notas de matemática

CATEGORIES DE VARIETES ABSTRAITES

Marta Sagastume y Jorge Bosch

N° 16 1970

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

A mi mamá

Marta

CATEGORIES DE VARIETES ABSTRAITES

Marta Sagastume y Jorge Bosch

Edición previa

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
Departamento de Matemática

1 9 7 0

Nota: Esta es una edición previa a la publicación del presente trabajo en la revista "Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle" que dirige Ehresmann.

Catégories de variétés abstraites

Par Marta Sagastume et Jorge Bosch

§ 1.- Introduction

1.1. Terminologie. Cet article est le developpement de notre note [1], avec quelques légers changements. Les topologies de Grothendieck seront appelées G-topologies; leur définition est celle de [3]. Dans tout ce qui suit, Ens est la catégorie des ensambles et fonctions, et G-Ens est la G-topologie qu'on obtient de Ens en ajoutant, comme Cov(G-Ens), la famille des ensambles Φ de morphismes tels que, pour chaque Φ, les images des fonctions appartenant á Φ recouvrent au sens habituel un certain ensamble U_Φ. On fera usage des foncteurs et transformations généralisés introduites par Ehresmann ([2]): un foncteur généralisé F, de la catégorie C dans la catégorie C', associe à chaque objet de C une classe non vide de morphismes de C', de telle façon que, si $\underline{e}$ est l'unité de l'objet A de C, F($\underline{e}$) est la classe des unités des objets de F(A); et si $\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f}$ dans C, alors

$$F(\underline{h}) = F(\underline{g}) \circ F(\underline{f}) = \{ z / \exists\, \underline{u} \in F(\underline{f}) \text{ et } \exists\, \underline{v} \in F(\underline{g}) \text{ avec } \underline{z} = \underline{v} \circ \underline{u} \}.$$

Notre définition de transformation généralisé sera légèrement différente de celle de Ehresmann: si F et F' sont des foncteurs généralisés de C dans C', une transformation généralisée $\underline{t}$, de F dans F', associe à chaque objet A de C une classe de morphismes qui ont pour source un objet de F(A) et pour but un objet de F'(A), de telle manière que: (i) Pour tout $X \in F(A)$ $\exists$ au moins une flèche de $\underline{t}$(A) dont la source est X; (ii) Si $X \in F(A)$, $X' \in F(B)$, $Y \in F'(A)$, $Y' \in F'(B)$, $\underline{u}: X \to Y$ avec $\underline{u} \in \underline{t}(A)$, $\underline{v}: X' \to Y'$ avec $\underline{v} \in \underline{t}(B)$, et $\underline{g} \in F(\underline{f})$ avec $\underline{f}: A \to B$ et $\underline{g}: X \to X'$, alors il existe $\underline{f}': A \to B$ et $\underline{h}: Y \to Y'$ telles que $\underline{h} \in F'(\underline{f}')$ et $\underline{h}\underline{o}\underline{u} = \underline{v}\underline{o}\underline{g}$. On compose les transformations généralisées de C dans

C', par la formule: $(\underline{t}_2 o \underline{t}_1)(A) = \underline{t}_2(A) o \underline{t}_1(A)$. On obtient ainsi une catégorie dont les objets sont les foncteurs généralisés de C dans C' et dont les morphismes sont les transformations généralisées entre des tels foncteurs. Si le second foncteur F' est constant , alors pour chaque $X \in F(A)$ il y a exactement un morphisme appartenant à $\underline{t}(A)$ dont la source est X.

Une transformation généralisée $\underline{t}$: F ⟶ F' (foncteurs généralisés de C dans C') telle que, pour tout objet A de C et pour tout $\underline{h} \in t(A)$, $\underline{h}$ soit un isomorphisme dans C', sera dite <u>équivalence faible</u> de F dans F'.

Un foncteur généralisé de la G-topologie T dans la G-topologie T' est un foncteur généralisé F: Cat T ⟶ Cat T' tel que les deux conditions suivantes sont remplies: (i) Pour tout ensamble $\{\varphi_i \quad V_i \to V\} \in$ Cov T et pour chaque $X \in F(V)$, si Φ est la famille de tous les morphismes de la forme $\underline{g}$: $Y \to X$ avec $\underline{g} \in F(\varphi_i)$ pour au moins un indice $\underline{i}$, alors $\Phi \in$ Cov T'. (ii) Pour tout diagramme de produit fibré dans Cat T:

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ U_1 \arrow[dr, "f_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

et pour toute paire de morphismes dans Cat T', $\underline{g}_1$: $X_1 \to X$, $\underline{g}_2$: $X_2 \to X$, avec X_i $F(U_i)$, $X \in F(U)$ et $\underline{g}_i$ "valeurs" de F, il existe un diagramme de produit fibré dans Cat T':

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ X_1 \arrow[dr, "g_1'"'] & & X_2 \arrow[dl, "g_2'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec $\underline{q}_i \in F(\underline{p}_i)$, $\underline{g}_i' \in F(\underline{f}_i)$, $\underline{i} = 1,2$.

Il y a une notion évidente de cofoncteur généralisé et de transformation généralisée entre des tels cofoncteurs.

