UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

"EFICIENCIA DE UNA FAMILIA DE TESTS NO PARAMETRICOS BASADOS EN RANGOS PONDERADOS PARA UN DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIZADOS COMPLETOS".

Nélida Elena Ferretti

Tesis

1984 .

A mis padres

y a la memoria del Profesor Germán Fernández

RESUMEN

Los procedimientos no paramétricos estándar para testear la hipótesis nula de que no hay efectos de los tratamientos en un diseño de bloques aleatorizados completos usan solamente la información dentro de cada bloque. Estos tests pueden mejorarse multiplicando los rangos usados en ellos por ponderaciones dependientes de la variabilidad observada en cada bloque. Este nuevo procedimiento, propuesto por Quade (1972,1979) se basa en un estadístico que tiene asintóticamente distribución chi-cuadrado, bajo ciertas condiciones.

En este trabajo se estudia la eficiencia asintótica relativa de Pitman de esta familia de tests no paramétricos con respecto al test de Friedman para diferentes ponderaciones de los bloques.

Además por medio de un estudio de Monte Carlo se calculó la potencia de estos tests y se la comparó con la potencia de otros competidores paramétricos y no paramétricos.

INDICE

RECONOCIMIENTOS

Expreso mi gratitud a mi director, Profesor Víctor J. Yohai. Sus sugerencias y su siempre firme, paciente y amistoso criticismo no solamente influenciaron el presente trabajo sino mi actitud hacia la matemática en general.

La primera etapa de esta investigación fue realizada en mi carácter de becaria de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (C.I.C.) ; los trabajos de computación se realizaron en el Centro Superior de Procesamiento de la Información de la Universidad Nacional de La Plata (C.E.S.P.I.). A ambos organismos va también mi reconocimiento.

1.- INTRODUCCION

1.1.- Planteo del problema

Sean Z_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, observaciones correspondientes a un diseño de bloques aleatorizados completos con m tratamientos y n bloques.

Supongamos que las variables aleatorias Z_{ij} son independientes y que la función de distribución de Z_{ij} es $G(z-\theta_i-\mu_j)$ donde G es continua y

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 0 .$$

Nos interesa testear la hipótesis nula de que no hay efectos de los tratamientos

$$H: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 0 \qquad (1.1.1)$$

contra la alternativa

$$K: \sum_{i=1}^{m} \theta_i^2 > 0$$

Si G es la función de distribución de una variable aleatoria normal, un test óptimo es el test F, el cual rechaza la hipótesis H si

$$F > F_{m-1,(m-1)(n-1)}^{(\alpha)}$$

donde

$$F = \frac{n \sum_{i=1}^{m} (Z_{i.}-Z_{..})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (Z_{ij}-Z_{i.}-Z_{.j}+Z_{..})^2/(m-1)(n-1)}$$

y

$$Z_{i.} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}/n \quad ; \quad Z_{.j} = \sum_{i=1}^{m} Z_{ij}/m \quad ; \quad Z_{..} = \sum_{i=1}^{m} Z_{i.}/m.$$

Bajo H, F tiene la distribución de Snedecor con (m-1) y (m-1) (n-1) grados de libertad y por lo tanto $F_{m-1,}(\alpha)_{(m-1)(n-1)}$ es el correspondiente (1-α) percentil.

Si G no es normal, el test F no tandrá el nivel de significación correcto. Para muestras grandes y G con varianza finita, el nivel de significación será aproximadamente correcto, pero el test puede resultar ineficiente.

Un test no paramétrico, para la hipótesis nula H, fue propuesto por Friedman (1937). El test de Friedman rechaza H si $Q \geqslant k_\alpha$, donde

$$Q = 12 \sum_{i=1}^{m} (R_i-n(m+1)/2)^2/nm(m+1),$$

$R_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}$; R_{ij} es el rango de Z_{ij} en el bloque j, y k_α es definido por $P_H (Q \geqslant k_\alpha) = \alpha$.

(P_H denota la probabilidad bajo la hipótesis H).

La eficiencia asintótica relativa de Pitman del test de Friedman con respecto al test F está dada por

$$e_{Q,F}(G) = mh(G)/(m+1)$$

donde $h(G) = 12\,\sigma^2(G) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^2(z)\,dz\right]^2$; $\sigma^2(G)$ es la varianza de G y $g(x) = G'(x)$. (Ver capítulo 7 de Puri y Sen (1971)).

Si G es normal , $e_{Q,F}(G) = 3m/(\pi(m+1))$. Por lo tanto el test de Friedman resulta eficiente, bajo normalidad, para m grande: pero para m pequeño el test se convierte en ineficiente como lo muestra la siguiente tabla:

m	2	3	4	5	10	15	20	∞
$\frac{3m}{\pi(m+1)}$	0,637	0,716	0,764	0,796	0,868	0,895	0,910	0,955

Así la pérdida de eficiencia es más del 20% para $m < 5$ y más del 10% para $m < 15$.

La pérdida de eficiencia para pocos tratamientos se debe a que no se compara entre bloques, sino dentro de cada bloque.

Para el caso particular m = 2, un test no paramétrico eficiente es el test de Wilcoxon signado. Este test se basa en el estadístico

$$V = \sum_{j=1}^{n} X_j\, S_j$$

donde S_j es el rango de $|Z_{1j} - Z_{2j}|$ y X_j es la función indicadora del evento $Z_{1j} > Z_{2j}$, para $j=1,\dots,n$.

Bajo H, V tiene media $n(n+1)/4$ y varianza $n(n+1)(2n+1)/24$. Para n pequeño la distribución exacta de V ha sido tabulada y para n grande es asintóticamente normal.

La eficiencia asintótica relativa de Pitman de este test con respecto al test F está dada por h(G). Si G es normal esta eficiencia es igual a $3/\pi$.

Hodges and Lehmann (1962) propusieron para $m \geqslant 2$, el siguiente método basado en rangos alineados. En el i-ésimo bloque se calcula alguna medida de posición $V_j = \delta(Z_{1j}, \ldots , Z_{mj})$, donde la función δ es simétrica en sus m argumentos y es tal que $\delta(x_1+c, \ldots, x_m+c)= \delta(x_1, \ldots , x_m)+c$, para cualquier constante c (por ejemplo la media o la mediana).

Luego para $j=1, \ldots , n$, $i=1, \ldots , m$ se definen observaciones alineadas $\hat{Z}_{ij} = Z_{ij}-V_j$, de las cuales el efecto del bloque es suprimido. Entonces, si $\hat{R}_{ij}$ es el rango de $\hat{Z}_{ij}$ dentro del conjunto de las mn observaciones alineadas, se define el estadístico

$$\hat{Q} = \frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\hat{R}_{ij}-\hat{R}_{.j})^2} \sum_{i=1}^{m} (n\hat{R}_{i.} -n(mn+1)/2)^2$$

donde $\hat{R}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} \hat{R}_{ij}/n$, $\hat{R}_{.j} = \sum_{i=1}^{m} \hat{R}_{ij}/m$.

Bajo H, el estadístico $\hat{Q}$ es libre de distribución solamente condicionalmente. La distribución de $\hat{Q}$ depende de la muestra y por lo tanto no se puede tabular. Pero, la distribución asintótica de $\hat{Q}$, bajo H, es chi-cuadrado central con (m-1) grados de libertad.

Una expresión general de la eficiencia asintótica relativa de Pitman ($e_{\hat{Q},Q}(G)$) del test alineado $\hat{Q}$ con respecto al test de Friedman Q fue obtenida por Mehra y Sarangi (1967), quienes muestran que $e_{\hat{Q},Q}(G)$ decrece cuando m crece y cuando G es normal se tiene los siguientes valores

m	2	3	4	5	∞
$e_{\hat{Q},Q}(G)$	1,5	1,355	1,263	1,210	1

Si m=2 $\hat{Q}$ es, para n grande, equivalente al test de Wilcoxon signado.

Por lo tanto será necesario encontrar tests más simples y eficientes para m pequeño ($m > 3$).

1.2.- Método de rangos ponderados

Con el próposito de obtener tests no paramétricos más eficientes, Quade (1972,1979) propuso multiplicar los rangos R_{ij} de las observaciones Z_{ij} por ponderaciones dependientes de la variabilidad observada en cada bloque.

A cada bloque se le asocia una medida $D_j = \psi(Z_{1j},\ldots,Z_{mj})$ donde la la función ψ es simétrica en sus m argumentos y es tal que

$$\psi(x_1+c,\ldots,x_m+c) = \Psi(x_1,\ldots,x_m)$$

para toda constante c. Estas condiciones son satisfechas por la varianza, rango, diferencia interquartil, desviación media. Por simplicidad vamos a suponer $P(D_j = D_{j'}) = 0$ para $j=j'$ ($j=1,\ldots,n$; $j'=1,\ldots,n$).

Sea Q_j el rango de D_j y s_{n,Q_j} el peso asignado al j-ésimo bloque para $j=1,\ldots,n$, donde $s_{n,1},\ldots,s_{n,m}$ son constantes tales que

$s_{n,1} \leqslant \ldots \leqslant s_{n.n}$ (por ejemplo $s_{n,j} = j$ ($j=1, \ldots , n$); $s_{n,j} = 1$ ($j=1, \ldots , n$); $s_{n,1}= 0$, $s_{n,j} = 1$ ($j=2 , \ldots , n$)).

Finalmente si R_{ij} es el rango de Z_{ij}, y $t_1, \ldots , t_m$ son constantes tales que $\sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 > 0$ y $\bar{t} = \sum_{i=1}^{m} t_i/m$ (por ejemplo $t_i = i$ ($i=1,\ldots,m$)), el estadístico propuesto para testear H es

$$W = \frac{(m-1) \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} s_{n,Q_j} (t_{R_{ij}} - \bar{t}) \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2}$$

Bajo H, W es libre de distribución.

El estadístico V del test de Wilcoxon signado es equivalente a un caso particular de W. Pues si $m=2$, $t_1=-1$, $t_2=1$, $D_j=|Z_{1j}-Z_{2j}|$, y $s_{n,j}=j$ ($j=1, \ldots , n$), se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} s_{n,Q_j} (t_{R_{1j}} - \bar{t}) = - \sum_{j=1}^{n} s_{n,Q_j} (t_{R_{2j}} - \bar{t}) = 2\{V-n(n+1)/4\}$$

y

$$W = \frac{24 (V-n(n+1)/4)^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

El test Q de Friedman también es un caso particular tomando $s_{n,j}=1$ ($j=1, \ldots , n$) y $t_i=i-(m+1)/2$ ($i=1, \ldots , m$).

Bajo H, W tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado central con (m-1) grados de libertad, si la sucesión de pesos $s_{n,j}$ para $j=1,\ldots,n$

y n=1,2, ... satisfacen la condición de Wald-Wolfowitz

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} (s_{n,j} - s_n)^r}{\left(\sum_{j=1}^{n} (s_{n,j} - s_n)^2\right)^{r/2}} = O(n^{1-r/2}) \quad \text{para } r=3,4, \ldots \qquad (1.2.1)$$

donde $S_n = \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}/n$ (Quade (1972)).

Si $t_i=i-(m+1)/2$ $(i=1, \ldots, m)$ y $s_{n,j}=j$ $(j=1, \ldots, n)$ W se reduce a

$$W = \frac{72 \sum_{i=1}^{m} T_i^2}{m(m+1)n(n+1)(2n+1)}$$

donde $T_i= \sum_{j=1}^{n} Q_j (R_{ij}-(m+1)/2)$ $(i=1, \ldots, m)$, y su distribución exacta bajo H ha sido tabulada por Quade (1972) para las siguientes combinaciones de m y n: (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,3), (4,4) y (5,3).

En su tesis doctoral Silva (1977) realizó, por el método de Monte Carlo, un estudio de la eficiencia de estos tests de rangos ponderados.

Para G normal o uniforme y $s_{n,j}=j$ $(j=1, \ldots, n)$ sus resultados muestran considerable ventajas de estos tests con respecto al test de Friedman para n pequeño (y m=3,4,5) y para n grande (y m=2,3,4,5).

Para G doble exponencial y $s_{n,j}=j$ $(j=1, \ldots, n)$ los resultados fueron mixtos.

Además fueron considerados los pesos $s_{n,1}=0$, $s_{n,j}=1$ $(j=2, \ldots, n)$, pero los resultados no fueron tan buenos.

Por otra parte en el trabajo de Silva se observa que los resultados no parecen sensibles a la elección de la medida D_j.

En este trabajo solamente fueron considerados los pesos de los tratamientos de la forma $t_i=i-(m+1)/2$ $(i=1, \dots, m)$.

Para $m=3$, $s_{n,j}=j$ $(j=1, \dots, n)$, $t_i=i$ $(i=1,2,3)$ y $D_j = \max_{1\leq i\leq 3} Z_{ij} - \min_{1\leq i\leq 3} Z_{ij}$ $(j=1, \dots, n)$, Yohai (1981) (ver teoremas A1, A2 y A3 del Apéndice) mostró que la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test de Friedman es aproximadamente 1,255, bajo normalidad.

1.3 .- Objetivos del trabajo

En la sección 2 se muestra una expresión de la eficiencia asintótica relativa de Pitman ($e_{W,Q}(G)$) del test W basado en rangos ponderados con respecto al test Q de Friedman, para diferentes asignaciones de ponderaciones de los bloques ($s_{n,j}=(j/n)^k$, $k=1,2, \dots$ y $s_{n,j}=f(j/n)$, donde f es una función que admite un desarrollo en series de potencias $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, siendo los coeficientes c_i constantes que verifican $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$), $t_i=i$ $(i=1, \dots, m)$ y $D_j = \max_{1\leq i\leq m} Z_{ij} - \min_{1\leq i\leq m} Z_{ij}$.

En la sección 3 se realiza el análisis de $e_{W,Q}(G)$ para m=3 y en la sección 4 para m=4. En particular fueron consideradas dos funciones de distribución (normal con varianza uno y Cauchy con parámetro de escala uno) para m=3 y la función de distribución normal con varianza uno para m=4.

Por otra parte en la sección 5 es dado un test no paramétrico propuesto por Yohai para testear la hipótesis nula de que no hay efectos de los tratamientos en un diseño de bloques aleatorizados completos con cuatro tratamientos. Se muestra que este test se basa en un estadístico cuya distribución asintótica es chi-cuadrado con tres grados de libertad (central bajo la hipótesis nula; no central bajo alternativa). Además se estudia la eficiencia asintótica relativa de Pitman de este test con respecto al test W de rangos ponderados.

En la sección 6 se muestra un estudio de Monte Carlo, donde se calculó la potencia del test W de rangos ponderados y se comparó con la potencia de otros tests: test F, Friedman, y los tests alineados (con la media y la mediana).

2.- EFICIENCIA ASINTOTICA DEL TEST W DE RANGOS PONDERADOS

De aquí en adelante usaremos la notación $H_{ij} = t_{R_{ij}} - \bar{t}$.

Supongamos que la sucesión de pesos $s_{n,j}$ para $j=1, \ldots , n$ y $n=1,2, \ldots$ satisfacen la condición (1.2.1).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}=n$. Luego $\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 = O(n)$ y por lo tanto

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2}{(m-1)n} = O(1)$$

Consideramos la sucesión de hipótesis alternativas locales

$$K_n : G_{ij}(x)=G(x-\theta_{in} - \mu_j) \qquad (2.1)$$

donde $\theta_{in} = \delta_i/n^{1/2}$, $\sum_{i=1}^{m} \delta_i=0$ $(i=1, \ldots , m; j=1, \ldots , n)$.

Bajo K_n, el estadístico

$$W = \frac{(m-1) \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} s_{n,Q_j} H_{ij} \right]^2}{\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2}$$

tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado no central con parámetro de no centralidad $\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n$, donde

$$\Delta_n = \frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 \sum_{j=1}^{n} s^2_{n,j}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{\underset{\sim}{\theta}_n} (H_{ij}\, s_{n,Q_j})^2$$

($E_{\underset{\sim}{\theta}_n}$ denota la esperanza bajo la alternativa K_n). (Ver Silva (1981)).

El siguiente teorema da una expresión de Δ_n:

<u>Teorema 2.1</u>

$$\Delta_n = \frac{(m-1)n}{\sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 \sum_{j=1}^{n} s^2_{n,j}} (a(G))^2 (m/(m-1))^2 \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 + o(1)$$

donde $a(G) = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}s_{n,Q_1})/\delta\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{0}}$ y $E_{\underset{\sim}{\theta}}$ denota la esperanza bajo $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\theta_2, \dots , \theta_m)$.

<u>Demostración</u>: Sea $I(\underset{\sim}{\theta}) = E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}s_{Q_1})$ $(1 \leq i \leq m)$. Desarrollando I en una serie de Taylor alrededor de $\underset{\sim}{0} = (0,0, \dots , 0)$ y poniendo

$\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_n = (\theta_{1n},\theta_{2n}, \dots , \theta_{mn})$ obtenemos

$$E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{i1}s_{n,Q_1}) = E_{\underset{\sim}{0}}(H_{i1}s_{n,Q_1}) + \sum_{k=1}^{m} \theta_{kn}(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}s_{n,Q_1})/\partial\theta_k)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + o(n^{-1/2}).$$

Como $E_{\underset{\sim}{0}}(H_{i1}s_{n,Q_1})=0$ y $\theta_{kn}=\delta_k/(n)^{1/2}$, tenemos

$$E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{i1}s_{n,Q_1}) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{m} \delta_k(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}s_{n,Q_1})/\partial\theta_k)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + o(n^{-1/2}).$$

Por otra parte, para todo i (i=1,2, ... , m)

$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}s_{n,Q_1})/\partial\theta_i)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}s_{n,Q_1})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = a(G)$; y para todo

$i \neq k$ (i=1,2, ... , m ; k=1,2, ... , m)

$$(\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{i1}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_k)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta} = (\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{11}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_2)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta}.$$

Puesto que $E_{\boldsymbol\theta}(H_{i1}\ s_{n,Q_1}) = 0$ si $\theta_j = \theta_0$ $(j=1,\ldots,m)$, se tiene

$$(\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{11}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_2)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta} = -(\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{11}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_1)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta}/(m-1).$$

Por lo tanto:

$$E_{\boldsymbol\theta_n}(H_{i1}\ s_{n,Q_1}) =$$

$$= n^{-1/2} \sum_{\substack{k=1\\k=i}}^{m} \delta_k\ (\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{i1}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_k)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta} + n^{-1/2}\ \delta_i\ (\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{i1}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_i)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta} +$$

$$+ o(n^{-1/2}) =$$

$$= n^{-1/2} \sum_{\substack{k=1\\k=i}}^{m} \delta_k\ (-(\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{11}\ s_{n,Q_1})/\partial\theta_k)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta}/(m-1)) + n^{-1/2}\delta_i(\partial E_{\boldsymbol\theta}(H_{i1}s_{n,Q_1})/\partial\theta_i)_{\boldsymbol\theta=\boldsymbol\theta}$$

$$+ o(n^{-1/2}) = n^{-1/2} \sum_{\substack{k=1\\k=i}}^{m} \delta_k\ (-a(G)/(m-1)) + n^{-1/2}\delta_i\, a(G) + o(n^{-1/2}) =$$

$$= n^{-1/2}\ a(G)\ ((-1/(m-1)) \sum_{\substack{k=1\\k=i}}^{m} \delta_k + \delta_i) + o(n^{-1/2}) =$$

$$= n^{-1/2}\ a(G)\ ((-1/(m-1))\ (\sum_{k=1}^{m}\delta_k - \delta_i) + \delta_i) + o(n^{-1/2}) =$$

$$= n^{-1/2}\ a(G)\ (m/(m-1))\ \delta_i + o(n^{-1/2})\ .$$

De esta manera tenemos

$$\Delta_n = \frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2 \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2} \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}(n^{-1/2}a(G)(m/(m-1))\delta_i+o(n^{-1/2})\right]^2 =$$

$$= \frac{(m-1)n}{\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2 \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2} \sum_{i=1}^{m}\left[a(G)(m/(m-1))\delta_i+o(1)\right]^2 .$$

Ahora bien, como $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 \sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2}{(m-1)n} = O(1)$, se concluye que

$$\Delta_n = \frac{(m-1)n}{\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2 \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2} (a(G))^2(m/(m-1))^2 \sum_{i=1}^{m}\delta_i^2 +o(1).$$

Por lo tanto la demostración está completa.

El Teorema 2.2, da una expresión de Δ, para diferentes pesos $s_{n,j}$ $(j=1, \ldots , n)$. Pero antes veremos el siguiente lema .

<u>Lema 2.2</u> Sea j un número natural mayor que cero y

$$M_{1k} = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_1 > Q_k \\ 0 & \text{Si } Q_1 \leq Q_k \end{cases} , \quad (k=1, \ldots , n).$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} (\partial E_{\varrho}(H_{11}(\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n)^j)/\partial\theta_1)_{\varrho=\varrho} = (\partial E_{\varrho}(H_{11}\prod_{i=2}^{j+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\varrho=\varrho}.$$

<u>Demostración</u>:

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n\right)^{j}\right) = E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}/n + 1/n\right)^{j}\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{j} \binom{j}{h} (1/n)^{j-h}\, E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}/n\right)^{h}\right).$$

Luego,

$$\left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n\right)^{j}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = \sum_{h=0}^{j} {j \atop h} (1/n)^{j} \left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}\right)^{h}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}$$

Como

$\left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}\right)^{h}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = O(n^{h})$, $h=0,1, \ldots , j-1$, se tiene, para $h=0,1, \ldots , j-1$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{j}{h} (1/n)^{j} \left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}\right)^{h}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = 0 \qquad (2.1)$$

Además

$$\left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} M_{1k}/n\right)^{j}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= (1/n^{j}) \sum_{\substack{r_2>0,\ldots,r_n>0 \\ r_2+\ldots+r_n=j}} (j!/r_2!r_3!\ldots r_n!) \left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11} \prod_{i=2}^{k+1} M_{1i}^{r_i}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= o(1) + (1/n^{j}) \underset{l_1\neq l_2\neq\ldots\neq l_j}{\sum_{l_1=2}^{n} \sum_{l_2=2}^{n} \cdots \sum_{l_j=2}^{n}} \left(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}\left(H_{11} \prod_{i=1}^{j}\right)/\partial\theta_1\right)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= o(1) + ((n-1)(n-2)\ldots(n-j)/n^j)\ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{i=2}^{j+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} \qquad (2.2)$$

Luego de (2.1) y (2.2) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}(\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n)^j)/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{i=2}^{j+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}.$$

Por lo tanto el Lema 2.2 queda demostrado.

Definamos $a_k(G) = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{i=2}^{k+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}$ para $k=1,2,\ldots$, donde M_{1i} es la función indicadora del evento $D_1>D_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Teorema 2.2

(a) Si $s_{n,j} = (j/n)^l$, $l=1,2,\ldots$,

$$\Delta = \frac{m^2\,(2l+1)}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2}\ (\sum_{i=1}^{m}\delta_i^2)\ (a_l(G))^2 .$$

(b) Supongamos que $s_{n,j} = f(j/n)$, siendo f una función que admite un desarrollo en serie de potencias $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, x^i$, donde las constantes c_i son tales que $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$.

Luego

$$\Delta = \frac{m^2 \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}(t_i-\bar{t})^2 \int_0^1 (f(x))^2\,dx}\ (c_0\, a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, a_j(G))^2;$$

donde $c_0 = (\partial E_{\theta}(H_{11})/\partial\theta_1)_{\theta=0}$

Demostración:

(a) En primer lugar,

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 = \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} (j/n)^{2l} = 1/(2l+1).$$

Por otra parte, como $Q_1 = \sum_{k=1}^{m} M_{1k}$, se tiene

$$E_{\theta}(H_{11} s_{Q_1}) = E_{\theta}(H_{11} (\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n)^{l}).$$

Luego, por Lema 2.2

$$\lim_{n\to\infty} (\partial E_{\theta}(H_{11} s_{Q_1})/\partial\theta_1)_{\theta=0} = (\partial E_{\theta}(H_{11} \prod_{i=2}^{l+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\theta=0}$$

Por consiguiente

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \frac{m^2\,(2l+1) \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2\, ((\partial E_{\theta}(H_{11} \prod_{i=2}^{l+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\theta=0})^2}{(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2} =$$

$$= \frac{m^2\,(2l+1) \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2}{(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2}\, (a_l(G))^2.$$

(b) En primer lugar se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} s_{n,j}^2 = \lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{j=1}^{n} (f(j/n))^2 = \int_0^1 (f(x))^2\, dx.$$

Por otra parte como $\sum_{k=1}^{n} M_{1k}$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$, se concluye

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} s_{Q_1}) = E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} f(Q_1/n)) = E\, (H_{11} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \,(\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n)^j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} (\sum_{k=1}^{n} M_{1k}/n)^j).$$

De esta manera por Lema 2.2

$$\lim_{n\to\infty} (\, E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} s_{Q_1})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= c_0\, (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} s_{Q_1})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{i=2}^{j+1} M_{1i})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= c_0\, a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, a_j(G).$$

Luego

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \frac{m^2 \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2}{(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 \int_0^1 (f(x))^2\, dx} (c_0\, a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, a_j(G))^2$$

Por lo tanto queda demostrado Teorema 2.2.

Como consecuencia del Teorema 2.2, obtenemos la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test F (Teoremas 2.3), y la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test de Friedman (Teorema 2.4), para los pesos $s_{n,j}$ considerados en dicho Teorema.

Teorema 2.3 Supongamos $\sigma^2(G) < \infty$.

(a) Si $s_{n,j} = (j/n)^l$, $l=1,2, \ldots$, la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test F es dada por

$$e_{W,F}(G) = \frac{m^2\ (2l+1)}{(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2} (a_l(G))^2\ \sigma^2(G).$$

(b) Si $s_{n,j} = f(j/n)$, donde f satisface las condiciones del Teorema 2.2 (b) la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test F es dada por

$$e_{W,F}(G) = \frac{m^2}{(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 \int_0^1 (f(x))^2\, dx} (c_0\ a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j\ a_j(G))^2\ \sigma^2(G).$$

Demostración:

El Teorema 2.3 se sigue del Teorema 2.2 y del hecho que bajo las alternativas K_n, F converge en distribución a una chi-cuadrado no central con (m-1) grados de libertad y parámetro de no centralidad $\sum_{i=1}^{m} \delta_i^2/\sigma^2(G)$.

De esta manera el Teorema 2.3 queda demostrado.

Antes de enunciar Teorema 2.4, definamos

$$\beta_{s,m-2} = \binom{m-2}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} (G(x))^s \, (1-G(x))^{m-2-s} \, (g(x))^2 \, dx \ , \ s=0,1, \ \ldots \ , m-2,$$

y convencionalmente sea $\beta_{-1,m-2} = \beta_{m-1,m-2} = 0$.

Luego, sea $\lambda_r = \beta_{r-1,m-2} - \beta_{r-2,m-2}$ $(r=1, \ \ldots \ , m)$.

