-\gamma}\left(e^{i(x-y)\xi}\right)$$

e integrando por partes respecto de y , obtenemos la siguiente expresión para $D^{\alpha} P_{\varepsilon} f$

$$D^{\alpha} P_{\varepsilon} f(x) = \int \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha - \alpha_1 - \gamma}} c_{\alpha_1,\alpha_2}\, \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} p(x,y,\xi)\, \xi^{\gamma}\, \eta(\varepsilon\xi)\, e^{i(x-y)\xi} D^{\alpha_3} f(y)\, dy\, d\xi$$

(γ depende de α_1).

Como

$$\|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} p(x,y,\xi)\, \xi^{\gamma}\|^{-\delta}_{0,0,n+1} \leq c\, \|p\|^{-k-\delta}_{|\alpha|,t,n+1} < \infty$$

se tiene , aplicando el Teorema 1.1.1, que existe el límite en L^2 de $D^{\alpha} P_{\varepsilon}$, cuando $\varepsilon \to 0$ y

$$\|\lim_{\varepsilon \to 0} D^{\alpha} P_{\varepsilon} f\|_{L^2} \leq c\, \|p\|^{-k-\delta}_{|\alpha|,t,n+1} \|f\|_{H^t}$$

Luego, considerando D^{α} en el sentido de las distribuciones, se comprueba que $D^{\alpha}(\lim_{\varepsilon \to 0} P_{\varepsilon} f) = \lim_{\varepsilon \to 0} D^{\alpha} P_{\varepsilon} f$.

Por lo tanto,

$$\| \lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon f \|_{H^{t+k}} \leq c \, \| p \|^{-k-\delta}_{t+k,t,n+1} \, \| f \|_{H^t}$$

y tenemos la acotación deseada para $Op(p)$.

Para el caso $t < 0 < t+k$ basta estimar la norma en L^2 del operador $D^\alpha Op(p) D^\beta$, para $|\alpha| \leq t+k$, $|\beta| \leq -t$ Tenemos

$$D^\alpha P_\varepsilon D^\beta f(x) = \int \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta}} C_{\alpha_1,\beta_1} \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} p(x,y,\xi) \, \xi^{\alpha+\beta-(\alpha_1+\beta_1)} \eta(\varepsilon\xi) \, e^{i(x-y)\xi} f(y) \, dy \, d\xi$$

integrando por partes respecto a y y calculando ∂_x^α Nuevamente, como

$$\| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} p(x,y,\xi) \, \xi^{\alpha+\beta-(\alpha_1+\beta_1)} \|^{-\delta}_{0,0,n+1} \leq c \, \| p \|^{-|\alpha+\beta|-\delta}_{|\alpha|,|\beta|,n+1} < \infty$$

se obtiene que el $\lim_{\varepsilon\to 0} D^\alpha P_\varepsilon D^\beta = D^\alpha (\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon) D^\beta$ existe en L^2 y se cumple

$$\| \lim_{\varepsilon\to 0} D^\alpha P_\varepsilon D^\beta \|_{0,0} \leq c \, \| p \|^{-|\alpha+\beta|-\delta}_{|\alpha|,|\beta|,n+1}$$

$$\leq c \, \| p \|^{-k-\delta}_{t+k,-t,n+1}$$

Finalmente, si $t+k<0$ el resultado se obtiene aplicando la primera parte de la demostración ya que

$$\| \mathcal{O}p(p) \|_{t,t+k} = \| \mathcal{O}p(p)^* \|_{-(t+k),-t}$$

y el adjunto de $\mathcal{O}p(p(x,y,\xi))$ es $\mathcal{O}p(\overline{p(y,x,\xi)})$

Lema 1.2.2: Sean t , k enteros, $k \geq 0$ Si $p(x,y,\xi)$, definida en $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, con soporte compacto en las variables x e y ,es homogénea de grado $s \in \mathbb{C}, Re(s) = -k$ en $|\xi| \geq 1$ y tiene derivadas continuas de modo que en cada caso las normas indicadas sean finitas, entonces $\mathcal{O}p(p(x,y,\xi))$ es un operador de H^t en H^{t+k} y se verifica

i) si $t \geq 0$ $\| \mathcal{O}p(p) \|_{t,t+k} \leq c \; \| p \|^{-k}_{t+k,t+1,n+2}$

ii) si $t < 0 \leq t+k$ $\| \mathcal{O}p(p) \|_{t,t+k} \leq c \; \| p \|^{-k}_{t+k,|t|,n+2}$

iii) si $t+k < 0$ $\| \mathcal{O}p(p) \|_{t,t+k} \leq c \; \| p \|^{-k}_{|t+k|+1,|t|,n+2}$

Demostración: Se procede como en el lema anterior, estimando mediante el Teorema 1.1.3 las normas de operadores definidos por una amplitud homogénea de grado ib en ξ , y por el Teorema 1.1.1 cuando la homogeneidad es de grado s con $Re(s) < 0$.

c.q.d.

Nota: En los lemas 1.2.1 y 1.2.2, si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ puede eliminarse la hipótesis relativa al soporte compacto en x e y La demostración no cambia.

2. POTENCIAS COMPLEJAS DE UN OPERADOR ELIPTICO

2.1 El operador A.

Sea M una variedad de clase $\mathcal{C}^{\infty}$, compacta, sin borde, de dimensión n Sea μ una medida en M tal que, en cada sistema de coordenadas se expresa como $g(x)\,dx_1\ldots dx_n$ con $g \in \mathcal{C}^{\infty}$, $g>0$.

Sea A un sistema de operadores diferenciales, elíptico, de orden $m>0$, sobre la variedad M, tal que si $\mathcal{U}$ es un abierto coordenado de M y h un mapa definido en $\mathcal{U}$

$$(2.1) \qquad Af = \Big[\sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha}(x)\, D^{\alpha}(f\circ h^{-1})\Big]\circ h \qquad \text{si } f\in\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathcal{U})$$

Los coeficientes $a_{\alpha}(x)$ son matrices (cuadradas) tales que

$$a_{\alpha}(x)\in\mathcal{C}^{r-m+|\alpha|}(h(\mathcal{U})) \qquad r \text{ entero } \quad r\geq m.$$

Llamaremos h^{*} a la aplicación dada por $h^{*}(f)=f\circ h$., $f\in\mathcal{C}^{\infty}(h(\mathcal{U}))$ y h_{*} a su inversa. Consideraremos mapas h que puedan extenderse a un entorno de la clausura de $\mathcal{U}$ Por lo tanto, también podemos suponer que $a_{\alpha}(x)$ y sus derivadas son funciones acotadas en $h(\mathcal{U})$.

Sea $a_k(x,\xi) = (2\pi)^{n}\sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(x)(i\xi)^{\alpha}$, $k=0,1,\ldots,m$.

Luego

$$h_{*}\,A\,h^{*}(f)(x) = \int\Big(\sum_{k} a_k(x,\xi)\Big)\hat{f}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi$$

y $\sigma(h_* A h^*) = \sum_k a_k$ es el símbolo de $h_* A h^*$.

Supondremos que en cada sistema de coordenadas el símbolo principal a_m tiene la siguiente propiedad:

(2.2) $a_m(x,\xi) - \lambda I$ es invertible para todo $x, |\xi| \geq 1, \lambda \in \tilde{\Lambda}$;

donde $\tilde{\Lambda}$ es la región del plano complejo

$\tilde{\Lambda} = \{ \lambda \quad |\lambda| < \delta_0 \quad o \quad |\arg\lambda - \theta_0| < \delta_1 \}$

para ciertos θ_0 , δ_1 , δ_2 con $\delta_i > 0$.

En estas condiciones a_m puede ser modificada para $|\xi| < 1$ definiendo $\tilde{a}_m$ de modo que $\tilde{a}_m(x,\xi) - \lambda I$ sea invertible para todo ξ , $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ y además $\tilde{a}_m(x,\xi)$ acotada para $x \in \mathcal{U}$, $|\xi| \leq 1$

Definimos entonces para cada sistema de coordenadas en M las siguientes funciones de $(x,\xi,\lambda) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \tilde{\Lambda}$ (Seeley [7])

$$b_{-m} = (\tilde{a}_m - \lambda)^{-1} \tag{2.3}$$

$$b_{-m-\ell} = - b_{-m} \sum_{\substack{|\alpha|+j+k=\ell \\ j<\ell}} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_{m-k} \, \partial_x^\alpha b_{-m-j} \qquad \ell > 0$$

<u>Lema 2.1.1</u>: Sea $\Lambda = \{ \lambda : |\lambda| \leq \bar{\delta}_0 \ o \ |\arg\lambda - \theta_0| \leq \bar{\delta}_1 \}$, $\bar{\delta}_i < \delta_i$

Entonces:

i) $b_{-m-\ell}$ está definida si $\ell \leq r$ y es homogénea de grado $-m-\ell$ en $(\xi, \lambda^{1/m})$ para $|\xi| \geq 1$.

ii) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{-m-\ell}$ existe y es continua si $|\alpha| < r-\ell$, $|\beta| < \infty$ y se cumple

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{-m-\ell}(x,\xi,\lambda)| \leq c\ (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-m}(1+|\xi|)^{-\ell-|\beta|}$$

y

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{-m-\ell}(x,\xi,\lambda)| \leq c\ (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-2m}(1+|\xi|)^{m-\ell-|\beta|}$$

si $\ell+|\beta|>0$

para $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$

iii) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\lambda b_{-m-\ell}$ existe si $|\alpha| \leq r-\ell$, $|\beta| < \infty$ y se verifica

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\lambda b_{-m-\ell}(x,\xi,\lambda)| \leq c\ (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-2m}(1+|\xi|)^{-\ell-|\beta|}$$

En ii), iii) la constante c sólo depende de α y β .

<u>Demostración:</u> Probemos en primer lugar

$$|b_{-m}(x,\xi,\lambda)| \leq (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-m}.$$

Si $|\xi| \leq 1$, $\tilde{a}_m(x,\xi)$ está acotado, por lo tanto $|b_{-m}| \leq c|\lambda|^{-1}$ para $|\lambda| \geq c_1$; si $|\xi| \leq 1$ y $|\lambda| \leq c_1$, $|b_{-m}| \leq c$ por la continuidad de b_{-m} Para el caso $|\xi| \geq 1$,

$$b_{-m} = \lambda^{-1}\left[a_m(x,\xi/|\xi|)\frac{|\xi|^m}{\lambda} - I\right]^{-1}$$

En consecuencia, $|b_{-m}| \leq c\ |\lambda|^{-1}$ cuando $|\xi|^m \leq c_2|\lambda|$
si $|\xi|^m \geq c_2|\lambda|$

$$b_{-m} = |\xi|^{-m}\, b_{-m}(x\,,\ \xi/|\xi|\,,\ \lambda/|\xi|^{m})$$

y obtenemos $|b_{-m}| \leq c\,|\xi|^{-m}$.