<u>1.2. Théorème de Kan sur l'existence de limites.</u> Il y a une notion évidente de limite d'un foncteur (ou d'un cofoncteur) généralisé, par rapport à une transformation généralisée, et le théorème d'existence de Kan [3] est valable sous la forme suivante:

Théorème de Kan pour les foncteurs généralisés dans Ens.

A tout foncteur généralisé $F: C \longrightarrow \underline{Ens}$ on peut associer, de façon canonique, un ensamble A et une transformation généralisée $\underline{t}$, de manière que A soit limite directe de F par rapport à $\underline{t}$.

La démonstration suit le schéma de celle de [4]. Dans l'ensemble des triplets $(U,V,\underline{x})$ tels que $U \in Ob(C)$, $V \in F(U)$ et $\underline{x} \in V$, on définit une relation (reflexive et transitive), notée $\sim$, par la condition suivante: $(U,V,\underline{x}) \sim (U',V',\underline{x}')$ si et seulement s'il existe des morphismes $\underline{f}: U \longrightarrow U'$ et $\underline{g}: V \longrightarrow V'$ tels que $\underline{g} \in F(\underline{f})$ et $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{x}'$. Soit R la relation d'équivalence engendrée par $\sim$: $(U,V,\underline{x})$ R $(U',V',\underline{x}')$ si et seulement s'il existe une suite finie de triplets $\underline{t}_o,\dots,\underline{t}_n$, telle que $\underline{t}_o = (U,V,\underline{x})$, $\underline{t}_n = (U',V',\underline{x}')$, $\underline{t}_o S\, \underline{t}_1,\dots,\underline{t}_{n-1} S\, \underline{t}_n$, où S est définie par la condition: $\underline{t}\, S\, \underline{t}'$ si et seulement si: $\underline{t} \sim \underline{t}'$ ou $\underline{t}' \sim \underline{t}$. Soit A l'ensemble quotient par R. On définit une transformation généralisée $\underline{t}$, de F dans le foncteur "constant" de domaine C et "valeur" A, en définissant comme $\underline{t}(U)$ l'ensamble des applications $\underline{t}(U)_V: V \longrightarrow A$ (où $V \in F(U)$) données par $\underline{t}(U)_V(\underline{x}) = \overline{(U,V,\underline{x})}$, où la barre indique la classe d'équivalence par rapport à R. Alors A est limite directe de F par rapport à $\underline{t}$.

Dans tout ce qui suit, nous écrivons simplement "limite" au lieu de "limite directe".

§ 2.- Atlas abstraits

2.1. Définition: Un atlas abstrait est un triplet $(F,X,\underline{s})$, où F est un foncteur généralisé de la G-topologie T dans la G-topologie $\overline{T}$, X est une limite de F par rapport à une transformation généralisée $\underline{t}$, et $\underline{s}$ est une équivalence faible de F dans le foncteur identique sur Cat T; ceci implique que Cat T doit être une sous-catégorie de Cat $\overline{T}$. Nous dirons que X est le support de l'atlas abstrait et que $\underline{t}$ est la transformation associée à cet atlas.

2.2. Application aux atlas différentiables. Nous dirons qu'un atlas $\mathfrak{A}$, différentiable de classe C^r, ou C^r-atlas dans le sens de [5], est <u>héréditaire</u>, si les deux conditions suivantes sont remplies.

(i) Si , avec A U, si B A est un ouvert et V U est un ouvert, alors $_B$, et (V)

(ii) Si , avec A U, pour tout espace de Banach E, intervenant dans la définition de , pour tout ouvert V E, et pour tout C^r-isomorphisme <u>f</u> U V, on a <u>f</u> o

Soit un C^r-atlas héréditaire. Nous appellerons Cat T la catégorie dont les objets sont les buts des cartes de , et dont les morphismes sont les changements de carte de , les inclusions entre des objets de Cat T, et les composés (en nombre fini quelconque) de tels morphismes. Soit Cov T la famille des ensembles de morphismes de Cat T qui sont des inclusions et qui <u>recouvrent</u> un certain objet de Cat T au sens habituel. On obtient ainsi la G-topologie T. Soit $\overline{T}$ la G-topologie que nous avons appelée <u>G-Ens</u> (1.1). Soit F le foncteur généralisé de T dans $\overline{T}$ construit de la façon suivante: si U est un objet de Cat T, F(U) est la classe des sources des cartes dont le but est U. Pour un morphisme U V dans Cat T, on envisage trois cas: si est une équivalence (changement de carte), F( ) est la classe des identités des objets appartenant à F(U) F(V); si est une inclusion, alors pour tout V' tel que $\underline{f}_{V'}$: V' V soit une carte de , on pose U' = $\underline{f}_{V'}^{-1}$(U), et l'on définit F( ) comme étant la classe de toutes les inclusions de la forme U' V'; si est une composition d'équivalences et inclusions, on définit F( ) de manière évidente en prenant toutes les compositions possibles. Soit X l'ensemble sous-jacent a l'atlas . Alors X est limite de F par rapport a une transformation généralisée <u>t</u> qui à chaque objet U de Cat T associe l'ensemble des inclusions U' X, où U' parcourt F(U). Soit maintenant <u>s</u> la transformation généralisée de F dans le foncteur identique sur Cat T, qui à chaque objet U de Cat T associe la classe des cartes de dont le but est U: c'est une équivalence faible. Le triplet (F,X,<u>s</u>) est un atlas abstrait, de support X et de transformation associée <u>t</u>.