Teorema 2.4

(a) Si $s_{n,j} = (j/n)^l$, $l=1,2, \ \ldots$, la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test de Friedman es dada por

$$e_{W,Q}(G) = m(m+1)(2l+1)(a_l(G))^2 \Big/ \Big[12(m-1)\Big(\sum_{r=1}^{m} r\lambda_r\Big)^2 \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2\Big]$$

(b) Si $s_{n,j} = f(j/n)$, donde f satisface las condiciones del Teorema 2.2 (b) la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test de Friedman es dada por

$$e_{W,Q}(G) = (m+1)m\Big(c_0 \, a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, a_j(G)\Big)^2/T,$$

donde

$$T = 12(m-1) \sum_{i=1}^{m} (t_i-\bar{t})^2 \int_0^1 (f(x))^2 \, dx \ \Big(\sum_{r=1}^{m} r\lambda_r\Big)^2.$$

Demostración:

El Teorema 2.4 se sigue del Teorema 2.2 y del hecho que bajo la sucesión de alternativa K_n, el estadístico Q de Friedman tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado con (m-1) grados de libertad y parámetro de no centralidad $12m \sum_{i=1}^{m} \delta_i^2 \left(\sum_{r=1}^{m} r\lambda_r \right)^2 / (m-1)$.

3.- EFICIENCIA ASINTOTICA DEL TEST W PARA TRES TRATAMIENTOS

3.1.- Cálculo de $a_0(G)$ y $a_j(G)$ $(j=1,2, \dots)$

En esta sección vamos a suponer $t_i = i$ $(i=1,2, 3)$. Luego
$H_{ij} = R_{ij} - 3$ $(i=1,2, 3 ; j=1,2, \dots , n)$. Además
$D_j = \max\limits_{1\le i\le 3} Z_{ij} - \min\limits_{1\le i\le 3} Z_{ij}$ $(j=1,2, \dots , n)$.

El Teorema 3.1 da una expresión de $a_0(G)$ y $a_j(G)$ $(j=1,2, \dots)$, para cualquier función de distribución G y en particular son considerados el caso normal y Cauchy.

Teorema 3.1 . Sean Z_1, Z_2, Z_3 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con distribución G; $U = Z_2 - Z_1$, $V = Z_3 - Z_2$ y $h(u,v)$ la densidad conjunta de U y V. Luego

(a) $a_0(G) = 2(K_1 + K_2)$ (3.1)

donde

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} h(0,v)\,dv \quad , \quad K_2 = \int_{-\infty}^{0} h(u,0)\,du \quad ;$$

y

$$a_j(G) = 4\ 6^j\ (K_1^j + K_2^j)\ (j=1,2, \dots) \tag{3.2}$$

donde

$$K_1^j = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_1(u+v)\ (H(u+v))^{j-1}\ h(u,v)\,du\,dv \tag{3.3}$$

$$K_2^j = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{u+v}^{0} h(u+v-w,w)\ h(u,v)\ (H(u+v))^{j-1}\ dw\ dv\ du \qquad (3.4)$$

$$H(z) = \int_{z}^{0} \int_{z-y}^{0} h(x,y)\ dx\ dy \quad , \quad H_1(z) = \int_{-\infty}^{z} h(0,y)\ dy.$$

(b) Si G es normal con varianza 1, se tiene

$$K_1 = K_2 = 1/(4\pi^{1/2}) \qquad (3.5)$$

$$K_1^j = j \int_{-\infty}^{0} H_1(2^{1/2}w)\ (H(2^{1/2}w))^{j-1}\ (2\Phi(-w/3^{1/2}) - 1)\ \phi(w)\ dw \qquad (3.6)$$

y

$$K_2^j = (8\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{0} (H(w))^{j-1}\ (2\Phi(-w/6^{1/2}) - 1)\ \phi(w)\ dw \qquad (3.7)$$

donde

$$H(z) = \int_{z/2^{1/2}}^{0} (2\Phi(-u/3^{1/2}) - 1)\ \phi(u)\ du \qquad (3.8)$$

$$H_1(z) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2}\ \Phi(z(2/3)^{1/2}) \qquad (3.9)$$

(Φ y ϕ son las funciones de distribución y de densidad respectivamente de una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1).

(c) Si G se Cauchy con parámetro de escala uno, se tiene

$$K_1 = K_2 = (4\pi)^{-1} \qquad (3.10)$$

$$K_1^j = (-j/\pi)\int_{-\infty}^{0} H_1(2w)(H(2w))^{j-1}(\ln(w^2+1)/2w + \text{arc tan}(w))\gamma_1(w)\,dw \quad (3.11)$$

y

$$K_2^j = (1/2\pi^2)\int_{-\infty}^{0} (\ln(w^2+1)/2w + \text{arc tan}(w))^2\,(H(2w))^{j-1}\,(\gamma_1(w))^2\,dw \quad (3.12)$$

donde γ_1 es la densidad de Cauchy centrada en el origen con parámetro de escala uno;

$$H(z) = ((\text{arc tan}(z/2))^2 - (\ln(z^2/4+1))^2/4 - \int_{z/2}^{0} \ln(x^2+1)/x\,dx)/2\pi^2 \quad (3.13)$$

y

$$H_1(z) = (2/\pi^2)\,(\text{arc tan}(z/2)+\pi/2 + z/(4+z^2)) \qquad (3.14)$$

<u>Demostración</u>:

(a) Sea $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta_3 = 0$.

Como $H_{11} = \begin{cases} 1 & \text{si } R_{11} = 3 \\ -1 & \text{si } R_{11} = 1 \\ 0 & \text{si } R_{11} = 2 \end{cases}$, se tiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}) - P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}) = h_1(\theta) - h_2(\theta)\ ,$$

donde

$h_1(\theta) = P_{\theta}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31})\ ,\quad h_2(\theta) = P_{\theta}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31})$.

Luego

$$(\partial E_{\theta}(H_{11})/\partial\theta_1)_{\theta=0} = (dh_1(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (dh_2(\theta)/d\theta)_{\theta=0}.$$

Además se ve inmediatamente que

$$h_1(\theta) = 2\ P_{\theta}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}) = 2\ P_0(Z_{21}-Z_{11} \leq \theta\ ,\ Z_{31}-Z_{21} \leq 0),\ y$$

$$h_2(\theta) = 2\ P_{\theta}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}) = 2\ P_0(Z_{11}-Z_{21} \leq -\theta\ ,\ Z_{21}-Z_{31} \leq 0).$$

Ahora bien, si definimos $U_1 = Z_{21}-Z_{11}$, $V_1 = Z_{31}-Z_{21}$, se tiene

$h_1(\theta) = 2\ P_0(U_1 \leq \theta\ ,\ V_1 \leq 0)$ y $h_2(\theta) = 2\ P_0(U_1 \leq 0\ ,\ V_1 \leq -\theta)$.

De esta manera si $L(\theta_1,\theta_2) = P_0(U_1 \leq \theta_1, V_1 \leq \theta_2)$, entonces

$a_0(G) = 2\ ((\partial L/\partial\theta_1)_{\theta=0} + (\partial L/\partial\theta_2)_{\theta=0})$.

Por otra parte como $L(\theta_1,\theta_2) = \int_{-\infty}^{\theta_1}\int_{-\infty}^{\theta_2} h(x,y)\ dx\ dy$, se concluye

que $(\partial L/\partial\theta_1)_{\theta=0} = \int_{-\infty}^{0} h(0,y)\ dy$, y $(\partial L/\partial\theta_2)_{\theta=0} = \int_{-\infty}^{0} h(x,0)\ dx$.

Luego se tiene (3.1).

Ahora probaremos (3.2).

De las definiciones de H_{11} y de M_{1k} se obtiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{k=2}^{j+1} M_{1k}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{11} \geq Z_{31} \ , \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) -$$

$$- P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} \ , \ Z_{11} \leq Z_{31} \ , \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) = h_1^j(\theta) - h_2^j(\theta) \ ,$$

donde

$$h_1^j(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{11} \geq Z_{31} \ , \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) \ , \ y$$

$$h_2^j(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} \ , \ Z_{11} \leq Z_{31} \ , \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)).$$

Luego

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11} \prod_{k=2}^{j+1} M_{1k})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (dh_1^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (dh_2^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0}.$$

Ahora, vamos a encontrar una expresión de $(dh_1^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0}$.

Se observa que

$$h_1^j(\theta) = 2 \ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{21} \geq Z_{31} \ , \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)).$$

Si definimos para $k=2, \ldots , j+1$

$$A_k^1 = \{Z_{1k} \geq Z_{2k} \ , \ Z_{2k} \geq Z_{3k}\} \quad , \quad A_k^2 = \{Z_{2k} \geq Z_{1k} \ , \ Z_{1k} \geq Z_{3k}\} \quad ,$$

$A_k^3 = \{Z_{2k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{3k} \geq Z_{1k}\}$, es inmediato ver que

$$h_1^j(\theta) = 2^{j+1} \sum_{i_2=1}^{3} \sum_{i_3=1}^{3} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{3} P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} , Z_{21} \geq Z_{31} , \bigcap_{k=2}^{j+1} (A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k)).$$

En primer lugar se encontrará una expresión de

$$\pi(i_2,\ldots,i_{j+1}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} , Z_{21} \geq Z_{31} , \bigcap_{k=2}^{j+1} (A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k)).$$

Sean n_1, n_2, n_3 números enteros mayor o iguales que cero tales que $n_1+n_2+n_3 = j$. Supongamos que la sucesión $\{i_2,\ldots,i_{j+1}\}$ es tal que $i_k=1$ ocurre n_1 veces, $i_k=2$ ocurre n_2 veces e $i_k=3$ n_3 veces.

Luego,

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\} =$$

$$= \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\} \cap \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\} \cap \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\}.$$

De donde, se tiene

$$\pi(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} , Z_{21} \geq Z_{31} , \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\} , \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\} ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} \{A_k^{i_k} , D_1 \geq D_k\}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{21} \geq Z_{31} \ , \ \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} \{Z_{1k} \geq Z_{2k} \ , \ Z_{2k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{11}-Z_{31} \geq Z_{1k}-Z_{3k}\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} \{Z_{2k} \geq Z_{1k} \ , \ Z_{1k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{11}-Z_{31} \geq Z_{2k}-Z_{3k}\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} \{Z_{2k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{3k} \geq Z_{1k} \ , \ Z_{11}-Z_{31} \geq Z_{2k}-Z_{1k}\}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{21}-Z_{11} \leq \theta \ , \ Z_{31}-Z_{21} \leq 0 \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} \{Z_{2k}-Z_{1k} \leq \theta \ , \ Z_{3k}-Z_{2k} \leq 0 \ , \ Z_{1k}-Z_{3k}-Z_{11}+Z_{31} \leq 0\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} \{Z_{1k}-Z_{2k} \leq -\theta \ , \ Z_{3k}-Z_{1k} \ \ \ , \ Z_{2k}-Z_{3k}-Z_{11}+Z_{31} \leq \theta\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} \{Z_{3k}-Z_{2k} \leq 0 \ , \ Z_{1k}-Z_{3k} \leq \ \ \ , \ Z_{2k}-Z_{1k}-Z_{11}+Z_{31} \leq 2\theta\}).$$

Definamos

$\underset{\sim}{\mu} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{j+1}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{j+1}, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{j+1})$, y

$$L_j(\underset{\sim}{\mu}) = P_{\underset{\sim}{0}}(U_1 \leq \gamma_1 \ , \ V_1 \leq \xi_1 \ , \ \bigcap_{i=2}^{j=1} \{U_i \leq \gamma_i \ , \ V_i \leq \xi_i \ , \ U_1 + V_1 - U_i - V_i \leq \delta_i\})$$

donde $U_i = Z_{2i} - Z_{1i}$, $V_i = Z_{3i} - Z_{2i}$, $i=1,\ldots,j+1$.

Entonces, se concluye

$$P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{21} \geq Z_{31} \ , \ \bigcap_{k=2}^{j+1} \{A_k^{i_k} \ , \ D_1 \geq D_k\}) =$$

$$= L_j(\theta, \gamma_2^{i_2}, \gamma_3^{i_3}, \ldots, \gamma_{j+1}^{i_{j+1}}, 0, \xi_2^{i_2}, \xi_3^{i_3}, \ldots, \xi_{j+1}^{i_{j+1}}, \delta_2^{i_2}, \delta_3^{i_3}, \ldots, \delta_{j+1}^{i_{j+1}}),$$

donde

$$\gamma_k^{i_k} = \theta \ , \ \xi_k^{i_k} = 0 \ , \ \delta_k^{i_k} = 0 \text{ si } i_k=1;$$

$$\gamma_k^{i_k} = -\theta \quad \xi_k^{i_k} = \theta \quad \delta_k^{i_k} = \theta \text{ si } i_k=2;$$

$$\gamma_k^{i_k} = 0 \quad \xi_k^{i_k} = -\theta \quad \delta_k^{i_k} = 2\theta \text{ si } i_k=3,$$

para $k=2,\ldots,j+1$.

Luego,

$$h_1^j(\theta) = 2^{j+1}\{\sum_{i_2=1}^{3}\sum_{i_3=1}^{3}\cdots\sum_{i_{j+1}=1}^{3} L_j(\theta,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},0,\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,$$

$$\xi_{j+1}^{i_{j+1}},\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}})\}.$$

De donde se obtiene

$$(dh_1^j(\theta)/\,d\theta)_{\theta=0} =$$

$$= 2^{j+1}\{3^j\,(\partial L_j/\partial\gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} + 3^j\sum_{k=2}^{j+1}(\partial L_j/\partial\delta_k)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\} =$$

$$= 2^{j+1}\,3^j\,\{(\partial L_j/\partial\gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} + j\,(\partial L_j/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\}.$$

La última igualdad es debido al siguiente hecho

$$(\partial L_j/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} = (\partial L_j/\partial\delta_h)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} \quad \text{para } h=3,\ldots,j+1.$$

De igual forma se ve que

$$(dh_2^j(\theta)/\,d\theta)_{\theta=0} = -2^{j+1}\,3^j\,\{(\partial L_j/\partial\delta_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} + j\,(\partial L_j/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\}$$

Luego, definiendo $K_1^j = (\partial L_j/\partial\delta_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}$ y $K_2^j = (\partial L_j/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}$, se tiene

(3.2)

Ahora, vamos a probar (3.3).

De la definición de h, se tiene

$$L_j(\underset{\sim}{\mu}) = P_{\underset{\sim}{0}}(U_1 \le \gamma_1 \ , \ V_1 \le \xi_1 \ , \ \bigcap_{i=2}^{j+1} \{U_i \le \gamma_i \ , \ V_i \le \xi_i \ , \ U_1+V_1-U_i-V_i \le \delta_i\}) =$$

$$= \int \int \cdots \int_{R_1^j} h(u_1,v_1) \prod_{k=2}^{j+1} h(u_k,v_k) \, du_1 \, du_2 \cdots du_{j+1} \, dv_1 \cdots dv_{j+1} \ ,$$

donde

$$R_1^j = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \ : \ u_1 \le \delta_1, v_1 \le \xi_1, u_k \le \gamma_k, v_k \le \xi_k,$$

$$u_1+v_1-u_k-v_k \le \delta_k, k=2,\ldots,j+1\}.$$

Supongamos $\xi_1 = \gamma_k = \xi_k = \delta_k = 0$, $k=2,\ldots,j+1$, $\gamma_1 = \theta$. Luego, R_1^j puede reescribirse como R_2^j, donde

$$R_2^j = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \ : \ u_1 \le \theta \ , \ v_1 \le 0 \ , \ u_1+v_1-u_k \le v_k \le 0 \ ,$$

$$u_1+v_1 < u_k \le 0 \ , \ k = 2,\ldots,j+1\}.$$

Por lo tanto

$$K_1^j = (\partial L_j/\partial \gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$\int \int \cdots \int_{R_3^j} h(0,v_1) \prod_{k=2}^{j+1} h(u_k,v_k) \, du_2 \, du_3 \cdots du_{j+1} \quad dv_1 \, dv_2 \cdots dv_{j+1} \ ,$$

donde

$$R_3^j = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \; : \; v_1\leq 0 \;,\; v_1\leq u_k\leq 0 \;,$$

$$v_1-u_k\leq v_k\leq 0 \;,\; k=2,\ldots,j+1\}.$$

Pero,

$$R_3^j = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \; : \; v_1\leq u_k+v_k \;,\; u_k\leq 0 \;,$$

$$v_k\leq 0 \;,\; k=2,\ldots,j+1\}.$$

Como $R_3^j \bigcup\limits_{r=2}^{j+1} A_r^j$, donde

$$A_r^j = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \; : \; u_k\leq 0 \;,\; v_k\leq 0 \;,\; u_r\leq 0 \;,\; v_r\leq 0 \;,$$

$$v_1<u_r+v_r \;,\; u_r+v_r\leq u_k+v_k \;,\; k=2,\ldots,j+1 \;,\; r\neq k\} =$$

$$= \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1}) \; : \; u_k\leq 0 \;,\; v_k\leq 0 \;,\; u_r\leq 0 \;,\; v_r\leq 0 \;,$$

$$v_1\leq u_r+v_r \;,\; u_r+v_r-v_k\leq u_k\leq 0 \;,\; u_r+v_r\leq v_k\leq 0 \;,\; k=2,\ldots,j+1 \;,\; r\neq k\} \;,$$

tenemos

$$K_1^j = j \int\int\cdots\int_{A_2^j} h(0,v_1) \prod_{k=2}^{j+1} h(u_k,v_k)\, du_2\ldots du_{j+1}\, dv_1\, dv_2\ldots dv_{j+1}.$$

Por otra parte como $H(u_2+v_2) = \displaystyle\int_{u_2+v_2}^{0}\int_{u_2+v_2-y}^{0} h(x,y)\, dx\, dy$,y

$$H_1(u_2+v_2) = \int_{-\infty}^{u_2+v_2} h(0,y)\, dy \;,\; \text{se sigue que}$$

$$K_1^j = j \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \bar{H}_1(u_2+v_2)\ (H(u_2+v_2))^{j-1}\ h(u_2,v_2)\ du_2\ dv_2 \ .$$

De esta manera queda probado (3.3).

Para demostrar (3.4) , supongamos $\gamma_k = \xi_k = 0$, $k=1,\ldots,j+1$; $\delta_i = 0$, $i=3,\ldots,j+1$; $\delta_2 = \theta$.

Consideremos la transformación T_1 dada por $\bar{u}_k = u_k + v_k$, $\bar{v}_k = u_k - v_k$, $k=2,\ldots,j+1$. T_1 transforma la región R_1^j en la región

$$\bar{R}_1^j = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_{j+1},\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_{j+1}) : \bar{u}_1<0 \ , \ \bar{u}_1<\bar{v}_1<-\bar{u}_1 \ ,$$
$$\bar{u}_1-\theta<\bar{u}_2<0 \ , \ \bar{u}_2<\bar{v}_2<-\bar{u}_2 \ , \ \bar{u}_1<\bar{u}_k<0 \ , \ \bar{u}_k<\bar{v}_k<-\bar{u}_k \ , \ k=3,4,\ldots,j+1\}.$$

Además el jacobiano de dicha transformación es igual a $1/2^{j+1}$.

Por lo tanto

$$F_j(\theta) = L_j(\underset{\sim}{\mu}) =$$

$$= \int\int\cdots\int_{\bar{R}_1^j} h((\bar{u}_2+\bar{v}_2)/2,(\bar{u}_2-\bar{v}_2)/2)\ \bar{h}_1(\underset{\sim}{\bar{u}},\underset{\sim}{\bar{v}})\ d\bar{u}_1\ldots d\bar{u}_{j+1}\ d\bar{v}_1\ldots d\bar{v}_{j+1}$$

donde

$$\underset{\sim}{\bar{u}} = (\bar{u}_1,\bar{u}_3,\ldots,\bar{u}_{j+1}) \ , \ \underset{\sim}{\bar{v}} = (\bar{v}_1,\bar{v}_3,\ldots,\bar{v}_{j+1}) \ ,$$

$$\bar{h}_1(\underset{\sim}{\bar{u}},\underset{\sim}{\bar{v}}) =$$

$$= (1/2^{j+2})\ h((\bar{u}_1+\bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1-\bar{v}_1)/2) \prod_{k=3}^{j+1} h((\bar{u}_k+\bar{v}_k)/2,(\bar{u}_k-\bar{v}_k)/2).$$

Luego,

$$dF_j(\theta)/d\theta = \partial L_j/\partial \delta_2 =$$

$$= \iint \cdots \int_{\bar{R}_2^j} h((\bar{u}_1-\theta+\bar{v}_2)/2, (\bar{u}_1-\theta-\bar{v}_2)/2)\ \bar{h}_1(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})\ d\bar{u}_1\ d\bar{u}_3 \ldots d\bar{u}_{j+1}\ d\bar{v}_1 \ldots d\bar{v}_{j+1}$$

donde

$$\bar{R}_2^j = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_3,\ldots,\bar{u}_{j+1},\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{j+1}) : \bar{u}_1 \leq 0\ ,\ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1\ ,\ \bar{u}_1-\theta \leq \bar{v}_2 \leq -(\bar{u}_1-\theta)\ ,$$

$$\bar{u}_1 \leq \bar{u}_k \leq 0\ ,\ \bar{u}_k \leq \bar{v}_k \leq -\bar{u}_k\ ,\ k=3,4,\ldots,j+1\}.$$

De este modo

[illegible] $= (dF_j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$

$$\iint \cdots \int_{\bar{R}_3^j} h((\bar{u}_1+\bar{v}_2)/2, (\bar{u}_1-\bar{v}_2)/2)\ \bar{h}_1(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})\ d\bar{u}_1\ d\bar{u}_3 \ldots d\bar{u}_{j+1}\ d\bar{v}_1 \ldots d\bar{v}_{j+1}$$

donde

$$\bar{R}_3^j = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_3,\ldots,\bar{u}_{j+1},\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{j+1}) : \bar{u}_1 \leq 0\ ,\ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1\ ,\ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_2 \leq -\bar{u}_1\ ,$$

$$\bar{u}_1 \leq \bar{u}_k \leq 0\ ,\ \bar{u}_k \leq \bar{v}_k \leq -\bar{u}_k\ ,\ k=3,4,\ldots,j+1\}.$$

Si hacemos la sustitución $u_k = (\bar{u}_k+\bar{v}_k)/2$, $v_k = (\bar{u}_k-\bar{v}_k)/2$, para $k=1,2,\ldots,j+1$, $\bar{R}_3^j$ se transforma en la región $\bar{R}_4^j$, donde

$$\bar{R}_4^j = \{(u_1,u_3,\ldots,u_{j+1},v_1,\bar{v}_2,v_3,\ldots,v_{j+1}) : u_1\leq 0 \ , \ v_1\leq 0 \ ,$$
$$(u_1+v_1)\leq\bar{v}_2\leq-(u_1+v_1) \ , \ (u_1+v_1)-u_k\leq v_k\leq 0 \ , \ (u_1+v_1)\leq u_k\leq 0 \ ,$$
$$k=3,4,\ldots,j+1\}.$$

Luego, como el jacobiano de dicha transformación es igual a 2^j, se tiene

$$K_2^j = (1/2) \iint\cdots\int_{\bar{R}_4^j} h(u_1,v_1)\ h((u_1+v_1+\bar{v}_2)/2,(u_1+v_1-\bar{v}_2)/2) \prod_{k=3}^{j+1} h(u_k,v_k)$$
$$\times\ du_1\ du_3\ldots du_{j+1}\ dv_1\ d\bar{v}_2\ldots dv_{j+1}.$$

Finalmente por medio de la sustitución $v_2 = (u_1+v_1-\bar{v}_2)/2$, se concluye

$$K_2^j = \iint\cdots\int_{\bar{R}_5^j} h(u_1,v_1)\ h(u_1+v_1-v_2,v_2) \prod_{k=3}^{j+1} h(u_k,v_k)\ du_1\ du_3\ldots du_{j+1}$$
$$\times\ dv_1\ dv_2\ldots dv_{j+1}$$

donde

$$\bar{R}_5^j = \{(u_1,u_3,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,v_3,\ldots,v_{j+1}) : u_1\leq 0 \ , \ v_1\leq 0 \ , \ u_1+v_1\leq v_2\leq 0 \ ,$$
$$u_1+v_1-u_k\leq v_k\leq 0 \ , \ u_1+v_1\leq u_k\leq 0 \ , \ k=3,\ldots,j+1\}.$$

Como $H(u_1+v_1) = \int_{u_1+v_1}^{0}\int_{u_1+v_1-y}^{0} h(x,y)\,dx\,dy$, se tiene

$$K_2^j = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{u_1+v_1}^{0} h(u_1+v_1-v_2,v_2)\ h(u_1,v_1)\ (H(u_1+v_1))^{j-1}\ dv_2\ dv_1\ du_1 .$$

De esta manera que probado (3.4).

(b) Si G es normal con varianza uno, (U,V) es una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. O sea $h(u,v) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\ e^{-(u^2+uv+v^2)/3}$.

De este modo

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} h(0,v)\ dv = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-v^2/3}\ dv .$$

Si hacemos la sustitución $w = (2/3)^{1/2}\ v$, $dw = (2/3)^{1/2}\ dv$, se tiene $K_1 = \frac{1}{4\pi^{1/2}}$

Como $K_1 = K_2$, en este caso particular, se concluye (3.5).

Ahora, se mostrará (3.6).

Como $h(u,v)$ es la densidad conjunta de (U,V), K_1^j puede expresarse

$$K_1^j = j \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_1(u+v)\ (H(u+v))^{j-1}\ h(u,v)\ du\ dv =$$

$$= j\ E(I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ H_1(U+V)\ (H(U+V))^{j-1}) =$$

$$= j\ E(E(I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ H_1(U+V)\ (H(U+V))^{j-1}|U+V))$$

donde I_A es la función indicadora del evento A.

Definiendo $\bar{U} = U$, $\bar{V} = U+V$, tenemos

$$K_1^j = E(E(I_{\bar{U}\le 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}\le 0}\, H_1(\bar{V})\, (H(\bar{V}))^{j-1} | \bar{V})) =$$

$$= E(H_1(\bar{V})\, (H(\bar{V}))^{j-1}\, E(I_{\bar{U}\le 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}\le 0} | \bar{V})) \qquad (3.15)$$

Si G es normal con varianza una, la variable aleatoria bidimensional $(\bar{U},\bar{V})$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f_{(\bar{U},\bar{V})}(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\, h(\bar{u},\bar{v}-\bar{u}) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\, e^{-(\bar{u}^2-\bar{u}\bar{v}+\bar{v}^2)/3}$$

De manera que $(\bar{U},\bar{V})$ es una variable aleatoria normal bivariada con matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Así, puede mostrarse que

$$E(I_{\bar{U}\le 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}\le 0} | \bar{V}) = (2\Phi(-\bar{V}/6^{1/2}) - 1)\, I_{\bar{V}\le 0} \qquad (3.16)\ ,$$

ya que si $\bar{v}\le 0$,

$$E(I_{\bar{U}\le 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}\le 0} | \bar{V}=\bar{v}) = P(\bar{U}\le 0, \bar{V}-\bar{U}\le 0 | \bar{V}=\bar{v}) = P(\bar{v}\le\bar{U}\le 0 | \bar{V}=\bar{v}) = \int_{\bar{v}}^{0} f_{\bar{U}|\bar{V}}(\bar{u}|\bar{v})\, d\bar{u}\ ,$$

donde $f_{\bar{U}|\bar{V}}$ es la densidad condicional de $\bar{U}$ dado $\bar{V}=\bar{v}$.