Las estimaciones para las derivadas de b_{-m} se prueban por inducción sobre $|\alpha|$, $|\beta|$. Las restantes, para $\ell > 0$, se obtienen de las anteriores, usando la fórmula (2.3).

c.q.d.

2.2 Las normas $_{\Lambda}\| \ \|^{k}_{u,v,t}$

Las acotaciones del lema 2.1.1 nos inducen a definir, para funciones $p(x,\xi,\lambda)$, $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{R}^n$ (o $p(x,y,\xi,\lambda)$, $x,y \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$) las normas siguientes:

$$_{\Lambda}\|p\|^{k}_{u,t} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{U} \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda \\ |\alpha| \leq u, |\beta| \leq t}} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi,\lambda)}{(1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-m} (1+|\xi|)^{k-|\beta|}} \right|$$

$$_{\Lambda}\|p\|^{k}_{u,v,t} = \sup_{\substack{x,y \in \mathcal{U} \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda \\ |\alpha| \leq u, |\beta| \leq v, |\gamma| \leq t}} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x,y,\xi,\lambda)}{(1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-m} (1+|\xi|)^{k-|\gamma|}} \right|$$

Las derivadas consideradas se suponen continuas.

Observación 2.2.1: Notar que para estas normas y las definidas en §2.1 valen las desigualdades siguientes:

1) si $\ell \geq k$, $\|p\|^{\ell}_{u,v,t} \leq \|p\|^{k}_{u,v,t}$ y $_{\Lambda}\|p\|^{\ell}_{u,v,t} \leq {}_{\Lambda}\|p\|^{k}_{u,v,t}$

2) $_{\Lambda}\|p_1 p_2\|^{\ell_1+\ell_2}_{u,v,t} \leq C \, {}_{\Lambda}\|p_1\|^{\ell_1}_{u,v,t} \; \|p_2\|^{\ell_2}_{u,v,t}$

3) $(1+|\lambda|^{1/m})^{q} \ \|p(\lambda)\|^{\ell}_{u,r,t} \leq C \ {}_{\Lambda}\|p\|^{\ell+m-q}_{u,r,t}$ para $\lambda \in \dot{\Lambda}$ y $0 \leq q \leq m$

Observación 2.2.2: Con las normas definidas, el lema 2.1.1, iii) puede escribirse

$$ {}_{\Lambda}\| b_{-m-\ell} \|^{-\ell}_{r-\ell,t} < \infty \qquad \text{para todo } t$$

En consecuencia

$$\| b_{-m-\ell} \|^{-m-\ell}_{r-\ell,t} < \infty \qquad \text{para todo } t \text{ y } \lambda \in \Lambda$$

Notación

Llamaremos $H^{k}(M)$ (o simplemente H^{k}) a los espacios de Sobolef sobre la variedad M Si $f \in H^{k}(M)$, indicaremos con $\|f\|_{H^{k}(M)}$ su norma; y $\|B\|_{H^{k}(M),H^{\ell}(M)}$ (o $\|B\|_{k,\ell}$) será la norma del operador B entre los espacios $H^{k}(M)$ y $H^{\ell}(M)$

Si $k > 0$, diremos que un operador B es *regularizante de orden* k , si $B: H^{t} \longrightarrow H^{t+k}$ para algún valor de t . Y que es regularizante, si lo es de algún orden positivo.

Dado un operador $B_1 \ H^{t} \longrightarrow H^{s}$ diremos que B_2 es una *parametriz* de B_1 , si $B_2 \ H^{s} \longrightarrow H^{t}$ y además $B_2 B_1 - I$ (o $B_1 B_2 - I$) es un operador regularizante.

2.3 Parametriz para $A-\lambda$.

Sea un cubrimiento finito por abiertos coordenados de la variedad M . En cada uno de ellos, consideramos el operador A expresado mediante el correspondiente sistema de coordenadas como en (2.1) y construimos los coeficientes $b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$ como en (2.3). Luego, si $(\mathcal{U},h)$ es uno de dichos abiertos coordenados, y $0 \leq K \leq r-m$ consideramos el operador

$$\psi\, h^{*}\, Op\Big(\sum_{j=0}^{K} b_{-m-j}\Big)\, h_{*}\, \varphi \tag{2.4}$$

donde φ, ψ son funciones de $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathcal{U})$ tales que $\psi\varphi=\varphi$ y las funciones φ constituyen una partición de la unidad subordinada al cubrimiento mencionado.

Sea $B_K(\lambda)$ la suma de los operadores dados en (2.4) sobre los abiertos del cubrimiento.

Veremos que $B_K(\lambda)$ es una parametriz para $A-\lambda$ Previamente estimaremos su norma entre dos espacios de Sobolef en función del parámetro λ

Proposición 2.3.1: Sean t y q enteros tales que $0 \leq q \leq m$

$$|t+m-q| \leq r-K \quad , \quad y \quad -(r-1) \leq t+m \leq r \quad \text{si} \quad K=q=0 .$$

Entonces $B_K(\lambda)$ se extiende como operador continuo de H^t en H^{t+m-q} . Además, dado $\delta > 0$

$$\| B_K(\lambda) \|_{t,\,t+m-q} \leq C\,(1+|\lambda|^{1/m})^{-q+\delta}$$

donde la constante c depende de δ y, si $q>0$, de las normas $_\Lambda\| b_{-m-j} \|^{0}_{l+m-q|, n+2}$.

Antes de demostrar la proposición veamos:

Lema 2.3.2: Si $p(x, y, \xi, \lambda)$ tiene derivadas continuas que cumplen

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma \frac{\partial}{\partial\lambda} p(x,y,\xi,\lambda) \right| \leq c\, (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-2m} \quad (1+|\xi|)^{m-k-|\gamma|}$$

para $x, y \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$ y $|\alpha| \leq u$, $|\beta| \leq v$, $|\gamma| \leq w$

entonces

$$\| p(\lambda) - p(0) \|^{-k-\delta}_{u,v,w} \leq C_\delta \; (1+|\lambda|^{1/m})^{\delta} \qquad \text{para } 0 \leq \delta \leq m$$

Demostración: Escribiendo

$$p(\lambda) - p(0) = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} p\right)(t\lambda)\; dt$$

se obtiene

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma (p(\lambda) - p(0)) \right| \leq c \left(\int_0^1 (1+|\xi|+|t\lambda|^{1/m})^{-2m} |\lambda| \, dt \right) (1+|\xi|)^{m-k-|\gamma|}$$

y de aquí, sigue la acotación de la tesis.

c.q.d.

Demostración de la proposición: Podemos suponer que $\delta \leq 1$ (pues el caso general se deduce de éste).

Estimaremos la norma $\| \|_{H^t(M),\, H^{t+k}(M)}$ de los operadores $\psi\, k^* \mathcal{O}p(b_{-m-j})\, k_* \varphi$, $j = 0, 1, \ldots, K$ o lo que es equivalente, la norma $\| \|_{t,\, t+k}$ de su expresión en $\mathbb{R}^n$, esto es $\mathcal{O}p(\psi^* b_{-m-j})\, \varphi^*$

Para ello supongamos en primer lugar $q \geq 1$ Luego

$$\| \mathcal{O}p(\psi^* b_{-m-j})\, \varphi^* \|_{t,\, t+m-q} \leq$$

$$\leq C \,\| \psi^*(x)\, b_{-m-j}(\lambda)\, \varphi^*(y) \|^{-(m-q)-\delta}_{|t+m-q|,\, |t|,\, n+1} \leq$$

$$\leq C \;{}_{\Lambda}\| b_{-m-j} \|^{0}_{|t+m-q|,\, n+1} \quad (1+|\lambda|^{1/m})^{-q+\delta}$$

por el lema 1.2.1 y las desigualdades entre las normas señaladas en la observación 2.2.1. Esta última expresión es finita para $j = 0, 1, \ldots K$ si $|t+m-q| \leq r-K$, por las propiedades de las funciones b_{-m-j}.

Si ahora suponemos $q = 0$, para el caso $j \neq 0$ podemos aplicar nuevamente el lema 1.2.1 y la desigualdad

$$\| b_{-m-j}(\lambda) \|^{-m-\delta}_{|t+m|,\, n+1} \leq c \;\| b_{-m-j}(\lambda) \|^{-m-1}_{|t+m|,\, n+1}$$

Esta última norma está a su vez acotada por

$${}_{\Lambda}\| b_{-m-j} \|^{-1}_{|t+m|,\, n+1}$$

(Ver Observación 2.2.1) que es finita y no depende de λ

Por lo tanto sólo resta tratar el caso $q = 0$, $j = 0$

Para ello, escribiremos el operador $\mathcal{O}p(\psi^* b_{-m}(\lambda))\, \varphi^*$ como

$$Op(\psi^*(b_{-m}(\lambda)-b_{-m}(0)))\varphi^* + Op(\psi^* b_{-m}(0))\varphi^*$$

Como $b_{-m}(0)$ es una función homogénea de ξ en $|\xi| \geq 1$, la norma del segundo operador puede ser estimada aplicando el lema 1.2.2 Obtenemos

$$\| Op(\psi^* b_{-m}(0))\varphi^* \|_{t,t+m} \leq \begin{cases} c \, \| b_{-m}(0) \|^{-m}_{t+m,\, n+2} & \text{si } t+m \geq 0 \\ c \, \| b_{-m}(0) \|^{-m}_{|t+m|+1,\, n+2} & \text{si } t+m < 0 \end{cases}$$

y estas normas son finitas para t en las condiciones de la proposición.

Finalmente, como (por el lema 2.1.1 iv))

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \frac{\partial}{\partial\lambda} b_{-m}(x,\xi,\lambda) \right| \leq c \left(1+|\xi|+|\lambda|^{1/m}\right)^{-2m} \left(1+|\xi|\right)^{-|\beta|} .$$

para $|\alpha| \leq r$, $|\beta| < \infty$ tenemos, por lo probado en el lema 2.3.2,que

$$\| b_{-m}(\lambda) - b_{-m}(0) \|^{-m-\delta}_{r,\, n+1} \leq c \left(1+|\lambda|^{1/m}\right)^{\delta}$$

Y

$$\| Op(\psi^*(b_{-m}(\lambda)-b_{-m}(0)))\varphi^* \|_{t,t+m} \leq c \left(1+|\lambda|^{1/m}\right)^{\delta}$$

por el lema 1.2.1.

Luego, tenemos la tesis.

c.q.d.