<u>2.3.</u> <u>Sous-catégories inclusives</u>. Nous appelons ainsi toute sous-catégorie D de C telle que $Ob(D) = Ob(C)$, et pour A et B objets quelconques de D, l'ensemble $D(A,B) \cup D(B,A)$ ait au plus un élément.

L'exemple typique de sous catégorie inclusive est la sous-catégorie de <u>Ens</u> dont les morphismes sont toutes les inclusions.

<u>2.4.</u> <u>C^r-catégories</u>. Soit S un ensemble d'espaces de Banach; une catégorie sera dite C^r-catégorie, de type S, si ses objets sont des ouverts des espaces de S et ses morphismes sont: soit des C^r-isomorphismes, soit des inclusions, soit des composés de tels morphismes (en nombre fini quelconque), avec la propriété suivante: tout ouvert inclus dans un objet est un objet, toutes les inclusions entre des objets sont des morphismes, et tout C^r-isomorphisme d'un objet sur un ouvert d'un espace appartenant à S est un morphisme.

Une C^r-G-topologie de type S, est une G-topologie T telle que $Cat\ T$ est une C^r-catégorie de type S et $Cov\ T$ est la famille des ensembles d'inclusions qui recouvrent au sens habituel un certain objet de $Cat\ T$.

§3.- <u>Passage de l'atlas abstrait à l'atlas différentiable</u>.

<u>3.1.</u> <u>Théorème</u>. Soit $(F, X, \underline{s})$, avec $F: T \quad$ <u>G-Ens</u>, un atlas abstrait, de transformation associée $\underline{t}$, tel que

(i) T est une C^r-G-topologie de type S.

(ii) F prend ses valeurs dans une sous-catégorie inclusive de $Cat\ T =$ <u>Ens</u>.

Alors il existe un C^r-atlas héréditaire , de type S, dont l'ensemble sous-jacent est X et dont les cartes sont les composés de la forme $\underline{h} \circ \underline{\hat{g}}^{-1}$, avec $\underline{h} \quad \underline{s}(U)$, $\underline{g} \in \underline{t}(U)$, et où $\underline{\hat{g}}$ est la restriction de $\underline{g}$ à son image.

<u>Démonstration</u>: Nous prouverons d'abord que, pour tout $f: U_1 \to U_2$ dans $Cat\ T$, et pour tout $\underline{g} \quad F(\underline{f})$, l'application $\underline{g}$ est injective.

Supposons $\underline{g}: V_1 \to V_2$. Comme $\underline{s}$ est une transformation généralisée de F dans le foncteur identique sur Cat T, il existe $h \in s(U_1)$, $k \in s(U_2)$, avec $h : V_1 \to U_1$, $k : V_2 \to U_2$. Par définition de transformation généralisée, il existe donc un morphisme $f' : U_1 \to U_2$, tel que $f' \circ h = k \circ g$. Mais f' (étant un morphisme de Cat T) est injectif, et h est injectif parce que s est une équivalence faible. Donc g est injectif.

Soit maintenant $V = F(U)$, et appelons $t(U)_V : V \to X$, l'unique application de source V, appartenant à $t(U)$. Nous prouverons que cette application est injective. Il suffit de faire la démonstration pour le cas où X est la limite de F par rapport à t, construite de manière canonique par application du théorème de Kan (1.2).

Supposons $t(U)_V(x) = t(U)_V(y)$. Donc $\overline{(U,V,x)} = \overline{(U,V,y)}$. Alors il existe une suite finie de triplets $t_o, \ldots, t_n$, telle que (avec les notations de 1.2) $t_{i-1} S\, t_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, et $t_o = (U,V,x)$, $t_n = (U,V,y)$. Pour $n = 0$, on a $x = y$. Supposons $n = 1$; donc il existe $f : U \to U$, $g : V \to V$, avec $g \in F(f)$ et $g(x) = y$, ou bien $g(y) = x$. Par l'hypothèse (ii) de l'énoncé du théorème on a $g = 1_V$, donc $x = y$. Supposons maintenant $n = 2$. Alors il existe (U_1, V_1, x_1) tel que l'un des cas suivantes est vérifié:

(a) $(U,V,x) \rightsquigarrow (U_1,V_1,x_1) \rightsquigarrow (U,V,y)$; (b) $(U,V,y) \quad (U_1,V_1,x_1) \leftsquigarrow (U,V,x)$;
(c) $(U,V,x) \rightsquigarrow (U_1,V_1,x_1)$ et $(U,V,y) \quad (U_1,V_1,x_1)$;
(d) $(U_1,V_1,x_1) \rightsquigarrow (U,V,x)$ et $(U_1,V_1,x_1) \rightsquigarrow (U,V,x)$.

Dans ce qui suit on suppose toujours $g_i \in F(f_i)$, $i = 1, 2$.

