

# notas de matemática

CATEGORIES DE VARIETES ABSTRAITES

Marta Sagastume y Jorge Bosch

N° 16

1970

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

A mi mamá  
Marta

CATEGORIES DE VARIETES ABSTRAITES

Marta Sagastume y Jorge Bosch

Edición previa

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
Departamento de Matemática

1 9 7 0



Nota: Esta es una edición previa a la publicación del presente trabajo en la revista "Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle" que dirige Ehresmann.

## Catégories de variétés abstraites

Par Marta Sagastume et Jorge Bosch

### § 1.- Introduction

1.1. Terminologie. Cet article est le développement de notre note [1], avec quelques légers changements. Les topologies de Grothendieck seront appelées G-topologies; leur définition est celle de [3]. Dans tout ce qui suit, Ens est la catégorie des ensembles et fonctions, et G-Ens est la G-topologie qu'on obtient de Ens en ajoutant, comme  $\text{Cov}(G\text{-Ens})$ , la famille des ensembles  $\Phi$  de morphismes tels que, pour chaque  $\Phi$ , les images des fonctions appartenant à  $\Phi$  recouvrent au sens habituel un certain ensemble  $U_\Phi$ . On fera usage des foncteurs et transformations généralisés introduites par Ehresmann ([2]): un foncteur généralisé F, de la catégorie C dans la catégorie C', associe à chaque objet de C une classe non vide de morphismes de C', de telle façon que, si e est l'unité de l'objet A de C, F(e) est la classe des unités des objets de F(A); et si h = g  $\circ$  f dans C, alors

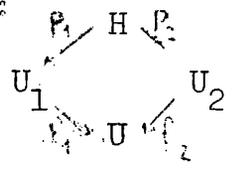
$$F(\underline{h}) = F(\underline{g}) \circ F(\underline{f}) = \{ z / \exists u \in F(\underline{f}) \text{ et } \exists v \in F(\underline{g}) \text{ avec } z = v \circ u \}.$$

Notre définition de transformation généralisé sera légèrement différente de celle de Ehresmann: si F et F' sont des foncteurs généralisés de C dans C', une transformation généralisée t, de F dans F', associe à chaque objet A de C une classe de morphismes qui ont pour source un objet de F(A) et pour but un objet de F'(A), de telle manière que: (i) Pour tout  $X \in F(A)$   $\exists$  au moins une flèche de t(A) dont la source est X; (ii) Si  $X \in F(A)$ ,  $X' \in F(B)$ ,  $Y \in F'(A)$ ,  $Y' \in F'(B)$ ,  $\underline{u}: X \rightarrow Y$  avec  $\underline{u} \in \underline{t}(A)$ ,  $\underline{v}: X' \rightarrow Y'$  avec  $\underline{v} \in \underline{t}(B)$ , et  $\underline{g} \in F(\underline{f})$  avec  $\underline{f}: A \rightarrow B$  et  $\underline{g}: X \rightarrow X'$ , alors il existe  $\underline{f}': A \rightarrow B$  et  $\underline{h}: Y \rightarrow Y'$  telles que  $\underline{h} \in F'(\underline{f}')$  et  $\underline{h} \circ \underline{u} = \underline{v} \circ \underline{g}$ . On compose les transformations généralisés de C dans

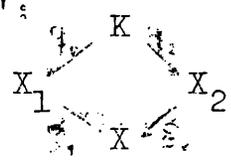
C', par la formule:  $(\underline{t}_2 \circ \underline{t}_1)(A) = \underline{t}_2(A) \circ \underline{t}_1(A)$ . On obtient ainsi une catégorie dont les objets sont les foncteurs généralisés de C dans C' et dont les morphismes sont les transformations généralisées entre des tels foncteurs. Si le second foncteur F' est constant, alors pour chaque  $X \in F(A)$  il y a exactement un morphisme appartenant à  $\underline{t}(A)$  dont la source est X.

Une transformation généralisée  $\underline{t}: F \rightarrow F'$  (foncteurs généralisés de C dans C') telle que, pour tout objet A de C et pour tout  $h \in \underline{t}(A)$ , h soit un isomorphisme dans C', sera dite équivalence faible de F dans F'.

Un foncteur généralisé de la G-topologie T dans la G-topologie T' est un foncteur généralisé  $F: \text{Cat } T \rightarrow \text{Cat } T'$  tel que les deux conditions suivantes sont remplies: (i) Pour tout ensemble  $\{\psi_i: V_i \rightarrow V\} \in \text{Cov } T$  et pour chaque  $X \in F(V)$ , si  $\Phi$  est la famille de tous les morphismes de la forme  $g: Y \rightarrow X$  avec  $g \in F(\psi_i)$  pour au moins un indice  $i$ , alors  $\Phi \in \text{Cov } T'$ . (ii) Pour tout diagramme de produit fibré dans Cat T:



et pour toute paire de morphismes dans Cat T',  $g_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $g_2: X_2 \rightarrow X$ , avec  $X_i \in F(U_i)$ ,  $X \in F(U)$  et  $g_i$  "valeurs" de F, il existe un diagramme de produit fibré dans Cat T':



avec  $q_i \in F(p_i)$ ,  $g_i \in F(f_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Il y a une notion évidente de cofoncteur généralisé et de transformation généralisée entre des tels cofoncteurs.

1.2. Théorème de Kan sur l'existence de limites. Il y a une notion évidente de limite d'un foncteur (ou d'un cofoncteur) généralisé, par rapport à une transformation généralisée, et le théorème d'existence de Kan [3] est valable sous la forme suivante:

Théorème de Kan pour les foncteurs généralisés dans Ens.

A tout foncteur généralisé  $F: C \rightarrow \text{Ens}$  on peut associer, de façon canonique, un ensemble  $A$  et une transformation généralisée  $\underline{t}$ , de manière que  $A$  soit limite directe de  $F$  par rapport à  $\underline{t}$ .