2.4 El operador $I-(A-\lambda)\,B_K(\lambda)$.

Dada la expresión del operador $B_K(\lambda)$, $I-(A-\lambda)B_K(\lambda)$ será una suma finita de términos de la forma

$$(2.5)\qquad \varphi-(A-\lambda)\,\psi\, h^* Op\Big(\sum_{j=0}^{K} b_{-m-j}\Big)\, h_*\,\varphi$$

Si A se expresa en el sistema de coordenadas h como

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha = Op\Big(\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}(x,\xi)\Big)$$

donde $a_{m-k}=\sum_{|\alpha|=m-k} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ tiene $r-k$ derivadas en x (Ver §2.1), tendremos

$$h_*(A-\lambda)\,\psi\, h^*\, Op\Big(\sum_{j=0}^{K} b_{-m-j}\Big) =$$

$$= Op\Big[(\tilde{a}_m-\lambda)\,\psi^* b_{-m} + \sum_{\ell=1}^{K+m} t_\ell(x,\xi,\lambda) +$$

$$+ r_m(x,\xi)\,\psi^*\Big(\sum_{j=0}^{K} b_{-m-j}\Big)$$

con

$$t_\ell(x,\xi,\lambda) = \sum_{\substack{|\alpha|+k+j=\ell\\ j<\ell,\ j\leq K}} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha a_{m-k}\;\partial_x^\alpha(\psi^* b_{-m-j}) +$$

$$+ (\tilde{a}_m-\lambda)\,\psi^*\, b_{-m-\ell}$$

(El último término aparece sólo si $\ell\leq K$); y $r_m = a_m-\tilde{a}_m$ (ver

§2.1) por lo tanto $r_m(x,\xi)=0$ si $|\xi|\geq 1$.

Las funciones t_ℓ tienen las siguientes propiedades:

i) $t_\ell(x,\xi,\lambda)=0$ si $x\notin sop(\psi^*-1)$ y $|\xi|\geq 1$, para $\ell\leq K$, por la definición de las funciones b_{-m-j} en (2.3).

ii) $\Lambda\| t_\ell \|^{m-\ell}_{r-\ell,u}<\infty$ para todo u , y $\ell=1,\quad ,K+m$, por las propi dades de las funciones b_{-m-j} y de las normas involucradas (Ol ervaciones 2.2.1 y 2.2.2).

Dauo que $(\tilde{a}_m-\lambda)\, b_{-m} = I$ el operador de (2.5) se reduce a

$$h^*\, Op\left(\sum_{\ell=1}^{K+m} t_\ell + R\right) h_*\, \varphi$$

donde hemos llamado $R = r_m\, \psi^* \sum_{j=0}^{K} b_{-m-j}$.

A partir de lo anterior probaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1: Si K es un entero tal que $0\leq K\leq r-m$ entonces , dado $\delta>0$,

$$\| I-(A-\lambda)\, B_K(\lambda)\|_{t,\,t+K+1-q}\leq c\;(1+|\lambda|^{1/m})^{-q+\delta}$$

para q , t enteros tales que $0\leq q\leq m$, $q\leq K+1$,

$$|t+K+1-q|\leq r-m-K \quad y \quad t+K+1\geq min(0,-(r-K-2)) .$$

Demostración: basta acotar la norma de los operadores definidos por las funciones t_ℓ y R . Supongamos que $\delta \leq 1$ y $q \geq 1$.

Por el lema 1.2.1 y las propiedades de la función R

$$\| Op(R)\, \varphi^* \|_{t,\, t+K+1-q} \leq C \, \| R \|^{-(K+1-q)-\delta}_{|t+K+1-q|,\, n+1} \leq$$

$$\leq C \;{}_{\Lambda}\| R \|^{m-(K+1)}_{|t+K+1-q|,\, n+1} \quad (1+|\lambda|^{1/m})^{-q+\delta} < \infty$$

pues $|t+K+1-q| \leq r-K$ ya que (Observación 2.2.1), para todo k ,

$${}_{\Lambda}\| R \|^{m-k}_{r-K,\, u} \leq C \, \| \pi_m \|^{m-k}_{r-K,\, u} \quad {}_{\Lambda}\| \sum_j b_{-m-j} \|^{0}_{r-K,\, u} < \infty$$

por ser π_m de soporte compacto en $\mathfrak{z}$

Exactamente la misma estimación vale para $Op(t_\ell)\, \varphi^*$ si $\ell \geq K+1$, ya que también

$${}_{\Lambda}\| t_\ell \|^{m-(K+1)}_{|t+K+1-q|,\, n+1}$$

es finita (por propiedad ii) de las funciones t_ℓ) pues $|t+K+1-q| \leq r-m-K$.

Si $1 \leq \ell \leq K$ escribimos

$$Op(t_\ell)\, \varphi^* = Op(t_\ell\, \eta)\, \varphi^* + Op(t_\ell (1-\eta))\, \varphi^*$$

donde $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ y $\eta(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$. Acotamos la norma del primer término de la derecha del mismo modo que lo hicimos con el operador definido por R .

Estudiemos ahora $Op(t_\ell(1-\eta))\varphi^*$. Como $t_\ell(x,\xi,\lambda)(1-\eta(\xi))=0$ si $x \notin sop(\psi^*-1)$ o sea en un entorno del $sop\,\varphi^*$, tenemos

$$Op(t_\ell(1-\eta))\varphi^* f(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} c \int \Delta_\xi^k [t_\ell(1-\eta)]\ \eta(\varepsilon\xi)\ \frac{\varphi^*(y)}{|x-y|^{2k}}\ e^{i(x-y)\xi}\ f(y)\,dy\,d\xi$$

integrando por partes en ξ y usando el hecho que, si $|\beta|>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \partial_\xi^\alpha [t_\ell(1-\eta)]\ \partial_\xi^\beta\,\eta(\varepsilon\xi)\ \frac{\varphi^*(y)}{|x-y|^{2k}}\ e^{-i(x-y)\xi}\ f(y)\,dy\,d\xi = 0$$

en el sentido de L^2 , por la observación del Teorema 1.1.1 ya que la amplitud que define este operador es de orden negativo en ξ y suficientemente derivable (esto es, que su norma $\|\ \|^{-1}_{0,0,n+1}$ es finita).

Por otra parte,

$$_\Lambda\| \Delta_\xi^k(t_\ell(1-\eta))\|^{m-\ell-2k}_{r-K,u} < \infty \qquad \text{para todo } u$$

En consecuencia si $\ell+2k \geq K+1$ tenemos nuevamente

$$\| Op(t_\ell(1-\eta))\varphi^*\|_{t,t+K+1-q} \leq$$

$$\leq c\ _\Lambda\| \Delta_\xi^k(t_\ell(1-\eta))\|^{m-(K+1)}_{|t+K+1-q|,n+1}\ (1+|\lambda|^{1/m})^{-q+\delta}$$

Si $q = 0$ las acotaciones anteriores deben ser modificadas. Salvo el operador $Op(t_{K+1})$, que trataremos separadamente, los restantes están definidos por una amplitud $p(\lambda)$ de orden $\leq -K+2$ en ξ ; por lo tanto

$$\| Op(p(\lambda)) \|_{t,\, t+K+1} \leq C \; \| p(\lambda) \|^{-(K+1)-1}_{|t+K+1|,\, |t|,\, n+1} \leq$$

$$\leq C \; {}_{\Lambda}\| p \|^{m-(K+2)}_{|t+K+1|,\, |t|,\, n+1}$$

Notemos que la cota obtenida es uniforme en λ .

Para estimar la norma de $Op(t_{K+1}(\lambda))\varphi^*$ la escribimos como:

$$Op(t_{K+1}(\lambda) - t_{K+1}(0))\varphi^* + Op(t_{K+1}(0))\varphi^*$$

Puesto que $t_{K+1}(0)$ es homogénea de orden $-(K+1)$ en $|\xi| \geq 1$, por el lema 1.2.2

$$\| Op(t_{K+1}(0))\varphi^* \|_{t,\, t+K+1} \leq \begin{cases} C \; \| t_{K+1}(0) \|^{-(K+1)}_{t+K+1,\, n+2} & \text{si } t+K+1 \geq 0 \\ \\ C \; \| t_{K+1}(0) \|^{-(K+1)}_{|t+K+1|+1,\, n+2} & \text{si } t+K+1 < 0 \end{cases}$$

Estas normas son finitas por las hipótesis establecidas sobre t

Finalmente

$$\| t_{K+1}(\lambda) - t_{K+1}(0) \|^{-(K+1)-\delta}_{r-K,\, n+1} \leq C \; (1+|\lambda|^{1/m})^{\delta}$$

por el lema 2.3.1 ya que, para $|\alpha| \leq r-K$, $|\beta| < \infty$

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \frac{\partial}{\partial \lambda} t_{K+1}(x,\xi,\lambda) \right| \leq C \, (1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-2m} \, (1+|\xi|)^{m-(K+1)-|\beta|}$$

(Esto se deduce del lema 2.1.1 iv) y de la fórmula que define t_{K+1}).

Luego, por el lema 1.2.1,

$$\| Op(t_{K+1}(\lambda) - t_{K+1}(0)) \varphi^* \|_{t,t+K+1} \leq C_\delta (1+|\lambda|^{1/m})^\delta$$

c.q.d.

Corolario 2.4.2: Si $\delta > 0$ y $|t| \leq r-m$, entonces

$$\| I - (A-\lambda) B_0(\lambda) \|_{t,t} \leq C \, (1+|\lambda|^{1/m})^{-1+\delta} \, .$$

Demostración: Tomando $K=0$, $q=1$ en el Teorema anterior.

c.q.d.

A partir del corolario, si $\lambda \in \Lambda$ y $|\lambda|$ suficientemente grande, tenemos $\| I - (A-\lambda) B_0(\lambda) \|_{t,t} \leq c < 1$ para $|t| \leq r-m$. Luego podemos considerar el operador

$$T(\lambda) = B_0(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (I - (A-\lambda) B_0(\lambda))^n$$

que es un inverso a derecha de $A-\lambda$ Por la condición (2.2) el símbolo principal de $A-\lambda$ es homotópico a la identidad; por lo tanto, $A-\lambda$ tiene índice cero y un inverso a derecha también lo es a izquierda.

Más precisamente, vale el siguiente resultado:

Corolario 2.4.3: Existe $R > 0$ tal que si $\lambda \in \Lambda$ y $|\lambda| \geq R$ entonces $A - \lambda$ tiene inverso y para todo

$$\| (A-\lambda)^{-1} \|_{t,t+k} \leq c_\delta \, |\lambda|^{-1+k/m+\delta}$$

si $0 \leq k \leq m$ y $|t| \leq r - m$.

Demostración: Por las observaciones anteriores

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} (I - (A-\lambda) B_0(\lambda))^n \Big\|_{t,t} \leq C \quad \text{si} \quad \lambda \in \Lambda \; , \; |\lambda| \geq R \; , \; |t| \leq r-m$$

y por la proposición 2.3.1, tomando $K = 0$, $q = r - k$

$$\| B_0(\lambda) \|_{t,t+k} \leq C \; (1 + |\lambda|^{1/m})^{-m+k+\delta} .$$

Luego, tenemos la tesis.

c.q.d.

2.5 Los operadores A_s

Sea el operador A como en §2.1. En virtud de las condiciones de derivabilidad de sus coeficientes, está definido como operador de $H^t(M)$ en $H^{t-m}(M)$, para $-r \leq t-m \leq t \leq r$. Supondremos de aquí en adelante que $A \; H^m(M) \longrightarrow H^0(M)$ es invertible; se prueba entonces que también lo es como operador de $H^t(M)$ en $H^{t-m}(M)$ (Calderón [4]).