Dans le cas (a) on a $f_1 : U \to U_1$, $f_2 : U_1 \to U$, $g_1 : V \to V_1$, $g_2 : V_1 \to V$, avec $g_2(g_1(x)) = y$. Mais $g_2 \circ g_1 = 1_V$, donc $x = y$. Le cas (b) est analogue. Dans le cas (c) il existe f_1, $f_2 : U \to U_1$, g_1, $g_2 : V \to V_1$, avec $g_1(x) = g_2(y)$. Mais, d'après ce qu'on a prouvé au début de cette démonstration, g_1 est injective, et d'après l'hypothèse (ii), $g_1 = g_2$; donc $x = y$. Le cas (d) est analogue.

On démontrera par induction que, s'il existe une suite de n triplets $t_o, \ldots, t_n$, avec les propriétés déjà énoncées, alors $x = y$. Ceci vient d'être démontré pour $n = 0, 1, 2$. Supposons-le vrai pour

$\underline{n} \geq 2$, et supposons qu'il y ait une suite de longueur $\underline{n}+1$ avec les propriétés enoncées: $\underline{t}_0, \ldots, \underline{t}_{n+1}$. S'il existait un indice $\underline{j}$ tel que $1 \leq j \leq n$ et $\underline{t}_{j-1} \quad \underline{t}_j \quad \underline{t}_{j+1}$, ou $\underline{t}_{j+1} \quad \underline{t}_j \quad \underline{t}_{j-1}$, on aurait une suite de longueur $\underline{n}$ avec les mêmes propriétés, car le relation est transitive; donc, en vertu de l'hypothèse inductive, le théorème serait démontré. Alors, en remplaçant le symbole par une flèche, il ne reste à considérer que les deux cas suivants:

(1) $(U, V, \underline{x}) \to (U_1, V_1, \underline{x}_1) \leftarrow (U_2, V_2, \underline{x}_2) \to (U_3, V_3, \underline{x}_3) \ldots$

(2) $(U, V, \underline{x}) \leftarrow (U_1, V_1, \underline{x}_1) \to (U_2, V_2, \underline{x}_2) \leftarrow (U_3, V_3, \underline{x}_3) \ldots$

Dans le cas (1) on a un diagramme non nécessairement commutatif:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\underline{u}"'] & V_1 \arrow[d, "\underline{v}"] & V_2 \arrow[d, "\underline{w}"] \\ U \arrow[r] & U_1 & U_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

avec $\underline{u} \in \underline{s}(U)$, $\underline{v} \in \underline{s}(U_1)$, $\underline{w} \in \underline{s}(U_2)$.

Mais, comme $\underline{s}$ est une transformation généralisée, il existe $\underline{f}'_1$, $\underline{f}'_2$ dans Cat T tels que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\underline{g}_1"] \arrow[d, "\underline{u}"'] & V_1 \arrow[d, "\underline{v}"] & V_2 \arrow[l, "\underline{g}_2"'] \arrow[d, "\underline{w}"] \\ U \arrow[r, "\underline{f}'_1"'] & U_1 & U_2 \arrow[l, "\underline{f}'_2"] \end{tikzcd}$$

Comme $\underline{g}_1(\underline{x}) = \underline{g}_2(\underline{x}_2) = \underline{x}_1$, on a $\underline{f}'_1(\underline{u}(\underline{x})) = \underline{f}'_2(\underline{w}(\underline{x}_2)) = \underline{v}(\underline{x}_1)$, donc $\bar{U} = \operatorname{Im} \underline{f}'_1 \cap \operatorname{Im} \underline{f}'_2$ est un ouvert non vide inclus dans U_1, donc par hypothèse (i) on a $\bar{U} \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Cat} T)$. Si l'on pose donc

$$\underline{h}_i = (\underline{f}'_i \mid \underline{f}'^{-1}_i(\bar{U}))^{-1}$$

on a dans Cat T le diagramme de produit fibré:

$$\begin{tikzcd} & \bar{U} \arrow[dl, "\underline{h}_1"'] \arrow[dr, "\underline{h}_2"] & \\ U \arrow[dr, "\underline{f}'_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "\underline{f}'_2"] \\ & U_1 & \end{tikzcd}$$

Alors, par définition de foncteur généralisé entre G-topologies (1.1), il existe dans Cat $\bar{T}$ un diagramme de produit fibré:

$$\begin{tikzcd} & \overline{V} \arrow[dl, "k_1"'] \arrow[dr, "k_2"] & \\ V & & V_2 \arrow[dl] \\ & V_1 & \end{tikzcd}$$

avec $\underline{k}_i \in F(\underline{h}_i)$ et $\underline{g}_i' \in F(\underline{f}_i')$. Mais par l'hypothèse (ii) il vient: $\underline{g}_i' = \underline{g}_i$, donc il existe $\overline{\underline{x}} \in \overline{V}$ tel que $\underline{g}_1(\underline{k}_1(\overline{\underline{x}})) = \underline{g}_2(\underline{k}_2(\overline{\underline{x}})) = \underline{x}_1$, et par l'injectivité établie au début de cette démonstration on a $\underline{k}_1(\overline{\underline{x}}) = \underline{x}$, $\underline{k}_2(\overline{\underline{x}}) = \underline{x}_2$, et ceci donne une suite de triplets à $n+1$ termes, allant de $(U,V,\underline{x})$ vers $(U,V,\underline{y})$:

$$(U,V,\underline{x}) \leftarrow (\overline{U},\overline{V},\overline{\underline{x}}) \rightarrow (U_2,V_2,\underline{x}_2) \rightarrow (U_3,V_3,\underline{x}_3) \ldots$$

où l'on a deux flèches consécutives de même sens; donc on est ramené à une suite de longueur n, ce qui donne $\underline{x} = \underline{y}$. Pour le cas (2) la démonstration est analogue.