Pero, la densidad marginal de $\bar{V}$ es $f_{\bar{V}}(\bar{v}) = \frac{1}{2\pi^{1/2}}\, e^{-\bar{v}^2/4}$. Luego

$$f_{\bar{U}|\bar{V}}(\bar{u}|\bar{v}) = \frac{(2/3)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\, e^{-(\bar{u}-\bar{v}/2)^2/3}$$

Por lo tanto

$$E(I_{\bar{U}\le 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}\le 0} | \bar{V}=\bar{v}) = \frac{(2/3)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\bar{v}}^{0} e^{-(\bar{u}-\bar{v}/2)^2/3}\, d\bar{u}.$$

Si hacemos $w = (2/3)^{1/2}\, (\bar{u}-\bar{v}/2)$, $dw = (2/3)^{1/2}\, d\bar{u}$, se tiene

$$E(I_{\overline{U}\leq 0}\, I_{\overline{V}-\overline{U}\leq 0}|\overline{V}=\overline{v}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\overline{v}/6^{1/2}}^{-\overline{v}/6^{1/2}} e^{-w^2/2}\, dw = 2\,\Phi(-\overline{v}/6^{1/2}) - 1.$$

Luego se verifica (3.16).

De (3.16) y de (3.15), se concluye

$$K_1^j = E(H_1(\overline{V})\, (H(\overline{V}))^{j-1}\, (2\,\Phi(-\overline{V}/6^{1/2}) - 1)\, I_{\overline{V}\leq 0}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} H_1(\overline{v})\, (H(\overline{v}))^{j-1}\, (2\,\Phi(-\overline{v}/6^{1/2}) - 1)\, e^{-\overline{v}/4}\, d\overline{v}.$$

Si hacemos $w = \overline{v}/2^{1/2}$, $dw = d\overline{v}/2^{1/2}$, tenemos

$$K_1^j = j \int_{-\infty}^{0} H_1(2^{1/2}w)\, (H(2^{1/2}w))^{j-1}\, (2\,\Phi(-w/3^{1/2}) - 1)\, \phi(w)\, dw.$$

Luego se obtiene (3.6).

Ahora se vera (3.7).

Se tiene

$$K_2^j = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{x+y}^{0} h(x+y-w,w)\, h(x,y)\, (H(x+y))^{j-1}\, dw\, dy\, dx.$$

Como

$$h(x+y-w,w) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\, e^{-(x^2+y^2+2xy-xw-yw+w^2)/3}\ ,$$

se sigue que

$h(x+y-w,w)\ h(x,y) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2\ 3}\ e^{-((w - (x+y)/2)^2 + 7(x^2+y^2)/4 + 5xy/2)/3}.$$

Luego,

$$H_2(x,y) = \int_{x+y}^{0} h(x+y-w,w)\ h(x,y)\ dw =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2\ 3}\ e^{-(7(x^2+y^2)/4 + 5xy/2)/3} \int_{x+y}^{0} e^{-(w - (x+y)/2)^2/3}\ dw.$$

Por medio de la sustitución $z = (w - (x+y)/2)\ (2/3)^{1/2}$, $dz = (2/3)^{1/2}\ dw$, se tiene

$H_2(x,y) =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\ 6^{1/2}}\ e^{-(7(x^2+y^2/4 + 5xy/2)/3)}\ (2\ \Phi(-(x+y)/6^{1/2}) - 1).$$

Luego,

$$H_2(x,y) = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}}\ f_{(X,Y)}(x,y)\ (2\ \Phi(-x+y)/6^{1/2}) - 1)\ ,$$

donde

$$f_{(X,Y)}(x,y)\ \frac{1}{\pi 6^{1/2}}\ e^{-(7(x^2+y^2)/4 + 5xy/2)/3}$$

es la función de densidad de una variable aleatoria (X,Y) normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 7/4 & -5/4 \\ -5/4 & 7/4 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

$$K_2^j = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,2} \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} (H(x+y))^{j-1} \; (2\;\Phi(-(x+y)/6^{1/2}) - 1)\; f_{(X,Y)}(x,y)$$

$$x\;dx\;dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,2}\; E(I_{X<0}\; I_{Y<0}\; (H(X+Y))^{j-1}\; (2\;\Phi(-(X+Y)/6^{1/2}) - 1)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,2}\; E(E(I_{X<0}\; I_{Y<0}\; (H(X+Y))^{j-1}\; (2\;\Phi(-(X+Y)/6^{1/2}) -1)\,|\,X+Y)).$$

Definamos $\bar{X} = X$, $\bar{Y} = X+Y$. Luego la variable aleatoria bidimensional $(\bar{X},\bar{Y})$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f_{(\bar{X},\bar{Y})}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{\pi 6^{1/2}}\; f_{(X,Y)}(x,y-x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(7/4)^{1/2}(6/7)^{1/2}}\; e^{-(2\bar{x}^2/3\; +\; 7\bar{y}^2/6\; -\; 2\bar{x}\bar{y}/3)/2} ,$$

de manera que $(\bar{X},\bar{Y})$ es una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 7/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto,

$$K_2^j = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,2}\; E(E(I_{\bar{X}<0}\; I_{\bar{Y}-\bar{X}<0}\; (H(\bar{Y}))^{j-1}\; (2\;\Phi(-\bar{Y}/6^{1/2}) - 1)\,|\,\bar{Y}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\,2}\; E((H(\bar{Y}))^{j-1}\; (2\;\Phi(-\bar{Y}/6^{1/2}) - 1)\; E(I_{\bar{X}<0}\; I_{\bar{Y}-\bar{X}<0}|\bar{Y})).$$

pero,

$$E(I_{\overline{X}\leq 0}\ I_{\overline{Y}-\overline{X}\leq 0}|\overline{Y}) = (2\ \Phi(-\overline{Y}/6^{1/2}) - 1)\ I_{\overline{Y}\leq 0} \qquad (3.17)\ ,$$

pues si $\overline{y}<0$

$$E(I_{\overline{X}\leq 0}\ I_{\overline{Y}-\overline{X}\leq 0}|\overline{Y}=\overline{y}) = P(\overline{X}\leq 0\ ,\ \overline{Y}-\overline{X}\leq 0|\overline{Y}=\overline{y}) = P(\overline{y}\leq\overline{X}\leq 0|\overline{Y}=\overline{y}) = \int_{y}^{0} f_{\overline{X}|\overline{Y}}(\overline{x}|\overline{y})\ d\overline{x}\ ,$$

donde $f_{\overline{X}|\overline{Y}}$ es la densidad condicional de $\overline{X}$ dado $\overline{Y}=\overline{y}$.

Como, $\overline{Y}$ es una variable aleatoria normal con esperanza cero y varianuno, se tiene

$$f_{\overline{X}|\overline{Y}}(\overline{x}|\overline{y}) = \frac{1}{(3\pi)^{1/2}}\ e^{-(\overline{x}-\overline{y}/2)^2/3}.$$

De esta manera,

$$E(I_{\overline{X}\leq 0}\ I_{\overline{Y}-\overline{X}\leq 0}|\overline{Y}=\overline{y}) = \frac{1}{(3\pi)^{1/2}} \int_{\overline{y}}^{0} e^{-(\overline{x}-\overline{y}/2)^2/3}\ d\overline{x} = 2\ \Phi(-\overline{y}/6^{1/2}) - 1.$$

Luego se verifica (3.17).

Entonces se obtiene

$$K_2^j = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\ 2}\ E((H(\overline{Y}))^{j-1}\ (2\ \Phi(-\overline{Y}/6^{1/2}) - 1)^2\ I_{\overline{Y}\leq 0}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\ 2} \int_{-\infty}^{0} (H(\overline{y}))^{j-1}\ (2\ \Phi(-\overline{y}/6^{1/2}) - 1)\ \phi(\overline{y})\ d\overline{y}\ ,$$

de donde se tiene (3.7).

Para probar (3.8) consideremos la transformación T_2 dada por $\overline{x} = x + y$, $\overline{y} = x - y$. T_2 transforma la región

$R_{xy} = \{(x,y) : z \leq y \leq 0 \ , \ z-y \leq x \leq 0\}$ en la región

$R_{\bar{x}\bar{y}} = \{(\bar{x},\bar{y}) : z \leq \bar{x} \leq 0 \ , \ \bar{x} \leq \bar{y} \leq -\bar{x}\}$. Además $h(x,y) = e^{-(3\bar{x}^2/4 + \bar{y}^2/4)/3}$, y

$|\partial(x,y)/\partial(\bar{x},\bar{y})| = 1/2$. Luego

$$H(z) = \frac{1}{2\pi\, 3^{1/2}} \int_z^0 \int_{z-y}^0 e^{-(x^2 + xy + y^2)/3}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi\, 3^{1/2}} \int_z^0 \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} e^{-(3\bar{x}^2/4 + \bar{y}^2/4)/3}\, d\bar{y}\, d\bar{x} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\, 3^{1/2}} \int_z^0 e^{-\bar{x}^2/4} \left(\int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} e^{-\bar{y}^2/12}\, d\bar{y}\right) d\bar{x}.$$

Usando la sustitución $\bar{y} = 6^{1/2}\, u$, $d\bar{y} = 6^{1/2}\, du$, se tiene

$$\int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} e^{-\bar{y}^2/12}\, d\bar{y} = 6^{1/2}\, (2\pi)^{1/2}\, (2\,\Phi(-\bar{x}/6^{1/2}) - 1).$$

Por lo tanto,

$$H(z) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \int_z^0 e^{-\bar{x}^2/4}\, (2\, \Phi(-\bar{x}/6^{1/2}) - 1)\, d\bar{x} .$$

Por medio de la sustitución $u = \bar{x}/2^{1/2}$, $du = d\bar{x}/2^{1/2}$ se concluye

$$H(z) = \int_{z/2^{1/2}}^0 \phi(u)\, (2\, \Phi(-u/3^{1/2}) - 1)\, du.$$

Luego, se tiene (3.8).

Por otra parte

$$H_1(z) = \int_{-\infty}^{z} h(0,y)\, dy = \frac{1}{2\pi\, 3^{1/2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/3}\, dy.$$

Si hacemos $y = (3/2)^{1/2}\, u$, tenemos $H_1(z) = \dfrac{1}{(4\pi)^{1/2}}\, \Phi((2/3)^{1/2}\, z)$.

De este modo se tiene (3.9).

(c) Si G es Cauchy con parámetro de escala 1, (U,V) es una variable aleato ria con función de densidad de probabilidad

$$h(u,v) = \frac{2}{\pi^2}\; \frac{u^2 + v^2 + uv + 12}{(u^2 + 4)\ (v^2 + 4)\ ((u+v)^2 + 4)} ,$$

(ver Lema A1 del Apéndice).

De este modo

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} h(0,v)\, dv = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{0} (1/(v^2 + 4) + 8/(v^2 + 4)^2)\, dv = 1/4\pi .$$

Como $K_1 = K_2$, en este caso particular se concluye (3.10).

Ahora, se mostrará (3.11).

Por (3.15) K_1^j puede expresarse como

$$K_1^j = j\, E(H_1(\overline{V})\ (H(\overline{V}))^{j-1}\ E(I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}<0} \mid \overline{V})).$$

Si G es Cauchy con parámetro de escala 1, $(\overline{U},\overline{V})$ es una variable alea toria bidimensional con función de densidad de probabilidad

$$f_{(\overline{U},\overline{V})}(\overline{u},\overline{v}) = \frac{2}{\pi^2}\ h(\overline{u},\overline{v}-\overline{u}) = \frac{2}{\pi^2}\ \frac{\overline{u}^2 + \overline{v}^2 - \overline{u}\overline{v} + 12}{(\overline{u}^2 + 4)\ (\overline{v}^2 + 4)\ ((\overline{v} - \overline{u})^2 + 4\ )}\ .$$

De esta manera puede mostrarse que

$$E(I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}<0}|\overline{V}) = \{(\ln(\overline{V}^2/4 + 1/\overline{V} = \text{arc}\tan(\overline{V}/2))/\pi\}\ I_{\overline{V}<0} \qquad (3.18)$$

Pues si $\overline{v}<0$

$$E(I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}<0}\ |\ \overline{V}=\overline{v}) = P(\overline{U}<0\ ,\ \overline{V} - \overline{U}<0\ |\ \overline{V}=\overline{v}) = P(\overline{v}<\overline{U}<0\ |\ \overline{V}=\overline{v}) =$$

$$= \int_{\overline{v}}^{0} f_{\overline{U}|\overline{V}}(\overline{u}|\overline{v})\ d\overline{u}\ ,$$

donde $f_{\overline{U}|\overline{V}}$ es la densidad condicional de $\overline{U}$ dado $\overline{V}=\overline{v}$.

Como, $\overline{V}$ es una variable aleatoria con densidad de Cauchy γ_2 centrada en el origen y con parámetro de escala 2, se tiene

$$f_{\overline{U}|\overline{V}}(\overline{u}|\overline{v}) = \frac{1}{\pi}\ \frac{\overline{u}^2 + \overline{v}^2 - \overline{u}\overline{v} + 12}{(\overline{u}^2 + 4)\ ((\overline{v} - \overline{u})^2 + 4)}\ .$$

Por lo tanto

$$E(I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}<0}|\overline{V}=\overline{v}) = \frac{1}{\pi} \int_{\overline{v}}^{0} \frac{\overline{u}^2 + \overline{v}^2 - \overline{u}\overline{v} + 12}{(\overline{u}^2 + 4)\ ((\overline{v} - \overline{u})^2 + 4)}\ d\overline{u} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\ (\ln(\overline{v}^2/4 + 1)/\overline{v} + \text{arc}\tan(\overline{v}/2)).$$

Esta última integral se obtiene descomponiendo el integrando en fracciones simples, (ver Lema A2 del Apéndice). Luego, se verifica (3.16).

De esta manera

$$K_1^j = -j\ E(H_1(\overline{V})\ (H(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{V}\leq 0}\ (\ln(\overline{V}^2/4 + 1)/\overline{V} + \text{arc tan}(\overline{V}/2))/\pi) =$$

$$= -j \int_{-\infty}^{0} H_1(\overline{v})\ (H(\overline{v}))^{j-1}\ (\ln(\overline{v}^2/4 + 1)/\overline{v} + \text{arc tan}(\overline{v}/2))/\pi\, \gamma_2(\overline{v})\ d\overline{v}.$$

Si hacemos $w = \overline{v}/2$, $dw = d\overline{v}/2$, tenemos

$$K_1^j = (-j/\pi) \int_{-\infty}^{0} H_1(2w)\ (H(2w))^{j-1}\ (\ln(w^2 + 1)/2w + \text{arc tan}(w))\ \gamma_1(w)\ dw ,$$

donde γ_1 es la densidad de Cauchy centrada en el origen y con parámetro de escala 1.

Así se obtiene (3.11).

Ahora veremos (3.12).

Se tiene

$$K_2^j = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{u+v}^{0} h(u+v-w,w)\ h(u,v)\ (H(u+v))^{j-1}\ dw\ dv\ du.$$

Como $h(u+v-w,w) = \dfrac{2}{\pi^2}\ \dfrac{(w - (u + v)/2)^2 + 3(u + v)^2/4 + 12}{((u + v - w)^2 + 4)\ (w^2 + 4)\ ((u + v)^2 + 4)}$,

se concluye que

$$F(u+v) = \int_{u+v}^{0} h(u+v-w,w)\ dw =$$

$$= \frac{2}{((u + v)^2 + 4)\ \pi^2} \int_{u+v}^{0} \frac{(w - (u + v)/2)^2 + 3(u + v)^2/4 + 12}{((u + v - w)^2 + 4)\ (w^2 + 4)}\ dw =$$

$$= \frac{-2}{((u+v)^2+4)\,\pi^2}\,(\ln((u+v)^2/4+1)/(u+v) +$$

$$+ \arctan((u+v)/2)).$$

Esta última integral se obtiene descomponiendo el integrando en fracciones simples (ver Lema A3 del Apéndice). Luego,

$$K_2^j = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} F(u+v)\ (H(u+v))^{j-1}\ \frac{2}{\pi^2}\ \frac{u^2+v^2+uv+12}{(u^2+4)\ (v^2+4)\ ((u+v)^2+4)}$$

$$\times\ du\ dv =$$

$$= E(I_{U\leq 0}\ I_{V\leq 0}\ (H(U+V))^{j-1}\ F(U+V)) =$$

$$= E(E(I_{U\leq 0}\ I_{V\leq 0}\ (H(U+V))^{j-1}\ F(U+V)\,|\,U+V)) =$$

$$= E((H(\bar{V}))^{j-1}\ F(\bar{V})\ E(I_{\bar{U}\leq 0}\ I_{\bar{V}-\bar{U}\leq 0}\,|\,\bar{V}))\ ,$$

definiendo $\bar{U} = U$, $\bar{V} = U + V$.

De (3.16) y usando el hecho que $\bar{V}$ es una variable aleatoria con densidad de Cauchy γ_2 centrada en el origen y con parámetro de escala 2 se obtiene

$$K_2^j = -E((H(\bar{V}))^{j-1}\ F(\bar{V})\ (\ln(\bar{V}^2/4 + 1)/\bar{V} + \text{arc}\tan(\bar{V}/2))/\pi)\ I_{\bar{V}\leq 0}) =$$

$$= \frac{4}{\pi^4} \int_{-\infty}^{0} (H(\bar{v}))^{j-1}\ (\ln(\bar{v}^2/4 + 1)/\bar{v} + \text{arc}\tan(\bar{v}/2))^2\ \frac{1}{(\bar{v}^2 + 4)^2}\ d\bar{v}\ .$$

Si hacemos $w = \bar{v}/2$, $dw = d\bar{v}/2$, se tiene

$$K_2^j = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{0} (\ln(w^2 + 1)/2w + \text{arc}\tan(w))^2\ (H(2w))^{j-1}\ (\gamma_1(w))^2\ dw.$$

De esta manera se concluye (3.12).

Para probar (3.13) consideremos la transformación T_2 dada por $\bar{x} = x + y$, $\bar{y} = x - y$. T_2 transforma la región

$R_z = \{(x,y) : z \leq y \leq 0 , z - y \leq x \leq 0\}$ en la región

$\bar{R}_z = \{(\bar{x},\bar{y}) : z \leq \bar{x} \leq 0 , \bar{x} \leq \bar{y} \leq -\bar{x}\}$. Además

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\ \frac{3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 48}{((\bar{x} + \bar{y})^2/4 + 4)\ ((\bar{x} - \bar{y})^2/4 + 4)\ (\bar{x}^2 + 4)}\ , \text{ y}$$

$$|\partial(x,y)/\partial(\bar{x},\bar{y})| = 1/2.$$

De esta manera

$$H(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_z^0 \int_{z-y}^0 \frac{x^2 + y^2 + xy + 12}{(x^2 + 4)\,(y^2 + 4)\,((x + y)^2 + 4)}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_z^0 \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 48}{((\bar{x} + \bar{y})^2/4 + 4)\,((\bar{x} - \bar{y})^2/4 + 4)\,(\bar{x}^2 + 4)}\, d\bar{y}\, d\bar{x}\ .$$

Descomponiendo el integrando en fracciones simples (ver Lema A5 del Apéndice), se obtiene

$$H(z) = \{(\text{arc tan}(z/2))^2 - \int_{z/2}^0 \ln(x^2 + 1)/x\, dx - (\ln(z^2/4 + 1))^2/4\}\ \frac{1}{2\ \pi^2}\ .$$

De este modo se obtiene (3.13).

Por otra parte

$$H_1(z) = \int_{-\infty}^z h(0,y)\, dy = \int_{-\infty}^z \frac{y^2 + 12}{2\pi^2\,(y^2 + 4)^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\ \pi^2}\ (\text{arc tan}(z/2) + \pi/2 + z/(4 + z^2)).$$

Esta última igualdad se obtiene del Lema A4 (ver Apéndice). Esto prueba (3.14).

De donde se concluye el Teorema 3.1.

3.2.- Algunos resultados numéricos y conclusiones

Supongamos $s_{n,j} = (j/n + 1)^r$ $(j=1,2,\ldots,n)$, r cualquier número real y $t_i = i$ $(i=1,2,3)$.

Luego, como $s_{n,j}$ se puede representar por una serie de potencias

$s_{n,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r}{j} (j/n)^r$, se concluye del Teorema 2.3 (b), si $\sigma^2(G) < \infty$

$$e_{W,F}(G) = 9(2r + 1) (a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{r}{j} a_j(G))^2/(4(2^{2r+1} - 1)) ;$$

y del Teorema 2.4 (b)

$$e_{W,Q}(G) = (2r + 1) (a_0(G) + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{r}{j} a_j(G))^2/((\sum_{i=1}^{3} i \lambda_i)^2 4 (2^{2r+1} - 1)) ,$$

donde λ_i (i=1,2,3) , $a_j(G)$ (j=1,2,...,), $a_0(G)$ fueron definidos en la sección 2.1.

Si G es normal con varianza 1 de (3.1) y (3.5) se tiene $a_0(G) = \pi^{-1/2}$ y $a_j(G)$ (j=1,2,...) se obtuvo integrando numéricamente (3.6) y (3.7). además $\lambda_1 = \pi^{-1/2}/4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\pi^{-1/2}/4$.

Si G es Cauchy con parámetro de escala 1 de (3.1) y (3.10) se tiene $a_0(G) = \pi^{-1/2}$ y $a_j(G)$ (j=1,2,...) se obtuvo integrando numéricamente (3.11) y (3.12). Por otra parte $\lambda_1 = (4\pi)^{-1}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -(4\pi)^{-1}$.

Los valores de $e_{W,F}(G)$ y de $e_{W,Q}(G)$ cuando G es normal son mostrados en la Tabla I y los valores $e_{W,Q}(G)$ cuando G es Cauchy en la Tabla II.

Para cada una de las distribuciones consideradas fueron seleccionados 7 valores de r: 1,1/2,1/3,1/4,1/6,1/8,1/12.

Para r=1, observamos que el test W es 16% más eficiente que el test de Friedman, bajo normalidad. Mientras que, si G es Cauchy el test de Friedman es más eficiente que el test W.

Al disminuir el valor de r, $e_{W,Q}(G)$ se acerca a uno, para las dos distribuciones consideradas.

TABLA I

m=3 , G: normal

r	$e_{W,F}(G)$	$e_{W,Q}(G)$
1	0,8325	1,1623
1/2	0,7808	1,0901
1/3	0,7606	1,0622
1/4	0,7501	1,0473
1/6	0,7390	1,0318
1/8	0,7335	1,0241
1/12	0,7277	1,0160

TABLA II

m=3 , G: Cauchy

r	$e_{W,Q}(G)$
1	0,8953
1/2	0,9558
1/3	0,9724
1/4	0,9803
1/6	0,9873
1/8	0,9904
1/12	0,9935

4.- EFICIENCIA ASINTOTICA DEL TEST W PARA CUATRO TRATAMIENTOS

4.1.- Cálculo para $a_0(G)$ y $a_j(G)$ $(j=1,2,\ldots)$

En esta sección vamos a suponer $t_i = i$ $(i=1,2,3,4)$. Luego $H_{ij} = R_{ij} - 3/2$ $(i=1,2,3,4\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$. Además $D_j = \max\limits_{1\le i\le 4} Z_{ij} - \min\limits_{1\le i\le 4} Z_{ij}$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

El Teorema 4.1 da una expresión de $a_0(G)$ y $a_j(G)$ $(j=1,2,\ldots)$ para cualquier función de distribución G y para el caso normal.

Teorema 4.1. Sean $m = 4$ y Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución G. Definamos $U = Z_2 - Z_1$, $V = Z_3 - Z_2$, $W = Z_4 - Z_3$ y sea $h^*(u,v,w)$ la densidad conjunta de U, V y W.

Luego

(a) $$a_0(G) = 6\ (K_1^* + K_2^* + K_3^*) \qquad (4.1)$$

donde

$$K_1^* = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} h^*(0,v,w)\ dv\ dw\ ,\quad K_2^* = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} h^*(u,0,w)\ du\ dw$$

$$K_3^* = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} h^*(u,v,0)\ du\ dv\ ;$$

y

$$a_j(G) = 3\ 24^j\ (5\ K_1^{*j} + 6_j K_4^{*j} + 2\ K_2^{*j} - K_3^{*j})\ (j=1,2,\ldots) \qquad (4.2)$$

donde

$$K_1^{*j} = j \left\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_1^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_2^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \right\} \tag{4.3}$$

$$K_2^{*j} = j \left\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_3^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_4^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \right\} \tag{4.4}$$

$$K_3^{*j} = j \left\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_5^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_6^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \right\} \tag{4.5}$$

$$K_4^{*j} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_7^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \tag{4.6}$$

y

$$H^*(z) = \int_z^0 \int_{z-u}^0 \int_{z-v-w}^0 h^*(u,v,w)\, dw\, dv\, du \tag{4.7}$$

$$H_1^*(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 h^*(0,v,w)\, dv\, dw \tag{4.8}$$

$$H_2^*(z) = \int_z^0 \int_{-\infty}^{z-w} h^*(0,v,w)\, dv\, dw \tag{4.9}$$

$$H_3^*(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 h^*(u,0,w)\, du\, dw \tag{4.10}$$

$$H_4^*(z) = \int_w^0 \int_{-\infty}^{z-w} h^*(u,0,w)\, du\, dw \tag{4.11}$$

$$H_5^*(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 h^*(u,v,0)\, du\, dv \tag{4.12}$$

$$H_6^*(z) = \int_z^0 \int_{-\infty}^{z-v} h^*(u,v,0)\, du\, dv \tag{4.13}$$

$$H_7^*(z) = \int_z^0 \int_{z-v}^0 h^*(z-v-w,v,w)\, dw\, dv \tag{4.14}$$

(b) Si G es normal con varianza uno y si denotamos con Φ_C y ϕ_C la función de distribución y de densidad de una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza C respectivamente, se tiene

$$K_1^* = K_2^* = 0{,}04289 \tag{4.15}$$

$$K_2^* = 0{,}0527 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} K_1^{*j} = j \Big\{ & \int_{-\infty}^0 \int_y^0 H_1^*(y)\, (H^*(y))^{j-1}\, (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \\ & - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))\, \phi_C(x,y)\, dx\, dy \;+ \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_y^0 H_2^*(y)\, (H^*(y))^{j-1}\, (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \\ & - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))\, \phi_C(x,y)\, dx\, dy \Big\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} K_2^{*j} = j \Big\{ & \int_{-\infty}^0 \int_y^0 H_3^*(y)\, (H^*(y))^{j-1}\, (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \\ & - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))\, \phi_C(x,y)\, dx\, dy \;+ \\ & + \int_{-\infty}^0 \int_y^0 H_4^*(y)\, (H^*(y))^{j-1}\, (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \\ & - \phi((y/2 - x)/3^{1/2}))\, \phi_C(x,y)\, dx\, dy \Big\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$K_3^{*j} = j \left\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_5^*(y)\, (H^*(y))^{j-1} \left(\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \right.\right.$$

$$\left. - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2})\right) \phi_C(x,y)\, dx\, dy \; +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_6^*(y)\, (H^*(y))^{j-1} \left(\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \right. \tag{4.19}$$

$$\left.\left. - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2})\right) \phi_C(x,y)\, dx\, dy \right\}$$

$$K_4^{*j} = j \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_7^*(y)\, (H^*(y))^{j-1} \left(\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \right. \tag{4.20}$$

$$\left. - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2})\right) \phi_C(x,y)\, dx\, dy$$

donde $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$H^*(w) = \int_{w/2^{1/2}}^{0} \int_{(2/3)^{1/2}\,(w-s/2^{1/2})}^{s/3^{1/2}} \left(\Phi(t/2^{1/2}) - \right. \tag{4.21}$$

$$\left. - \Phi((3^{1/2}/2)\,(w - s/2^{1/2}) - t/(2\; 2^{1/2}))\right) \phi(t)\, \phi(s)\, dt\, ds$$

$$H_1^*(w) = 2^{-1} \pi^{-1/2}\, \phi_C(w/2^{1/2}, 0) \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3^{-1/2} \\ -3^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

$$H_2^*(w) = 2^{-1}\, \pi^{-1/2} \int_{w/2^{1/2}}^{0} \Phi(w - u/2^{1/2})\, \phi(u)\, du \tag{4.23}$$

$$H_3^*(w) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2}\ \Phi\ ((2/3)^{1/2}\ w,0) \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.24)$$

$$H_4^*(w) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2}\ w}^{0} \Phi(3^{1/2} w/2 - u/2^{1/2}\ )\ \phi(u)\ du \qquad (4.25)$$

$$H_5^*(w) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2} \Phi((2/3)^{1/2}\ w,0) \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3^{-1/2} \\ -3^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.26)$$

$$H_6^*(w) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2}\ w}^{0} \Phi(3^{1/2}\ w/2 - u/(2\ 2^{1/2}))\ \phi(u)\ du \qquad (4.27)$$

$$H_7^*(w) = w\ 2^{-1}\ \pi^{-1/2}\ e^{-w^2/4} \int_0^{1/2^{1/2}} \phi(u\ w)\ (2\ \Phi(w(1/2 - u/2^{1/2})) - 1)\ du \qquad (4.28)$$

Demostración:

Sea $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$, $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$.