En estas condiciones, el corolario 2.4.3 nos permite adoptar la definición de A_s dada por Seeley [7] para operadores con coeficientes $\mathcal{C}^\infty$:

(2.6) $$A_s = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s (A-\lambda)^{-1} \, d\lambda \,, \quad \text{para} \quad s \in \mathbb{C}, \; \mathcal{R}e(s) < 0$$

donde Γ es un camino en el plano complejo elegido del siguiente modo. Como $sp(A)$ no es todo el plano, se reduce a una sucesión sin puntos de acumulación finitos (Agmond [1]), y puede elegirse, por el corolario citado, una semirrecta R contenida en Λ , que no interseque a $sp(A)$ Como $0 \notin sp(A)$ existe un disco de radio $\varepsilon > 0$ fuera del espectro. Sea Γ entonces el camino que va desde ∞ hasta la circunferencia $|z| = \varepsilon$, a lo largo de R , recorre tal circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, y vuelve a ∞ por la semirrecta R .

La definición (2.6) es correcta pues $\| \lambda^s (A-\lambda)^{-1} \|_{t,t}$ es del orden de $|\lambda|^{\mathcal{R}e(s)-1+\delta}$, con $\delta > 0$ y arbitrariamente pequeño para $|t| \leq r-m$. Tenemos entonces

<u>Lema 2.5.1</u>: a) $A_s A_t = A_{s+t}$ si $\mathrm{Re}(s) < 0$, $\mathrm{Re}(t) < 0$

b) $A_{-j} = A^{-j}$ si j entero positivo

(A^{-1} está considerado como operador de H^t en H^t)

c) $A_{s-j} A^j = A_s$ y $A^j A_{s-j} = A_s$ si $\mathrm{Re}(s) < 0$

j entero positivo, tal que $mj < r$.

<u>Demostración</u>: El argumento para probar a) es clásico. Sea Γ' un camino que contiene a $sp(A)$, interior a Γ y próximo a él. Luego, en (2.6) se puede reemplazar Γ por Γ'. Entonces:

$$A_s A_t = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \left[\int_{\Gamma} (A-\lambda)^{-1} (A-\mu)^{-1} \lambda^s \mu^t \, d\mu \right] d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^s \mu^t}{\lambda-\mu} \left[(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu)^{-1} \right] d\lambda \, d\mu =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma'} \lambda^{s+t} (A-\lambda)^{-1} d\lambda + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (A-\mu)^{-1} \int_{\Gamma'} \frac{\lambda^s \mu^t}{\lambda-\mu} d\lambda \, d\mu$$

La última integral sobre Γ' se anula pues μ está fuera de Γ' .

Veamos b). Para j entero, $j > 0$

$$A_{-j} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma'} \lambda^{-j} (A-\lambda)^{-1} d\lambda$$

donde Γ' es la circunferencia $|z| = \varepsilon$ pues las integrales sobre la semirrecta se cancelan. Tomando $\mu = 1/\lambda$

$$A_{-j} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma'} A^{-1} \mu^{j-1} (\mu - A^{-1}) \, d\mu =$$

$$= A^{-1} (A^{-1})^{j-1} = A^{-j}$$

pues $sp(A)$ está en el interior de Γ'.

De a) y b) se deduce c). La condición $j\,m \leq r$ es necesaria para la existencia de A^j.

c.q.d.

Veremos en el teorema siguiente que A_s admite en cada sistema de coordenadas un desarrollo en operadores definidos por símbolos homogéneos de grados ms, $ms-1$, .. , $ms-(r-m)$ Y difiere de tal desarrollo en un operador regularizante de orden $r-m+1$. Esto permitirá probar que A_s verifica propiedades características de los operadores pseudo-diferenciales.

Si $b_{-m}, b_{-m-1}, \ldots$ son las funciones definidas en §2.1 en un determinado sistema de coordenadas de M , entonces llamamos

$$\text{(2.7)} \qquad c_j(s) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^s \, b_{-m-j}(\lambda) \, d\lambda \qquad j = 0, 1,$$

para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) < 0$

Observar que, si $j > 0$, $c_j(s)$ es una función analítica en $\mathrm{Re}(s) < 1$, pues $|b_{-m-j}| \leq c\,(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{-2m} (1 + |\xi|)^{r-m}$ (Lema 2.1.1, ii). Si $j = 0$, $c_0(s) = \tilde{a}_m(x,\xi)^s$ y se extiende analíticamente a todo $\mathbb{C}$.

Además, por las propiedades de b_{-m-j} , $c_j(s)$ es homogénea de grado $ms-j$ en $|\xi|\geq 1$. Y depende analíticamente de s en $\Re e(s)<\ell$, ℓ entero, $\ell\leq 1$, en la norma $\|c_j(s)\|^{m\ell-j}_{r-j,t}$ para todo t .

<u>Teorema 2.5.2:</u> Si $\Re e(s)<0$, el operador A_s verifica:

i) Si $(\mathcal{U},h)$ es un entorno coordenado de la variedad M y $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}_o^\infty(\mathcal{U})$ entonces, para $0\leq K\leq r-m$

$$h_*\varphi_1 A_s \varphi_2 h^* = \sum_{j=0}^{K} \mathcal{O}p(\varphi_1^* c_j(s))\,\varphi_2^* + R_K(s)$$

$R_K(s)$ está definido para $\Re e(s)<\frac{\min(m,K+1)}{m}$ y se cumple

$$\|R_K(s)\|_{t,t+K+1+m-q_1-q_2} < \infty \qquad \text{si } \Re e(s)<\frac{q_1+q_2-m}{m}$$

$$0\leq q_1\leq m \quad , \quad 0\leq q_2\leq \min(m,K+1) \quad , \quad |t+K+1-q_2|\leq r-m-K$$

y $t+K+1\geq \min(0,-(r-K-2))$ si $q_2=0$

Además, $R_K(s)$ depende analíticamente de s en tal norma.

ii) Si $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}^\infty(M)$ tienen soportes disjuntos, entonces

$$\|\varphi_1 A_s \varphi_2\|_{t,t+K+1+m-q_1-q_2} < \infty \qquad \Re e(s)<\min\left(0,\frac{q_1+q_2-m}{m}\right)$$

con las mismas condiciones sobre t , q_1 , q_2 que en i).

Además, $\varphi_1 A_s \varphi_2$ depende analíticamente de s en tal norma.

Demostración: Dadas φ_1, φ_2 como en i), sea $\tilde{\varphi}_1 \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ tal que $\tilde{\varphi}_1 = 1$ en $\operatorname{sop}\varphi_2$; y $\tilde{\psi}_1 \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\tilde{\psi}_1 = 1$ en $\operatorname{sop}\tilde{\varphi}_1 \cup \operatorname{sop}\varphi_1$. Elegimos una partición de la unidad $(\tilde{\varphi}_i)_i$ en M, subordinada a entornos coordenados $(\mathcal{U}_i)_i$, tal que $\tilde{\varphi}_1$ es la función considerada antes; y funciones $\tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_i, \ldots$ tales que $\tilde{\psi}_i \in C_0^\infty(\mathcal{U}_i)$, $\tilde{\psi}_i = 1$ en $\operatorname{sop}\tilde{\varphi}_i$. Luego, consideramos el operador $B_K(\lambda)$ definido en §2.3 mediante esta partición $(\tilde{\varphi}_i)_i$ y las funciones $(\tilde{\psi}_i)_i$; tenemos

$$A_s = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s B_K(\lambda)\, d\lambda + R_K(s) \tag{2.8}$$

con
$$R_K(s) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^s \left[(A-\lambda)^{-1} - B_K(\lambda)\right] d\lambda$$

Calculando el primer término en (2.8) se obtiene

$$A_s = \sum_i \tilde{\psi}_i \, h_i^* \, Op\Big(\sum_{j=0}^{K} c_j(s)\Big) h_{i*} \tilde{\varphi}_i + R_K(s) \tag{2.9}$$

donde $c_j(s)$ son las funciones definidas en (2.7). Por lo tanto

$$h_* \varphi_1 A_s \varphi_2 h^* = \varphi_1^* Op\Big(\sum_j c_j(s)\Big)\varphi_2^* + h_* \varphi_1 R_K(s) \varphi_2 h^*$$

Basta ahora acotar la norma de $R_K(s)$ Esto es consecuencia inmediata de las estimaciones siguientes:

$$\|(A-\lambda)^{-1} - B_K(\lambda)\|_{t,\, t+K+1+m-\varrho_1-\varrho_2} \leq$$

$$\leq \|(A-\lambda)^{-1}\|_{t+K+1-\varrho_2,\, t+K+1+m-\varrho_1-\varrho_2} \; \|I - (A-\lambda)B_K(\lambda)\|_{t,\, t+K+1-\varrho_2} \leq$$

$$\leq C\,(1+|\lambda|^{1/m})^{-q_1+\delta_1}\,(1+|\lambda|^{1/m})^{-q_2+\delta_2} \qquad \delta_i > 0 \quad i=1,2$$

válidas por las hipótesis establecidas sobre t, K, q_1, y q_2 que permiten la aplicación del Teorema 2.4.1 y corolario 2.4.3.

Si ahora consideramos φ_1, φ_2 como en ii), cada uno de los operadores $\varphi_1 \tilde{\Psi}_i h_i^* \mathcal{O}p(c_j(s))\, h_{i*} \tilde{\varphi}_i \varphi_2$ está definido en $\mathbb{R}^n$, por una amplitud del tipo $\eta_1(x)\, c_j(x,\xi,s)\, \eta_2(y)$ con η_1, η_2 funciones cuyos soportes son disjuntos. Se verifica entonces, para un entero k

$$\mathcal{O}p(\eta_1(x)\, c_j(s)\, \eta_2(y)) = \mathcal{O}p\left(\Delta_\xi^k c_j(s) \frac{\eta_1(x)\,\eta_2(y)}{|x-y|^{2k}}\right)$$

integrando por partes respecto de ξ en la expresión que define el operador y aplicando el Teorema 1.1.1, ya que se trata de amplitudes de orden negativo. Finalmente

$$\left\| \mathcal{O}p\left(\Delta_\xi^k c_j(s) \frac{\eta_1(x)\,\eta_2(y)}{|x-y|^{2k}}\right)\right\|_{t,\,t+K+1+m-q_1-q_2} \leq$$

$$\leq C\, \| \Delta_\xi^k c_j(s) \|^{-(K+1+m-q_1-q_2)-1}_{|t+K+1|,\, n+1}$$

Esta última norma es finita tomando k suficientemente grande y $|t+K+1| \leq r-K$.

Por lo tanto, aplicando lo anterior en la expresión (2.9) y las estimaciones de $\mathcal{R}_K(s)$, queda probado ii).

c.q.d.