On a donc prouvé que, pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}\ T)$ et pour tout $\underline{g} \in \underline{t}(U)$, $\underline{g}$ est injective. Si l'on appelle $\overline{\underline{g}}$ la restriction de $\underline{g}$ à son image, il existe les cartes de la forme $\underline{h} \circ \overline{\underline{g}}^{-1}$, avec $\underline{h} \in \underline{s}(U)$, et il est clair que leurs domaines recouvrent X. Il reste à prouver que les changements de carte sont des C^r-isomorphismes. Soient donc $\underline{h}_1 \circ \overline{\underline{g}}_1^{-1}$ et $\underline{h}_2 \circ \overline{\underline{g}}_2^{-1}$ des cartes de même domaine A et buts U_1, U_2 respectivement. On doit démontrer que le composé

$$\underline{k} = \underline{h}_2 \circ \overline{\underline{g}}_2^{-1} \circ \underline{g}_1 \circ \underline{h}_1^{-1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

est une C^r-équivalence. Il est évidemment bijectif, donc il suffit de démontrer que c'est localement un isomorphisme de classe C^r.

Soient: $\underline{x}_1 \in U_1$, $\underline{x}_2 = \underline{k}(\underline{x}_1)$, $\underline{y}_1 = \underline{h}_1^{-1}(\underline{x}_1)$, $\underline{y}_2 = \underline{h}_2^{-1}(\underline{x}_2)$. Donc $\underline{g}_1(\underline{y}_1) = \underline{g}_2(\underline{y}_2)$, et comme $\underline{g}_i \in \underline{t}(U_i)_{V_i}$, on a $(U_1,V_1,\underline{y}_1)\ \overline{R}\ (U_2,V_2,\underline{y}_2)$. Il y a donc une suite:

$$(W_1,Z_1,\underline{z}_1)S(W_2,Z_2,\underline{z}_2)S\ldots S(W_n,Z_n,\underline{z}_n),$$

avec $(W_1,Z_1,\underline{z}_1) = (U_1,V_1,\underline{y}_1)$ et $(W_n,Z_n,\underline{z}_n) = (U_2,V_2,\underline{y}_2)$.

Alors, pour chaque $i = 1,\ldots,n-1$, il y a un morphisme $\underline{f}_i$ appartenant à $\mathrm{Cat}\ T(W_i,W_{i+1}) \cup \mathrm{Cat}\ T(W_{i+1},W_i)$ et un morphisme $\underline{a}_i$ appartenant à $\mathrm{Cat}\ \overline{T}(Z_i,Z_{i+1}) \cup \mathrm{Cat}\ \overline{T}(Z_{i+1},Z_i)$, avec $\underline{a}_i \in F(\underline{f}_i)$ tel que

$$\underline{a}_i(\underline{z}_i) = \underline{z}_{i+1} \text{ ou } \underline{a}_i(\underline{z}_{i+1}) = \underline{z}_i. \qquad (*)$$

Par définition de transformation généralisée, il y a pour chaque $\underline{i} = 1,\ldots,\underline{n}$, un isomorphisme dans Cat $\bar{T}$, $\underline{m}_i : Z_i \to W_i$, tel que $\underline{m}_i \in \underline{s}(W_i)$; nous prendrons $\underline{m}_1 = \underline{h}_1$, $\underline{m}_n = \underline{h}_2$. Encore par définition de transformation généralisée, il existe $\underline{f}_i'$, de même source et même but que $\underline{f}_i$ ($\underline{i} = 1,\ldots, \underline{n}-1$), tel que le carré formé par $\underline{m}_i, \underline{a}_i, \underline{m}_{i+1}, \underline{f}_i'$, est commutatif. Compte tenue de ce fait et de $(*)$, on voit qu'il existe des ouverts $W_i' \subset W_i$, ($\underline{i} = 1,\ldots, \underline{n}$), avec $\underline{x}_1 \in W_1'$, $\underline{x}_2 \in W_n'$, et des C^r-isomorphismes $\underline{f}_i''$ ($\underline{i} = 1,\ldots, \underline{n}-1$) tels que $\underline{f}_i''$ est la restriction de $\underline{f}_i'$ a W_i' et W_{i+1}', et les $\underline{f}_i''$ ou leurs inverses (convenablement choisis, pour chaque $\underline{i}$) donnent par composition un C^r-isomorphisme $\underline{f}'' : W_1' \to W_n'$, avec $\underline{f}''(\underline{x}_1) = \underline{x}_2$. Soit maintenant $\underline{x}_1' \in W_1'$, et soit $\underline{y}_1' = \underline{h}_1^{-1}(\underline{x}_1')$. Par commutativité des carrés $\underline{m}_i, \underline{a}_i, \underline{m}_{i+1}, \underline{f}_i'$, il existe $\underline{y}_2' \in Z_n$, $\underline{x}_2' \in W_n'$, tels que

$$\underline{f}''(\underline{x}_1') = \underline{x}_2' \;, \quad \underline{h}_2(\underline{y}_2') = \underline{x}_2' \;. \qquad (**)$$