La démonstration suit le schéma de celle de [4]. Dans l'ensemble des triplets  $(U, V, \underline{x})$  tels que  $U \in \text{Ob}(C)$ ,  $V \in F(U)$  et  $\underline{x} \in V$ , on définit une relation (reflexive et transitive), notée  $\sim$ , par la condition suivante:  $(U, V, \underline{x}) \sim (U', V', \underline{x}')$  si et seulement s'il existe des morphismes  $\underline{f}: U \rightarrow U'$  et  $\underline{g}: V \rightarrow V'$  tels que  $\underline{g} \in F(\underline{f})$  et  $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{x}'$ . Soit  $R$  la relation d'équivalence engendrée par  $\sim$ :  $(U, V, \underline{x}) R (U', V', \underline{x}')$  si et seulement s'il existe une suite finie de triplets  $\underline{t}_0, \dots, \underline{t}_n$ , telle que  $\underline{t}_0 = (U, V, \underline{x})$ ,  $\underline{t}_n = (U', V', \underline{x}')$ ,  $\underline{t}_0 S \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_{n-1} S \underline{t}_n$ , où  $S$  est définie par la condition:  $\underline{t} S \underline{t}'$  si et seulement si:  $\underline{t} \sim \underline{t}'$  ou  $\underline{t}' \sim \underline{t}$ . Soit  $A$  l'ensemble quotient par  $R$ . On définit une transformation généralisée  $\underline{t}$ , de  $F$  dans le foncteur "constant" de domaine  $C$  et "valeur"  $A$ , en définissant comme  $\underline{t}(U)$  l'ensemble des applications  $\underline{t}(U)_V: V \rightarrow A$  (où  $V \in F(U)$ ) données par  $\underline{t}(U)_V(\underline{x}) = \overline{(U, V, \underline{x})}$ , où la barre indique la classe d'équivalence par rapport à  $R$ . Alors  $A$  est limite directe de  $F$  par rapport à  $\underline{t}$ .

Dans tout ce qui suit, nous écrivons simplement "limite" au lieu de "limite directe".

§ 2.- Atlas abstraits

2.1. Définition: Un atlas abstrait est un triplet  $(F, X, \underline{s})$ , où  $F$  est un foncteur généralisé de la  $G$ -topologie  $T$  dans la  $G$ -topologie  $\overline{T}$ ,  $X$  est une limite de  $F$  par rapport à une transformation généralisée  $\underline{t}$ , et  $\underline{s}$  est une équivalence faible de  $F$  dans le foncteur identique sur  $\text{Cat } T$ ; ceci implique que  $\text{cat } T$  doit être une sous-catégorie de  $\text{Cat } \overline{T}$ . Nous dirons que  $X$  est le support de l'atlas abstrait et que  $\underline{t}$  est la transformation associée à cet atlas.

2.2. Application aux atlas différentiables. Nous dirons qu'un atlas  $\mathcal{A}$ , différentiable de classe  $C^r$ , ou  $C^r$ -atlas dans le sens de [5],

est héréditaire, si les deux conditions suivantes sont remplies.

- (i) Si  $\mathcal{A}$ , avec  $A \in U$ , si  $B \in A$  est un ouvert et  $V \in U$  est un ouvert, alors  $\mathcal{A} \cap B$ , et  $\mathcal{A} \cap V$  (v)
- (ii) Si  $\mathcal{A}$ , avec  $A \in U$ , pour tout espace de Banach  $E$ , intervenant dans la définition de  $\mathcal{A}$ , pour tout ouvert  $V \in E$ , et pour tout  $C^r$ -isomorphisme  $f: U \rightarrow V$ , on a  $f \in \mathcal{A}$

Soit  $\mathcal{A}$  un  $C^r$ -atlas héréditaire. Nous appellerons  $\text{Cat } T$  la catégorie dont les objets sont les buts des cartes de  $\mathcal{A}$ , et dont les morphismes sont: les changements de carte de  $\mathcal{A}$ , les inclusions entre des objets de  $\text{Cat } T$ , et les composés (en nombre fini quelconque) de tels morphismes. Soit  $\text{Cov } T$  la famille des ensembles de morphismes de  $\text{Cat } T$  qui sont des inclusions et qui recouvrent un certain objet de  $\text{Cat } T$  au sens habituel. On obtient ainsi la  $G$ -topologie  $T$ . Soit  $\bar{T}$  la  $G$ -topologie que nous avons appelée  $G$ -Ens (1.1). Soit  $F$  le foncteur généralisé de  $T$  dans  $\bar{T}$  construit de la façon suivante: si  $U$  est un objet de  $\text{Cat } T$ ,  $F(U)$  est la classe des sources des cartes dont le but est  $U$ . Pour un morphisme  $f: U \rightarrow V$  dans  $\text{Cat } T$ , on envisage trois cas: si  $f$  est une équivalence (changement de carte),  $F(f)$  est la classe des identités des objets appartenant à  $F(U) \cap F(V)$ ; si  $f$  est une inclusion, alors pour tout  $V'$  tel que  $f_{V'}: V' \rightarrow V$  soit une carte de  $\mathcal{A}$ , on pose  $U' = f_{V'}^{-1}(U)$ , et l'on définit  $F(f)$  comme étant la classe de toutes les inclusions de la forme  $U' \rightarrow V'$ ; si  $f$  est une composition d'équivalences et inclusions, on définit  $F(f)$  de manière évidente en prenant toutes les compositions possibles. Soit  $X$  l'ensemble-sous-jacent à l'atlas  $\mathcal{A}$ . Alors  $X$  est limite de  $F$  par rapport à une transformation généralisée  $t$  qui à chaque objet  $U$  de  $\text{Cat } T$  associe l'ensemble des inclusions  $U' \rightarrow X$ , où  $U'$  parcourt  $F(U)$ . Soit maintenant  $s$  la transformation généralisée de  $F$  dans le foncteur identique sur  $\text{Cat } T$ , qui à chaque objet  $U$  de  $\text{Cat } T$  associe la classe des cartes de  $\mathcal{A}$  dont le but est  $U$ : c'est une équivalence faible. Le triplet  $(F, X, s)$  est un atlas abstrait, de support  $X$  et de transformation associée  $t$ .