2.6. Las funciones $c_j(s)$.

Como función analítica de s , $c_j(x,\xi,s)$ se extiende a todo el plano complejo. Esto puede probarse directamente a partir de la fórmula (2.7) que la define, o bien a través de la relación recursiva que establece el teorema siguiente, y que utilizaremos más adelante.

Teorema 2.6.1: Si $0 \leq \ell \leq r-m$ y $\mathrm{Re}(s) < 0$ se verifica que

$$(2.10) \qquad c_\ell(x,\xi,s) = \sum_{|\alpha|+j+k} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_{m-k}(x,\xi)\, \partial_x^\alpha c_j(x,\xi,s-1)$$

para $|\xi| \geq 1$.

Demostración: Llamaremos $d_\ell(x,\xi,s-1)$ al segundo miembro de (2.10) y sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U})$. Luego, tomando $K = r-m$, $t = -(K+1)$, $q_2 = 0$ y $q_1 = m$ ó $q_1 = 0$ en el Teorema 2.5.2, obtenemos:

$$(2.11) \qquad h_* \varphi_1 A_s \varphi_2 h^* = \varphi_1^* \mathcal{O}p\Big(\sum_{j=0}^{r-m} c_j(s)\Big) \varphi_2^* + R(s)$$

con $\|R(s)\|_{-(r-m+1),0} < \infty$ y $\|R(s-1)\|_{-(r-m+1),m} < \infty$

Puesto que $A_s = A\, A_{s-1}$, (2.11) coincide con

$$h_* \varphi_1 A A_{s-1} \varphi_2 h^* = (h_* \varphi_1 A \tilde{\varphi} h^*)(h_* \tilde{\varphi} A_{s-1} \varphi_2 h^*) =$$

$$= \varphi_1^* \left(\sum a_\alpha(x) D^\alpha\right) \left[\tilde{\varphi}^* Op\left(\sum_{j=0}^{r-m} c_j(s-1)\right) \varphi_2^* + R(s-1)\right]$$

donde hemos tomado $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\tilde{\varphi} = 1$ en un entorno de $sop\, \varphi_1$.
Si calculamos esta última expresión, resulta

(2.12) $$\varphi_1^* Op\left(\sum_{j=0}^{r} d_j(x, \xi, s-1)\right) \varphi_2^* + \tilde{R}(s-1)$$

con

$$\tilde{R}(s-1) = \varphi_1^* \left(\sum_\alpha a_\alpha(x) D^\alpha\right) R(s-1)$$

Por lo tanto

$$\| \tilde{R}(s-1) \|_{-(r-m+1),0} \leq c \; \| R(s-1) \|_{-(r-m+1),m} < \infty$$

Observemos además que, para $r-m+1 \leq j \leq r$

$$\| Op(\varphi_1^* d_j(s-1)) \varphi_2^* \|_{-(r-m+1),0} \leq c \; \| d_j(s-1) \|_{0,n+1}^{-(r-m+1)+Re(ms)}$$

aplicando el lema 1.2.1. La última norma es finita pues $d_j(s-1)$ es homogénea de grado $ms-j$ en $|\xi| \geq 1$ y tiene $r-j$ derivadas en x.

Finalmente, igualando (2.11) y (2.12) obtenemos

$$\varphi_1^* \varphi_p \Big(\sum_{j=0}^{r-m} c_j(s) - d_j(s-1) \Big) \varphi_2^* + T(s) = 0$$

con $\| T(s) \|_{-(r-m+1),0} < \infty$.

Puesto que la descomposición de un operador como suma de operadores definidos por símbolos homogénenos más un regularizante de orden mayor es única (Alvarez Alonso y Calderón [2],[3]), obtenemos

$$c_\ell(s) = d_\ell(s-1) \qquad \text{en} \quad |\xi| \geq 1$$

c.q.d.

Por la fórmula del teorema anterior, se ve que la extensión de $c_j(s)$ conserva las propiedades de homogeneidad en $|\xi| \geq 1$, y derivabilidad en x

Sea p un entero positivo tal que $m p \leq r$, entonces A^p está definido y es un operador diferencial con coeficientes al menos continuos. En un sistema de coordenadas h , sea $\sigma(h_* A^p h^*) = \sum_{j=0}^{mp} a_{mp,j}(x,\xi)$ el símbolo de $h_* A^p h_*$ ($a_{mp,j}$ es homogénea de grado j en ξ). Entonces

$$\text{(2.13)} \qquad a_{mp,mp-j} = \sum_{|\alpha|+\nu+\mu=j} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_{m,m-\mu} \, \partial_x^\alpha a_{m(p-1),m(p-1)-\nu}$$

ya que $A^p = A\, A^{p-1}$.

Si definimos, para $0 \leq \ell \leq r-m$

$$d_\ell^p(s) = \sum_{|\alpha|+j+k=\ell} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_{mp,mp-k} \, \partial_x^\alpha c_j(s)$$

a partir de la fórmula (2.13) y del Teorema 2.6.1 se prueba lo siguiente:

Corolario 2.6.2: Si $mp \leq r$ entonces

$$d_\ell^p(x,\xi,s-p) = C_\ell(x,\xi,s) \qquad \text{para } |\xi| \geq 1 \; , \; \Re e(s) < p$$
$$\ell = 0, 1, \quad , r-m .$$

2.7. Las potencias A^s.

Antes de definir A^s veremos algunos resultados previos.

Observación: Notemos en primer lugar que de la demostración del Teorema 2.5.2 se obtiene, tomando $K=0$, $q_1=m$, $q_2=1$

$$A_s = \sum_{\varphi} \psi\, \ell^* \mathcal{O}p(c_0(s))\, \ell_* \varphi + R_0(s)$$

con $\| R_0(s)\|_{t,t} < \infty$ si $Re(s) < \frac{1}{m}$, $|t| \leq r-m$ Además $c_0(s) = \tilde{a}_m^{\,s}$, $\| c_0(s)\|^{Re(ms)}_{r-m} < \infty$; y se tiene analiticidad respecto de s en las normas indicadas.

Por lo tanto, como $\| \mathcal{O}p(\psi^* c_0(s))\,\varphi^*\|_{t,t} \leq C \;\| c_0(s)\|^{Re(ms)}_{t,\,n+1}$ podemos extender A_s con continuidad a $Re(s) \leq 0$, como operadores de H^t en H^t, para $|t| \leq r-m$

Lema 2.7.1: Si $-1-\frac{1}{m} < Re(s) \leq 0$ y $|t| \leq r-m$, entonces

$$\| A_s \|_{t,\,t+[Re(ms)]} < \infty$$

Además, si ℓ es un entero, $0 \leq \ell \leq m$, A_s depende analíticamente de s en $-m-1 < Re(ms) < -\ell$, como operador de H^t en $H^{t+\ell}$. Y depende continuamente de s en $-m-1 < Re(ms) \leq 0$, como operador de H^t en H^t.

Demostración: Obsérvese que si $-1-\frac{1}{m} < Re(s) < 0$ resulta $0 \leq [-Re(ms)] \leq m$. Luego, la prueba se obtiene del Teorema 2.5.2 tomando $K=0$, $m-q_1 = [-Re(ms)]$, $q_2=1$; y estimando la norma de $\mathcal{O}p(\psi^* c_0(s))$ como en la observación anterior, mediante los lemas 1.2.1 y 1.2.2 .

c.q.d.

Hasta ahora A_s sólo está definida en H^t, para $|t| \leq r-2m$. Veamos que puede extenderse a todos los espacios H^t, con $|t| \leq r$

Lema 2.7.2: Si $-1-\frac{1}{2m} < \Re e(s) \leq 0$, A_s es un operador de H^t en $H^{t+[-\Re e(2ms)]}$, para todo t que verifica

$$-r \leq t \leq t + [-\Re e(2ms)] \leq r$$

Además, la segunda parte del lema anterior vale para todo t tal que $-r \leq t \leq t+\ell \leq r$

Demostración: Por simplicidad supongamos $r-2m = 0$. Luego si $k = [-\Re e(2ms)]$

$$A_s : H^0 \longrightarrow H^k$$

$$A A_s A^{-1} : H^{-2m} \longrightarrow H^{-2m+k}$$

Ambos operadores coinciden en H^0 por el lema 2.5.1 si $\Re e(s) < 0$, y por continuidad vale lo mismo para $\Re e(s) \leq 0$. Por lo tanto, A_s se extiende como operador de H^{-2m} en H^{-2m+k}. Y, por el teorema de interpolación,

$$A_s : H^t \longrightarrow H^{t+k} \qquad \text{para } -2m \leq t \leq 0$$

Para el caso $0 \leq t+k \leq r$ se procede análogamente.

c.q.d.

En general tenemos el siguiente resultado:

<u>Lema 2.7.3</u>: Si $\mathrm{Re}(s) < 0$, y $-r \leq t \leq t + [-\mathrm{Re}(ms)] \leq r$ entonces

$$\| A_s \|_{t,\, t+[-\mathrm{Re}(ms)]} < \infty$$

Además, si ℓ entero no negativo y $-r \leq t \leq t+\ell \leq r$ entonces, A_s depende analíticamente de s en $\mathrm{Re}(ms) < -\ell$ como operador de H^t en $H^{t+\ell}$; y depende continuamente de s en $\mathrm{Re}(ms) \leq -\ell$.

<u>Demostración</u>: Sea ℓ_1 un entero ≥ 0 , tal que $-1 < \mathrm{Re}(s+\ell_1) \leq 0$ .Puesto que $A_s = A_{s+\ell_1} A_{-\ell_1}$, aplicando el lema 2.7.2 se obtiene

$$\| A_s \|_{t,\, t+[-\mathrm{Re}(ms)]} \leq$$

$$\leq \| A_{s+\ell_1} \|_{t+m\ell_1,\, t+m\ell_1+[-\mathrm{Re}(m(s+\ell_1))]} \; \| A_{-\ell_1} \|_{t,\, t+m\ell_1} < \infty$$

Si $\mathrm{Re}(ms) < -\ell$, ℓ entero, y $-r \leq t \leq t+\ell \leq r$ podemos elegir ℓ_1 , ℓ_2 enteros, tales que $\ell_1 \geq 0$, $0 \leq \ell_2 \leq m-1$ y además

$$-m(\ell_1+1) - 1 < \mathrm{Re}(ms) < -m\ell_1 - \ell_2 \leq -\ell \,.$$

Se obtiene entonces

$$\| A_s \|_{t,t+\ell} \leq \| A_{s+\ell_1} \|_{t+m\ell_1,\, t+m\ell_1+\ell_2} \; \| A_{-\ell_1} \|_{t,t+m\ell_1}$$

donde $A_{s+\ell_1}$ depende analíticamente de s en la norma indicada, por el lema 2.7.2 puesto que $-1-\frac{1}{m} < \mathcal{R}e(s+\ell_1) < 0$.

c.q.d.