Mais, comme $\underline{a}_i \in F(\underline{f}_i)$, on a $(U_1,V_1,\underline{y}_1')$ R $(U_2,V_2,\underline{y}_2')$, donc

$$\underline{g}_1(\underline{y}_1') = \underline{g}_2(\underline{y}_2') \qquad (***)$$

De la seconde formule $(**)$ et de $(***)$ on déduit:

$$(\underline{h}_2 \circ \hat{\underline{g}}_2^{-1} \circ \underline{g}_1 \circ \underline{h}_1^{-1})(\underline{x}_1') = \underline{x}_2'$$

Alors le C^r-isomorphisme $\underline{f}''$ coïncide avec $\underline{k}$ dans un voisinage de $\underline{x}_1$, ce qui montre que $\underline{k}$ est localement un C^r-isomorphisme.

3.2. Proposition.- Soit $\mathfrak{X}$ un C^r-atlas héréditaire (au sens de 2.2), de ensemble sous-jacent X, et soit $(F,X,\underline{s})$ l'atlas abstrait associé à lui par la méthode de (2.2), avec $F: T \to$ G-Ens. Alors $(F,X,\underline{s})$ vérifie les hypothèses du théorème 3.1, et l'application de ce théorème a $(F,X,\underline{s})$ donne l'atlas $\mathfrak{X}$.

En effet, si S est l'ensemble des espaces de Banach intervenant dans la définition de l'atlas $\mathfrak{X}$, la G-topologie T vérifie la condition (i) de 3.1 puisque $\mathfrak{X}$ est héréditaire, et le foncteur F vérifie la condition (ii) de 3.1 par construction (2.2). Le reste de la démonstration est évident .

§4. Morphismes d'atlas abstraits

4.1. Définition. Étant donné une classe C d'atlas abstraits $\{(F_i, X_i, \underline{s}_i)\}$, pour $i \in I$, telle que pour tout $i \in I$, F_i soit un foncteur généralisé de la G-topologie T_i dans la G-topologie $\overline{T}$ (avec $\overline{T}$ constante), on dira que la G-topologie K est intermédiaire pour la classe C, si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) K est une sous-G-topologie de $\overline{T}$.

(ii) Pour tout $i \in I$, T_i est une sous-G-topologie de K.

(iii) Pour tout $i \in I$ et pour tout objet U de Cat T_i, si

$$\{\varphi_j : U_j \longrightarrow U\} \in \text{Cov } K, \text{ alors } \{\varphi_j \; U_j \longrightarrow U\} \in \text{Cov } T_i .$$

4.2. Exemple. Si C est une classe de C^r-atlas héréditaires, on peut prendre comme Ob(Cat K) la réunion des classes d'objets des catégories Cat T_i obtenues par la méthode de 2.2, comme morphismes de Cat K toutes les applications C^r-différentiables entre tels objets, et comme Cov K la réunion de toutes les Cov T_i. On obtient ainsi une G-topologie K, intermédiaire pour la classe C.

4.3. Définition. Soient $(F_1, X_1, \underline{s}_1)$, $(F_2, X_2, \underline{s}_2)$ des atlas abstraits avec $F_1 \; T_1 \longrightarrow \overline{T}$, $F_2 : T_2 \longrightarrow \overline{T}$, et transformations associées $\underline{t}_1$, $\underline{t}_2$. Soit K une G-topologie intermédiaire pour la classe formée par ces atlas. Un K-morphisme de $(F_1, X_1, \underline{s}_1)$ dans $(F_2, X_2, \underline{s}_2)$ est un morphisme de Cat $\overline{T}$: $\underline{f}: X_1 \longrightarrow X_2$, tel que, pour tout diagramme de Cat T_1:

$$U \xleftarrow{\underline{m}} U' \xrightarrow{\underline{h}} X_1$$

avec $U' \in F_1(U)$, $\underline{h} \in \underline{t}_1(U)$, $\underline{m} \in \underline{s}_1(U)$, il existe

$$\{\varphi_j \; U_j \longrightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov } T_1$$

tel que, pour chaque $j \in J$ il existe un diagramme dans Cat T_2:

$$V_j \xleftarrow{n} V'_j \xrightarrow{\underline{k}} X_2$$

avec $V'_j \in F_2(V_j)$, $\underline{k} \in \underline{t}_2(V_j)$, $\underline{n} \in \underline{s}_2(V_j)$, et un morphisme de Cat K,

$\underline{f}_j : U_j \longrightarrow V_j$, de façon que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[rr, "\underline{f}"] & & X_2 & \\
U' \arrow[ur, "\underline{h}"] & & & & V'_j \arrow[ul, "\underline{k}"'] \\
U \arrow[u, "\underline{m}^{-1}"] & & & & \\
& U_j \arrow[ul, "\varphi_j"] \arrow[rr, "\underline{f}_j"] & & V_j \arrow[uur, "\underline{n}^{-1}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

4.4. Proposition. Soit C une classe d'atlas abstraits, et soit K une G-topologie intermédiaire pour C. Si l'on prend comme classe d'objets la classe C, comme morphismes les K-morphismes entre les atlas de C d'après 4.3, et comme composition celle de $\overline{T}$ ($\overline{T}$ étant la G-topologie "but" pour tous les atlas de C), alors on obtient une catégorie.