Como

$$H_{11} = \begin{cases} 3/2 & \text{si } R_{11} = 4 \\ 1/2 & \text{si } R_{11} = 3 \\ -1/2 & \text{si } R_{11} = 2 \\ -3/2 & \text{si } R_{11} = 1 \end{cases}$$

se tiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}) = 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}) +$$

$$+\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}) -$$

$$-\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}) -$$

$$-\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}) =$$

$$= 3/2\ \{f_1(\theta) + f_2(\theta) - f_3(\theta) - f_4(\theta)\}$$

donde

$$f_1(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41})\ ;$$

$$f_2(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41})\ ;$$

$$f_3(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41})\ ;$$

$$f_4(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}).$$

Luego,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11})/\ \partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = 3/2\,\{\,(df_1(\theta)/d\theta)_{\theta=0} + (df_2(\theta)/d\theta)_{\theta=0} -$$

$$-\ (df_3(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (df_4(\theta)/d\theta)_{\theta=0}\,\}\,.$$

Por otra parte se observa inmediatamente que

$$f_1(\theta) = 3!\ P_{\theta}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{31} \geq Z_{41}) =$$

$$= 3!\ P_{0}(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta\ ,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0\ ,\ Z_{41} - Z_{31} \leq 0)\ ,$$

$$f_2(\theta) = 2\ P_{\theta}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}) =$$

$$= 2\ P_{0}(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta\ ,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0\ ,\ Z_{11} - Z_{41} \leq -\theta)\ ,$$

$$f_3(\theta) = 2\ P_{\theta}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}) =$$

$$= 2\ P_{0}(Z_{11} - Z_{21} \leq -\theta\ ,\ Z_{21} - Z_{31} \leq 0\ ,\ Z_{41} - Z_{11} \leq \theta)\ ,$$

$$f_4(\theta) = 3!\ P_{\theta}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{31} \leq Z_{41}) =$$

$$= 3!\ P_{0}(Z_{11} - Z_{21} \leq -\theta\ ,\ Z_{21} - Z_{31} \leq 0\ ,\ Z_{31} - Z_{41} \leq 0).$$

Si definimos $U_1 = Z_{21} - Z_{11}$, $V_1 = Z_{31} - Z_{21}$, $W_1 = Z_{41} - Z_{31}$, se tiene

$$f_1(\theta) = 3!\ P_{0}(U_1 \leq \theta,\ V_1 \leq 0\ ,\ W_1 \leq 0)\ ,$$

$$f_2(\theta) = 2\ P_{0}(U_1 \leq -\theta\ ,\ V_1 \leq \theta\ ,\ W_1 \leq 0),$$

$$f_3(\theta) = 2\ P_{0}(U_1 \leq 0\ ,\ V_1 \leq -\theta\ ,\ W_1 \leq \theta),$$

$$f_4(\theta) = 3!\ P_{0}(U_1 \leq 0\ ,\ V_1 \leq 0\ ,\ W_1 \leq -\theta\ )\ .$$

Sea $L^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = P_{\underset{\sim}{0}}(U_1 \leq \theta_1 , V_1 \leq \theta_2 , W_1 \leq \theta_3)$. Entonces

$a_0(G) = 6 \{ (\partial L^*/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + (\partial L^*/\partial\theta_2)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + (\partial L^*/\partial\theta_3)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} \}$.

Por otra parte como

$$L^*(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \int_{-\infty}^{\theta_1} \int_{-\infty}^{\theta_2} \int_{-\infty}^{\theta_3} h^*(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad ,$$

se tiene

$$(\partial L^*/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(0,y,z)\, dy\, dz \quad ,$$

$$(\partial L^*/\partial\theta_2)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(x,0,z)\, dx\, dz \quad y$$

$$(\partial L /\partial\theta_3)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(x,y,0)\, dx\, dy \ .$$

Luego, se tiene (4.1).

Ahora veremos (4.2).

De las definiciones de H_{11} y M_{1k}, se tiene

$$E\,(H_{11} \prod_{k=2}^{j+1} M_{1k}) =$$

$$= \ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} D_1 \geq D_k)) +$$

$$+\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) -$$

$$-\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) -$$

$$-\ 3/2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) =$$

$$= 3/2\ \{\ f_1^j(\theta) + f_2^j(\theta) - f_3^j(\theta) - f_4^j(\theta)\ \}$$

donde

$$f_1^j(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k))\ ;$$

$$f_2^j(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k))\ ;$$

$$f_3^j(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k))\ \ \text{y}$$

$$f_4^j(\theta) = P_\theta(Z_{11} \leq Z_{21} \ , \ Z_{11} \leq Z_{31} \ , \ Z_{11} \leq Z_{41} \ , \ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k))$$

Luego,

$$a_j(G) = 3/2 \ \{ \ (df_1^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} + (df_2^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (df_3^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} -$$

$$- (df_4^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} \ \}$$

Ahora, encontraremos una expresión de $(df_1^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0}$.

En primer lugar, se observa que

$$f_1^j(\theta) = 3! \ P_\theta(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{21} \geq Z_{31} \ , \ Z_{31} \geq Z_{41} \ , \ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) \ .$$

Si definimos para $k=2,\ldots,j+1$

$$B_k^1 = \{ \ Z_{1k} \geq Z_{2k} \ , \ Z_{1k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{3k} \geq Z_{4k} \ \} \ ;$$

$$B_k^2 = \{ \ Z_{2k} \geq Z_{1k} \ , \ Z_{1k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{3k} \geq Z_{4k} \ \} \ ;$$

$$B_k^3 = \{ \ Z_{2k} \geq Z_{3k} \ , \ Z_{3k} \geq Z_{1k} \ , \ Z_{1k} \geq Z_{4k} \ \} \ ;$$

$$B_k^4 = \{ \ Z_{2k} \geq Z_{3k} \quad Z_{3k} \geq Z_{4k} \quad Z_{4k} \geq Z_{1k} \ \} \ .$$

Es inmediato ver que

$$f_1^j(\theta) = (3!)^{j+1} \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{31} \geq Z_{41}\ ,$$

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} (B_k^{i_k}\ ,\ D_1 > D_k))\ .$$

Ahora, se encontrará una expresión de

$\pi_1(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{31} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (B_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k))\ .$$

Sean n_1, n_2, n_3, n_4 números mayores o iguales a cero tales que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = j$.

Supongamos que la sucesión $\{i_2,\ldots,i_{j+1}\}$ es tal que $i_k = 1$ ocurre n_1 veces, $i_k = 2$ ocurre n_2 veces , $i_k = 3$ ocurre n_3 veces y $i_k = 4$ ocurre n_4 veces.

Luego,

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k)) =$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k) \cap \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k) \cap \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k) \cap$$

$$\cap \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k)$$

De donde se tiene

$$\pi(i_1,\ldots,i_{j+1}) = P_{\tilde{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}, Z_{21} \geq Z_{31}, Z_{31} \geq Z_{41},$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k), \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k),$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k), \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (B_k^{i_k}, D_1 \geq D_k));$$

Por lo tanto

$$\pi_1(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$$

$$= P\,(Z_{21} - Z_{11} \le \theta \ ,\ Z_{31} - Z_{21} \le 0 \ ,\ Z_{41} - Z_{31} \le 0 \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} \{Z_{2k} - Z_{1k} \le \theta \ ,\ Z_{31} - Z_{21} \le 0 \ ,\ Z_{4k} - Z_{3k} \le 0 \ ,$$

$$Z_{1k} - Z_{4k} - Z_{11} + Z_{41} \le 0\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} \{Z_{1k} - Z_{2k} \le -\theta \ ,\ Z_{3k} - Z_{1k} \le \theta \ ,\ Z_{4k} - Z_{3k} \le 0 \ ,$$

$$Z_{2k} - Z_{4k} - Z_{11} + Z_{41} \le \theta\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} \{Z_{3k} - Z_{2k} \le 0 \ ,\ Z_{1k} - Z_{3k} \le -\theta \ ,\ Z_{4k} - Z_{1k} \le \theta \ ,$$

$$Z_{2k} - Z_{4k} - Z_{11} + Z_{41} \le \theta\} \ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=4}}^{j+1} \{Z_{3k} - Z_{2k} \le 0 \ ,\ Z_{4k} - Z_{3k} \le 0 \ ,\ Z_{1k} - Z_{4k} \le -\theta \ ,$$

$$Z_{2k} - Z_{1k} - Z_{11} + Z_{41} \le 2\theta\}) \ .$$

Definamos

$\underset{\sim}{\mu}^{*} = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{j+1},\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{j+1},\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{j+1},\delta_2,\ldots,\delta_{j+1})$ y

$L_j^{*}(\underset{\sim}{\mu}^{*}) =$

$$= P_{\underset{\sim}{0}}(U_1 < \gamma_1 \,,\, V_1 < \xi_1 \,,\, W_1 < \nu_1 \,,\, \bigcap_{i=2}^{j+1} \{U_i \le \gamma_i \,,\, V_i \le \xi_i \,,\, W_i \le \nu_i \,,$$

$$U_1 + V_1 + W_1 - U_i - V_i - W_i \le \delta_i\}) \,,$$

donde

$U_i = Z_{2i} - Z_{1i}$, $V_i = Z_{3i} - Z_{2i}$, $W_i = Z_{4i} - Z_{3i}$, para $i=1,\ldots,j+1$.

Entonces se concluye

$$P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \ge Z_{21} \,,\, Z_{21} \ge Z_{31} \,,\, Z_{31} \ge Z_{41} \,,\, \bigcap_{i=2}^{j+1} (B_k^{i_k} \,,\, D_1 \ge D_k)) =$$

$$= L_j^{*}(\theta,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},0,\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},0,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},$$
$$\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}})$$

donde para $k=2,\ldots,j+1$

$\gamma_k^{i_k} = \theta$, $\xi_k^{i_k} = 0$, $\nu_k^{i_k} = 0$, $\delta_k^{i_k} = 0$ si $i_k = 1$

$\gamma_k^{i_k} = -\theta$, $\xi_k^{i_k} = \theta$, $\nu_k^{i_k} = 0$, $\delta_k^{i_k} = \theta$ si $i_k = 2$

$\gamma_k^{i_k} = 0$, $\xi_k^{i_k} = -\theta$, $\nu_k^{i_k} = \theta$, $\delta_k^{i_k} = \theta$ si $i_k = 3$,

$\gamma_k^{i_k} = 0$, $\xi_k^{i_k} = 0$, $\nu_k^{i_k} = \theta$, $\delta_k^{i_k} = \theta$ si $i_k = 4$.

Luego,

$$f_1^j(\theta) =$$

$$= (3!)^{j+1} \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} L_j^*(\theta,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},0,\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},0,$$

$$\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,0,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},0,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},$$

$$\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}}).$$

De donde se obtiene

$$(df_1^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$$

$$= (3!)^{j+1} \{4^j (\partial L_j^*/\partial\gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} + 4^j \sum_{k=1}^{j+1} (\partial L_j^*/\partial\delta_k)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}\} =$$

$$= (3!)^{j+1}\, 4^j \{(\partial L_j^*/\partial\gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} + j\, (\partial L_j^*/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}\} .$$

La última igualdad es debido al siguiente hecho

$$(\partial L_j^*/\partial\delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} = (\partial L_j^*/\partial\delta_h)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} \text{ para } h=3,\ldots,j+1.$$

En forma análoga se puede ver que

$$(df_4^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$$

$$= -(3!)^{j+1}\, 4^j \,\{(\partial L_j^*/\partial \gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} + j\,(\partial L_j^*/\partial \delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}\}\ .$$

Ahora, vamos a encontrar una expresión de $(df_2^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0}$.

Se observa que

$$f_2^j(\theta) =$$

$$= 2\, P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)).$$

Si definimos para k=2,...,j+1

$$C_k^1 = \{Z_{1k} \leq Z_{2k}\ ,\ Z_{3k} \leq Z_{3k}\ ,\ Z_{3k} \leq Z_{4k}\}\ ;$$

$$C_k^2 = \{Z_{2k} \leq Z_{1k}\ ,\ Z_{1k} \leq Z_{3k}\ ,\ Z_{3k} \leq Z_{4k}\}\ ,$$

$$C_k^3 = \{Z_{2k} \leq Z_{3k}\ ,\ Z_{3k} \leq Z_{1k}\ ,\ Z_{1k} \leq Z_{4k}\}\ \text{y}$$

$$C_k^4 = \{Z_{2k} \leq Z_{3k}\ ,\ Z_{3k} \leq Z_{4k}\ ,\ Z_{4k} \leq Z_{1k}\}\ ,$$

se tiene

$$f_2^j(\theta) = 2\ (3!)^j \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,$$

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k))\ .$$

En primer lugar encontraremos una expresión de

$$\pi_2(i_2,\ldots,i_{j+1}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,$$

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)).$$

Sean n_1, n_2, n_3, n_4 números mayores o iguales a cero tales que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = j$.

Supongamos que la sucesión $\{i_2,\ldots,i_{j+1}\}$ es tal que $i_k = 1$ ocurre n_1 veces, $i_k = 2$ n_2 veces, $i_k = 3$ n_3 veces y $i_k = 4$ ocurre n_4 veces.

Luego,

$$\bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k) = \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=1}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k) \cap \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=2}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k) \cap$$

$$\cap \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=3}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k) \cap \bigcap_{\substack{k=2 \\ i_k=4}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)\ .$$

De esta manera se obtiene

$$\pi_2(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}\Big(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)\ ,\quad \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)\ ,\quad \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)\Big) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{0}}\Big(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta\ ,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0\ ,\ Z_{11} - Z_{41} \leq -\theta\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (Z_{1k} - Z_{2k} \leq -\theta\ ,\ Z_{2k} - Z_{3k} \leq 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \leq 0\ ,$$

$$Z_{4k} - Z_{1k} - Z_{41} + Z_{31} \leq \theta)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{1k} \leq \theta\ ,\ Z_{1k} - Z_{3k} \leq -\theta\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \leq 0\ ,$$

$$Z_{4k} - Z_{2k} - Z_{41} + Z_{31} \leq 0)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{3k} \leq 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{1k} \leq \theta\ ,\ Z_{1k} - Z_{4k} \leq -\theta\ ,$$

$$Z_{4k} - Z_{2k} - Z_{41} + Z_{31} \leq 0)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{3k} \leq 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \leq 0\ ,\ Z_{4k} - Z_{1k} \leq \theta\ ,$$

$$Z_{1k} - Z_{2k} - Z_{41} + Z_{31} \leq -\theta)\Big).$$

Luego, de la definición de L_j^* se concluye

$$P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \, , \, Z_{21} \geq Z_{31} \, , \, Z_{11} \leq Z_{41} \, , \bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k} \, , \, D_1 \geq D_k)) =$$

$$= L_j^*(-\theta,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},\theta,\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},0,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},$$

$$\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}}) \, ,$$

donde para $k=2,\ldots,j+1$

$$\gamma_k^{i_k} = 0 \, , \, \xi_k^{i_k} = 0 \, , \, \nu_k^{i_k} = -\theta \, , \, \delta_k^{i_k} = \theta \qquad \text{si } i_k = 1$$

$$\gamma_k^{i_k} = 0 \, , \, \xi_k^{i_k} = -\theta \quad \nu_k^{i_k} = \theta \, , \, \delta_k^{i_k} = 0 \qquad \text{si } i_k = 2$$

$$\gamma_k^{i_k} = -\theta \, , \, \xi_k^{i_k} = \theta \, , \, \nu_k^{i_k} = 0 \, , \, \delta_k^{i_k} = 0 \qquad \text{si } i_k = 3$$

$$\gamma_k^{i_k} = \theta \, , \, \xi_k^{i_k} = 0 \, , \, \nu_k^{i_k} = 0 \, , \, \delta_k^{i_k} = -\theta \qquad \text{si } i_k = 4 \, .$$

Luego,

$$\text{[illegible]}_2^j(\theta) = 2\,(3!)^j \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} L\,(-\theta,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},\theta,$$

$$\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},0,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}}) \, .$$

De esta manera se tiene

$$(df_2^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$$

$$= 2\ (3!)^j\ 4^j\ (-\ (\partial L_j^*/\partial \gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} + (\partial L_j^*/\partial \xi_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}) \ .$$

Finalmente, encontraremos una expresión de $(df_3^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0}$.

Se observa que

$$f_3^j(\theta) = 2\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (D_1 \geq D_k)) \ .$$

Sean C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4 $(k=2,\ldots,j+1)$, como fueron definidos arriba. Luego se tiene

$$f_3^j(\theta) = 2\ (3!)^j \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)).$$

En primer lugar encontraremos una expresión de

$$\pi_3(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ \bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k},\ D_1 \geq D_k)).$$

Pero, usando la descomposición de $\bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \geq D_k)$ dada arriba se

se obtiene

$$\pi_3(i_2,\ldots,i_{j+1}) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{\theta}}\Big(Z_{11} \le Z_{21}\ ,\ Z_{21} \le Z_{31}\ ,\ Z_{11} \ge Z_{41}\ ,\ \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \ge D_k)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \ge D_k)\ ,\ \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \ge D_k)\ ,\ \bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (C_k^{i_k}\ ,\ D_1 \ge D_k)\Big) =$$

$$= P_{\underset{\sim}{0}}\Big(Z_{11} - Z_{21} \le -\theta\ ,\ Z_{21} - Z_{31} \le 0\ ,\ Z_{41} - Z_{11} \le \theta\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=1}}^{j+1} (Z_{1k} - Z_{2k} \le -\theta\ ,\ Z_{2k} - Z_{3k} \le 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \le 0\ ,$$

$$Z_{4k} - Z_{1k} - Z_{31} + Z_{41} \le \theta)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=2}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{1k} \le \theta\ ,\ Z_{1k} - Z_{3k} \le -\theta\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \le 0,$$

$$Z_{4k} - Z_{2k} - Z_{31} + Z_{41} \le 0)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=3}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{3k} \le 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{1k} \le \theta\ ,\ Z_{1k} - Z_{4k} \le -\theta\ ,$$

$$Z_{4k} - Z_{2k} - Z_{31} + Z_{41} \le 0)\ ,$$

$$\bigcap_{\substack{k=2\\ i_k=4}}^{j+1} (Z_{2k} - Z_{3k} \le 0\ ,\ Z_{3k} - Z_{4k} \le 0\ ,\ Z_{4k} - Z_{1k} \le \theta\ ,$$

$$Z_{1k} - Z_{2k} - Z_{31} + Z_{41} \le -\theta)\Big).$$

Luego, de la definición de L_j^* se obtiene

$$P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} , Z_{21} \leq Z_{31} , Z_{11} \geq Z_{41} , \bigcap_{k=2}^{j+1} (C_k^{i_k} , D_1 \geq D_k)) =$$

$$= L_j^*(0,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},-\theta,\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},\theta,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},$$

$$\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}}) ,$$

donde para $k=2,\ldots,j+1$

$\gamma_k^{i_k} = 0$, $\xi_k^{i_k} = 0$, $\nu_k^{i_k} = -\theta$, $\delta_k^{i_k} = \theta$ si $i_k = 1$

$\gamma_k^{i_k} = 0$, $\xi_k^{i_k} = -\theta$, $\nu_k^{i_k} = \theta$ $\delta_k^{i_k} = 0$ si $i_k = 2$

$\gamma_k^{i_k} = -\theta$, $\xi_k^{i_k} = \theta$, $\nu_k^{i_k} = 0$ $\delta_k^{i_k} = 0$ si $i_k = 3$

$\gamma_k^{i_k} = \theta$, $\xi_k^{i_k} = 0$, $\nu_k^{i_k} = 0$, $\delta_k^{i_k} = -\theta$ si $i_k = 4$.

Entonces

$$f_3^j(\theta) = 2\,(3!)^j \sum_{i_2=1}^{4} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{4} L\,(0,\gamma_2^{i_2},\gamma_3^{i_3},\ldots,\gamma_{j+1}^{i_{j+1}},-\theta,$$

$$\xi_2^{i_2},\xi_3^{i_3},\ldots,\xi_{j+1}^{i_{j+1}},\theta,\nu_2^{i_2},\nu_3^{i_3},\ldots,\nu_{j+1}^{i_{j+1}},\delta_2^{i_2},\delta_3^{i_3},\ldots,\delta_{j+1}^{i_{j+1}}).$$

Así se obtiene

$(df_3^j(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$

$= 2\ (3!)^j\ 4^j\ (-(\partial L_j^*/\partial \xi_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}} + (\partial L_j^*/\partial \nu_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}).$

Luego, llamando $K_1^{*j} = (\partial L_j^*/\partial \gamma_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}$, $K_2^{*j} = (\partial L_j^*/\partial \xi_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}$,

$K_3^{*j} = (\partial L_j^*/\partial \nu_1)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}$, $K_4^{*j} = (\partial L_j^*/\partial \delta_2)_{\underset{\sim}{\mu}^*=\underset{\sim}{0}}$, se concluye

$a_j(G) = 3\ (24)^j\ \{5\ K_1^{*j} + 6j\ K_2^{*j} + 2\ K_2^{*j} - K_3^{*j}\}.$

De donde se obtiene (4.2).

Ahora, probaremos (4.3). Para ello, observemos primeramente que

$$L_j^*(\underset{\sim}{\mu}_j^*) = \int\int\cdots\int_{R_j^{*1}} h^*(u_1,v_1,w_1) \prod_{k=2}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)\ du_1\ du_2\ldots du_{j+1}$$

$$\times\ dv_1\ dv_2\ldots dv_{j+1}\ dw_1\ dw_2\ldots dw_{j+1}$$

donde

$$R_j^{*1} = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1},w_1,w_2,\ldots,w_{j+1}) : u_1 \le \gamma_1\ ,\ v_1 \le \xi_1,$$
$$w_1 \le \nu_1\ ,\ u_i \le \gamma_i\ ,\ v_i \le \xi_i\ ,\ w_i \le \nu_i\ ,$$
$$u_1 + v_1 + w_1 - u_i - v_i - w_i \le \delta_i\ ,\ i = 2,\ldots,j+1\}\ .$$

Supongamos

$\xi_1 = \nu_1 = \xi_i = \nu_i = \delta_i = 0$, $i = 2,\ldots,j+1$, $\delta_1 = \theta.$

Pero, R_j^{*1} puede reescribirse como R_j^{*2} , donde

$$R_j^{*2} = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,\ldots,v_{j+1},w_1,\ldots,w_{j+1}) : u_1 \leq \theta \ ,$$

$$v_1 \leq 0 \ , \ w_1 \leq 0 \ , \ u_1 + v_1 + w_1 - u_i - v_i \leq w_i \leq 0 \ ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - u_i \leq v_i \leq 0 \ , \ u_1 + v_1 + w_1 \leq u_i \leq 0 \ , \ i=2,\ldots,j+1\}.$$

Por lo tanto,

$$K_1^{*j} = (\partial L_j^* / \partial \gamma_1)_{\underset{\sim}{\gamma}^* = \underset{\sim}{0}} =$$

$$= \iint\cdots\int_{R_3^{*j}} h^*(0,v_1,w_1) \prod_{k=2}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k) \, du_2\ldots du_{j+1} \, dv_1\ldots dv_{j+1}$$

$$\times \, dw_1\ldots dw_{j+1}$$

donde

$$R_3^{*j} = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1},w_1,w_2,\ldots,w_{j+1}) : v_1 \leq 0 \ ,$$

$$w_1 \leq 0 \ , \ v_1 + w_1 - u_i - v_i \leq w_i \leq 0 \ , \ v_1 + w_1 - u_i \leq v_i \leq 0 \ ,$$

$$v_1 + w_1 \leq u_i \leq 0 \ , \ i=2,\ldots,j+1\}.$$

Pero,

$$R_3^{*j} = \{(u_2,\dots,u_{j+1},v_1,v_2,\dots,v_{j+1},w_1,w_2,\dots,w_{j+1}) : v_1 \le 0 ,$$

$$w_1 \le 0 , v_1 + w_1 \le u_i + v_i + w_i , u_i \le 0 , v_i \le 0 , w_i \le 0 ,$$

$$i=2,\dots,j+1\}.$$

Como R_3^{*j} puede reescribirse como $R_3^{*j} = \bigcup_{k=2}^{j+1} A_k^{*j}$, donde

$$A_k^{*j} = \{(u_2,\dots,u_{j+1},v_1,\dots,v_{j+1},w_1,w_2,\dots,w_{j+1}) : u_k \le 0 ,$$

$$v_k \le 0 , w_k \le 0 , v_1 + w_1 \le u_k + v_k+w_k ,u_k + v_k + w_k \le u_i + v_i + w_i,$$

$$u_i \le 0 , v_i \le 0 , w_i \le 0 , i=2,\dots,j+1\} =$$

$$= \{(u_2,\dots,u_{j+1},v_1,\dots,v_{j+1},w_1,w_2,\dots,w_{j+1}) : u_k \le 0 ,$$

$$v_k \le 0 , w_k \le 0 , v_1 + w_1 \le u_k + v_k + w_k,$$

$$u_k + v_k + w_k - u_i - v_i \le w_i \le 0 , u_k + v_k + w_k - u_i \le v_i \le 0 ,$$

$$u_k + v_k + w_k \le u_i \le 0 , i=2,\dots,j+1\}$$, se tiene

$$K_1^{*j} = j \int\int\cdots\int_{A_2^{*j}} h^*(0,v_1,w_1) \prod_{k=2}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)\, du_2\dots du_{j+1}$$

$$x\, dv_1\dots dv_{j+1}\, dw_1\dots dw_{j+1}.$$

Es inmediato ver que $A_2^{*j} = N_1^j \cup N_2^j$, donde

$$N_1^j = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,\ldots,v_{j+1},w_1,w_2,\ldots,w_{j+1}) : u_2 \leq 0 ,$$

$$v_2 \leq 0 , w_2 \leq 0 , w_1 \leq u_2 + v_2 + w_2 , v_1 \leq 0 ,$$

$$u_2 + v_2 + w_2 - u_k - v_k \leq w_k \leq 0 , u_2 + v_2 + w_2 - u_k \leq v_k \leq 0 ,$$

$$u_2 + v_2 + w_2 \leq u_k \leq 0 , k=2,\ldots,j+1\} , \text{ y}$$

$$N_2^j = \{(u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,\ldots,v_{j+1},w_1,w_2,\ldots,w_{j+1}) : u_2 \leq 0 ,$$

$$v_2 \leq 0 , w_2 \leq 0 , u_2 + v_2 + w_2 \leq w_1 \leq 0 , v_1 \leq u_2 + v_2 + w_2 - w_1 ,$$

$$u_2 + v_2 + w_2 - u_i - v_i \leq w_i \leq 0 , u_2 + v_2 + w_2 - u_i \leq v_i \leq 0 ,$$

$$u_2 + v_2 + w_2 \leq u_i \leq 0 , i=2,\ldots,j+1\}.$$

De donde

$$K_1^{*j} = j \, \{\iint\cdots\int_{N_1^j} h^*(0,v_1,w_1) \prod_{k=2}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)\, du_1\ldots du_{j+1}\, dv_1\ldots dv_{j+1}$$

$$\times\, dw_1\ldots dw_{j+1} +$$

$$+ \iint\cdots\int_{N_2^j} h^*(0,v_1,w_1) \prod_{k=2}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)\, du_1\ldots du_{j+1}\, dv_1\ldots dv_{j+1}$$

$$\times\, dw_1\ldots dw_{j+1}\}.$$

Como de (4.7), (4.8) y (4.9)

$$H^*(u_2+v_2+w_2) = \int_{u_2+v_2+w_2}^{0} \int_{u_2+v_2+w_2-x}^{0} \int_{u_2+v_2+w_2-x-y}^{0} h^*(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \ ,$$

$$H_1^*(u_2+v_2+w_2) = \int_{-\infty}^{u_2+v_2+w_2} \int_{-\infty}^{0} h^*(0,y,z)\, dy\, dz \ ,$$

$$H_2^*(u_2+v_2+w_2) = \int_{u_2+v_2+w_2}^{0} \int_{-\infty}^{u_2+v_2+w_2-z} h^*(0,y,z)\, dy\, dz \ ,$$

se concluye que

$$K_1^{*j} = j\ \{\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_1^*(u_2+v_2+w_2)\ (H^*(u_2+v_2+w_2))^{j-1}\ h^*(u_2,v_2,w_2)$$

$$\times\ du_2\ dv_2\ dw_2\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_2^*(u_2+v_2+w_2)\ (H^*(u_2+v_2+w_2))^{j-1}\ h^*(u_2,v_2,w_2)$$

$$\times\ du_2\ dv_2\ dw_2\ \}.$$

Luego, se sigue (4.3).