Ahora estamos en condiciones de definir las potencias de A

Definición: Sea k_0 el máximo entero tal que $m\, k_0 \leq r$. Si $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}e(s) < k_0$, definimos

$$A^s = A_s \qquad \text{si } \mathcal{R}e(s) < 0 \;.$$

$$A^s = A^{k_0} A_{s-k_0} \qquad \text{si } \mathcal{R}e(s-k_0) < 0$$

Notar que A^{k_0} está definido por la condición $m\, k_0 \leq r$ y es un operador diferencial con coeficientes continuos.

Veamos que A^s tiene las propiedades esperadas.

Lema 2.7.4: a) Sea ℓ un entero $\ell \leq k_0$. Si $\mathcal{R}e(s) < \ell$, A^s depende analíticamente de s como operador de H^t en $H^{t-m\ell}$ para $|t| \leq r$, $|t-m\ell| \leq r$; si $\mathcal{R}e(s) \leq \ell$, A^s depende continuamente de s .

b) $A^s A^t = A^{s+t}$ si $\mathcal{R}e(s), \mathcal{R}e(t), \mathcal{R}e(s+t)$ son $\leq k_0$.

c) $A^0 = I$; A^s es invertible si $|\mathcal{R}e(s)| \leq k_0$.

d) $\|A^s\|_{t,t+[-\mathcal{R}e(ms)]} < \infty$ si $-2r \leq \mathcal{R}e(ms) \leq m\, k_0$.

Demostración: b) se deduce de a) y del lema 2.5.1 a) por prolongación analítica. Los demás resultados son consecuencia inmediata de lemas anteriores.

2.8. El núcleo de A^s.

Para ciertos s , A^s resulta un operador integral respecto de la medida μ dada en la variedad M . Llamemos $K_s(x,y)$ a su núcleo, esto es:

$$A^s f(x) = \int_M K_s(x,y)\, f(y)\, d\mu_y \; .$$

Probaremos lo siguiente:

Teorema 2.8.1: Sea $N = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$

i) Si $r \geq 3N - m$ entonces A^s es un operador integral con núcleo continuo $K_s(x,y)$, para $\mathrm{Re}(s) < \min\left(-\frac{n}{m}, -1\right)$.

En este caso $s \longrightarrow K_s$ es una función analítica de $\mathrm{Re}(s) < \min\left(-\frac{n}{m}, -1\right)$ en $\mathcal{C}(M \times M)$.

ii) Sea ℓ entero, tal que $\ell \geq 0$ y

$$r \geq 3N + (2\ell + 1)m + 1 \; .$$

Entonces $K_s(x,x)$ se extiende desde $\mathrm{Re}(s) < -\frac{n}{m}$ a $\mathrm{Re}(s) < \ell + \frac{1}{m}$ como función meromorfa de s , con polos sólo en $s = \frac{-n+j}{m}$, $j = 0, 1, 2 \ldots$. Dichos polos son simples y los residuos están dados por

$$\mathrm{Res}\, K_s(\bar{x},\bar{x})\Big|_{s = \frac{-n+j}{m}} = \frac{1}{i m (2\pi)^{n+1}} \int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma} \lambda^{\frac{j-n}{m}}\, b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\xi$$

(x es la imagen de $\bar{x} \in M$ en $\mathbb{R}^n$)

Si s es un entero positivo o cero, $s < \ell$, el residuo se anula y el valor de $K_s(\bar{x},\bar{x})$ está dado por

$$(2.14) \qquad K_s(\bar{x},\bar{x}) = -\frac{e^{i(s+1)\theta}}{m\,(2\pi)^n}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty t^s\, b_{-m-sn-j}(x,\xi,t\,e^{i\theta})\,dt\,d\sigma_\xi$$

($\arg\lambda = \theta$ es la semirrecta recorrida por el camino Γ)

<u>Demostración:</u> Para probar i) escribiremos A^s como en (2.9) en la demostración del teorema 2.5.2

$$A^s = \sum_{\varphi} \psi\, h^* \mathrm{Op}\Big(\sum_{j=0}^{K} c_j(s)\Big) h_* \varphi + Q_K(s)$$

con $K = \left[\frac{r-m+N-1}{2}\right]$. Se satisfacen entonces las condiciones del Teorema 2.3.2 i) con $q_1 = q_2 = 0$, $t = -N$ Además, por las hipótesis establecidas sobre r, N y m se tiene que $t+K+1+m \geq N$ Luego, obtenemos que

$$\| Q_K(s) \|_{-N,N} < \infty \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) < -1 = \frac{q_1+q_2-n}{m}$$

y $Q_K(s)$ depende analíticamente de s en dicha norma. Por lo tanto $Q_K(s)$ es un operador integral con núcleo continuo $K(x,y,Q_K(s)) = \langle \delta_x, Q_K(s)(\delta_y)\rangle$, y éste es una función analítica de s (δ_x es la delta de Dirac en el punto $x \in M$; luego $x \longrightarrow \delta_x$ es una aplicación continua de M en $H^N(M)$ por el lema de Sobolef ya que $N = [\frac{n}{2}]+1 > \frac{n}{2}$).

Si $\operatorname{Re}(s) < -\frac{n}{m}$, entonces

$$\psi \, k^* Op(c_j(x,\xi,s)) \, k_* \, \varphi$$

es un operador integral con núcleo continuo cuya expresión en el mapa k es

$$\psi^*(x) \, \varphi^*(y) \, \frac{1}{(2\pi)^n} \int c_j(x,\xi,s) \, e^{i(x-y)\xi} \, d\xi ,$$

pues $c_j(s)$ es homogénea de grado $ms - j$ en $|\xi| \geq 1$

Luego, tenemos i).

Para probar ii) consideremos ℓ en las condiciones allí establecidas y $\operatorname{Re}(s) < \ell$ Sea $(\mathcal{U}, k)$ un entorno coordenado y $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ Como nos interesa el núcleo de A^s en la diagonal $x = y$, basta estudiar el de $\varphi A^s \varphi$. Entonces, si $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\tilde{\varphi} = 1$ en $\operatorname{sop} \varphi$

$$k_* \varphi A^s \varphi k^* = (k_* \varphi A^\ell \tilde{\varphi} k^*)(k_* \tilde{\varphi} A_{s-\ell} \varphi k^*) .$$

A^ℓ es un operador diferencial cuyo símbolo, en el sistema de coordenadas k es $\sigma(A^\ell) = \sum_\nu a_{m\ell-\nu}(x,\xi)$; $a_{m\ell-\nu}$ es homogénea de grado $m\ell-\nu$ en ξ, y tiene $r-\nu$ derivadas en x. Por lo tanto, expresando $k_* \tilde{\varphi} A_{s-\ell} \varphi k^*$ como en el Teorema 2.5.2 i), obtenemos

$$(2.15) \quad k_* \varphi A^s \varphi k^* = \varphi^* Op\Big(\sum_{j=0}^{K} d_j^\ell(s-\ell)\Big) \varphi^* +$$

$$+ \varphi^* Op\Big(\sum_{j=K+1}^{K+m\ell} t_j(s)\Big) \varphi^* + \tilde{R}_K(s-\ell)$$

donde d_j^{ℓ} fue definido en §2.6 ; hemos llamado

$$t_j(s) = \sum_{\substack{|\alpha|+\mu+\nu=j \\ \nu\leq K}} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\, \partial_\xi^{\alpha} a_{m\ell-\mu}\, \partial_x^{\alpha} c_\nu(s-\ell)$$

y

$$\tilde{R}_K(s-\ell) = \varphi^* Op\Big(\sum_\nu a_{m\ell-\nu}\Big) R_K(s-\ell)$$

Luego

$$\|\tilde{R}_K(s-\ell)\|_{-N,N} \leq \|\varphi^* Op(\sum a_{m\ell-\nu})\|_{N+m\ell,N}\ \|R_K(s-\ell)\|_{-N,N+m\ell}$$

Esta última norma es finita para $\Re e(s) < \ell + \frac{1}{m}$, en virtud de la estimación del Teorema 2.5.2 i) para el operador R_K , si elegimos $q_1 = m$, $q_2 = 1$, $2N+m\ell \leq K \leq \frac{r-m+N}{2}$ (Esto es posible por la hipótesis establecida sobre r , n , m y ℓ)

Así mismo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi^* Op(t_j(s))\varphi^*\|_{-N,N} \leq C\, \|t_j(s)\|_{N,n+1}^{-2N-\delta} \leq C\, \|t_j(s)\|_{r-j,n+1}^{\Re e(ms)-j} < \infty$$

para $\Re e(s) < \ell + \frac{1}{m}$, $K+1 \leq j \leq K+m\ell$, puesto que $2N \leq -m\ell + K$

Por lo anterior, $\varphi^* Op(\sum t_j(s))\varphi^* + \tilde{R}_K(s-\ell)$ es un operador integral con núcleo continuo $\tilde{K}(x,y,s)$, para $\Re e(s) < \ell + \frac{1}{m}$; y éste depende analíticamente de s

Para $\Re e(s) < -\frac{n}{m}$, el núcleo de $h_* \varphi A^s \varphi h^*$ en la diagonal $x = y$ es entonces

$$(\varphi^*)^2 \sum_{j=0}^{K} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d_j^\ell(x,\xi,s-\ell)\, d\xi \;+\; \tilde{K}(x,x,s)\,.$$

Por la homogeneidad de d_j^ℓ en $|\xi|\geq 1$ las integrales pueden calcularse como

$$\int_{|\xi|\leq 1} d_j^\ell(x,\xi,s-\ell)\, d\xi \;-\; \frac{1}{ms-j+n} \int_{|\xi|=1} d_j^\ell(x,\xi,s-\ell)\, d\sigma_\xi\,,$$

de donde se deduce que se extienden analíticamente a $\operatorname{Re}(s) < \ell + \frac{1}{m}$ con polos simples en $s = \frac{j-n}{m}$, $j = 0,1,\ldots K$.

Por el corolario 2.6.2, $d_j^\ell(s-\ell) = c_j(s)$ en $|\xi|\geq 1$; por lo tanto, los residuos en dichos polos están dados por

$$-\frac{1}{m(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1} c_j(x,\xi,s)\, d\sigma_\xi \Big|_{s=\frac{j-n}{m}} =$$

$$= \frac{1}{i\,m\,(2\pi)^{n+1}} \int_{|\xi|=1}\int_\Gamma \lambda^{\frac{j-n}{m}}\, b_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\sigma_\xi$$

La fórmula anterior se anula cuando $s = \frac{j-n}{m}$ es un entero no negativo.

Sólo resta probar entonces que $K_s(x,x)$, si s es un entero, $s \leq \ell$, puede calcularse por la fórmula (2.13).

Sea $B_s(x,y)$ el núcleo del operador $\varphi^*\, Op\big(\sum_j d_j^\ell(s-\ell)\big)\,\varphi^*$ en (2.15). Probaremos lo siguiente

<u>Lema</u>: a) Si $x \neq y$, la prolongación analítica de $B_s(x,y)$, en

$s = \ell$ se anula.

b) Si $x \neq y$, $K_s(x,y)$ también admite extensión analítica a $\Re e(s) < \ell + \frac{1}{m}$ y ésta se anula en $s = \ell$.

c) La extensión de $B_s(x,y)$ está dada por el miembro derecho de (2.13) en $s = \ell$.