2.3. Sous-catégories inclusives. Nous appelons ainsi toute sous-catégorie  $D$  de  $C$  telle que  $Ob(D) = Ob(C)$ , et pour  $A$  et  $B$  objets quelconques de  $D$ , l'ensemble  $D(A,B) \cup D(B,A)$  ait au plus un élément.

L'exemple typique de sous-catégorie inclusive est la sous-catégorie de Ens dont les morphismes sont toutes les inclusions.

2.4.  $C^r$ -catégories. Soit  $S$  un ensemble d'espaces de Banach; une catégorie sera dite  $C^r$ -catégorie, de type  $S$ , si ses objets sont des ouverts des espaces de  $S$  et ses morphismes sont: soit des  $C^r$ -isomorphismes, soit des inclusions, soit des composés de tels morphismes (en nombre fini quelconque), avec la propriété suivante: tout ouvert inclus dans un objet est un objet, toutes les inclusions entre des objets sont des morphismes, et tout  $C^r$ -isomorphisme d'un objet sur un ouvert d'un espace appartenant à  $S$  est un morphisme.

Une  $C^r$ - $G$ -topologie de type  $S$ , est une  $G$ -topologie  $T$  telle que  $Cat T$  est une  $C^r$ -catégorie de type  $S$  et  $Cov T$  est la famille des ensembles d'inclusions qui recouvrent au sens habituel un certain objet de  $Cat T$ .

### 3.- Passage de l'atlas abstrait à l'atlas différentiable.

3.1. Théorème. Soit  $(F, X, \underline{s})$ , avec  $F: T \rightarrow \underline{G-Ens}$ , un atlas abstrait, de transformation associée  $\underline{t}$ , tel que:

- (i)  $T$  est une  $C^r$ - $G$ -topologie de type  $S$ .
- (ii)  $F$  prend ses valeurs dans une sous-catégorie inclusive de  $Cat T = \underline{Ens}$ .

Alors il existe un  $C^r$ -atlas héréditaire  $\underline{g}$ , de type  $S$ , dont l'ensemble sous-jacent est  $X$  et dont les cartes sont les composés de la forme  $\underline{h} \circ \underline{g}^{-1}$ , avec  $\underline{h} \in \underline{s}(U)$ ,  $\underline{g} \in \underline{t}(U)$ , et où  $\underline{g}$  est la restriction de  $\underline{g}$  à son image.

Démonstration: Nous prouverons d'abord que, pour tout  $f: U_1 \rightarrow U_2$  dans  $Cat T$ , et pour tout  $\underline{g} \in F(f)$ , l'application  $\underline{g}$  est injective.

Supposons  $\underline{g}: V_1 \rightarrow V_2$ . Comme  $\underline{s}$  est une transformation généralisée

de  $F$  dans le foncteur identique sur  $\text{Cat } T$ , il existe  $\underline{h} \in \underline{s}(U_1)$ ,  $\underline{k} \in \underline{s}(U_2)$ , avec  $\underline{h}: V_1 \rightarrow U_1$ ,  $\underline{k}: V_2 \rightarrow U_2$ . Par définition de transformation généralisée, il existe donc un morphisme  $\underline{f}': U_1 \rightarrow U_2$ , tel que  $\underline{f}' \circ \underline{h} = \underline{k} \circ \underline{g}$ . Mais  $\underline{f}'$  (étant un morphisme de  $\text{Cat } T$ ) est injectif, et  $\underline{h}$  est injectif parce que  $\underline{s}$  est une équivalence faible. Donc  $\underline{g}$  est injectif.

Soit maintenant  $V \in F(U)$ , et appelons  $\underline{t}(U)_V: V \rightarrow X$ , l'unique application de source  $V$ , appartenant à  $\underline{t}(U)$ . Nous prouverons que cette application est injective. Il suffit de faire la démonstration pour le cas où  $X$  est la limite de  $F$  par rapport à  $\underline{t}$ , construite de manière canonique par application du théorème de Kan (1.2).

Supposons  $\underline{t}(U)_V(\underline{x}) = \underline{t}(U)_V(\underline{y})$ . Donc  $(U, V, \underline{x}) = (U, V, \underline{y})$ . Alors il existe une suite finie de triplets  $\underline{t}_0, \dots, \underline{t}_n$ , telle que (avec les notations de 1.2)  $\underline{t}_{i-1} \leq \underline{t}_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , et  $\underline{t}_0 = (U, V, \underline{x})$ ,  $\underline{t}_n = (U, V, \underline{y})$ . Pour  $n = 0$ , on a  $\underline{x} = \underline{y}$ . Supposons  $n = 1$ ; donc il existe  $\underline{f}: U \rightarrow U$ ,  $\underline{g}: V \rightarrow V$ , avec  $\underline{g} \in F(\underline{f})$  et  $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{y}$ , ou bien  $\underline{g}(\underline{y}) = \underline{x}$ . Par l'hypothèse (ii) de l'énoncé du théorème on a  $\underline{g} = l_V$ , donc  $\underline{x} = \underline{y}$ . Supposons maintenant  $n = 2$ . Alors il existe  $(U_1, V_1, \underline{x}_1)$  tel que l'un des cas suivantes est vérifié:

- (a)  $(U, V, \underline{x}) \leq (U_1, V_1, \underline{x}_1) \leq (U, V, \underline{y})$ ; (b)  $(U, V, \underline{y}) \leq (U_1, V_1, \underline{x}_1) \leq (U, V, \underline{x})$ ;
- (c)  $(U, V, \underline{x}) \leq (U_1, V_1, \underline{x}_1)$  et  $(U, V, \underline{y}) \leq (U_1, V_1, \underline{x}_1)$ ;
- (d)  $(U_1, V_1, \underline{x}_1) \leq (U, V, \underline{x})$  et  $(U_1, V_1, \underline{x}_1) \leq (U, V, \underline{y})$ .