En forma similar se puede mostrar (4.4) y (4.5).

Para mostrar (4.6), supongamos

$\gamma_i = \xi_i = \nu_i = 0$, $i=1,\ldots,j+1$; $\delta_3 = \ldots = \delta_{j+1} = 0$, $\delta_2 = \theta$, y consideremos la transformación T^* dada por $\bar{u}_k = u_k + v_k + w_k$, $\bar{v}_k = u_k - v_k + w_k$, $\bar{w}_k = u_k + v_k - w_k$, $k=2,\ldots,j+1$.

T^* transforma la región

$$R_1^{*j} = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{j+1},v_1,\ldots,v_{j+1},w_1,\ldots,w_{j+1}) : u_1 \leq 0 \ , \ v_1 \leq 0 \ ,$$

$$w_1 \leq 0 \ , \ u_2 \leq 0 \ , \ v_2 \leq 0 \ , \ w_2 \leq 0 \ ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - u_2 - v_2 - w_2 \leq \theta \ , \ u_k \leq 0 \ , \ v_k \leq 0 \ , \ w_k \leq 0 \ ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - u_k - v_k - w_k \leq 0 \ , \ k=3,\ldots,j+1\}$$ en la región

$$\bar{R}_1^{*j} = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_{j+1},\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_{j+1},\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_{j+1}) : \bar{u}_1 \leq 0 \ ,$$

$$\bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1 \ , \ \bar{u}_1 \leq \bar{w}_1 \leq -\bar{v}_1 \ , \ \bar{u}_1 - \theta \leq \bar{u}_2 \leq 0 \ ,$$

$$\bar{u}_2 \leq \bar{v}_2 \leq -\bar{u}_2 \ , \ \bar{u}_2 \leq \bar{w}_2 \leq -\bar{v}_2 \ , \ \bar{u}_1 \leq \bar{u}_k \leq 0 \ , \ \bar{u}_k \leq \bar{v}_k \leq -\bar{u}_k \ ,$$

$$\bar{u}_k \leq \bar{w}_k \leq -\bar{v}_k \ , \ k=3,\ldots,j+1\},$$

y el jacobiano de dicha transformación es igual a $1/4^{j+1}$.

Por lo tanto

$$F_j^*(\theta) = L_j^*(\mu^*) = \iint\cdots\int_{\bar{R}_1^{*j}} (1/4^{j+1})h^*((\bar{v}_1 + \bar{w}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{w}_1)/2)$$

$$\times \prod_{k=2}^{j+1} h^*((\bar{v}_k + \bar{w}_k)/2,(\bar{u}_k - \bar{v}_k)/2,(\bar{u}_k - \bar{w}_k)/2)\, d\bar{u}_1\ldots d\bar{u}_{j+1}$$

$$\times\, d\bar{v}_1\ldots d\bar{v}_{j+1}\, d\bar{w}_1\ldots d\bar{w}_{j+1}.$$

Luego,

$$dF_j^*(\theta)/\,d\theta = (1/4^{j+1}) \iint\cdots\int_{\bar{R}_2^{*j}} h^*((\bar{v}_1 + \bar{w}_1)/2, (\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2, (\bar{u}_1 - \bar{w}_1)/2)$$

$$\times\, h^*((\bar{v}_2 + \bar{w}_2)/2, (\bar{u}_1 - \theta - \bar{v}_2)/2, (\bar{u}_1 - \theta - \bar{w}_2)/2)$$

$$\times \prod_{k=3}^{j+1} h^*((\bar{v}_k + \bar{w}_k)/2, (\bar{u}_k - \bar{v}_k)/2, (\bar{u}_k - \bar{w}_k)/2)$$

$$\times\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \ldots d\bar{u}_{j+1}\, d\bar{v}_1\, d\bar{v}_2 \ldots d\bar{v}_{j+1}$$

$$\times\, d\bar{w}_1\, d\bar{w}_2 \ldots d\bar{w}_{j+1}\ ,$$

donde

$$\bar{R}_2^{*j} = \{(\bar{u}_1, \bar{u}_3, \ldots, \bar{u}_{j+1}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{j+1}, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{j+1}) : \bar{u}_1 \leq 0\ ,$$

$$\bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1\ ,\ \bar{u}_1 \leq \bar{w}_1 \leq -\bar{v}_1\ ,\ \bar{u}_1 - \theta \leq \bar{v}_2 \leq -(\bar{u}_1 - \theta)\ ,$$

$$(\bar{u}_1 - \theta) \leq \bar{w}_2 \leq -\bar{v}_2,\ \bar{u}_1 \leq \bar{u}_k \leq 0\ ,\ \bar{u}_k \leq \bar{v}_k \leq -\bar{u}_k\ ,$$

$$\bar{u}_k \leq \bar{w}_k \leq -\bar{v}_k\ ,\ k=3,\ldots,j+1\}.$$

Por lo tanto

$$K_4^{*j} = F_j^*(0) = (1/4^{j+1}) \iint\cdots\int_{\bar{R}_3^{*j}} h^*((\bar{v}_1 + \bar{w}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{w}_1)/2)$$

$$\times\ h^*((\bar{v}_2 + \bar{w}_2)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_2)/2,(\bar{u}_1 - \bar{w}_2)/2)$$

$$\times \prod_{k=3}^{j+1} h^*((\bar{v}_k + \bar{w}_k)/2,(\bar{u}_k - \bar{v}_k)/2,(\bar{u}_k - \bar{w}_k)/2)$$

$$\times\ d\bar{u}_1\ d\bar{u}_3 \ldots d\bar{u}_{j+1}\ d\bar{v}_1\ d\bar{v}_2 \ldots d\bar{v}_{j+1}$$

$$\times\ d\bar{w}_1\ d\bar{w}_2 \ldots d\bar{w}_{j+1},$$

donde

$$\bar{R}_3^{*j} = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_3,\ldots,\bar{u}_{j+1},\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_{j+1},\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_{j+1}) : \bar{u}_1 \le 0\ ,$$

$$\bar{u}_1 \le \bar{v}_1 \le -\bar{u}_1\ ,\ \bar{u}_1 \le \bar{w}_1 \le -\bar{v}_1\ ,\ \bar{u}_1 \le \bar{v}_2 \le -\bar{u}_1\ ,\ \bar{u}_1 \le \bar{w}_2 \le -\bar{v}_2\ ,$$

$$\bar{u}_1 \le \bar{u}_k \le 0\ ,\ \bar{u}_k \le \bar{v}_k \le -\bar{u}_k,\ \bar{u}_k \le \bar{w}_k \le -\bar{v}_k\ ,\ k=3,\ldots,j+1\}.$$

Si hacemos la sustitución $u_k = (\bar{v}_k + \bar{w}_k)/2$, $v_k = (\bar{u}_k - \bar{v}_k)/2$, $w_k = (\bar{u}_k - \bar{w}_k)/2$ $(k=1,3,\ldots,j+1)$, la región $\bar{R}_3^{*j}$ se transforma en la re-- gión $\bar{R}_4^{*j}$, donde

$$\bar{R}_4^{*j} = \{(u_1,u_3,\ldots,u_{j+1},v_1,\bar{v}_2,\ldots,v_{j+1},w_1,\bar{w}_2,\ldots,w_{j+1}) : u_1 \le 0 ,$$

$$v_1 \le 0 , w_1 \le 0 , u_1 + v_1 + w_1 \le \bar{v}_2 \le -(u_1 + v_1 + w_1) ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 < \bar{w}_2 \le -\bar{v}_2 , (u_1 + v_1 + w_1) \le u_k < 0 ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - u_k \le v_k \le 0 , u_1 + v_1 + w_1 - u_k - v_k \le w_k \le 0 ,$$

$$k=3,4,\ldots,j+1\} ,$$

y el jacobiano de dicha transformación es igual a 4^j .

Luego,

$$K_4^{*j} = (1/4) \iint\cdots\int_{\bar{R}_4^{*j}} h^*(u_1,v_1,w_1) \prod_{k=3}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)$$

$$\times\, h^*((\bar{v}_2 + \bar{w}_2)/2,(u_1 + v_1 + w_1 - \bar{v}_2)/2,(u_1 + v_1 + w_1 - \bar{w}_2)/2)$$

$$\times\, du_1\, du_3\ldots du_{j+1}\, dv_1\, d\bar{v}_2\ldots dv_{j+1}\, dw_1\, d\bar{w}_2\ldots dw_{j+1}.$$

Finalmente, si hacemos la sustitución $v_2 = (u_1 + v_1 + w_1 - \bar{v}_2)/2$, $w_2 = (u_1 + v_1 + w_1 - \bar{w}_2)/2$, $dv_2 = (-1/2)\, d\bar{v}_2$, $dw_2 = (-1/2)\, d\bar{w}_2$, se tiene

$$K_4^{*j} = \iint \cdots \int_{\bar{R}_5^{*j}} h^*(u_1,v_1,w_1)\, h^*(u_1 + v_1 + w_1 - v_2 - w_2, v_2, w_2)$$

$$\times \prod_{k=3}^{j+1} h^*(u_k,v_k,w_k)\, du_1\, du_3 \ldots du_{j+1}\, dv_1\, dv_2 \ldots dv_{j+1}\, dw_1\, dw_2 \ldots dw_{j+1} ,$$

donde

$$\bar{R}_5^{*j} = \{(u_1,u_3,\ldots,u_{j+1},v_1,v_2,\ldots,v_{j+1},w_1,w_2,\ldots,w_{j+1}) : u_1 \le 0 ,$$

$$v_1 \le 0 , w_1 \le 0 , u_1 + v_1 + w_1 \le v_2 \le 0 ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - v_2 \le w_2 \le 0 , u_1 + v_1 + w_1 \le u_k \le 0 ,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 - u_k \le v_k \le 0 , u_1 + v_1 + w_1 - u_k - v_k \le w_k \le 0 ,$$

$$k=3,4,\ldots,j+1\}.$$

Ahora bien, como de (4.7) y (4.14)

$$H_7^*(u_1+v_1+w_1) = \int_{u_1+v_1+w_1}^{0} \int_{u_1+v_1+w_1-v_2}^{0} h^*(u_1+v_1+w_1-v_2-w_2,v_2,w_2)\, dw_2\, dv_2 ,$$

$$H^*(u_1+v_1+w_1) = \int_{u_1+v_1+w_1}^{0} \int_{u_1+v_1+w_1-x}^{0} \int_{u_1+v_1+w_1-x-y}^{0} h^*(x,y,z)\, dz\, dy\, dx ,$$

se tiene

$$K_4^{*j} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_7^*(u_1+v_1+w_1)\, (H^*(u_1+v_1+w_1))^{j-1}\, du_1\, dv_1\, dw_1 .$$

(b) Si G es normal con varianza uno, (U,V,W) es una variable aleatoria normal trivariada con esperanza cero y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

O sea

$$h^*(u,v,w) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \, e^{-(-3u^2/4 + uv + uw/2 + v^2 + vw + 3w^2/4)/2} .$$

De este modo

$$K_1^* = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(0,v,w) \, dv \, dw =$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-(v^2 + vw + 3w^2/4)/2} \, dv \, dw .$$

Consideremos la transformación T_1 dada por $\bar{v} = (2/3)^{1/2} v$, $\bar{w} = w/2^{1/2}$. Como $|\partial(v,w)/\partial(\bar{v},\bar{w})| = 3^{1/2}$, se obtiene

$$K_1^* = \frac{3^{1/2}}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-3(\bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{w}/3^{1/2} + \bar{w}^2)/4} \, d\bar{v} \, d\bar{w} =$$

$$= \frac{1}{|2\pi^{1/2}} \, \Phi_C(0,0) ,$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3^{-1/2} \\ -3^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Luego $K_1^* = 0{,}04289$.

Por otra parte

$$K_2^* = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(u,0,w)\, du\, dw =$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-(3u^2/4 + uw/2 + 3w^2/4)/2}\, du\, dw .$$

Consideremos la transformación T_2 dada por $\bar{u} = (2/3)^{1/2} u$, $\bar{w} = (2/3)^{1/2} w$. Como $|\partial(u,w)/\partial(\bar{u},\bar{w})| = 3/2$, se concluye

$$K_2^* = \frac{3}{4(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-9(\bar{u}^2 + 2\bar{u}\bar{w}/3 + \bar{w}^2)/16}\, d\bar{u}\, d\bar{w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \Phi_C(0,0) ,$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Luego $K_2^* = 0{,}05527$. De esta manera se tiene (4.16).

Finalmente como $K_3^* = K_1^*$ se tiene $K_3^* = 0{,}04289$.

Ahora, se mostrara (4.17).

Como $h^*(u,v,w)$ es la densidad conjunta de (U,V,W), K_1^{*j} puede expresarse

$$K_1^{*j} = j\left\{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_1^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ +\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_2^*(u+v+w)\ (H^*(u+v+w))^{j-1}\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\right\} =$$

$$= j\ \{E(H_1^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ I_{W\le 0}) +$$

$$+ E(H_2^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ I_{W\le 0})\}\ .$$

Definiendo $\overline{U} = U$, $\overline{V} = U+V+W$, $\overline{W} = W$, se tiene

$$K_1^{*j} = j\ \{E(H_1^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}<0}\ I_{\overline{W}<0}) +$$

$$+ E(H_2^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}<0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}<0}\ I_{\overline{W}<0})\}\ .$$

Luego,

$$K_1^{*j} = \{ E(E(H_1^*(\bar{V})\,(H^*(\bar{V}))^{j-1}\, I_{\bar{U} \leq 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \leq 0}\, I_{\bar{W} < 0} \mid \bar{U},\bar{V})) + \qquad (4.29).$$
$$+ E(E(H_2^*(\bar{V})\,(H^*(\bar{V}))^{j-1}\, I_{U \leq 0}\, I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \leq 0}\, I_{\bar{W} \leq 0} \mid \bar{U},\bar{V})) \}$$

Si G es normal con varianza uno , $(\bar{U},\bar{V},\bar{W})$ es una variable aleatoria normal trivariada con esperanza cero y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego $(\bar{U},\bar{V},\bar{W})$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f_{(\bar{U},\bar{V},\bar{W})}(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\, e^{-(3\bar{u}^2/4 - \bar{u}\bar{v} + \bar{u}\bar{w}/2 + \bar{v}^2 - \bar{v}\bar{w} + 3\bar{w}^2/4))} .$$

De donde, puede mostrarse que

$$E(I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \leq 0}\, I_{\bar{W} \leq 0} \mid \bar{U},\bar{V}) =$$

$$= (\Phi(-(\bar{V} - \bar{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{V}/2 - \bar{U}/3^{1/2}))\, I_{\bar{V} \leq \bar{U}} \qquad (4.30).$$

Pues si $\bar{v} - \bar{u} \leq 0$ se tiene

$$E(I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \leq 0}\, I_{\bar{W} \leq 0} \mid \bar{V}=\bar{v} , \bar{U}=\bar{u}) = P(\bar{v} - \bar{u} - \bar{W} \leq 0 , \bar{W} \leq 0 \mid \bar{V}=\bar{v} , \bar{U}=\bar{u}) =$$

$$= P(\bar{v} - \bar{u} \leq \bar{W} \leq 0 \mid \bar{V}=\bar{v} , \bar{U}=\bar{u}) = \int_{\bar{v}-\bar{u}}^{0} f_{\bar{W}|\bar{U},\bar{V}}(\bar{w}|\bar{u},\bar{v})\, d\bar{w} ,$$

donde $f_{\bar{W}|\bar{U},\bar{V}}$ es la densidad condicional de $\bar{W}$ dado $\bar{U}=\bar{u}$, $\bar{V}=\bar{v}$.

Pero, $(\bar{U},\bar{V})$ es una variable aleatoria normal bivariada con matriz de covarianza $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. O sea la densidad de probabilidad de $(\bar{U},\bar{V})$ es

$$\phi_C(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{3^{1/2}\ 2\pi}\ e^{-(\bar{v}^2 - \bar{v}\bar{u} + \bar{u}^2)/3}.$$

Luego,

$$f_{\bar{W}|\bar{U},\bar{V}}(\bar{w}|\bar{u},\bar{v}) = \frac{3^{1/2}}{2\ (2\ \pi)^{1/2}}\ e^{-(\bar{u}^2/12\ -\ \bar{u}\bar{v}/3\ +\ \bar{u}\bar{w}/2\ +\ \bar{v}^2/3\ -\ \bar{v}\bar{w}\ +\ 3\bar{w}^2/4)/2} =$$

$$= \frac{3^{1/2}}{2\ (2\ \pi)^{1/2}}\ e^{-(3^{1/2}\ \bar{w}/2\ -\ (\bar{v}/3^{1/2}\ -\ \bar{u}/(2\ 3^{1/2})))^2/2}.$$

Por lo tanto

$$E(I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W}\ \leq\ 0}\ I_{\bar{W}\ \leq\ 0}\ |\ \bar{V}=\bar{v}\ ,\ \bar{U}=\bar{u}) =$$

$$= \frac{3^{1/2}}{2\ (2\pi)^{1/2}} \int_{\bar{v}-\bar{u}}^{0} e^{-(3^{1/2}\bar{w}/2\ -\ (\bar{v}/3^{1/2}\ -\ \bar{u}/(2\ 3^{1/2})))^2/2}\ d\bar{w} =$$

$$= \Phi(-(\bar{v}\ -\ \bar{u}/2)/3^{1/2})\ -\ \Phi((\bar{v}/2\ -\ \bar{u})/3^{1/2}).$$

Luego se verifica (4.30)

De (4.30) y de (4.29) se concluye

$$K_1^{*j} = j\ \{E(H_1^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ (\Phi(-(\bar{V}-\bar{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{V}/2-\bar{U})/3^{1/2}))\ I_{\bar{V}\leq \bar{U}}) +$$

$$+ E(H_2^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ (\Phi(-(\bar{V}-\bar{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{V}/2-\bar{U})/3^{1/2}))\ I_{\bar{V}\leq \bar{U}})\} =$$

$$= j\ \{\int_{-\infty}^{0}\int_{\bar{v}}^{0} H_1^*(\bar{v})\ (H^*(\bar{v}))^{j-1}\ (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(\bar{u},\bar{v})\ d\bar{u}\ d\bar{v}\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{\bar{v}}^{0} H_2^*(\bar{v})\ (H^*(\bar{v}))^{j-1}\ (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(\bar{u},\bar{v})\ d\bar{u}\ d\bar{v}\}.$$

Luego, se tiene (4.17).

Ahora se mostrará (4.18).

K_2^{*j} puede expresarse como

$$K_2^{*j} = j\ \{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_3^*(x+y+z)\ (H^*(x+y+z))^{j-1}\ h^*(x,y,z)\ dx\ dy\ dz\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_4^*(x+y+z)\ (H^*(x+y+z))^{j-1}\ h^*(x,y,z)\ dx\ dy\ dz\} =$$

$$= j\ \{E(H_3^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\leq 0}\ I_{V\leq 0}\ I_{W\leq 0}) +$$

$$+ E(H_4^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\leq 0}\ I_{V\leq 0}\ I_{W\leq 0})\}\ .$$

Si $\bar{U},\bar{V},\bar{W}$ se definen como anteriormente, se obtiene

$$K_2^{*j} = j\ \{E(H_3^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W}\leq 0}\ I_{\bar{W}\leq 0}) +$$

$$+\ E(H_4^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W}\leq 0}\ I_{\bar{W}\leq 0})\} =$$

$$= j\ \{E(E(H_3^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W}\leq 0}\ I_{\bar{W}\leq 0}\ |\ \bar{U},\bar{V})) +$$

$$+\ E(E(H_4^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W}\leq 0}\ I_{\bar{W}\leq 0}\ |\ \bar{U},\bar{V}))\}\ .$$

De esta manera si G es normal con varianza uno, de (4.30) se concluye

$$K_2^{*j} = j\ \{E(H_3^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ (\Phi(-(\bar{V}-\bar{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{V}/2-\bar{U})/3^{1/2}))\ I_{\bar{V}\leq\bar{U}}) +$$

$$+\ E(H_4^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ (\Phi(-(\bar{V}-\bar{U}/2)/3^{1/2} - \Phi((\bar{V}/2 - \bar{U})/3^{1/2}))\ I_{\bar{V}\leq\bar{U}}) =$$

$$= j\ \{\int_{-\infty}^{0}\int_{\bar{v}}^{0} H_3^*(\bar{v})\ (H^*(\bar{v}))^{j-1}\ (\Phi(-(\bar{v}\ \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(\bar{u},\bar{v})\ d\bar{u}\ d\bar{v}\ +$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\int_{\bar{v}}^{0} H_4^*(\bar{v})\ (H^*(\bar{v}))^{j-1}\ (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(\bar{u},\bar{v})\ d\bar{u}\ d\bar{v}\}\ .$$

Así se obtiene (4.18).

Ahora se mostrará (4.19).

K_3^{*j} puede escribirse como

$$K_3^{*j} = j \,\{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_5^*(x+y+z)\ (H^*(x+y+z))^{j-1}\ h^*(x,y,z)\ dx\ dy\ dz\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_6^*(x+y+z)\ (H^*(x+y+z))^{j-1}\ h^*(x,y,z)\ dx\ dy\ dz\} =$$

$$= j\ \{E(H_5^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ I_{W\le 0}) +$$

$$+ E(H_6^*(U+V+W)\ (H^*(U+V+W))^{j-1}\ I_{U\le 0}\ I_{V\le 0}\ I_{W\le 0})\} =$$

$$= j\ \{E(H_5^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}\le 0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}\le 0}\ I_{\overline{W}\le 0}) +$$

$$+ E(H_6^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}\le 0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}\le 0}\ I_{\overline{W}\le 0})\} =$$

$$= j\ \{E(E(H_5^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}\le 0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}\le 0}\ I_{\overline{W}\le 0}\ |\ \overline{U},\overline{V})) +$$

$$+ E(E(H_6^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}\le 0}\ I_{\overline{V}-\overline{U}-\overline{W}\le 0}\ I_{\overline{W}\le 0}\ |\ \overline{U},\overline{V}))\} .$$

Si G es normal con varianza uno de (4.30) se obtiene

$$K_3^{*j} = j\ \{E(H_5^*(\overline{V})\ (H^*(\overline{V}))^{j-1}\ I_{\overline{U}<0}\ (\Phi(-(\overline{V}-\overline{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\overline{V}/2-\overline{U})/3^{1/2}))I_{\overline{V}<\overline{U}}) +$$

$$+ E(H_6^*(V)\ (H^*(V))^{j-1}\ I_{U<0}\ (\Phi(-(V-U/2)/3^{1/2}) - \Phi((V/2-U)/3^{1/2}))\ I_{V<U})\}.$$

Luego,

$$K_3^{*j} = j \left\{ \int_{-\infty}^{0} \int_{\bar{v}}^{0} H_5^*(\bar{v}) \, (H^*(\bar{v}))^{j-1} \, (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2})) \right.$$

$$\times \, \phi_C(\bar{u},\bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v} \; +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \int_{\bar{v}}^{0} H^*(\bar{v}) \, (H^*(\bar{v}))^{j-1} \, (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\left. \times \, \phi_C(\bar{u},\bar{v}) \, d\bar{u} \, d\bar{v} \right\} .$$

De esta manera se concluye (4.19).

Finalmente se mostrará (4.20).