Sabemos que

$$\varphi^*(x)\,\varphi^*(y)\,K_s(x,y) - B_s(x,y) = \tilde{K}(x,y,s)$$

admite extensión analítica , y ésta es contínua, aún en $x = y$. Por el lema $\tilde{K}(x,y,\ell) = 0$ si $x \neq y$ Luego $\tilde{K}(x,x,\ell) = 0$ o sea $K_s(x,x) = B_s(x,x)$ si $x \in \{\varphi^* = 1\}$ y utilizando c) tenemos la fórmula (2.14) (Sólo debemos elegir adecuadamente la función φ)

Demostración: Por simplicidad supondremos $\ell = 0$.

Notemos que para $-1 < \Re e(s) < 0$ podemos eliminar la parte circular del camino Γ , haciendo tender su radio a cero. Luego

(2.16) $$c_j(s) = \frac{i}{2\pi} \int_{\arg\lambda=\theta} \left(e^{2\pi i s} - 1\right) \lambda^s\, b_{-m-j}(\lambda)\, d\lambda$$

y tenemos

$$B_s(x,y) = \frac{\varphi^*(x)\,\varphi^*(y)}{(2\pi)^n} \sum_j \int c_j(x,\xi,s)\, e^{i(x-y)\cdot\xi}\, d\xi =$$

$$= c \, \frac{\varphi^*(x)\,\varphi^*(y)}{|x-y|^{2k}} \sum_j \int \Delta_\xi^k \, c_j(s)\, e^{i(x-y)\cdot\xi} \, d\xi$$

integrando por partes en ξ , si $x \neq y$.

Por lo tanto

$$B_s(x,y) =$$

$$= c(x,y)\,(e^{2\pi i s}-1)\cdot \sum_j \int\int_{\arg\lambda=\theta} \lambda^s \Delta_\xi^k \, b_{-m-j} \, e^{i(x-y)\xi} \, d\lambda \, d\xi$$

y aplicando las estimaciones del lema 2.1.1 ii) vemos que las integrales admiten extensión analítica a $Re(s) < 1$. Luego, por el factor $e^{2\pi i s} - 1$, $B_0(x,y) = 0$

Para probar b) consideramos φ_1 , φ_2 con soportes disjuntos Por el Teorema 2.5.2 ii) y las condiciones sobre r , n , m . y ℓ tendremos que

$$\| \varphi_1 A^s \varphi_2 \|_{-N,N} < \infty \qquad \text{para} \qquad Re(s) < \frac{1}{m}$$

y $\varphi_1 A^s \varphi_2$ es una función analítica de s en tal norma; por lo tanto, su núcleo $\varphi_1(x)\, K_s(x,y)\, \varphi_2(y)$ admite ~~extensión~~ extensión analítica a $Re(s) < \frac{1}{m}$ a valores en $\mathcal{C}(M \times M)$. Obtenemos entonces

$$0 = \varphi_1 A^s \varphi_2 \Big|_{s=0} = \int \varphi_1(x)\, K_s(x,y)\, \varphi_2(y)\, d\mu_y$$

pues $A^{0} = I$. Luego $K_0(x, y) = 0$ si $x \neq y$.

Veamos c).

$$(2\pi)^n B_s(x,x) = \varphi^*(x)^2 \sum_j \int_{|\xi|\leq 1} c_j(s)\, d\xi - \frac{1}{ms-j+n} \int_{|\xi|=1} c_j(s)\, d\sigma_\xi$$

Por (2.16) y el lema 2.1.1 ii) nuevamente, los términos con $j > 0$ se anulan en $s = 0$, salvo si $j = n$. Resulta entonces:

$$(2\pi)^n B_0(x,x) = \int_{|\xi|\leq 1} c_0(x,\xi,0)\, d\xi - \frac{1}{n} \int_{|\xi|=1} c_0(x,\xi,0)\, d\sigma_\xi +$$

$$+ \frac{1}{m} \int_{|\xi|=1} \int_{\arg \lambda = \theta} b_{-m-n}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\sigma_\xi .$$

Los primeros términos coinciden pues $c_0(x,\xi,s) = Q_m(x,\xi)^s = I$ en $s = 0$.

Hemos obtenido (2.14).

c.q.d.

3. OPERADORES ELIPTICOS DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

3.1. Función ζ de Riemann y determinante de un operador elíptico

Ciertos problemas físicos, de la Mecánica Cuántica, planteados mediante la integral funcional de Feynman, conducen formalmente al cálculo del "determinante" de un operador diferencial (o pseudo-diferencial) elíptico, definido en las secciones de un fibrado vectorial de dimensión finita, sobre una variedad compacta y sin borde ([6]). Un método empleado para dar sentido a tal determinante (o producto de los autovalores del operador), es el de la función ζ de Riemann.

Si A es un operador pseudo-diferencial elíptico, invertible, de orden $m > 0$, definido en la variedad M, tal que en cada sistema de coordenadas su símbolo tiene un desarrollo asintótico en funciones homogéneas, y tal que su símbolo principal cumple la hipótesis de Seeley (2.2) de § 2.1, entonces están definidas las potencias A^s y la extensión meromorfa de su núcleo $K_s(x,y)$ evaluado en la diagonal $x = y$ (Seeley [7]). Si $(\lambda_j)_j$ son los autovalores de A, se define la función ζ de Riemann de A, como

$$\zeta_A(s) = \sum_j \lambda_j^s$$

Si A es un operador normal $(A A^* = A^* A)$, tiene entonces base ortonormal de autofunciones, y $\zeta_A(s)$ se expresa como

$$\zeta_A(s) = \int_M tr\, K_s(x,x)\, d\mu_x$$

(tr indica la traza de la matriz K_s). Por lo tanto, ζ_A es analítica en $\Re e(s) < -\frac{n}{m}$, y admite extensión meromorfa a todo el plano complejo, regular en $s = 0$.

Se define entonces el determinante regularizado de A , $\mathfrak{D}et(A)$, como

$$\mathfrak{D}et(A) = e^{-\left(\frac{d}{ds}\zeta_A\,\big|_{s=0}\right)}$$

Tal definición es natural pues, formalmente,

$$\frac{d}{ds}\zeta_A(s)\Big|_{s=0} = \sum_j \log \lambda_j$$

Si el operador A depende de un parámetro ε ($A(\varepsilon)$) , nos interesa conocer el comportamiento del $\mathfrak{D}et(A(\varepsilon))$ respecto de ε . Tal dependencia puede provenir de una perturbación en el operador original, o de un cambio de variable en la integral funcional, interpretado como un cambio en el operador.

3.2. Potencias complejas de operadores dependientes de un parámetro.

Sea $(A(\varepsilon))_\varepsilon$ una familia de operadores pseudo-diferenciales en las condiciones señaladas en § 3.1. Llamaremos $K_s(\varepsilon, x, x)$ a la extensión meromorfa del núcleo de $A(\varepsilon)^s$ evaluado en la diagonal.

Recordemos que $A(\varepsilon)$ es un operador pseudo-diferencial de orden

m cuyos símbolos tienen desarrollos asintóticos en funciones homogéneas si:

i) Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}_0^\infty(\mathcal{U})$, $(\mathcal{U}, k)$ entorno coordenado en M, entonces

$$k_* \varphi_1 A(\varepsilon) \varphi_2 k^* = Op(a(\varepsilon, x, \xi))$$

para cierta función a tal que, existen funciones $a_{m-j}(\varepsilon, x, \xi)$ $j=0,1,\ldots$ homogéneas de grado $m-j$ en ξ , para $|\xi| \geq 1$, e infinitamente derivables en x y ξ que cumplen

$$\| a(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{K} a_{m-j}(\varepsilon) \|_{u,v}^{m-(K+1)} < \infty \qquad \text{para todo } u, v$$

ii) Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}^\infty(M)$ tienen soportes disjuntos, entonces $\varphi_1 A(\varepsilon) \varphi_2$ es un operador integral, respecto de la medida μ en M , con núcleo $k(\varepsilon, x, y)$, infinitamente derivable en x e y .

Diremos que la familia $(A(\varepsilon))_\varepsilon$ depende analíticamente de ε , si en i) las funciones $a_{m-j}(\varepsilon)$ y $a(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{K} a_{m-j}(\varepsilon)$ dependen analíticamente de ε en las normas $\| \ \|_{u,v}^{m-j}$ y $\| \ \|_{u,v}^{m-(K+1)}$ respectivamente, para todo u, v ; así como los núcleos $k(\varepsilon, x, y)$ en ii) considerados como funciones a valores en $\mathcal{E}^\infty(M \times M)$.

Probaremos entonces:

<u>Teorema 3.2.1</u>: Si $(A(\varepsilon))_\varepsilon$ depende analíticamente de ε , entonces sucede lo mismo con $K_s(\varepsilon, x, x)$ y todas sus derivadas respecto de s para $Re(s) < 1$, como funciones a valores en $\mathcal{E}(M \times M)$.(*)

<u>Demostración</u>: Probaremos la analiticidad en $\varepsilon = 0$. El resultado se obtendrá como consecuencia de tres lemas.

Notemos, en primer lugar que $A(\varepsilon)$ resulta una función analítica de ε en la norma $\| \ \|_{\ell,\ell-m}$ de los operadores de H^{ℓ} en $H^{\ell-m}$, para todo ℓ . Por lo tanto, basta suponer que $A(0)$ es invertible para que lo sea $A(\varepsilon)$, con ε suficientemente próximo a cero. Análogamente, si $A(0)-\lambda$ es invertible para $\lambda \in \Lambda$ salvo finitos puntos λ_i (Ver § 2.5) entonces $A(\varepsilon)-\lambda$ también lo es si $\lambda \in \Lambda$ y $|\lambda-\lambda_i|>\delta$, para algún $\delta>0$ y $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, pues

$$A(\varepsilon)-\lambda = \left[(A(\varepsilon)-A(0))\,(A(0)-\lambda)^{-1} + I \right] (A(0)-\lambda)$$

con $\|(A(\varepsilon)-A(0))\,(A(0)-\lambda)\|_{0,0}<1$ para λ y ε en las condiciones anteriores.

Luego, la elección del camino Γ para definir $A(\varepsilon)^{s}$ (§ 2.5) puede hacerse independientemente de ε , para ε pequeño.

Construimos como en § 2.3 una parametriz $B_K(\varepsilon,\lambda)$ para $A(\varepsilon)-\lambda$ mediante los coeficientes $b_{-m-j}(\varepsilon,x,\xi,\lambda)$ .Conservando la notación empleada en la sección 2, tenemos el siguiente resultado.