Dans ce qui suit on suppose toujours  $\underline{g}_i \in F(\underline{f}_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Dans le cas (a) on a  $\underline{f}_1: U \rightarrow U_1$ ,  $\underline{f}_2: U_1 \rightarrow U$ ,  $\underline{g}_1: V \rightarrow V_1$ ,  $\underline{g}_2: V_1 \rightarrow V$ , avec  $\underline{g}_2(\underline{g}_1(\underline{x})) = \underline{y}$ . Mais  $\underline{g}_2 \circ \underline{g}_1 = l_V$ , donc  $\underline{x} = \underline{y}$ . Le cas (b) est analogue. Dans le cas (c) il existe  $\underline{f}_1, \underline{f}_2: U \rightarrow U_1$ ,  $\underline{g}_1, \underline{g}_2: V \rightarrow V_1$ , avec  $\underline{g}_1(\underline{x}) = \underline{g}_2(\underline{y})$ . Mais, d'après ce qu'on a prouvé au début de cette démonstration,  $\underline{g}_1$  est injective, et d'après l'hypothèse (ii),  $\underline{g}_1 = \underline{g}_2$ ; donc  $\underline{x} = \underline{y}$ . Le cas (d) est analogue.

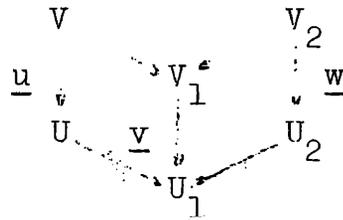
On démontrera par induction que, s'il existe une suite de  $n$  triplets  $\underline{t}_0, \dots, \underline{t}_n$ , avec les propriétés déjà énoncées, alors  $\underline{x} = \underline{y}$ . Ceci vient d'être démontré pour  $n = 0, 1, 2$ . Supposons-le vrai pour

$n \geq 2$ , et supposons qu'il y ait une suite de longueur  $n+1$  avec les propriétés énoncées:  $\underline{t}_0, \dots, \underline{t}_{n+1}$ . S'il existait un indice  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n$  et  $\underline{t}_{j-1} \quad \underline{t}_j \quad \underline{t}_{j+1}$ , ou  $\underline{t}_{j+1} \quad \underline{t}_j \quad \underline{t}_{j-1}$ , on aurait une suite de longueur  $n$  avec les mêmes propriétés, car la relation est transitive; donc, en vertu de l'hypothèse inductive, le théorème serait démontré. Alors, en remplaçant le symbole par une flèche, il ne reste à considérer que les deux cas suivants:

$$(1) (U, V, \underline{x}) \rightarrow (U_1, V_1, \underline{x}_1) \leftarrow (U_2, V_2, \underline{x}_2) \rightarrow (U_3, V_3, \underline{x}_3) \dots$$

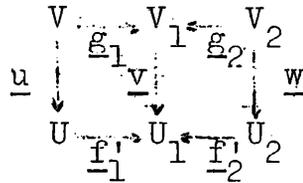
$$(2) (\bar{U}, V, \underline{x}) \leftarrow (U_1, V_1, \underline{x}_1) \rightarrow (U_2, V_2, \underline{x}_2) \leftarrow (U_3, V_3, \underline{x}_3) \dots$$

Dans le cas (1) on a un diagramme non nécessairement commutatif:



avec  $\underline{u} \in \underline{s}(U)$ ,  $\underline{v} \in \underline{s}(U_1)$ ,  $\underline{w} \in \underline{s}(U_2)$ .

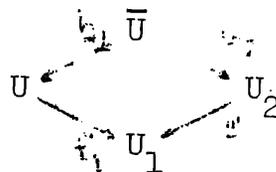
Mais, comme  $\underline{s}$  est une transformation généralisée, il existe  $\underline{f}_1, \underline{f}_2$  dans  $\text{Cat } T$  tels que le diagramme suivant commute:



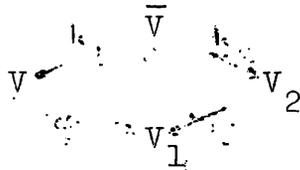
Comme  $\underline{g}_1(\underline{x}) = \underline{g}_2(\underline{x}_2) = \underline{x}_1$ , on a  $\underline{f}_1(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{f}_2(\underline{w}(\underline{x}_2)) = \underline{v}(\underline{x}_1)$ , donc  $\bar{U} = \text{Im } \underline{f}_1 \cap \text{Im } \underline{f}_2$  est un ouvert non vide inclus dans  $U_1$ , donc par hypothèse (i) on a  $\bar{U} \in \text{Ob}(\text{Cat } T)$ . Si l'on pose donc

$$\underline{h}_1 = (\underline{f}_1 \mid \underline{f}_1^{-1}(\bar{U}))^{-1}$$

on a dans  $\text{Cat } T$  le diagramme de produit fibré:



Alors, par définition de foncteur généralisé entre  $G$ -topologies (1.1), il existe dans  $\text{Cat } T$  un diagramme de produit fibré:



avec  $\underline{k}_i \in F(\underline{h}_i)$  et  $\underline{g}_i \in F(\underline{f}_i)$ . Mais par l'hypothèse (ii) il vient:  $\underline{g}'_i = \underline{g}_i$ , donc il existe  $\bar{x} \in \bar{V}$  tel que  $\underline{g}_1(\underline{k}_1(\bar{x})) = \underline{g}_2(\underline{k}_2(\bar{x})) = \underline{x}_1$ , et par l'injectivité établie au début de cette démonstration on a  $\underline{k}_1(\bar{x}) = \underline{x}$ ,  $\underline{k}_2(\bar{x}) = \underline{x}_2$ , et ceci donne une suite de triplets à  $n+1$  termes, allant de  $(U, V, \underline{x})$  vers  $(U, V, \underline{y})$ :

$$(U, V, \underline{x}) \rightarrow (\bar{U}, \bar{V}, \bar{x}) \rightarrow (U_2, V_2, \underline{x}_2) \rightarrow (U_3, V_3, \underline{x}_3) \dots$$

où l'on a deux flèches consécutives de même sens; donc on est ramené à une suite de longueur  $n$ , ce qui donne  $\underline{x} = \underline{y}$ . Pour le cas (2) la démonstration est analogue.