En effet: pour tout atlas $(F, X, \underline{s}) \in C$, l'application 1_X est un K-morphisme de cet atlas dans lui même; pour le voir, il suffit de prendre comme $\{\varphi_j : U_j \longrightarrow U\}$ la classe d'un élément $\{1_U\}$, comme V_j le même objet U, comme $\underline{f}_j$ l'identité 1_U, et $\underline{n} = \underline{m}$, $\underline{k} = \underline{h}$.

De plus, si $\underline{f} : (F_1, X_1, \underline{s}_1) \longrightarrow (F_2, X_2, \underline{s}_2)$, $\underline{g} : (F_2, X_2, \underline{s}_2) \longrightarrow (F_3, X_3, \underline{s}_3)$, sont des K-morphismes, le composé $\underline{g} \circ \underline{f}$ est un K-morphisme dans le troisième. Pour le voir, soit dans Cat T_1 le diagramme $U \xleftarrow{\underline{m}} U' \xrightarrow{\underline{h}} X_1$ comme dans 4.3. Puisque $\underline{f}$ est un K-morphisme, il existe $\{\varphi_j : U_j \longrightarrow U\}_{j \in J}$, élément de Cov T_1, tel que, pour tout $j \in J$ il existe $\underline{f}_j : U_j \longrightarrow V_j$ dans Cat K et le diagramme commutatif (1). Mais, étant donné le diagramme $V_j \xleftarrow{\underline{n}} V'_j \xrightarrow{\underline{k}} X_2$ dans Cat T_2, et puisque $\underline{g}$ est un K-morphisme, il existe $\{\psi_{jr} : V_{jr} \longrightarrow V_j\}_{r \in R} \in$ Cov T_2, et pour chaque $\underline{r} \in R$ un morphisme de Cat K, $\underline{g}_r : V_{jr} \longrightarrow W_r$, de façon qu'il y a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[rr, "\underline{g}"] & & X_3 & \\
V'_j \arrow[ur, "\underline{k}"] & & & & W'_r \arrow[ul, "\underline{u}"'] \\
V_j \arrow[u, "\underline{n}^{-1}"] & & & & \\
& V_{jr} \arrow[ul, "\psi_{jr}"] \arrow[rr, "\underline{g}_r"] & & W_r \arrow[uur, "\underline{q}^{-1}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

avec $\underline{u} \in \underline{t}_3(W'_r)$, $\underline{q} \in \underline{s}_3(W'_r)$. Comme $\Psi = \{ \psi_{jr} : V_{jr} \longrightarrow V_j \} \in$ Cov T_2, on a $\Psi \in$ Cov K puisque T_2 est une sous-G-topologie de K. Donc, si l'on appelle $V_{jr} \times U_j$ le produit fibré de V_{jr} par U_j sur V_j par rapport à ψ_{jr} et $\underline{f}_j$, on a $\Phi = \{ V_{jr} \times U_j \longrightarrow U_j \}_r \in$ Cov K. Mais K est intermédiaire et $U_j \in$ Ob(Cat T_1); donc $\Phi \in$ Cov T_1. Alors: $\Sigma = \{ V_{jr} \times U_j \longrightarrow U_j \xrightarrow{j} U \}_{j,r} \in$ Cov T_1.

Posons $\Sigma = \{\sigma_s\}$ pour $\underline{s} \in S$. Pour chaque $\underline{s} \in S$ il existe un morphisme de Cat K, $\underline{d}_s : V_{jr} \times U_j \longrightarrow W_r$, obtenu par composition de la projection de produit fibré $V_{jr} \times U_j \longrightarrow V_{jr}$, avec $\underline{g}_r : V_{jr} \longrightarrow W_r$. On voit alors facilement que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "\underline{h}"] & X_1 \arrow[r, "\underline{g}\circ\underline{f}"] & X_3 & \\
& & & W'_r \arrow[ul, "\underline{u}"'] \\
U \arrow[uu, "\underline{m}^{-1}"] & V_{jr} \times U_j \arrow[l, "\underline{s}"'] \arrow[r, "\underline{d}_s"] & W_r \arrow[ur, "\underline{q}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve la proposition.

4.5. - Proposition. Soient $\mathcal{O}\!\iota_1$, $\mathcal{O}\!\iota_2$, des C^r-atlas héréditaires, de type S, dont les ensembles sous-jacents sont X_1, X_2, respectivement. Soit A_i ($\underline{i} = 1, 2$) l'atlas abstrait obtenu de $\mathcal{O}\!\iota_i$ par application de 2.2; soient K la G-topologie intermédiaire décrite dans 4.2, en prenant comme C la classe $\{\mathcal{O}\!\iota_1, \mathcal{O}\!\iota_2\}$, et

$$\underline{f} : X_1 \longrightarrow X_2$$

une fonction. Alors, $\underline{f}$ est une C^r-application différentiable de la structure de C^r-variété différentiable définie par $\mathcal{O}\!\iota_1$ dans celle définie par $\mathcal{O}\!\iota_2$, si et seulement si $\underline{f}$ est un K-morphisme de A_1 dans A_2 au sens de 4.3.