<u>Lema 3.2.2.</u>:

i) $b_{-m-j}(\varepsilon)$ es una función analítica de ε , en $\varepsilon=1$, respecto de las normas $_{\Lambda}\| \ \|^{-j}_{u,v}$ con u,v cualesquiera.

ii) Las funciones c_j dadas por

$$c_j(\varepsilon,x,\xi,s) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma} \lambda^{s}\, b_{-m-j}(\varepsilon,x,\xi,\lambda)\, d\lambda \qquad \text{si } \operatorname{Re}(s)<0$$

y si $\Re e\,(s) < p$

$$c_j(\varepsilon, x, \xi, s) =$$

$$= \sum_{|\alpha|+\ell+k=j} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \, \partial_\xi^\alpha a_{mp,\,mp-k}(\varepsilon, x, \xi) \; \partial_x^\alpha c_\ell(\varepsilon, x, \xi, s-p)$$

p entero positivo (ver § 2.5 y § 2.6) y sus derivadas respecto de s son analíticas en $\varepsilon = 0$, uniformemente para x en compactos.

Demostración: Dado que $a_m(\varepsilon) = \sum_j \varepsilon^j a_{m,j}$ en las normas $\| \ \|^m_{u,v}$ u, v cualesquiera, obtenemos

$$b_{-m}(\varepsilon, \lambda) = (a_{m,0} - \lambda)^{-1} \left[I + \sum_j \varepsilon^j a_{m,j} (a_{m,0} - \lambda)^{-1} \right]$$

Luego, la analiticidad de b_{-m} es consecuencia de las propiedades de las normas, señaladas en la observación 2.2.1, y de

$$\| a\,b \|^0_{u,v} \leq c \, \| a \|^0_{u,v} \, \| b \|^0_{u,v}$$

La analiticidad de b_{-m-j}, para $j > 0$, se prueba por inducción a partir de la fórmula recursiva que los define.

La prueba de ii) es consecuencia de lo anterior y de la fórmula que define las funciones $c_j(\varepsilon, x, \xi, s)$ (Observar que desaparecen las restricciones que en § 2.6 imponía la cantidad finita de derivadas)

c.q.d.

Como en (2.8) de § 2.5, escribimos

$$A(\varepsilon)^s = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s \, B_K(\varepsilon,\lambda) \, d\lambda \; +$$

(3.1)

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s \left[I - B_K(\varepsilon,\lambda)(A(\varepsilon)-\lambda) \right] (A(\varepsilon)-\lambda)^{-1} \, d\lambda$$

El primer término es un operador integral si $\mathrm{Re}(s) < -\frac{n}{m}$ (teorema 2.8.1) tal que la extensión meromorfa de su núcleo evaluado en la diago_ nal $x=y$ está dada, en cada sistema de coordenadas, por

$$\sum_{j=0}^{K} \int_{|\xi|\leq 1} c_j(\varepsilon,x,\xi,s)\, d\xi + \frac{-1}{ms-j+n} \int_{|\xi|=1} c_j(\varepsilon,x,\xi,s)\, d\sigma_\xi$$

por lo tanto, en virtud del lema anterior dicha extensión y sus deriva- das respecto de s son funciones analíticas en $\varepsilon = 0$, uniformemente pa- ra x en compactos.

<u>Lema 3.2.3</u>: Si $K \geq 2N$ y $\delta > 0$

$$(1+|\lambda|)^{1-\delta} \left[I - B_K(\varepsilon,\lambda)\,(A(\varepsilon)-\lambda) \right]$$

depende analíticame e de ε en $\varepsilon = 0$, en la norma $\| \;\|_{-N,N}$, uniformemente para $\lambda \in \Lambda$

<u>Demostración</u>: $I - B_K(\varepsilon,\lambda)(A(\varepsilon)-\lambda)$ es una suma finita de operadores de la forma

(3.2) $$\varphi - (A(\varepsilon)-\lambda)\,\psi\, h^* \mathcal{O}p\Big(\sum_j b_{-m-j}(\varepsilon,\lambda)\Big) h_* \varphi \qquad \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathcal{U})$$

(Ver § 2.4). Sea $\theta \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\theta = 1$ en $\operatorname{sop} \psi$. Luego

$$(A(\varepsilon)-\lambda)\psi = \theta(A(\varepsilon)-\lambda)\psi + (1-\theta)A(\varepsilon)\psi$$

donde $h_*(1-\theta)A(\varepsilon)\psi h^*$ es un operador integral con núcleo $k_\varepsilon(x,y) \in C^\infty(M\times M)$ que es analítico en $\varepsilon = 0$, él y sus derivadas.

Además

$$h_*\theta(A(\varepsilon)-\lambda)\psi h^* = Op(\theta^*(\sum_{k=0}^{K+m} a_{m-k}(\varepsilon)-\lambda))\psi^* + Op(\theta^* r_K(\varepsilon))\psi^*$$

con $\|a_{m-k}(\varepsilon)\|_{u,v}^{m-k} < \infty$, $\|r_K(\varepsilon)\|_{u,v}^{-(K+1)} < \infty$; a_{m-k} y r_K

son funciones analíticas en $\varepsilon = 0$, en dichas normas.

Luego (3.2) es suma de los tres operadores

$$R_1 = \varphi - h^* Op(\theta^*(\sum_k a_{m-k}-\lambda))\,Op(\psi^*\sum_j b_{-m-j})\varphi^* h_*$$

$$R_2 = h^* Op(r_K)\,Op(\psi^*\sum_j b_{-m-j})\varphi^* h_*$$

$$R_3 = h^* I_\varepsilon\, Op(\psi^*\sum_j b_{-m-j})\varphi^* h_*$$

donde I_ε es un operador integral, definido por el núcleo $k_\varepsilon(x,y)$.

Probaremos el resultado del lema para cada uno de estos operadores.

Tenemos

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}(1+|\lambda|)^{1-\delta}\|Op(\psi^*\sum_j b_{-m-j}(\lambda))\|_{-N,-N} \le c\,\Lambda\|\sum_j b_{-m-j}\|_{N,n+1}^0$$

por la proposición 2.3.1; además $\sum b_{-m-j}$ depende analíticamente de ε en esa norma, por el lema 3.2.2. Por otra parte

$$\| I_\varepsilon \|_{-N,N} \leq c \sup_{\substack{x,y \in \mathcal{U} \\ |\alpha| \leq N \ |\beta| \leq N}} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k_\varepsilon(x,y)|$$

Luego $\sup_{\lambda \in \Lambda} (1+|\lambda|)^{1-\delta} \| R_1(\varepsilon,\lambda) \|_{-N,N} < \infty$ y $(1+|\lambda|)^{1-\delta} R_1(\varepsilon,\lambda)$ es una función analítica en $\varepsilon = 0$ en esa norma

Vale lo mismo para $R_2(\varepsilon,\lambda)$, ya que tenemos, por el lema 1.2.1

$$\| Op(r_K(\varepsilon)) \|_{-N,N} \leq c \, \| r_K(\varepsilon) \|_{0,n+1}^{-2N-1} \leq c \, \| r_K(\varepsilon) \|^{-(K+1)}$$

Luego de un cálculo extenso, pero habitual para el desarrollo asintótico del símbolo de la composición de dos operadores pseudo-diferenciales (Calderón [5]), se obtiene

$$R_1(\varepsilon,\lambda) = \ell^* Op(t(\varepsilon,x,y,\xi,\lambda)) \, \ell_*$$

donde t se expresa en términos de las funciones $a_{m-k}(\varepsilon)$ y $b_{-m-j}(\varepsilon,\lambda)$. Por las propiedades de éstas

$$_\Lambda \| t(\varepsilon,x,y,\xi,\lambda) \|_{u,v,w}^{m-(K+1)} < \infty \qquad \text{para todo } u,v,w$$

y t es analítica en dicha norma respecto de ε . Luego, como

$$\| R_1(\varepsilon,\lambda) \|_{-N,N} \leq c \, \| t(\varepsilon,\lambda) \|_{N,N,n+1}^{-2N-1} \leq c \, (1+|\lambda|^{1/m})^{-m+1} \, {}_\Lambda \| t(\varepsilon) \|_{N,N,n+1}^{m-(K+1)}$$

pues $K \geq 2N$, tenemos la tesis.

c.q.d.

<u>Lema 3.2.4</u>: Si $\delta > 0$, $(1+|\lambda|)^{1-\delta}(A(\varepsilon)-\lambda)^{-1}$ depende analíticamente de ε en $\varepsilon=0$, en la norma $\| \quad \|_{-N,N}$ uniformemente para $\lambda \in \Gamma$.

<u>Demostración</u>: Si escribimos

$$(A(\varepsilon)-\lambda)^{-1} = (A(0)-\lambda)^{-1}\left[I+(A(\varepsilon)-A(0))(A(0)-\lambda)^{-1}\right]^{-1}$$

el resultado es consecuencia de la analiticidad de la familia $(A(\varepsilon))_{\varepsilon}$ y de la estimación análoga a la del corolario 2.4.3, para el caso de operadores pseudo-diferenciales (Seeley [7]).

§

De los lemas 3.2.3 y 3.2.4 se deduce que el segundo término de (3.2) es una función analítica en $\varepsilon=0$, en la norma $\| \quad \|_{-N,N}$, uniformemente para s en compactos de $\{ \mathcal{R}e(s) < 1\}$ .Luego, se trata de un operador integral con núcleo contínuo, y éste así como sus derivadas respecto de s tienen la misma propiedad en la norma $\| \quad \|_{\mathcal{C}(M)} = \sup_{x\in M} | \quad |$.

Se completa así la demostración del teorema 3.2.1 .

BIBLIOGRAFIA

[1] Agmond, S: "On the eigenfunctions and on the eigenvalues for general elliptic boundary value problems." Comm. Pure Appl. Math. 15, 119-147,(1962).

[2] Alvarez Alonso, J.D. y Calderón A.P.: "Functional calculi for pseudo-differential operators." Proc. Sem. on Fourier Analysis at El Escorial, Madrid, 1-62,(1979).

[3] Alvarez Alonso, J.D. y Calderón A.P.: " Functional calculi for pseudo-differential operators, I " , I.A.M.,CONICET Buenos Aires,(1979).

[4] Calderón A.P. : "Singular Integrals", Bull. Amer. Math. Soc.72, 426-465,(1966).

[5] Calderón A.P. : "Lectures notes on pseudo-differential operators and elliptic boundary problems, I", I.A.M., CONICET, Buenos Aires,(1976).

[6] Gamboa Saraví, R.E. Muschietti, M.A.y Solomin, J.E.: "On perturbations Theory for Regularized Determinants of Differential Operators", Commun. Math.Phys. 89, 363-373, (1983).

"On the regularized determinants for non invertible operators", Commun. Math. Phys. (a ser publicado).

Gamboa Saraví, R.E., Muschietti, M.A.,Schaposnik F.A. y Solomin J.E. "Chiral symetry and functional integral", Annals of Phys. (a ser publicado).

[7] Seeley, R.T.: "Complex powers of an Elliptic Operator", Proc. Sym. Pure Math. A.M.S., Vol 10, 288-307, (1967).

[8] Seeley, R.T.: "The resolvent of an elliptic boundary value problem", Amer. J. Math. 91, 889-920,(1969).