On a donc prouvé que, pour tout  $U \in \text{Ob}(\text{Cat } T)$  et pour tout  $\underline{g} \in \underline{t}(U)$ ,  $\underline{g}$  est injective. Si l'on appelle  $\underline{g}$  la restriction de  $\underline{g}$  à son image, il existe les cartes de la forme  $\underline{h} \circ \underline{g}^{-1}$ , avec  $\underline{h} \in \underline{s}(U)$ , et il est clair que leurs domaines recouvrent  $X$ . Il reste à prouver que les changements de carte sont des  $C^r$ -isomorphismes. Soient donc  $\underline{h}_1 \circ \underline{g}_1^{-1}$  et  $\underline{h}_2 \circ \underline{g}_2^{-1}$  des cartes de même domaine  $A$  et buts  $U_1, U_2$  respectivement. On doit démontrer que le composé

$$\underline{k} = \underline{h}_2 \circ \underline{g}_2^{-1} \circ \underline{g}_1 \circ \underline{h}_1^{-1} : U_1 \rightarrow U_2$$

est une  $C^r$ -équivalence. Il est évidemment bijectif, donc il suffit de démontrer que c'est localement un isomorphisme de classe  $C^r$ .

Soient:  $\underline{x}_1 \in U_1$ ,  $\underline{x}_2 = \underline{k}(\underline{x}_1)$ ,  $\underline{y}_1 = \underline{h}_1^{-1}(\underline{x}_1)$ ,  $\underline{y}_2 = \underline{h}_2^{-1}(\underline{x}_2)$ . Donc  $\underline{g}_1(\underline{y}_1) = \underline{g}_2(\underline{y}_2)$ , et comme  $\underline{g}_i \in \underline{t}(U_i)_{V_i}$ , on a  $(U_1, V_1, \underline{y}_1) \bar{R} (U_2, V_2, \underline{y}_2)$ .

Il y a donc une suite:

$$(W_1, Z_1, \underline{z}_1) S (W_2, Z_2, \underline{z}_2) S \dots S (W_n, Z_n, \underline{z}_n),$$

avec  $(W_1, Z_1, \underline{z}_1) = (U_1, V_1, \underline{y}_1)$  et  $(W_n, Z_n, \underline{z}_n) = (U_2, V_2, \underline{y}_2)$ .

Alors, pour chaque  $i = 1, \dots, n-1$ , il y a un morphisme  $\underline{f}_i$  appartenant à  $\text{Cat } T(W_i, W_{i+1}) \cup \text{Cat } T(W_{i+1}, W_i)$  et un morphisme  $\underline{a}_i$  appartenant à  $\text{Cat } \bar{T}(Z_i, Z_{i+1}) \cup \text{Cat } \bar{T}(Z_{i+1}, Z_i)$ , avec  $\underline{a}_i \in F(\underline{f}_i)$  tel que

$$\underline{a}_i(\underline{z}_i) = \underline{z}_{i+1} \text{ ou } \underline{a}_i(\underline{z}_{i+1}) = \underline{z}_i. \quad (*)$$

Par définition de transformation généralisée, il y a pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , un isomorphisme dans  $\text{Cat } \bar{T}$ ,  $\underline{m}_i: Z_i \rightarrow W_i$ , tel que  $\underline{m}_i \in \underline{s}(W_i)$ ; nous prendrons  $\underline{m}_1 = \underline{h}_1$ ,  $\underline{m}_n = \underline{h}_2$ . Encore par définition de transformation généralisée, il existe  $\underline{f}'_i$ , de même source et même but que  $\underline{f}_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), tel que le carré formé par  $\underline{m}_i, \underline{a}_i, \underline{m}_{i+1}, \underline{f}'_i$ , est commutatif. Compte tenu de ce fait et de (\*), on voit qu'il existe des ouverts  $W'_i \subset W_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), avec  $\underline{x}_1 \in W'_1, \underline{x}_2 \in W'_n$ , et des  $C^r$ -isomorphismes  $\underline{f}''_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) tels que  $\underline{f}''_i$  est la restriction de  $\underline{f}'_i$  à  $W'_i$  et  $W'_{i+1}$ , et les  $\underline{f}''_i$  ou leurs inverses (convenablement choisis, pour chaque  $i$ ) donnent par composition un  $C^r$ -isomorphisme  $\underline{f}'': W'_1 \rightarrow W'_n$ , avec  $\underline{f}''(\underline{x}_1) = \underline{x}_2$ . Soit maintenant  $\underline{x}'_1 \in W'_1$ , et soit  $\underline{y}'_1 = \underline{h}_1^{-1}(\underline{x}'_1)$ . Par commutativité des carrés  $\underline{m}_i, \underline{a}_i, \underline{m}_{i+1}, \underline{f}'_i$ , il existe  $\underline{y}'_2 \in Z_n, \underline{x}'_2 \in W'_n$ , tels que

$$\underline{f}''(\underline{x}'_1) = \underline{x}'_2, \quad \underline{h}_2(\underline{y}'_2) = \underline{x}'_2. \quad (**)$$