K_4^{*j} puede escribirse como

$$K_4^{*j} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_7^*(x+y+z) \;\; (H^*(x+y+z))^{j-1} \, h^*(x,y,z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= E(H_7^*(U+V+W) \;\; (H^*(U+V+W))^{j-1} \; I_{U \le 0} \; I_{V \le 0} \; I_{W \le 0}) =$$

$$= E(H_7^*(\bar{V}) \;\; (H^*(\bar{V}))^{j-1} \; I_{\bar{U} \le 0} \; I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \le 0} \; I_{\bar{W} \le 0}) =$$

$$= E(E(H_7^*(\bar{V}) \;\; (H^*(\bar{V}))^{j-1} \; I_{\bar{U} \le 0} \; I_{\bar{V}-\bar{U}-\bar{W} \le 0} \; I_{\bar{W} \le 0} \mid \bar{U},\bar{V}).$$

Si G es normal con varianza uno, de (4.30) se concluye

$$K_4^{*j} = E(H_7^*(\bar{V})\ (H^*(\bar{V}))^{j-1}\ I_{\bar{U}\leq 0}\ (\Phi(-(\bar{V}-\bar{U}/2)/3^{1/2}) - \Phi(\bar{V}/2-\bar{U})/3^{1/2}))\ I_{\bar{V}\leq\bar{U}}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{\bar{v}}^{0} H_7^*(\bar{v})\ (H^*(\bar{v}))^{j-1}\ (\Phi(-(\bar{v} - \bar{u}/2)/3^{1/2}) - \Phi((\bar{v}/2 - \bar{u})/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(\bar{u},\bar{v})\ d\bar{u}\ d\bar{v}\ .$$

Así se obtiene (4.20).

Por otra parte, las expresiones de H^*, H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*, H_5^*, H_6^* y H_7^*, cuando G es normal con varianza uno, se obtienen de (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) y (4.14) respectivamente por medio de cálculos directos (ver Lemas A6, A7, A8, A9 , A10, A11, A12, A13 del Apéndice).

4.2.- Algunos resultados numéricos y conclusiones

Si $s_{n,j} = j/n$ y $t_i = i$ (i=1,2,3,4), del Teorema 2.3 (a), se obtiene

$$e_{W,F}(G) = (16/5)\ (a_1(G))^2\ .$$

Por otra parte, del Teorema 4.1 (a), se tiene

$$a_1(G) = 72\ (5\ K_1^{*1} + 6\ K_4^{*1} + 2\ K_2^{*1} - K_3^{*1})$$

donde

$$K_1^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_1^*(u+v+w)\, h_1^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw\, +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_2^*(u+v+w)\, h_2^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw \quad ,$$

$$K_2^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_3^*(u+v+w)\, h^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw\, +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_4^*(u+v+w)\, h^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw \quad ,$$

$$K_3^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_5^*(u+v+w)\, h^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw\, +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_6^*(u+v+w)\, h^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw \quad ,$$

$$K_4^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_7^*(u+v+w)\, h^*(u,v,w)\, du\, dv\, dw \quad ;$$

y H_1^* , H_2^* , H_3^* , H_4^* , H_5^* , H_6^* , H_7^* están definidos por (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13) respectivamente.

Si G es normal con varianza uno, se obtiene del Teorema 4.1 (b)

$$K_1^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_1^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_2^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy\ ,$$

$$K_2^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_3^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_4^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy,$$

$$K_3^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_5^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_6^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x)/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy,$$

$$K_4^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{y}^{0} H_7^*(y)\,(\Phi(-(y-x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2-x))/3^{1/2}))\,\phi_C(x,y)\,dx\,dy\ ,$$

donde ϕ_C es la función de densidad de una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

y H_1^* , H_2^* , H_3^* , H_4^* , H_5^* , H_6^* , H_7^* están dadas por (4.22), (4.23), (4.24) (4.25), (4.26), (4.27) , (4.28) respectivamente.

Integrando numéricamente K_1^{*1} , K_2^{*1} , K_3^{*1} , K_4^{*1} se obtiene que $a_1(G)$ es aproximadamente 0,52306. Luego $e_{W,F}(G)$ es aproximadamente 0,875, si G es normal y por lo tanto $e_{W,Q}(G)$ es aproximadamente 1,145. O sea el test W es aproximadamente 15% más eficiente que el test de Friedman, bajo normalidad.

5.- TEST DE YOHAI PARA CUATRO TRATAMIENTOS

5.1.- Resultados principales

Denotemos como en las secciones anteriores $D_j = \max_{1\le i\le 4} Z_{ij} - \min_{1\le i\le 4} Z_{ij}$, Q_j el rango de D_j y R_{ij} el rango de Z_{ij} en el bloque j, para $j=1....,n$.

Además sean para $i=1,2,3,4$ y $j=1,...,n$

$$T_{ij} = \begin{cases} Q_j + a(n+1) & \text{si } R_{ij} = 4 \\ a(n+1) & \text{si } R_{ij} = 3 \\ -a(n+1) & \text{si } R_{ij} = 2 \\ -Q_j - a(n+1) & \text{si } R_{ij} = 1 \end{cases}$$

y $T_i' = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}$; donde a es un número real.

Definamos

$$S = c_n' \sum_{i=1}^{4} T_i'^2$$

donde

$$c_n' = 9/(n^3(2+6a+12a^2) + n^2(3+12a+24a^2) + n(1+6a+12a^2)).$$

Ahora bien, T_{ij} puede reescribirse como

$$T_{ij} = H_{ij}' (Q_j + a(n+1)) + H_{ij}^* a(n+1) ,$$

donde

$$H'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } R_{ij} = 4 \\ -1 & \text{si } R_{ij} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad , \quad H^*_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } R_{ij} = 3 \\ -1 & \text{si } R_{ij} = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

El siguiente Teorema es inmediato y es dado sin demostración.

Teorema 5.1 Sea H la hipótesis nula dada por (1.1.1) , entonces

(a) bajo H, las variables aleatorias H'_{ij} $(i=1,2,3,4 \ , \ j=1,\dots,n)$ son independientes de las variables aleatorias Q_j $(j=1,\dots,n)$.

(b) Bajo H, las variables aleatorias H^*_{ij} $(i=1,2,3,4 \ , \ j=1,\dots,n)$ son independientes de las variables aleatorias Q_j $(j=1,\dots,n)$.

(c) Para cualquier permutación $(i_1,i_2,i_3,\dots,i_n)$ de los primeros n naturales tenemos $P_H(Q_1 = i_1,\dots,Q_n = i_n) = 1/n!$.

(P_H denota la probabilidad bajo la hipótesis H).

(d) Dada cualquier permutación (i_1,i_2,i_3,i_4) de $(-1,0,0,1)$ tenemos

$P_H(H'_{1j} = i_1, H'_{2j} = i_2, H'_{3j} = i_3, H'_{4j} = i_4) = 1/24$,

$P_H(H^*_{1j} = i_1, H^*_{2j} = i_2, H^*_{3j} = i_3, H^*_{4j} = i_4) = 1/24$, $(j=1,\dots,n)$.

(e) Los vectores $\underset{\sim}{H}'_j = (H'_{1j}, H'_{2j}, H'_{3j}, H'_{4j})$, $(j=1,\dots,n)$ son independientes.

(f) Los vectores $\underset{\sim}{H}^*_j = (H^*_{1j}, H^*_{2j}, H^*_{3j}, H^*_{4j})$, $(j=1,\dots,n)$ son independientes.

(g) Bajo H, S es libre de distribución.

Usando este Teorema podemos definir un test no paramétrico tal que rechaza H si

$$S \geq s_n(\alpha)$$

donde $s_n(\alpha)$ es definido por

$$P_{H,n}(S \geq s_n(\alpha)) = \alpha$$

(el subíndice n indica que el estadístico S es computado usando n bloques).

El siguiente Teorema, muestra que la distribución asintótica bajo H (bajo alternativa) es chi-cuadrado central (no central) con tres grados de libertad.

Teorema 5.2

(a) Bajo H, S tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado central con tres grados de libertad.

(b) Sean K_n la sucesión de alternativas dada por (2.1) y

$$\Delta^* = 16\ (a^*(G))^2 \sum_{i=1}^{4} \delta_i^2/(2 + 6a + 12a^2) \ ,$$

donde $a^*(G) = (\partial(E_{\theta}(H'_{11}\ M_{12}) + E_{\theta}(aH'_{11} + E_{\theta}(aH^*_{11}))/\partial\theta_1)_{\theta=0}$,

M_{12} es la función indicadora del evento $D_1 \geq D_2$, y E_{θ} denota la esperanza bajo $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$.

Entonces, bajo K_n S tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado no central con tres grados de libertad y parámetro de no centralidad Δ^*.

Demostración:

Sea $d_i = 4\ a^*(G)\ \delta_i/(2 + 6a + 12a^2)^{1/2}$, i=1,2,3,4.

Es suficiente mostrar que $c_n'^{1/2}$ (T_1',T_2',T_3',T_4') converge en distribución a $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, X_3 - \bar{X}, X_4 - \bar{X})$, donde X_1, X_2, X_3, X_4 son variables aleatorias independientes con distribución normal con media d_i y varianza uno, y donde $\bar{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$. Por lo tanto es suficiente probar que $c_n'^{1/2}$ $(\lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2' + \lambda_3 T_3' + \lambda_4 T_4')$ converge en distribución a una variable aleatoria con distribución normal con media $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, d_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 - 4\,\bar{\lambda}^2$, para todo vector real $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ y $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i/4$.

Claramente se tiene $Q_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} M_{jk} + 1 \; (j=1,\ldots,n)$, donde

$$M_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad Q_j > Q_k \\ 0 & \text{si} \quad Q_j \leq Q_k \end{cases}$$

Sea $L_n' = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, (T_i' - E_{\theta}(T_i'))$.

Luego, podemos escribir

$$L_n' = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} \{H_{ij}' \, (Q_j + a(n+1)) + H_{ij}^{*} \, a(n+1) - \right.$$

$$\left. - E_{\theta_n}(H_{ij} \, (Q_j + a(n+1)) + H_{ij}^{*} \, a(n+1)\} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{\substack{j=1 \\ k<j}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \{H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1) - \right.$$

$$\left. - E_{\theta_n}(H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1))\} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{\substack{j=1 \\ k>j}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \{H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1) - \right.$$

$$\left. - E_{\theta_n}(H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1))\} \right] =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H'_{ik} (M_{kj} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ik}\, a(n+1)/(n-1) - \right.$$

$$- E_{\theta_n}(H'_{ik} (M_{kj} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ik}\, a(n+1)/(n-1))\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1) -$$

$$\left. - E_{\theta_n}(H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\, a(n+1)/(n-1))\} \right] .$$

Por lo tanto L'_n puede escribirse como el U-estadístico

$$L'_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} g'_n(Z_j, Z_k)$$

donde $\underset{\sim}{Z}_j = (Z_{1j}, Z_{2j}, Z_{3j}, Z_{4j})$ y

$$g'(\underset{\sim}{Z}_j, \underset{\sim}{Z}_k) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H'_{ik} (M_{kj} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ik} a(n+1)/(n-1) -$$

$$- E_{\underset{\sim}{\theta}_n} (H'_{ik} (M_{kj} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ik} a(n+1)/(n-1) \} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij} a(n+1)/(n-1) -$$

$$- E_{\underset{\sim}{\theta}_n} (H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij} a(n+1)/(n-1))\}.$$

Sea $\mathscr{P}_n$ el subespacio de estadísticos de la forma $P = \sum_{j=1}^{n} r_j(\underset{\sim}{Z}_j)$.

Los siguientes resultados son válidos (ver Apéndice de Lehmann (1975)):

(a) la proyección de L_n sobre $\mathscr{P}_n$ es dada por

$$\bar{L}_n = (n-1) \sum_{j=1}^{n} \psi'_{1n}(Z_j) \qquad (5.1)$$

donde

$$\psi'_{1n}(\underset{\sim}{z}) = E_{\underset{\sim}{\theta}_n} (g'(\underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{Z}_1)) \qquad (5.2)$$

(b) $\mathrm{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n} (L'_n - \bar{L}_n) = \mathrm{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n} (L'_n) - \mathrm{var}_{\theta} (\bar{L}_n) \qquad (5.3)$

(var_{θ_n} denota la varianza bajo la hipótesis alternativas K_n)

(c) Si llamamos $V'_{n,jk} = g'_n(Z_j, Z_k)$, se tiene

$$var_{\theta_n}(L'_n) = (n(n-1)/2)\, var_{\theta_n}(V'_{n,12}) + n(n-1)(n-2)\, cov_{\theta_n}(V'_{n,12}, V'_{n,13}) \quad (5.4)$$

(cov_{θ_n} denota la covarianza bajo la hipótesis alternativa K_n).

(d) $$var_{\theta_n}(\psi'_{1n}(Z_j)) = cov_{\theta_n}(V'_{n,j2}, V'_{n,j3}) \quad (5.5)$$

Además

$$\lim_{n\to\infty} var_{\theta_n}(V'_{n,12}) = var_0(V'_{12}) \quad (5.6)$$

donde

$$V'_{j,k} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H'_{ik}(M_{kj} + a) + aH^*_{ik} + H'_{ij}(M_{jk} + a) + aH^*_{ij}\} ,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} cov_{\theta_n}(V'_{n,12}, V'_{n,13}) = cov_0(V'_{12}, V'_{13}) = \sigma_0^2 \quad (5.7)$$

(var_0 y cov_0 denotan la varianza y la covarianza respectivamente bajo la la hipótesis nula).

De (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7), se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_{\theta_n}(c_n'^{1/2}(L_n' - \bar{L}_n)) = 0 \qquad (5.8).$$

De (5.1) , (5.7) y del Teorema Central del Límite se tiene

$$c_n'^{1/2}\, \bar{L}_n \xrightarrow{d} N(0,(9/(2+6a+12a^2))\sigma_0^2)$$

(donde $\xrightarrow{d}$ indica convergencia en distribución y $N(0,(9/(2+6a+12a^2))\sigma_0^2)$ la distribución normal con media cero y varianza $(9/(2+6a+12a^2))\sigma_0^2)$.

Entonces de (5.8) se concluye

$$c_n'^{1/2}\, L_n' \xrightarrow{d} N(0,(9/(2+6a+12a^2))\sigma_0^2) \qquad (5.9) \quad .$$

Por medio de cálculos directos se puede mostrar que

$$(9/(2+6a+12a^2))\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 - 4\,\bar{\lambda}^2 \qquad (5.10).$$

Ahora bien, para probar

$$c_n'^{1/2} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i \xrightarrow{d} N(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i \;,\; \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 - 4\,\bar{\lambda}^2) \;,$$

teniendo en cuenta (5.9) y (5.10) basta mostrar

$$\lim_{n\to\infty} c_n'^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n} \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i d_i \qquad (5.11).$$

Se tiene

$$c_n'^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n} \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i \right) =$$

$$= c_n'^{1/2} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} E_{\underset{\sim}{\theta}_n} (H'_{ij} (M_{jk} + (a(n+1)+1)/(n-1)) + H^{*}_{ij}\, a(n+1)/(n-1)) \right].$$

Desarrollando $E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{ij}\ (M_{jk} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^{*}_{ij}\ a(n+1)/(n-1))$ en una serie de Taylor alrededor de $\underset{\sim}{0} = (0,0,0,0)$ y poniendo $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_n = (\delta_1/n^{1/2},\delta_2/n^{1/2},\delta_3/n^{1/2},\delta_4/n^{1/2})$, se obtiene

$$c_n'^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n} \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i \right) =$$

$$= n(n-1)\ c_n'^{1/2} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{E_{\underset{\sim}{0}}(H'_{i1}\ (M_{12} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^{*}_{i1}\ a(n+1)/(n-1)) +$$

$$+ n^{1/2} \sum_{r=1}^{4} \delta_r\ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{i1}\ (M_{12} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^{*}_{i1}\ a(n+1)/(n-1))/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} +$$

$$+ o(n^{-1/2})\}.$$

Como $E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{ij}\ (M_{j2} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + H^*_{ij}\ a(n+1)/(n-1)) = 0$, se obtiene

$$c_n'^{1/2}\ E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\ T_i) =$$

$$= (n(n-1)^2\ c_n')^{1/2} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{r=1}^{4} \delta_r\ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{i1}\ (M_{12} + (a(n+1) + 1)/(n-1)) + \right.$$

$$\left. + H^*_{i1}\ a(n+1)/(n-1))/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + o(1) \right] .$$

Luego, como $\lim_{n\to\infty} c_n'\ n(n-1)^2 = 9/(2 + 6a + 12a^2)$, se concluye

$$\lim_{n\to\infty} c_n'^{1/2}\ E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\ T_i) =$$

$$= \frac{3}{(2 + 6a + 12a^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \sum_{r=1}^{4} \delta_r\ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{i1}\ (M_{12} + a) + H^*_{i1}\ a)/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} .$$

Por otra parte para todo i (i=1,2,3,4) ,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{i1}\ (M_{12} + a) + H^*_{i1}\ a)/\partial\theta_i)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{11}\ (M_{12} + a) + H^*_{11}\ a)/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = a^*(G) ;$$

y para todo $i \neq r$ $(i=1,2,3,4\ ;\ r=1,2,3,4)$

$$(\partial E_{\theta}(H'_{i1}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{i1}\ a)/\partial\theta_r)_{\theta=\theta} =$$

$$= (\partial E_{\theta}(H'_{11}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{11})/\partial\theta_2)_{\theta=\theta}\ .$$

Como $E_{\theta}(H'_{11}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{11}) = 0$, si $\theta_j = \theta_0$ $(j=1,\dots,4)$, se obtiene

$$(\partial E_{\theta}(H'_{11}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{11})/\partial\theta_2)_{\theta=\theta} =$$

$$= -(\partial E_{\theta}(H'_{11}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{11})/\partial\theta_1)_{\theta=\theta}/3.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} c'^{1/2}_n\ E_{\theta_n}\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i\ T_i\right) =$$

$$= \frac{3}{(2+6a+12a^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{4} \delta_k\ (\partial E_{\theta}(H'_{i1}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{i1}\ a)/\partial\theta_r)_{\theta=\theta} + \right.$$

$$\left. + \delta_i\ (\partial E_{\theta}(H'_{i1}\ (M_{12} + a) + H^{*}_{i1}\ a)/\partial\theta_i)_{\theta=\theta} \right] =$$

$$= \frac{3}{(2+6a+12a^2)^{1/2}} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \left[\sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{4} \delta_r \, (-1/3) \, a^*(G) + \delta_i \, a^*(G) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{4}{(2+6a+12a^2)^{1/2}} \, a^*(G) \, \delta_i \, \lambda_i = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \, d_i \, .$$

De este modo se concluye (5.11) y por consiguiente el Teorema 5.2.

Como consecuencia del Teorema 5.2, obtenemos la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test S con respecto al test F.

Teorema 5.3 Si $\sigma^2(G) < \infty$, la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test S con respecto al test F es dada por

$$e_{S,F}(G) = \frac{16}{2+6a+12a^2} \, (a^*(G))^2 \, \sigma^2(G).$$

Demostración:

El Teorema 5.3 se sigue del Teorema 5.2 y del hecho que bajo las alternativas K_n , F converge en distribución a una chi-cuadrado no central con tres grados de libertad y parámatro de no centralidad

$\sum_{i=1}^{4} \delta_i^2/\sigma^2(G)$.

El siguiente Teorema, da una expresión computable de $a^*(G)$ para cualquier función de distribución G y para el caso normal.

Teorema 5.4 Sean Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución G. Definamos $U = Z_2 - Z_1$,

$V = Z_3 - Z_2$, $W = Z_4 - Z_3$ y sea $h^*(u,v,w)$ la densidad conjunta de U, V y W. Luego

(a) $a^*(G) = 288\ (K_1^{*1} + K_4^{*1}) + 6a\ (K_2^* + K_3^*)$ (5.12) ,

donde

$$K_2^* = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(u,0,w)\ du\ dw \quad ; \quad K_3^* = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^*(u,v,0)\ du\ dv \ ,$$

$$K_1^{*1} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_1^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_2^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw \ ,$$

$$K_4^{*1} = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} H_7^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw$$

$$H_1^*(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{0} h\ (0,v,w)\ dv\ dw \quad ; \quad H_2^*(z) = \int_{z}^{0} \int_{-\infty}^{z-w} h^*(0,v,w)\ dv\ dw \ ,$$

$$H_7^*(z) = \int_{z}^{0} \int_{z-v}^{0} h^*(z-v-w,v,w)\ dw\ dv \ .$$

(b) Si G es normal con varianza uno y si denotamos con Φ_C y ϕ_C la función de distribución y de densidad de una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza C respectivamente, se tiene

$K_2^* = 0,05527$ (5.13) ,

$K_3^* = 0,04289$ (5.14) ,

$$K_1^{*1} = \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_1^*(y)\ (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(x,y)\ dx\ dy\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_2^*(y)\ (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(x,y)\ dx\ dy \qquad , \tag{5.15}$$

$$K_4^{*1} = \int_{-\infty}^{0} \int_{y}^{0} H_7^*(y)\ (\Phi(-(y - x/2)/3^{1/2}) - \Phi((y/2 - x)/3^{1/2}))$$

$$\times\ \phi_C(x,y)\ dx\ dy \qquad , \tag{5.16}$$

donde $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y

$$H_1^*(z) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2}\ \Phi_C(z/2^{1/2},0) \qquad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3^{-1/2} \\ -3^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$$H_2^*(z) = 2^{-1}\ \pi^{-1/2} \int_{z/2^{1/2}}^{0} \Phi(z - u/2^{1/2})\ \phi(u)\ du \tag{5.18}$$

$$H_7^*(z) = z\,2^{-1}\,\pi^{-1/2}\,e^{-z^2/4}\int_0^{1/2^{1/2}} \phi(zu)\,(2\Phi(z(1/2 - u/2^{1/2})) - 1)\,du \quad (5.19)$$

Demostración :

Sea $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$, $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$.

Como

$$H'_{11} = \begin{cases} 1 & \text{si } R_{11} = 4 \\ -1 & \text{si } R_{11} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

se obtiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{11}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}) -$$

$$- P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}) =$$

$$= f_1(\theta) - f_4(\theta)\ ,$$

donde

$$f_1(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41})\ ,$$

$$f_4(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41})\ .$$

Luego,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{11})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (df_1(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (df_4(\theta)/d\theta)_{\theta=0}.$$

Del Teorema 4.1, se concluye

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H'_{11})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= 3!\left\{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} h^*(0,y,z)\,dy\,dz + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} h^*(x,y,0)\,dx\,dy\right\} \qquad (5.20)$$

Ahora encontraremos una expresión para $(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H^*_{11})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}$.

Como

$$H^*_{11} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad R_{11} = 3 \\ -1 & \text{si} \quad R_{11} = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

se tiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H^*_{11}) = 3(P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}) -$$

$$- P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41})) =$$

$$= 3\,(f_2(\theta) - f_3(\theta))\ ,$$

donde

$$f_2(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{11} \geq Z_{31} \ , \ Z_{11} \leq Z_{41}) \quad ,$$

$$f_3(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} \ , \ Z_{11} \leq Z_{31} \ , \ Z_{11} \geq Z_{41}) \quad .$$

Luego,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}^{*})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = 3\ ((df_2(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (df_3(\theta)/d\theta)_{\theta=0}).$$

Del Teorema 4.1 se tiene

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}^{*})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} =$$

$$= 6 \left\{ - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^{*}(0,y,z)\ dy\ dz + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h^{*}(x,0,z)\ dx\ dz \right\} \qquad (5.21).$$

Finalmente encontraremos una expresión de $(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}^{!}\ M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}$.

De las definiciones de $H_{11}^{!}$ y M_{12} se obtiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}^{!}\ M_{12}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} \ , \ Z_{11} \geq Z_{31} \ , \ Z_{11} \geq Z_{41} \ , \ D_1 \geq D_2) -$$

$$- P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} \ , \ Z_{11} \leq Z_{31} \ , \ Z_{11} \leq Z_{41} \ , \ D_1 \geq D_2) =$$

$$= f_1^1(\theta) - f_4^1(\theta) \ ,$$

donde

$$f_1^1(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \geq Z_{41}\ ,\ D_1 \geq D_2)\ ,$$

$$f_4^1(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{31}\ ,\ Z_{11} \leq Z_{41}\ ,\ D_1 \geq D_2)\ .$$

Luego,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}' \ M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (d\, f_1^1(\theta)/d\,\theta)_{\theta=0} - (d\, f_4^1(\theta)/d\,\theta)_{\theta=0}.$$

Del Teorema 4.1, se concluye

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}' \ M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = 288\ (K_1^{*1} + K_4^{*1}) \qquad (5.22)\ ,$$

donde

$$K_1^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_1^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_2^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ ,$$

$$K_4^{*1} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_7^*(u+v+w)\ h^*(u,v,w)\ du\ dv\ dw\ ,$$

$$H_1^*(z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} h^*(0,v,w)\ dv\ dw\ ,$$

$$H_2^*(z) = \int_z^0 \int_{-\infty}^{z-w} h^*(0,v,w)\, dv\, dw ,$$

$$H_7^*(z) = \int_z^0 \int_{z-v}^0 h^*(z-v-w,v,w)\, dw\, dv .$$

De (5.20), (5.21) y (5.22) se concluye

$$a^*(G) = 288\ (K_1^{*1} + K_4^{*1}) + 6a\ (K_2^* + K_3^*) ,$$

donde

$$K_2^* = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 h^*(u,0,w)\, du\, dw , \quad K_3^* = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 h^*(u,v,0)\, du\, dv .$$

De esta manera se obtiene (5.12).

(b) Si G es normal con varianza uno, (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) se deducen de (4,15), (4.16), (4.17), (4.20), (4.22), (4.23) y (4.28) respectivamente para $j = 1$.

5.2.- Resultados numéricos y conclusiones

Integrando numéricamente (5.15) y (5.16) se obtuvo de (5.12) que $a^*(G)$ es aproximadamente 0,31913 + 0,58894 a , si G es normal con varianza uno. Luego, del Teorema 5.3 se concluye que $e_{S,F}(G)$ es aproximadamente igual a

$$(16/(2+6a+12a^2))\,(0{,}31913+0{,}58894\,a)^2.$$

El valor de a que maximiza esta última expresión es 0,11. Por lo tanto $e_{S,F}(G)$ es, para este valor de a, aproximadamente 0,841 y de donde $e_{S,Q}(G)$ es aproximadamente 1,10. O sea, si G es normal el test S es aproximadamente 10% más eficiente que el test de Friedman.

Por otra parte si $s_{n,j} = j/n$ $(j=1,\ldots,n)$ y $t_i = i$ $(i=1,2,3,4)$, la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test S con respecto al test de Quade (W) es aproximadamente 0,961 para a = 0,11 y G normal.

6.- ESTUDIO DE MONTE CARLO

6.1.- Descripción del estudio

En esta sección vamos a suponer $s_{n,j} = (j/n)^r$ $(j=1,\ldots,n)$ y $t_i = i$ $(i=1,\ldots,m)$.

El estudio de Monte Carlo tuvo como objetivo calcular la potencia del test de Quade y compararla con las potencias de los siguientes tests: F, Friedman, alineado con la media, y alineado con la mediana.

Para este estudio fueron seleccionados dos valores de m: 3 y 4; tres distribuciones: normal, Cauchy y Student con tres grados de libertad; y cuatro valores de r: 1, 1/2, 1/3, 1/4.

Por otra parte para n = 10 y n = 20, las alternativas consideradas fueron $\theta_1 = -\delta$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \delta$ para m = 3 y $\theta_1 = -\delta$, $\theta_2 = -\delta/2$, $\theta_3 = \delta/2$, $\theta_4 = \delta$ para m = 4, donde δ es un número real.