4.6. Proposition. Soient A_1, A_2, des atlas abstraits qui satisfont les hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.1; $\mathcal{O}\!\iota_1$, $\mathcal{O}\!\iota_2$, les

C^r-atlas correspondants par application du théorème 3.1; K la G-topologie intermédiaire pour la classe $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$, décrite dans 4.2; et $\underline{f}: X_1 \longrightarrow X_2$ une fonction (X_i étant le support de A_i, $\underline{i}=1,2$). Soit $\mathcal{V}_i$ la C^r-variété définie par l'atlas $\mathcal{O}\!\!\mathcal{L}_i$. Alors $\underline{f}$ est un K-morphisme de A_1 dans A_2, dans le sens de 4.3, si et seulement si $\underline{f}$ est une application C^r-différentiable de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{V}_2$.

§ 5. Variétés abstraites

5.1. Définition. Soit C une classe d'atlas abstraits et soit K une G-topologie intermédiaire pour C. Soient $A_i = (F_i, X_i, \underline{s}_i) \in C$, pour $\underline{i} = 1, 2$. On dira que A_1 est K-équivalent a A_2 ssi $X_1 = X_2$ et 1_X est un K-morphisme de A_1 dans A_2 et de A_2 dans A_1 (et c'est donc un isomorphisme).

C'est une relation d'équivalence dans C.

5.2. Définition. Dans les conditions de 5.1, on appelle K-variété abstraite chacune des classes d'équivalence dans C par la relation de K-équivalence. Un K-morphisme entre telles variétés est un K-morphisme entre des réprésentants respectifs.

5.3. Théorème. Dans les conditions de 5.2, les K-variétés abstraites et les K-morphismes entre elles forment une catégorie.

5.4. Proposition. Soit A un atlas abstrait qui satisfasse (i) et (ii) de 3.1. Soient $\mathcal{O}\!\!\mathcal{L}$ le C^r-atlas obtenu par application de 3.1, et A' l'atlas abstrait obtenu de $\mathcal{O}\!\!\mathcal{L}$ par application de 2.2. Alors A et A' sont K-équivalents (K étant comme dans 4.2) et ils appartiennent donc à la même K-variété abstraite.

En effet: soit $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ dans Cat T, avec $U' \in F(U)$, $\underline{m} \in \underline{s}(U)$, $\underline{h} \in \underline{t}(U)$. Il existe $\{1_U: U \longrightarrow U\} \in$ Cov T, le diagramme dans Cat T_2= Cat T $\quad U \xleftarrow{m\circ \underline{h}^{-1}} \underline{h}(U') \longrightarrow X$, et le morphisme 1_U (à la place de $\underline{f}_j$), tels que 1_X satisfait la définition de morphisme 4.3.

Réciproquement: étant donné le diagramme

$$U \xleftarrow{m \circ \bar{h}^{-1}} \underline{h}(U') \hookrightarrow X \quad ,$$

le recouvrement $\{1_U : U \longrightarrow U\}$, le diagramme $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$, et le morphisme de Cat K, $1_U : U \longrightarrow U$, permettent d'établir que 1_X est un morphisme de A' dans A.

5.5. Théorème. Soit S une classe d'espaces de Banach, et soit K la G-topologie définie comme il suit les objets de Cat K sont les ouverts des espaces de S, les morphismes de Cat K sont les applications C^r-différentiables entre ces objets, et les éléments de Cov K sont les classes d'inclusions entre des objets de Cat K qui recouvrent au sens habituel U (où U parcourt Ob(Cat K)). Soit V^r la catégorie des C^r-variétés de type S et des C^r-morphismes, et soit VA^r la catégorie suivante: les objets de VA^r sont les variétés abstraites construites sur des C^r-topologies de type S (au sens de 2.4) à l'aide de foncteurs généralisés qui prennent leurs valeurs dans des sous-catégories inclusives de Ens; les morphismes de VA^r sont les K-morphismes entre ces objets. Alors, la construction 2.2 et la proposition 4.5 définissent un foncteur ordinaire de V^r dans VA^r, et le théorème 3.1 et la proposition 4.6 définissent un foncteur de VA^r dans V^r. Ces foncteurs sont inverses l'un de l'autre, et les catégories V^r et VA^r sont donc isomorphes.

5.6. Remarque. Dans tout cet article on peut remplacer "espaces de Banach" par "espaces localement convexes", et "C^r-variété" par "variété différentiable" au sens de [6].

Références

[1] C.R.Acad.Sci. Paris (Tome 270, N° 24, série A, p. 1565, Juin/70)

[2] C. Ehresmann: "Catégories et structures" (Dunod. Paris, 1965).

[3] M. Artin: "Grothendieck topologies" (Harvard University, 1962).

[4] D. Kan: "Functors involving c.s.s. complexes" (Trans.Amer.Math.

Soc. Vol. 87, 1958, pp. 330-346).

[5] N. Bourbaki: "Variétés différentielles et analytiques" (Fascicule de résultats. Hermann, Paris)

[6] A. Bastiani: "Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie" (Jour. d'Analyse Math. Vol. XIII, 1964, pp. 1-114).