Mais, comme  $\underline{a}_i \in F(\underline{f}_i)$ , on a  $(U_1, V_1, \underline{y}'_1) R (U_2, V_2, \underline{y}'_2)$ , donc

$$\underline{g}_1(\underline{y}'_1) = \underline{g}_2(\underline{y}'_2) \quad (***)$$

De la seconde formule (\*\*) et de (\*\*\*) on déduit:

$$(\underline{h}_2 \circ \underline{g}_2^{-1} \circ \underline{g}_1 \circ \underline{h}_1^{-1})(\underline{x}'_1) = \underline{x}'_2.$$

Alors le  $C^r$ -isomorphisme  $\underline{f}''$  coïncide avec  $\underline{k}$  dans un voisinage de  $\underline{x}'_1$ , ce qui montre que  $\underline{k}$  est localement un  $C^r$ -isomorphisme.

3.2. Proposition. Soit un  $C^r$ -atlas héréditaire (au sens de 2.2), de ensemble sous-jacent  $X$ , et soit  $(F, X, \underline{s})$  l'atlas abstrait associé à lui par la méthode de (2.2), avec  $F: T \rightarrow G\text{-Ins}$ . Alors  $(F, X, \underline{s})$  vérifie les hypothèses du théorème 3.1, et l'application de ce théorème à  $(F, X, \underline{s})$  donne l'atlas  $\mathcal{O}$ .

En effet, si  $S$  est l'ensemble des espaces de Banach intervenant dans la définition de l'atlas  $\mathcal{O}$ , la  $G$ -topologie  $T$  vérifie la condition (i) de 3.1 puisque  $\mathcal{O}$  est héréditaire, et le foncteur  $F$  vérifie

la condition (ii) de 3.1 par construction (2.2). Le reste de la démonstration est évident .

#### 4. Morphismes d'atlas abstraits

4.1. Définition. tant donné une classe C d'atlas abstraits  $\{(F_i, X_i, s_i)\}$ , pour  $i \in I$ , telle que pour tout  $i \in I$ ,  $F_i$  soit un foncteur généralisé de la G-topologie  $T_i$  dans la G-topologie  $\bar{T}$  (avec  $\bar{T}$  constante), on dira que la G-topologie K est intermédiaire pour la classe C, si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (i) K est une sous-G-topologie de  $\bar{T}$ .
- (ii) Pour tout  $i \in I$ ,  $T_i$  est une sous-G-topologie de K.
- (iii) Pour tout  $i \in I$  et pour tout objet U de  $\text{Cat } T_i$ , si  $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ , alors  $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\} \in \text{Cov } T_i$ .

4.2. Excmple. Si C est une classe de  $C^r$ -atlas héréditaires, on peut prendre comme  $\text{Ob}(\text{Cat } K)$  la réunion des classes d'objets des catégories  $\text{Cat } T_i$  obtenues par la méthode de 2.2, comme morphismes de  $\text{Cat } K$  toutes les applications  $C^r$ -différentiables entre tels objets, et comme  $\text{Cov } K$  la réunion de toutes les  $\text{Cov } T_i$ . On obtient ainsi une G-topologie K, intermédiaire pour la classe C.

4.3. Définition. Soient  $(F_1, X_1, s_1)$ ,  $(F_2, X_2, s_2)$  des atlas abstraits avec  $F_1: T_1 \rightarrow \bar{T}$ ,  $F_2: T_2 \rightarrow \bar{T}$ , et transformations associées  $t_1$ ,  $t_2$ .

Soit K une G-topologie intermédiaire pour la classe formée par ces atlas. Un K-morphisme de  $(F_1, X_1, s_1)$  dans  $(F_2, X_2, s_2)$  est un morphisme de  $\text{Cat } \bar{T}$ :  $f: X_1 \rightarrow X_2$ , tel que, pour tout diagramme de  $\text{Cat } T_1$ :

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$$

avec  $U' \in F_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ ,  $m \in s_1(U)$ , il existe

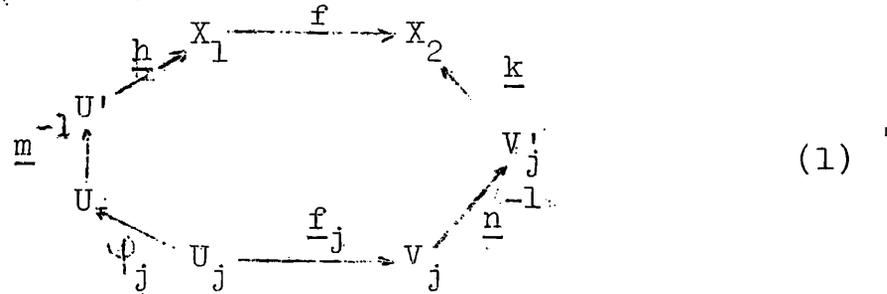
$$\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov } T_1$$

tel que, pour chaque  $j \in J$  il existe un diagramme dans  $\text{Cat } T_2$ :

$$V_j \xleftarrow{n} V'_j \xrightarrow{k} X_2$$

avec  $V'_j \in F_2(V_j)$ ,  $k \in t_2(V_j)$ ,  $n \in s_2(V_j)$ , et un morphisme de  $\text{Cat } K$ ,

$\underline{f}_j: U_j \rightarrow V_j$ , de façon que le diagramme suivant soit commutatif:



**4.4. Proposition.** Soit  $C$  une classe d'atlas abstraits, et soit  $K$  une  $G$ -topologie intermédiaire pour  $C$ . Si l'on prend comme classe d'objets la classe  $C$ , comme morphismes les  $K$ -morphismes entre les atlas de  $C$  d'après 4.3, et comme composition celle de  $\bar{T}$  ( $\bar{T}$  étant la  $G$ -topologie "but" pour tous les atlas de  $C$ ), alors on obtient une catégorie.