Para cada una de las tres distribuciones consideradas fueron seleccionados los siguientes valores de δ: 0,31, 0,63, 0,84, 1,38, 1,02 para n = 10 y 0,22, 0,31, 0,37, 0,63 para n = 20.

Para cada elección de G, n, m, δ y r se realizaron 10000 iteraciones.

Las potencias muestrales son mostradas en las Tablas III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII y XIV.

Nota.

(a) Se usará la siguiente notación de los estadísticos del test de Quade:

W_1: $s_{n,j} = j/n$ $(j=1,\ldots,n)$, $t_i = i$ $(i=1,\ldots,m)$;

W_2: $s_{n,j} = (j/n)^{1/2}$ $(j=1,\ldots,n)$, $t_i = i$ $(i=1,\ldots,m)$;

W_3: $s_{n,j} = (j/n)^{1/3}$ $(j=1,\ldots,n)$, $t_i = i$ $(i=1,\ldots,m)$;

W_4: $s_{n,j} = (j/n)^{1/4}$ $(j=1,\ldots,n)$, $t_i = i$ $(i=1,\ldots,m)$.

Además denotaremos con AL1 al estadístico del test alineado con la media y con AL2 al estadístico del test alineado con la mediana.

(b) Sea $d = \hat{P} - \hat{P}_Q$, donde $\hat{P}$ es la potencia muestral de cualquiera de los estadísticos considerados (W_1, W_2, W_3, W_4, F, AL1, AL2) y $\hat{P}_Q$ es la potencia muestral del estadístico de Friedman. Luego, los valores tabulados de de las potencias muestrales son marcados con + si $|d|$ excede 2 veces la desviación estándar de d, y con - si $|d|$ no excede 2 veces la desviación estándar de d.

6.2.- Conclusiones

(a) Si G es la distribución normal con varianza uno:
la potencia del test de Quade (W_1, W_2, W_3 o W_4) y el test de Friedman difieren significativamente. La potencia del test de Quade fue superior en casi todas las alternativas consideradas.

(b) Si G es la distribución Cauchy con parámetro de escala uno:
la potencia del test de Quade (W_1 o W_2) y la del test de Friedman difieren significativamente. La potencia del test de Friedman fue superior, en casi todas las alternativas consideradas. Pero, no hay diferencia significativa entre la potencia del test de Fridman y el test de Quade (W_3 o W_4), en casi todas las alternativas consideradas.

(c) Si G es la distribución de Student con tres grados de libertad:

la potencia del test de Quade (W_1) y la del test de Friedman difieren significativamente. La potencia del test de Friedman fue favorecida en varias situaciones. Para el test de Quade (W_2) los resultados fueron mixtos. Además, no hay diferencia significativa entre la potencia del test de Friedman y el test de Quade (W_3 o W_4).

El test F y los tests alineados (AL1, AL2) resultaron generalmente con más potencia que el test de Friedman y el test de Quade (W_1, W_2, W_3, W_4), para las distribuciones y alternativas consideradas.

Los resultados, para G normal con varianza uno y G Cauchy con parámetro de escala uno, fueron consistentes con aquellos dados en las Secciones 3 y 4.

TABLA III

Potencias muestrales para α = 0,066

m = 3 ; n = 10 ; G : normal

	δ				
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02	1,38
W_1	$0{,}2138^{+}$	$0{,}6302^{+}$	$0{,}8498^{+}$	$0{,}9582^{+}$	$0{,}9982^{-}$
W_2	$0{,}2150^{+}$	$0{,}6202^{+}$	$0{,}8414^{+}$	$0{,}9510^{+}$	$0{,}9976^{-}$
W_3	$0{,}2124^{+}$	$0{,}6142^{+}$	$0{,}8354^{+}$	$0{,}9496^{+}$	$0{,}9972^{-}$
W_4	$0{,}2072^{+}$	$0{,}6132^{+}$	$0{,}8288^{+}$	$0{,}9450^{-}$	$0{,}9966^{-}$
Q	0,1876	0,5652	0,7876	0,9198	0,9936
AL1	$0{,}2218^{+}$	$0{,}6744^{+}$	$0{,}8930^{+}$	$0{,}9796^{+}$	$0{,}9994^{-}$
AL2	$0{,}2100^{+}$	$0{,}6446^{+}$	$0{,}8610^{+}$	$0{,}9612^{+}$	$0{,}9996^{-}$
F	$0{,}2254^{+}$	$0{,}6864^{+}$	$0{,}9008^{+}$	$0{,}9808^{+}$	$0{,}9996^{-}$

TABLA IV

Potencias muestrales para α = 0,06

m = 3 ; n = 20 ; G : normal

			δ		
Estadísticos	0,31	0,22	0,37	0,63	0,84
W_1	$0,3536^+$	$0,2000^-$	$0,4776^+$	$0,9150^+$	$0,9934^-$
W_2	$0,3394^-$	$0,1918^-$	$0,4562^+$	$0,8988^+$	$0,9916^-$
W_3	$0,3442^+$	$0,1976^-$	$0,4610^+$	$0,9030^+$	$0,9896^-$
W_4	$0,3486^+$	$0,1986^-$	$0,4674^+$	$0,9054^+$	$0,9894^-$
Q	0,3258	0,1916	0,4306	0,8676	0,9850
AL1	$0,3770^+$	$0,2086^+$	$0,5072^+$	$0,9408^+$	$0,9964^-$
AL2	$0,3620^+$	$0,2070^+$	$0,4842^+$	$0,9246^+$	$0,9944^-$
F	$0,3934^+$	$0,2154^+$	$0,5320^+$	$0,9508^+$	$0,9982^-$

TABLA V

Potencias muestrales para $\alpha = 0{,}066$

$m = 3$; $n = 10$; G : Student con 3 grados de libertad

	δ				
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02	1,38
W_1	$0{,}1478^-$	$0{,}3772^+$	$0{,}5774^+$	$0{,}7242^-$	$0{,}8854^-$
W_2	$0{,}1490^-$	$0{,}3948^-$	$0{,}6056^-$	$0{,}7460^-$	$0{,}9162^-$
W_3	$0{,}1510^-$	$0{,}4084^-$	$0{,}6260^-$	$0{,}7590^-$	$0{,}9222^-$
W_4	$0{,}1512^-$	$0{,}4128^-$	$0{,}6310^+$	$0{,}7648^+$	$0{,}9258^-$
Q	0,1508	0,3964	0,6048	0,7368	0,9094
AL1	$0{,}1670^+$	$0{,}4276^+$	$0{,}6416^+$	$0{,}7790^+$	$0{,}9326^-$
AL2	$0{,}1554^-$	$0{,}4300^+$	$0{,}6452^+$	$0{,}7788^+$	$0{,}9366^-$
F	$0{,}1578^-$	$0{,}4050^-$	$0{,}6060^-$	$0{,}7422^-$	$0{,}9050^-$

TABLA VI

Potencias muestrales para $\alpha = 0,06$

m = 3 ; n = 20 ; G : Student con 3 grados de libertad

	δ				
Estadísticos	0,31	0,22	0,37	0,63	0,84
W_1	$0,2184^-$	$0,1386^-$	$0,2892^-$	$0,6622^-$	$0,8598^-$
W_2	$0,2408^+$	$0,1548^-$	$0,3206^+$	$0,6948^-$	$0,8908^-$
W_3	$0,2506^+$	$0,1626^+$	$0,3302^+$	$0,7148^+$	$0,9046^-$
W_4	$0,2500^+$	$0,1632^+$	$0,3308^+$	$0,7184^+$	$0,9036^-$
Q	0,2262	0,1484	0,2996	0,6804	0,8820
AL1	$0,2326^-$	$0,1492^-$	$0,3156^+$	$0,7114^+$	$0,8976^-$
AL2	$0,2406^+$	$0,1506^-$	$0;3156^+$	$0,7196^+$	$0,9090^+$
F	$0,2102^+$	$0,1438^-$	$0,2862^-$	$0,6464^+$	$0,8358^+$

TABLA VII

Potencias muestrales para α = 0,066

m = 3 ; n = 10 ; G : Cauchy con parámetro de escala uno

	δ				
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02	1,38
W_1	$0,0924^-$	$0,2306^+$	$0,1902^+$	$0,3588^+$	$0,3508^-$
W_2	$0,0984^-$	$0,2786^-$	$0,2320^-$	$0,4326^-$	$0,4261^+$
W_3	$0,1022^+$	$0,2935^+$	$0,2463^-$	$0,4606^+$	$0,4604^-$
W_4	$0,1012^+$	$0,2933^+$	$0,2463^-$	$0,4684^+$	$0,4602^-$
Q	0,0922	0,2780	0,2455	0,4416	0,4571
AL1	$0,0914^-$	$0,2335^+$	$0,2098^+$	$0,3835^+$	$0,4051^+$
AL2	$0,1051^+$	$0,2924^+$	$0,2508^-$	$0,4576^-$	$0,4677^+$
F	$0,1012^+$	$0,1831^+$	$0,2022^+$	$0,3016^+$	$0,3522^+$

TABLA VIII

Potencias muestrales para α = 0,06

m = 3 ; n = 20 ; G : Cauchy con parámetro de escala uno

	δ				
Estadísticos	0,22	0,31	0,37	0,63	0,84
W_1	$0,0888^+$	$0,1054^+$	$0,1228^+$	$0,2242^+$	$0,4384^+$
W_2	$0,1082^-$	$0,1312^-$	$0,1556^-$	$0,3180^+$	$0,5614^+$
W_3	$0,1122^-$	$0,1350^-$	$0,1640^-$	$0,3406^-$	$0,5978^-$
W_4	$0,1128^-$	$0,1352^-$	$0,1644^-$	$0,3432^-$	$0,6098^-$
Q	0,1126	0,1320	0,1578	0,3382	0,6032
AL1	$0,0982^+$	$0,1174^+$	$0,1404^+$	$0,2882^+$	$0,4790^+$
AL2	$0,1129^-$	$0,1360^+$	$0,1632^-$	$0,3444^-$	$0,6036^-$
F	$0,0850^+$	$0,1042^+$	$0,1156^+$	$0,1814^+$	$0,2526^+$

TABLA IX

Potencias muestrales para $\alpha = 0,066$

$m = 4$; $n = 10$; G : normal

	δ			
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02
W_1	$0,2176^-$	$0,6672^+$	$0,8938^+$	$0,9726^-$
W_2	$0,2112^-$	$0,6474^-$	$0,8774^-$	$0,9700^-$
W_3	$0,2216^-$	$0,6656^+$	$0,8870^-$	$0,9730^-$
W_4	$0,2214^-$	$0,6702^+$	$0,9000^+$	$0,9722^-$
Q	0,2110	0,6426	0,8662	0,9618
AL1	$0,2388^+$	$0,7334^+$	$0,9296^+$	$0,9890^-$
AL2	$0,2316^+$	$0,7126^+$	$0,9210^+$	$0,9998^+$
F	$0,2404^+$	$0,7394^+$	$0,9382^+$	$0,9998^+$

TABLA X

Potencias muestrales para $\alpha = 0,06$

$m = 4$; $n = 20$; G : normal

	δ			
Estadísticos	0,22	0,31	0,37	0,63
W_1	$0,2122^-$	$0,3778^+$	$0,5126^+$	$0,9498^-$
W_2	$0,1992^-$	$0,3594^-$	$0,4766^-$	$0,9200^-$
W_3	$0,2058^-$	$0,3694^-$	$0,4901^-$	$0,9268^-$
W_4	$0,2072^-$	$0,3770^+$	$0,5010^-$	$0,9346^-$
Q	0,2068	0,3528	0,4840	0,9266
AL1	$0,2314^+$	$0,4242^+$	$0,5584^+$	$0,9696^+$
AL2	$0,2240^+$	$0,4070^+$	$0,5432^+$	$0,9638^+$
F	$0,2472^+$	$0,4386^+$	$0,5802^+$	$0,9774^+$

TABLA XI

Potencias muestrales para α = 0,066

m = 4 ; n = 10 ; G : Student con 3 grados de libertad

	δ			
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02
W_1	$0,1402^{-}$	$0,3942^{+}$	$0,5944^{+}$	$0,7466^{+}$
W_2	$0,1500^{-}$	$0,4334^{-}$	$0,6384^{+}$	$0,7870^{+}$
W_3	$0,1552^{-}$	$0,4546^{-}$	$0,6722^{-}$	$0,8136^{-}$
W_4	$0,1558^{-}$	$0,4548^{-}$	$0,6800^{-}$	$0,8250^{-}$
Q	0,1502	0,4458	0,6774	0,8140
AL1	$0,1594^{-}$	$0,4648^{-}$	$0,6918^{-}$	$0,8384^{-}$
AL2	$0,1538^{-}$	$0,4678^{+}$	$0,6986^{-}$	$0,8506^{+}$
F	$0,1566^{-}$	$0,4264^{+\circ}$	$0,6346^{+}$	$0,7756^{+}$

TABLA XII

Potencias muestrales para $\alpha = 0{,}06$

$m = 4$; $n = 20$; G : Student con 3 grados de libertad

	δ			
Estadísticos	0,22	0,31	0,37	0,63
W_1	$0{,}1338^{+}$	$0{,}2190^{+}$	$0{,}2904^{+}$	$0{,}6954^{+}$
W_2	$0{,}1420^{-}$	$0{,}2212^{+}$	$0{,}2960^{+}$	$0{,}7072^{+}$
W_3	$0{,}1444^{-}$	$0{,}2402^{-}$	$0{,}3203^{-}$	$0{,}7280^{+}$
W_4	$0{,}1505^{-}$	$0{,}2434^{-}$	$0{,}3208^{-}$	$0{,}7348^{-}$
Q	0,1480	0,2478	0,3240	0,7590
AL1	$0{,}1484^{-}$	$0{,}2466^{-}$	$0{,}3254^{-}$	$0{,}7808^{-}$
AL2	$0{,}1558^{-}$	$0{,}2686^{+}$	$0{,}3530^{+}$	$0{,}8016^{+}$
F	$0{,}1320^{+}$	$0{,}2076^{+}$	$0{,}2790^{+}$	$0{,}6658^{+}$

TABLA XIII

Potencias muestrales para α = 0,066

m = 4 ; n = 10 ; G : Cauchy con parámetro de escala uno

	δ			
Estadísticos	0,31	0,63	0,84	1,02
W_1	$0,1030^{+}$	$0,2016^{+}$	$0,3002^{+}$	$0,3878^{+}$
W_2	$0,1134^{-}$	$0,2380^{+}$	$0,3444^{+}$	$0,4454^{+}$
W_3	$0,1212^{-}$	$0,2640^{-}$	$0,3852^{+}$	$0,4908^{+}$
W_4	$0,1226^{+}$	$0,2714^{-}$	$0,3994^{-}$	$0,5060^{-}$
Q	0,1128	0,2704	0,4062	0,5170
AL1	$0,0942^{+}$	$0,1852^{+}$	$0,2796^{+}$	$0,3600^{+}$
AL2	$0,1112^{-}$	$0,2598^{-}$	$0,4004^{-}$	$0,5090^{-}$
F	$0,0844^{+}$	$0,1333^{+}$	$0,1864^{+}$	$0,2244^{+}$

TABLA XIV

Potencias muestrales para $\alpha = 0{,}06$

$m = 4$; $n = 20$; G : Cauchy con parámetro de escala uno

	δ			
Estadísticos	0,22	o,31	0,37	0,63
W_1	$0{,}0812^-$	$0{,}0886^-$	$0{,}1008^-$	$0{,}1508^+$
W_2	$0{,}0632^+$	$0{,}0876^-$	$0{,}1054^-$	$0{,}1820^+$
W_3	$0{,}0792^-$	$0{,}0964^-$	$0{,}1140^-$	$0{,}1906^-$
W_4	$0{,}0798^-$	$0{,}1020^-$	$0{,}1144^-$	$0{,}1963^-$
Q	0,0796	0,0934	0,1088	0,1902
AL1	$0{,}0720^-$	$0{,}0698^+$	$0{,}0724^+$	$0{,}0704^+$
AL2	$0{,}0801^-$	$0{,}0960^-$	$0{,}1100^-$	$0{,}1922^-$
F	$0{,}1414^+$	$0{,}1334^+$	$0{,}1418^+$	$0{,}1340^+$

7.- CONCLUSIONES FINALES

En resumen los resultados obtenidos fueron los siguientes:

(a) Sean $m = 3$, $D_j = \max\limits_{1\leq i\leq 3} Z_{ij} - \min\limits_{1\leq i\leq 3} Z_{ij}$, $t_i = i$, $s_{n,j} = (j/n+1)^r$

($i=1,2,3$; $j=1,2,\ldots,n$, r es un número real).

Para $r = 1$, $e_{W,Q}(G)$ es aproximadamente 1,1623, bajo normalidad. Mientras que si G es la distribución de Cauchy el test de Friedman es más eficiente que el test W.

Si modificamos r (por ejemplo $r = 1/8$ o $r = 1/12$) $e_{W,Q}(G)$ se aproxima a uno, para las dos distribuciones consideradas (normal y Cauchy).

(b) Sean $m = 4$, $D_j = \max\limits_{1\leq i\leq 4} Z_{ij} - \min\limits_{1\leq i\leq 4} Z_{ij}$, $t_i = i$, $s_{n,j} = j/n$

($i=1,2,3,4$; $j=1,2,\ldots,n$).

La eficiencia asintótica relativa de Pitman del tes W con respecto al test Q es aproximadamente 1,145, bajo normalidad.

(c) Del estudio de Monte Carlo se concluye:

(c_1) G : normal

La potencia del test de Quade (W_1,W_2,W_3 o W_4) fue superior a la potencia del test de Friedman en casi todas las alternativas consideradas.

(c_2) G : Cauchy

La potencia del test de Friedman fue superior a la potencia del test de

Quade (W_1 o W_2).

Pero, no hay diferencia significativa entre la potencia del test de Friedman y a la potencia del test de Quade (W_3 o W_4) en casi todas las alternativas consideradas.

(c_3) G : Student con tres grados de libertad.

La potencia del test de Friedman fue favorecida en varias situaciones, cuando se la comparó con la potencia del test de Quade (W_1) .

Además no hay diferencia significativa entre la potencia del test de Friedman y la potencia del test de Quade (W_3 o W_4).

.- APENDICE

Usando las definiciones de la introducción, en los Teoremas A1, A2, A3 vamos a suponer m=3; $s_{n,j} = j$ $(j=1,\dots,n)$, $t_i = i$ $(i=1,2,3)$ y $D_j = \max_{1\le i\le 3} Z_{ij} - \min_{1\le i\le 3} Z_{ij}$ $(j=1,\dots,n)$.

Luego el test basado en rangos ponderados se reduce a

$$W = c_n \sum_{i=1}^{3} T_i^2$$

donde

$$c_n = 6/n(n+1)(2n+1) \ , \ H_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad R_{ij} = 3 \\ -1 & \text{si} \quad R_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si} \quad R_{ij} = 2 \end{cases} , \ T_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} Q_j .$$

<u>Teorema A1</u> Sea $K_n : G_{ij}(x) = G(x - \theta_{in} - \mu_j)$ una sucesión de hipótesis alternativas tal que $\theta_{in} = \delta_i/n^{1/2}$, $\sum_{i=1}^{3} \delta_i = 0$ $(i=1,2,3 \ ; \ j=1,2,\dots,n)$.

Bajo K_n, W tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado no -- central con dos grados de libertad y parámetro de no centralidad

$$\Delta = (27/4)\,(a_1(G))^2 \sum_{i=1}^{3} \delta_i^2$$

donde $a_1(G) = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\, M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}}$.

Demostración:

Sea $d_i = (27^{1/2}/2)\, a_1(G)\, \delta_i$ $(i=1,2,3)$. Basta mostrar que $c_n^{1/2}$ (T_1,T_2,T_3) converge en distribuvión a $(X_1-\bar{X},X_2-\bar{X},X_3-\bar{X})$ donde X_1, X_2, X_3 son variables aleatorias independientes con distribución normal -- con media d_i y varianza uno $(N(d_i,1))$ y $\bar{X}=(X_1+X_2+X_3)/3$. O sea es suficiente probar que para todo vector real $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,

$$c_n^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, T_i \xrightarrow{d} N\Big(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, d_i\, ,\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - 3\bar{\lambda}^2\Big) \qquad \text{(A1)}$$

donde $\xrightarrow{d}$ indica convergencia en distribución y $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i/3$.

Sea

$$L_n = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, (T_i - E_{\theta_{\lambda n}}(T_i))$$

donde $E_{\theta_{\lambda n}}$ indica la esperanza bajo K_n.

Como $Q_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} M_{jk} + 1$ $(j=1,\ldots,n)$, podemos escribir

$$L_n = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} M_{jk} + 1 \right) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} M_{jk} + 1 \right)\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k<j}}^{n} \{H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1)))\} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{n} \{H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1)))\} \right] =$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\ (H_{ik}\ (M_{kj} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ik}\ (M_{kj} + 1/(n-1)))) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\ (H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ij}\ (M_{jk} + 1/(n-1))))\right].$$

Luego, L_n puede escribirse como el U-estadístico

$$L_n = \sum_{\substack{j=1\\j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_n(\underset{\sim}{Z}_j, \underset{\sim}{Z}_k) \quad ,$$

donde $\underset{\sim}{Z}_j = (Z_{1j}, Z_{2j}, Z_{3j})$ y

$$g_n(\underset{\sim}{Z}_j,\underset{\sim}{Z}_k) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (H_{ik}\,(M_{kj} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ik}\,(M_{kj} + 1/(n-1))) \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (H_{ij}\,(M_{jk} + 1/(n-1)) - E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ij}\,(M_{jk} + 1/(n-1))) \; .$$

Sea $\mathscr{P}_n$ el subespacio de estadísticos de la forma $P = \sum_{j=1}^{n} r_j(\underset{\sim}{Z}_j)$.

Los siguientes resultados son válidos (ver Apéndice de Lehmann (1975)):

(a) La proyección de L_n sobre $\mathscr{P}_n$ es dado por

$$L_n^{*} = (n-1) \sum_{j=1}^{n} \psi_{1n}(\underset{\sim}{Z}_j) \qquad \text{(A2)}$$

donde

$$\psi_{1n}(\underset{\sim}{z}) = E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(g_n(\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{Z}_1)) \qquad \text{(A3)}$$

(b) $\operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(L_n - L_n^{*}) = \operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(L_n) - \operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(L_n^{*})$ (A4)

($\operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}$ denota la varianza bajo la hipótesis alternativa K_n).

(c) Si llamamos $V_{n,jk} = g_n(\underset{\sim}{Z}_j,\underset{\sim}{Z}_k)$ se tiene

$\operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(L_n) = (n(n-1)/2)\operatorname{var}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(V_{n,12}) + n(n-1)(n-2)\operatorname{cov}_{\underset{\sim}{\theta}_n}(V_{n,12},V_{n,13})$ (A5)

($\operatorname{cov}_{\underset{\sim}{\theta}_n}$ denota la covarianza bajo la hipótesis alternativa K_n).

(d) $\mathrm{var}_{\theta_n}(\psi_{1n}(Z_j)) = \mathrm{cov}_{\theta_n}(V_{n,j2}, V_{n,j3})$ (A6)

Además

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}_{\theta_n}(V_{n,12}) = \mathrm{var}_0(V_{12}) \qquad \text{(A7)}$$

donde $V_{jk} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \{H_{ij}\, M_{jk} + H_{ik}\, M_{kj}\}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{cov}_{\theta_n}(V_{n,12}, V_{n,13}) = \mathrm{cov}_0(V_{12}, V_{13}) = \sigma_0^2 \qquad \text{(A8)}$$

(var_0 y cov_0 denotan la varianza y la covarianza respectivamente bajo la hipótesis nula).

De (A4), (A5), (A6), (A7) y (A8) se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}_{\theta_n}(c_n^{1/2}\,(L_n - L_n^*)) = 0 \qquad \text{(A9).}$$

De (A2), (A8) y del Teorema Central del Límite, se concluye

$$c_n^{1/2}\, L_n^* \xrightarrow{d} N(0\,,\, 3\sigma_0^2).$$

Luego de (A9) se obtiene

$$c_n^{1/2}\, L_n \xrightarrow{d} N(0\,,\, 3\sigma_0^2) \qquad \text{(A10)}$$

Se puede mostrar que

$$\sigma_0^2 = (1/3) \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - \bar{\lambda}^2 \qquad \text{(A11)}$$

Luego para probar (A1) teniendo en cuenta (A10) y (A11) basta mostrar

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i T_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i d_i \qquad \text{(A12)}.$$

Ahora bien, se tiene

$$c_n^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i T_i\right) = c_n^{1/2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \lambda_i E_{\underset{\sim}{\theta}_n}(H_{ij} (M_{jk} + 1/(n-1))).$$

Desarrollando $E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{ij} (M_{jk} + 1/(n-1)))$ en una serie de Taylor alrededor de $\underset{\sim}{0} = (0,0,0)$ y poniendo $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_n = (\delta_1/n^{1/2}, \delta_2/n^{1/2}, \delta_3/n^{1/2})$ se obtiene

$$c_n^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i T_i\right) =$$

$$= c_n^{1/2} n(n-1) \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \{E_{\underset{\sim}{0}}(H_{i1} (M_{12} + 1/(n-1))) +$$

$$+ n^{-1/2} \sum_{r=1}^{4} \delta_r ((\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1} (M_{12} + 1/(n-1)))/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + o(n^{-1/2})\}.$$

Como $E_{\underset{\sim}{0}}(H_{i1}\ (M_{12} + 1/(n-1))) = 0$, se obtiene

$$c_n^{1/2}\ E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\ T_i\right) =$$

$$= (c_n\, n\,(n-1)^2)^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{r=1}^{3} \delta_r\ \{ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}\ (M_{12} + 1/(n-1)))/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + o(1) \} \right].$$

Luego, se concluye

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{1/2}\ E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\ T_i\right) = 3^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\sum_{r=1}^{3} \delta_r\ \{ \partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}\ M_{12})/\partial\theta_r\}_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} \right].$$

Por otra parte para todo i (i=1,2,3)

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}\ M_{12})/\partial\theta_i)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\ M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = a_1(G)$$

y para todo $i \neq r$ (i=1,2,3 ; r=1,2,3) ,

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1}\ M_{12})/\partial\theta_r)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\ M_{12})/\partial\theta_2)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} .$$

Además como $E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\ M_{12}) = 0$ si $\theta_j = \theta_0$ (j=1,2,3) , se obtiene

$$(\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\ M_{12})/\partial\theta_2)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} = (-1/2)\ (\partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\ M_{12})/\partial\theta_1)_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} .$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{1/2} E_{\underset{\sim}{\theta}_n}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i T_i\right) =$$

$$= 3^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{3} \delta_r \{ \partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1} M_{12})/\partial\theta_r \}_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} + \delta_i \{ \partial E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{i1} M_{12})/\partial\theta_i \}_{\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{0}} \right] =$$

$$= 3^{1/2} a_1(G) \{ (-1/2) \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq i}}^{3} \lambda_i \delta_r + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \delta_i \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i ((27^{1/2}/2)\, a_1(G)\, \delta_i) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i d_i .$$

De este modo se concluye (A12) y por consiguiente el Teorema A1.