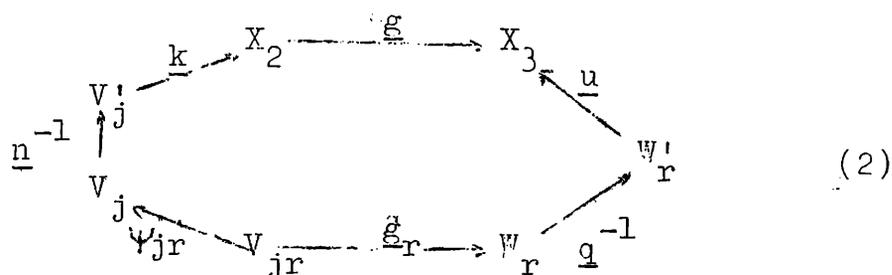
En effet: pour tout atlas  $(F, X, \underline{s}) \in C$ , l'application  $l_X$  est un  $K$ -morphisme de cet atlas dans lui-même; pour le voir, il suffit de prendre comme  $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}$  la classe d'un élément  $\{1_U\}$ , comme  $V_j$  le même objet  $U$ , comme  $\underline{f}_j$  l'identité  $l_U$ , et  $\underline{n} = \underline{m}$ ,  $\underline{k} = \underline{h}$ .

De plus, si  $\underline{f}: (F_1, X_1, \underline{s}_1) \rightarrow (F_2, X_2, \underline{s}_2)$ ,  $\underline{g}: (F_2, X_2, \underline{s}_2) \rightarrow (F_3, X_3, \underline{s}_3)$ , sont des  $K$ -morphismes, le composé  $\underline{g} \circ \underline{f}$  est un  $K$ -morphisme dans le troisième. Pour le voir, soit dans  $\text{Cat } T_1$  le diagramme  $U \xrightarrow{\underline{m}} U' \xrightarrow{\underline{h}} X_1$  comme dans 4.3. Puisque  $\underline{f}$  est un  $K$ -morphisme, il existe

$\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ , élément de  $\text{Cov } T_1$ , tel que, pour tout  $j \in J$

il existe  $\underline{f}_j: U_j \rightarrow V_j$  dans  $\text{Cat } K$  et le diagramme commutatif (1). Mais, étant donné le diagramme  $V_j \xleftarrow{\underline{n}} V'_j \xrightarrow{\underline{k}} X_2$  dans  $\text{Cat } T_2$ , et puisque

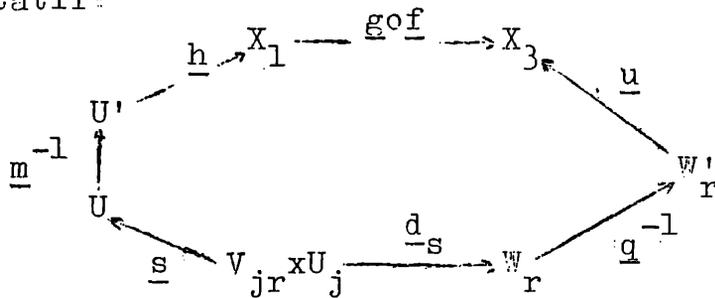
$\underline{g}$  est un  $K$ -morphisme, il existe  $\{\psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j\}_{r \in R} \in \text{Cov } T_2$ , et pour chaque  $r \in R$  un morphisme de  $\text{Cat } K$ ,  $\underline{g}_r: V_{jr} \rightarrow W_r$ , de façon qu'il y a un diagramme commutatif:



avec  $\underline{u} \in \underline{t}_3(W_r)$ ,  $\underline{q} \in \underline{s}_3(W_r)$ . Comme  $\Psi = \{ \Psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j \} \in \text{Cov } T_2$ , on a  $\Psi \in \text{Cov } K$  puisque  $T_2$  est une sous- $G$ -topologie de  $K$ . Donc, si l'on appelle  $V_{jr} \times U_j$  le produit fibré de  $V_{jr}$  par  $U_j$  sur  $V_j$  par rapport à  $\Psi_{jr}$  et  $\underline{f}_j$ , on a  $\Phi = \{ V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j \}_r \in \text{Cov } K$ . Mais  $K$  est intermédiaire et  $U_j \in \text{Ob}(\text{Cat } T_1)$ ; donc  $\Phi \in \text{Cov } T_1$ . Alors:  $\Sigma = \{ V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j \}_{j,r} \in \text{Cov } T_1$ .

Posons  $\Sigma = \{ \sigma_{sj} \}$  pour  $\underline{s} \in S$ . Pour chaque  $\underline{s} \in S$  il existe un morphisme de  $\text{Cat } K$ ,  $\underline{d}_s: V_{jr} \times U_j \rightarrow W_r$ , obtenu par composition de la projection de produit fibré  $V_{jr} \times U_j \rightarrow V_{jr}$ , avec

$\underline{g}_r: V_{jr} \rightarrow W_r$ . On voit alors facilement que le diagramme suivant est commutatif:



ce qui prouve la proposition.

4.5. Proposition. Soient  $\alpha_1, \alpha_2$ , des  $C^r$ -atlas héréditaires, de type  $S$ , dont les ensembles sous-jacents sont  $X_1, X_2$ , respectivement. Soit  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) l'atlas abstrait obtenu de  $\alpha_i$  par application de 2.2; soient  $K$  la  $G$ -topologie intermédiaire décrite dans 4.2, en prenant comme  $C$  la classe  $\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ , et

$$\underline{f}: X_1 \rightarrow X_2$$

une fonction. Alors,  $\underline{f}$  est une  $C^r$ -application différentiable de la structure de  $C^r$ -variété différentiable définie par  $\alpha_1$  dans celle définie par  $\alpha_2$ , si et seulement si  $\underline{f}$  est un  $K$ -morphisme de  $A_1$  dans  $A_2$  au sens de 4.3.

4.6. Proposition. Soient  $A_1, A_2$ , des atlas abstraits qui satisfont les hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.1;  $\alpha_1, \alpha_2$ , les

$C^r$ -atlas correspondants par application du théorème 3.1;  $K$  la  $G$ -topologie intermédiaire pour la classe  $\{A_1, A_2\}$ , décrite dans 4.2; et  $f: X_1 \rightarrow X_2$  une fonction ( $X_i$  étant le support de  $A_i, i=1,2$ ). Soit  $V_i$  la  $C^r$ -variété définie par l'atlas  $\mathcal{A}_i$ . Alors  $f$  est un  $K$ -morphisme de  $A_1$  dans  $A_2$ , dans le sens de 4.3, si et seulement si  $f$  est une application  $C^r$ -différentiable de  $V_1$  dans  $V_2$ .

## § 5. Variétés abstraites

5.1. Définition. Soit  $C$  une classe d'atlas abstraits et soit  $K$  une  $G$ -topologie intermédiaire pour  $C$ . Soient  $A_i = (F_i, X_i, s_i) \in C$ , pour  $i = 1, 2$ . On dira que  $A_1$  est  $K$ -équivalent à  $A_2$  ssi  $X_1 = X_2$  et  $l_X$  est un  $K$ -morphisme de  $A_1$  dans  $A_2$  et de  $A_2$  dans  $A_1$  (et c'est donc un isomorphisme).

C'est une relation d'équivalence dans  $C$ .

5.2. Définition. Dans les conditions de 5.1, on appelle  $K$ -variété abstraite chacune des classes d'équivalence dans  $C$  par la relation de  $K$ -équivalence. Un  $K$ -morphisme entre telles variétés est un  $K$ -morphisme entre des représentants respectifs.

5.3. Théorème. Dans les conditions de 5.2, les  $K$ -variétés abstraites et les  $K$ -morphismes entre elles forment une catégorie.

5.4. Proposition. Soit  $A$  un atlas abstrait qui satisfasse (i) et (ii) de 3.1. Soient  $\mathcal{A}$  le  $C^r$ -atlas obtenu par application de 3.1, et  $A'$  l'atlas abstrait obtenu de  $\mathcal{A}$  par application de 2.2. Alors  $A$  et  $A'$  sont  $K$ -équivalents ( $K$  étant comme dans 4.2) et ils appartiennent donc à la même  $K$ -variété abstraite.

En effet: soit  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$  dans  $\text{Cat } T$ , avec  $U' \in F(U)$ ,  $m \in s(U)$ ,  $h \in t(U)$ . Il existe  $\{l_U: U \rightarrow U'\} \in \text{Cov } T$ , le diagramme dans  $\text{Cat } T_2 = \text{Cat } T$   $U \xleftarrow{m \circ h^{-1}} l_U(U') \xrightarrow{h} X$ , et le morphisme  $l_U$  (à la place de  $f_j$ ), tels que  $l_X$  satisfait la définition de morphisme 4.3.

Réciproquement: étant donné le diagramme

$$U \xleftarrow{\text{moh}^{-1}} \underline{h}(U') \hookrightarrow X,$$

le recouvrement  $\{l_U: U \rightarrow U\}$ , le diagramme  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ , et le morphisme de  $\text{Cat } K$ ,  $l_U: U \rightarrow U$ , permettent d'établir que  $l_X$  est un morphisme de  $A'$  dans  $A$ .

5.5. Théorème. Soit  $S$  une classe d'espaces de Banach, et soit  $K$  la  $G$ -topologie définie comme il suit les objets de  $\text{Cat } K$  sont les ouverts des espaces de  $S$ , les morphismes de  $\text{Cat } K$  sont les applications  $C^r$ -différentiables entre ces objets, et les éléments de  $\text{Cov } K$  sont les classes d'inclusions entre des objets de  $\text{Cat } K$  qui recouvrent au sens habituel  $U$  (où  $U$  parcourt  $\text{Ob}(\text{Cat } K)$ ). Soit  $V^r$  la catégorie des  $C^r$ -variétés de type  $S$  et des  $C^r$ -morphismes, et soit  $VA^r$  la catégorie suivante: les objets de  $VA^r$  sont les variétés abstraites construites sur des  $C^r$ -topologies de type  $S$  (au sens de 2.4) à l'aide de foncteurs généralisés qui prennent leurs valeurs dans des sous-catégories inclusives de  $\underline{\text{ms}}$ ; les morphismes de  $VA^r$  sont les  $K$ -morphismes entre ces objets. Alors, la construction 2.2 et la proposition 4.5 définissent un foncteur ordinaire de  $V^r$  dans  $VA^r$ , et le théorème 3.1 et la proposition 4.6 définissent un foncteur de  $VA^r$  dans  $V^r$ . Ces foncteurs sont inverses l'un de l'autre, et les catégories  $V^r$  et  $VA^r$  sont donc isomorphes.

5.6. Remarque. Dans tout cet article on peut remplacer "espaces de Banach" par "espaces localement convexes", et " $C^r$  variété" par "variété différentiable" au sens de [6].

#### Références

- [1] C.R.Acad.Sci. Paris (Tome 270, N° 24, série A, p. 1565, Juin/70)
- [2] C. Ehresmann: "Catégories et structures" (Dunod. Paris, 1965).
- [3] M. Artin: "Grothendieck topologies" (Harvard University, 1962).
- [4] D. Kan: "Functors involving c.s.s. complexes" (Trans.Amer.Math.

Soc. Vol. 87, 1958, pp. 330-346).

- [5] N. Bourbaki: "Variétés différentielles et analytiques"  
(Fascicule de résultats. Hermann, Paris)
- [6] A. Bastiani: "Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie" (Jour. d'Analyse Math. Vol. XIII, 1964, pp. 1-114).

-----