Como consecuencia del Teorema A1, obtenemos la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test F.

Teorema A2 Si $\sigma^2(G) < \infty$, la eficiencia asintótica relativa de Pitman del test W con respecto al test F es dada por

$$e_{W,F}(G) = (27/4)\, (a_1(G))^2\, \sigma^2(G) .$$

Demostración :

El Teorema A2 se sigue del Teorema A1 y del hecho que bajo las alternativas K_n , F converge en distribución a una chi-cuadrado no central con tres grados de libertad y parámetro de no centralidad $\sum_{i=1}^{3} \delta_i^2/\sigma^2(G)$.

El siguiente Teorema da una expresión computable de $a_1(G)$ para cualquier función de distribución G y para el caso normal.

Teorema A3 Sean Z_1, Z_2, Z_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución G. Definamos $U = Z_2 - Z_1$, $V = Z_3 - Z_2$ y sea $h(u,v)$ la densidad conjunta de U y V. Luego

(a) $a_1(G) = 24\ (K_1 + K_2)$,

donde

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{w_1+w_2} h(0,v)\ h(w_1,w_2)\ dv\ dw_1\ dw_2 \qquad \text{(A13)},$$

$$K_2 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{w_1+w_2}^{0} h(w_1+w_2-v,v)\ h(w_1,w_2)\ dv\ dw_1\ dw_2 \qquad \text{(A14)} .$$

(b) Si G es normal con varianza uno, se tiene

$$K_1 = (4\pi)^{-1/2} \int_{0}^{\infty} (2\Phi(u/3^{1/2}) - 1)\ \Phi(-2u/3^{1/2})\ \phi(u)\ du \qquad \text{(A15)} ,$$

$$K_2 = (8\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} (2\Phi(u/6^{1/2}) - 1)\, \phi(u)\, du \qquad \text{(A16)} ,$$

donde Φ y ϕ son las funciones de distribución y de densidad respectivamente de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

<u>Demostración</u> :

(a) Sea $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta_3 = 0$.

De las definiciones de H_{11} y M_{12} se tiene

$$E_{\underset{\sim}{\theta}}(H_{11}\, M_{12}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} , Z_{11} \geq Z_{31} , D_1 \geq D_2) -$$

$$- P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} , Z_{11} \leq Z_{31} , D_1 \geq D_2) =$$

$$= g_1(\theta) - g_2(\theta) ,$$

donde

$$g_1(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21} , Z_{11} \geq Z_{31} , D_1 \geq D_2) \text{ y}$$

$$g_2(\theta) = P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \leq Z_{21} , Z_{11} \leq Z_{31} , D_1 \geq D_2) .$$

Luego

$$a_1(G) = (dg_1(\theta)/d\theta)_{\theta=0} - (dg_2(\theta)/d\theta)_{\theta=0} \qquad \text{(A17)}.$$

Es inmediato ver que

$$g_1(\theta) = 2\, P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ D_1 \geq D_2) =$$

$$= 4\ \{\ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{12} \geq Z_{22}\ ,\ Z_{22} \geq Z_{32}\ ,$$

$$Z_{11} - Z_{31} \geq Z_{12} - Z_{32}) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{22} \geq Z_{12}\ ,\ Z_{12} \geq Z_{32}\ ,$$

$$Z_{11} - Z_{31} \geq Z_{22} - Z_{32}) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{\theta}}(Z_{11} \geq Z_{21}\ ,\ Z_{21} \geq Z_{31}\ ,\ Z_{22} \geq Z_{32}\ ,\ Z_{32} \geq Z_{12},$$

$$Z_{11} - Z_{31} \geq Z_{22} - Z_{12})\ \}\ .$$

Luego, se tiene

$$g_1(\theta) = 4\ \{\ P_{\underset{\sim}{0}}(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta\ ,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0,\ Z_{22} - Z_{12} \leq \theta,\ Z_{32} - Z_{22} \leq 0,$$

$$Z_{12} - Z_{32} - Z_{11} + Z_{31} \leq 0) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{0}}(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0,\ Z_{12} - Z_{22} \leq -\theta,\ Z_{32} - Z_{12} \leq \theta,$$

$$Z_{22} - Z_{32} - Z_{11} + Z_{31} \leq \theta) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{0}}(Z_{21} - Z_{11} \leq \theta,\ Z_{31} - Z_{21} \leq 0,\ Z_{32} - Z_{22} \leq 0,\ Z_{12} - Z_{32} \leq -\theta,$$

$$Z_{22} - Z_{12} - Z_{11} + Z_{31} \leq 2\theta)\ \}\ .$$

Ahora, definamos

$$V_1 = Z_{21} - Z_{11}\ ,\ V_2 = Z_{31} - Z_{21}\ ,\ W_1 = Z_{22} - Z_{12}\ ,\ W_2 = Z_{32} - Z_{22}\ .$$

Por lo tanto

$$g_1(\theta) = 4\ \{\ P_{\underset{\sim}{0}}(V_1 \le \theta, V_2 < 0, W_1 \le \theta, W_2 \le 0, V_1 + V_2 - W_1 - W_2 \le 0) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{0}}(V_1 \le \theta, V_2 \le 0, W_1 \le -\theta, W_2 \le 0, V_1 + V_2 - W_1 - W_2 \le \theta) +$$

$$+ P_{\underset{\sim}{0}}(V_1 \le \theta, V_2 \le 0, W_1 \le 0, W_2 \le -\theta, V_1 + V_2 - W_1 - W_2 \le 2\theta)\ \}.$$

Definiendo $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)$ y

$L(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5) =$

$= P_{\underset{\sim}{0}}(V_1 \le \mu_1, V_2 \le \mu_2, W_1 \le \mu_3, W_2 \le \mu_4, V_1 + V_2 - W_1 - W_2 \le \mu_5)$,

se tiene

$$(dg_1(\theta)/d\theta)_{\theta=0} = 12\ (\partial L/\partial\mu_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} + 12\ (\partial L/\partial\mu_5)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\ .$$

Analógamente se puede probar que

$$(dg_2(\theta)/d\theta)_{\theta=0} = -12\ (\partial L/\partial\mu_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} - 12\ (\partial L/\partial\mu_5)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\ .$$

Luego de (A17) se tiene

$$a_1(G) = 24\ (\partial L/\partial\mu_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} + 24\ (\partial L/\partial\mu_5)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}\ .$$

De esta manera definiendo $K_1 = (\partial L/\partial\mu_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}$ y $K_2 = (\partial L/\partial\mu_5)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}}$, se concluye

$$a_1(G) = 24\ (K_1 + K_2)\ .$$

Ahora, vamos a probar (A13).

De la definición de h(x,y), se tiene

$$L(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)= \int\int\int\int_{R_1} h(u_1,v_1)\, h(u_2,v_2)\, du_1\, du_2\, dv_1\, dv_2 \quad ,$$

donde

$R_1 = \{(u_1,u_2,v_1,v_2) : u_1 \leq \mu_1 \ , \ v_1 \leq \mu_2 \ , \ u_2 \leq \mu_3 \ , \ v_2 \leq \mu_4 \ ,$

$u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \leq \mu_5\}$.

Supongamos $\mu_1 = \theta$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$.

Luego, R_1 puede reescribirse como R_2 , donde

$R_2 = \{(u_1,u_2,v_1,v_2) : u_1 \leq \theta \ , \ v_2 \leq 0 \ , \ u_1 + v_1 - u_2 \leq v_2 \leq 0 \ ,$

$u_1 + v_1 < u_2 \leq 0\}$.

Por lo tanto

$$K_1 = (\partial L/\partial \mu_1)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} = \int\int\int_{R_3} h(0,v_1)\, h(u_1,v_2)\, du_1\, dv_1\, dv_2 \quad ,$$

donde

$R_3 = \{(u_2,v_1,v_2) : v_1 \leq 0 \ , \ v_1 - u_2 \leq v_2 \leq 0 \ , \ v_1 \leq u_2 \leq 0\}$.

Pero,

$R_3 = \{(u_2,v_1,v_2) : v_1 \leq u_2 + v_2 \ , \ u_2 \leq 0 \ , \ v_2 \leq 0 \}$.

De esta manera se tiene

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{u_2+v_2} h(0,v_1)\, h(u_2,v_2)\, dv_1\, dv_2\, du_2 \quad .$$

Luego se verifica (A13).

Para demostrar (A14) supongamos $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$, $\mu_5 = \theta$.

Consideremos la transformación T dada por $\bar{u}_2 = u_2 + v_2$, $\bar{v}_2 = u_2 - v_2$. T transforma la región

$$R_1 = \{(u_1,u_2,v_1,v_2) : u_1 \leq 0 \ , \ v_1 \leq 0 \ , \ u_2 \leq 0 \ , \ v_2 \leq 0 \ ,$$
$$u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \leq \theta\}$$

en la región

$$\bar{R}_1 = \{(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}_1,\bar{v}_2) : \bar{u}_1 \leq 0 \ , \ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1 \ , \ \bar{u}_1 - \theta \leq \bar{u}_2 \leq 0 \ ,$$
$$\bar{u}_2 \leq \bar{v}_2 \leq -\bar{u}_2\}.$$

Además $|\partial(u_1,u_2,v_1,v_2)/\partial(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}_1,\bar{v}_2)| = 1/4$.

Por lo tanto

$$F(\theta) = L(\underset{\sim}{\mu}) = \int\int\int_{\bar{R}_1} h((\bar{u}_1 + \bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2)\ h((\bar{u}_2 + \bar{v}_2)/2,(\bar{u}_2 - \bar{v}_2)/2)$$
$$\times\ (1/4)\ d\bar{u}_1\ d\bar{u}_2\ d\bar{v}_1\ d\bar{v}_2 \ .$$

Luego

$$\partial L(\underset{\sim}{\mu})/\partial\mu_5 = dF(\theta)/d\theta =$$

$$= \int\int\int_{\bar{R}_2} h((\bar{u}_1 + \bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2)\ h((\bar{u}_1 - \theta + \bar{v}_2)/2,(\bar{u}_1 - \theta - \bar{v}_2)/2)$$

$$\times\ (1/4)\ d\bar{u}_1\ d\bar{u}_2\ d\bar{v}_1\ d\bar{v}_2 \ ,$$

donde

$$\bar{R}_2 = \{(\bar{u}_1,\bar{v}_1,\bar{v}_2) : \bar{u}_1 \leq 0 \ , \ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \leq -\bar{u}_1 \ , \ \bar{u}_1 - \theta \ \leq \bar{v}_2 \leq \ -(\bar{u}_1 - \theta)\} \ ,$$

de este modo

$$K_2 = (\partial L(\underset{\sim}{\mu})/\partial \mu_5)_{\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{0}} = (dF(\theta)/d\theta)_{\theta=0} =$$

$$= (1/4) \int\int\int_{\bar{R}_3} h((\bar{u}_1 + \bar{v}_1)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2)\ h((\bar{u}_1 + \bar{v}_2)/2,(\bar{u}_1 - \bar{v}_2)/2)$$

$$\times\ d\bar{u}_1 \ d\bar{v}_1\ d\bar{v}_2 \ ,$$

donde

$$\bar{R}_3 = \{(\bar{u}_1,\bar{v}_1,\bar{v}_2) : \bar{u}_1 \leq 0 \ , \ \bar{u}_1 \leq \bar{v}_1 \ \leq -\bar{u}_1 \ , \ \bar{u}_1 \leq \ \bar{v}_2 \ \leq -\bar{u}_1 \ \}.$$

Si hacemos la sustitución $u_1 = (\bar{u}_1 + \bar{v}_1)/2$, $v_1 = (\bar{u}_1 - \bar{v}_1)/2$, $\bar{R}_3$ se transforma en la región $\bar{R}_4$, donde

$$\bar{R}_4 = \{(u_1,v_1,\bar{v}_2) : u_1 \leq 0 \ , \ v_1 \leq 0 \ , \ u_1 + v_1 \leq \ \bar{v}_2 \leq -(u_1 + v_1)\} \ .$$

Luego, como $|\partial(\bar{u}_1,\bar{v}_1)/\partial(u_1,v_1)| = 2$, se tiene

$$K_2 = 2\int\int\int_{\bar{R}_4} h(u_1,v_1)\ h((u_1 + v_1 + \bar{v}_2)/2,(u_1 + v_1 - \bar{v}_2)/2)\ du_1\ dv_1\ d\bar{v}_2 \ .$$

Finalmente por medio de la sustitución $v = (u_1 + v_1 - \bar{v}_2)/2$ y

$dv = (-1/2)\ d\bar{v}_2$, se concluye

$$K_2 = \int\int\int_{\bar{R}_5} h(u_1,v_1)\ h(u_1 + v_1 - v,v)\ du_1\ dv_1\ dv \quad ,$$

donde

$\bar{R}_5 = \{(u_1,v_1,v) : u_1 < 0 , v_1 < 0 , u + v_1 < v < 0\}.$

Luego se tiene (A14).

(b) Si G es normal con varianza uno, (U,V) es una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

O sea

$$h(u,v) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\ e^{-(u^2 + uv + v^2)/3} \quad .$$

Ahora bien, escribamos

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{w_1+w_2} h(0,v)\ h(w_1,w_2)\ dv\ dw_1\ dw_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} H_1(w_1+w_2)\ h(w_1,w_2)\ dw_1\ dw_2 \quad ,$$

donde $H_1(w_1+w_2) = \int_{-\infty}^{w_1+w_2} h(0,v)\ dv.$

Luego, como h(u,v) es la densidad conjunta de (U,V) K_1 puede expresarse como

$$K_1 = E(I_{U \le 0}\, I_{V \le 0}\, H_1(U+V)) = E(E(I_{U \le 0}\, I_{V \le 0}\, H_1(U+V) \mid U+V)) ,$$

donde I_A es la función indicadora del evento A.

Definiendo $\bar{U} = U$ y $\bar{V} = U + V$, se tiene

$$K_1 = E(E(I_{\bar{U} \le 0}\, I_{\bar{V} - \bar{U} \le 0}\, H_1(\bar{V}) \mid \bar{V})) =$$

$$= E(H_1(\bar{V})\, (E(I_{\bar{U} \le 0}\, I_{\bar{V} - \bar{U} \le 0} \mid \bar{V})) \qquad \text{(A18)} .$$

Si G es normal con varianza uno, la variable aleatoria bidimensional $(\bar{U},\bar{V})$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f_{(\bar{U},\bar{V})}(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\, h(\bar{u},\bar{v}-\bar{u}) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\, e^{-(\bar{u}^2 - \bar{u}\bar{v} + \bar{v}^2)/3} .$$

De esta manera $(\bar{U},\bar{V})$ es una variable aleatoria bivariada con matriz de covarianza $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$.

Así puede mostrarse que

$$E(I_{\bar{U} \le 0}\, I_{\bar{V} - \bar{U} \le 0} \mid \bar{V}) = (2\Phi(-\bar{V}/6^{1/2}) - 1)\, I_{\bar{V} < 0} \qquad \text{(A19)} ,$$

ya que si $\bar{v} \le 0$,

$$E(I_{\bar{U} \le 0}\, I_{\bar{V} - \bar{U} \le 0} \mid \bar{V} = \bar{v}) = P(\bar{U} \le 0 , \bar{V} - \bar{U} \le 0 \mid \bar{V} = \bar{v}) =$$

$$= P(\bar{v} \le \bar{U} \le 0 \mid \bar{V} = \bar{v}) = \int_{\bar{v}}^{0} f_{\bar{U}|\bar{V}}(\bar{u}|\bar{v})\, d\bar{u} ,$$

donde $f_{\bar{U}|\bar{V}}$ es la densidad condicional de $\bar{U}$ dado $\bar{V} = \bar{v}$.

Pero, la densidad marginal de $\bar{V}$ es

$$f_{\bar{V}}(\bar{v}) = \frac{1}{2\,\pi^{1/2}} \; e^{-\bar{v}^2/4} \quad ,$$

por lo tanto

$$f_{\bar{U}|\bar{V}}(\bar{u}|\bar{v}) = \frac{1}{(3\,\pi)^{1/2}} \; e^{-(\bar{u} - \bar{v}/2)^2/3} \quad .$$

De esta manera

$$E(I_{\bar{U} < 0} \; I_{\bar{V} - \bar{U} < 0} \mid \bar{V} = \bar{v}) = \frac{1}{(3\,\pi)^{1/2}} \int_{\bar{v}}^{0} e^{-(\bar{u} - \bar{v}/2)^2/3} \, d\bar{u} =$$

$$= 2\,\Phi(-\bar{v}/6^{1/2}) - 1 \; .$$

Luego se verifica (A19).

De (A18) y de (A19) se concluye

$$K_1 = E(H_1(\bar{V}) \; (2\,\Phi(-\bar{V}/6^{1/2}) - 1) \; I_{\bar{V} < 0}) =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} H_1(\bar{v}) \; (2\,\Phi(-\bar{v}/6^{1/2}) - 1) \; e^{-\bar{v}^2/4} \, d\bar{v} \; =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} H_1(2^{1/2} w) \; (2\,\Phi(-w/3^{1/2}) - 1) \; \phi(w) \, dw \quad .$$

Por otra parte

$$H_1(z) = \int_{-\infty}^{z} h(0,y)\,dy = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}} \int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/3}\,dy = (4\pi)^{-1/2}\ \Phi((2/3)^{1/2} z).$$

Luego

$$K_1 = (4\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} (2\Phi(u/3^{1/2}) - 1)\ \Phi(-2u/3^{1/2})\ \phi(u)\,du\ .$$

De este modo se obtiene (A15).

Ahora se verá (A16).

Se tiene

$$K_2 = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_{x+y}^{0} h(x+y-w,w)\ h(x,y)\ dw\,dx\,dy\ .$$

Como

$$h(x+y-w,w) = \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\ e^{-((x+y-w)^2 + (x+y-w)w + w^2)/3} =$$

$$= \frac{1}{2\pi 3^{1/2}}\ e^{-(x^2 + y^2 + 2xy - xw - yw + w^2)/3}\ ,$$

se sigue

$$h(x+y-w,w)\,\bar{h}(x,y) = \frac{1}{12\,\pi^2}\, e^{-((w\,-\,(x+y)/2)^2\,+\,7\,(x^2+y^2)/4\,+\,5xy/2)/3}.$$

Luego,

$$H_2(x,y) = \int_{x+y}^{0} h(x+y-w,w)\,\bar{h}(x,y)\,dw =$$

$$= \frac{1}{12\,\pi^2}\, e^{-(7\,(x^2\,+\,y^2)/4\,+\,5xy/2)/3} \int_{x+y}^{0} e^{-(w\,-\,(x+y)/2)^2/3}\,dw =$$

$$= \frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}\,6^{1/2}}\, e^{-(7\,(x^2\,+\,y^2)/4\,+\,5xy/3)}\,(2\,\Phi(-(x\,+\,y)/6^{1/2}) - 1).$$

Luego,

$$H_2(x,y) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{1/2}}\; f_{(X,Y)}(x,y)\,(2\,\Phi(-((x\,+\,y)/6^{1/2})\,-\,1)\,,$$

donde

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi\,6^{1/2}}\, e^{-(7\,(x^2\,+\,y^2)/4\,+\,5xy/2)/3}$$

es la función de densidad de una variable aleatoria (X,Y) normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 7/4 & -5/4 \\ -5/4 & 7/4 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

$$K_2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\, 2} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} (2\Phi(-(x+y)/6^{1/2}) - 1)\, f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\, 2} E(I_{X<0}\, I_{Y<0}\, (2\Phi(-(X+Y)/6^{1/2}) - 1)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\, 2} E(E(I_{X \leq 0}\, I_{Y \leq 0}\, (2\Phi(-(X+Y)/6^{1/2}) - 1) \mid X+Y)).$$

Definamos $\bar{X} = X$, $\bar{Y} = X + Y$. Luego, la variable aleatoria bidimensional $(\bar{X},\bar{Y})$ tiene función de densidad de probabilidad

$$f_{(\bar{X},\bar{Y})}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{\pi\, 6^{1/2}} f_{(X,Y)}(x,y-x) =$$

$$= \frac{1}{\pi\, 6^{1/2}} e^{-(2\bar{x}^2/3 + 7\bar{y}^2/6 - 2\bar{x}\bar{y}/3)/2} .$$

De este modo $(\bar{X},\bar{Y})$ es una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza $\begin{pmatrix} 7/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto,

$$K_2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\, 2} E((2\Phi(-\bar{Y}/6^{1/2}) - 1)\, E(I_{\bar{X} \leq 0}\, I_{\bar{Y} - \bar{X} \leq 0} \mid \bar{Y})) .$$

Pero,

$$E(I_{\bar{X} \leq 0}\, I_{\bar{Y} - \bar{X} \leq 0} \mid \bar{Y}) = (2\,\Phi(-\bar{Y}/6^{1/2}) - 1)\, I_{\bar{Y} \leq 0} \qquad (A20)\ .$$

Pues, si $\bar{y} < 0$ se tiene

$$E(I_{\bar{X} \leq 0}\, I_{\bar{Y} - \bar{X} \leq 0} \mid \bar{Y} = \bar{y}) = P(\bar{X} \leq 0\ ,\ \bar{Y} - \bar{X} \leq 0 \mid \bar{Y} = \bar{y}) =$$

$$= P(\bar{y} \leq \bar{X} \leq 0 \mid \bar{Y} = \bar{y}) = \int_{\bar{y}}^{0} f_{\bar{X}|\bar{Y}}(\bar{x}|\bar{y})\, d\bar{x}\ ,$$

donde $f_{\bar{X}|\bar{Y}}$ es la función de densid d condicional de $\bar{X}$ dado $\bar{Y} = \bar{y}$.

Como, $\bar{Y}$ es una variable aleatoria normal con esperanza cero y varianza uno, se obtiene

$$f_{\bar{X}|\bar{Y}}(\bar{x}|\bar{y}) = \frac{1}{(3\,\pi)^{1/2}}\ e^{-(\bar{x} - \bar{y}/2)^2/3}\ .$$

De esta manera

$$E(I_{\bar{X} < 0}\, I_{\bar{Y} - \bar{X} < 0} \mid \bar{Y} = \bar{y}) = \frac{1}{(3\,\pi)^{1/2}} \int_{\bar{y}}^{0} e^{-(\bar{x} - \bar{y}/2)^2/3}\, d\bar{x} =$$

$$= 2\,\Phi(-\bar{y}/6^{1/2}) - 1\ .$$

Luego se verifica (A20).

Entonces se obtiene

$$K_2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\ 2} E((2\,\Phi(-\bar{Y}/6^{1/2}) - 1)\ I_{\bar{Y} \leq 0}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\ 2} \int_{-\infty}^{0} (2\,\Phi(-\bar{y}/6^{1/2}) - 1)\ \phi(\bar{y})\ d\bar{y}\ .$$

Luego, se tiene (A16) y por consiguiente el Teorema A3.

Integrando numéricamente (A15) y (A16) se obtiene que $e_{W,F}(G)$ es aproximadamente 0,899, para G normal y por lo tanto $e_{W,Q}(G)$ es aproximada- 1,255.

Lema A1 Sean Z_1, Z_2, Z_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Cauchy con parámetro de escala uno, $U = Z_2 - Z_1$, $V = Z_3 - Z_2$, $W = Z_2$. Luego (U,V) es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad.

$$h(u,v) = (2/\pi^2) \frac{u^2 + v^2 + uv + 12}{(u^2 + 4)\ (v^2 + 4)\ ((u + v)^2 + 4)} ,$$

$(-\infty < u < \infty \quad , \quad \infty < v < \infty)$.

Demostración :

Sean $f_{(U,V,W)}$ y $f_{(Z_1,Z_2,Z_3)}$ las funciones de densidad de probabilidad de (U,V,W) y (Z_1,Z_2,Z_3) respectivamente. Luego

$$f_{(U,V,W)}(u,v,w) = f_{(Z_1,Z_2,Z_3)}(w-v,w,u+w) =$$

$$= 1/(\pi^3 (1 + w^2) (1 + (w - v)^2) (1 + (u + w)^2)) .$$

Por lo tanto la función de densidad de probabilidad de (U,V) es

$$h(u,v) = (1/\pi^3) \int_{-\infty}^{\infty} 1/((1 + w^2) (1 + (w - v)^2) (1 + (u + w)^2)) \, dw .$$

Esta integral puede evaluarse por residuos. Se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1/((1 + w^2) (1 + (w - v)^2) (1 + (u + w)^2)) \, dw =$$

$$= \pi \{ 1/(v (-2i + v) (2i + u) u) + 1/(v (v + 2i) (v + u + 2i) (v + u)) +$$

$$+ 1/(u (u - 2i) (u + v - 2i) (u + v))\} =$$

$$= \frac{2 \pi (u^2 + v^2 + uv + 12)}{(v^2 + 4) (u^2 + 4) ((u + v)^2 + 4)} .$$

Luego se concluye el Lema A1.

Lema A2

$$\int_{\bar{v}}^{0} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - \bar{u}\bar{v} + 12}{(\bar{u}^2 + 4)\ ((\bar{v} - \bar{u})^2 + 4)}\, d\bar{u} \ = -(\ln(\bar{v}^2/4 + 1)/\bar{v} + \operatorname{arc\,tan}(\bar{v}/2)).$$

Demostración :

Si hacemos la sustitución $t = \bar{u}/\bar{v}$, $dt = d\bar{u}/\bar{v}$, se tiene

$$J = \int_{\bar{v}}^{0} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - \bar{u}\bar{v} + 12}{(\bar{u}^2 + 4)\ ((\bar{v} - \bar{u})^2 + 4)}\, d\bar{u} \ =$$

$$= (-\bar{v}) \int_{0}^{1} \frac{t^2\ \bar{v}^2 + \bar{v}^2 - t\,\bar{v}^2 + 12}{(t^2\ \bar{v}^2 + 4)\ (\bar{v}^2\ \ (1 - t)^2 + 4)}\, dt \quad .$$

Descomponiendo el integrando en fracciones simples, se tiene

$$J = (-\bar{v})\ \{ \int_0^1 t/(t^2\ \bar{v}^2 + 4)\ dt \ + \int_0^1 1/(t^2\ \bar{v}^2 + 4)\ dt \ -$$

$$- \int_0^1 t/(\bar{v}^2 (1 - t)^2 + 4)\ dt \ + 2 \int_0^1 1/(\bar{v}^2 (1 - t)^2 + 4)\ dt\ \} =$$

$$= -(\ln(\bar{v}^2/4 + 1)/4 + \operatorname{arc\,tan}(\bar{v}/2)) \ .$$

De esta manera se ha probado Lema A2.

Lema A3

$$\int_{u+v}^{0} \frac{(w-(u+v)/2)^2 + 3\,(u+v)^2/4 + 12}{((u+v-w)^2+4)\,(w^2+4)}\,dw =$$

$$= -(\ln((u+v)^2/4 + 1)/(u+v) + \operatorname{arc\,tan}((u+v)/2)).$$

Demostración :

Si hacemos la sustitución $z = w - (u+v)/2$, $dz = dw$, se tiene

$$I = \int_{u+v}^{0} \frac{(w-(u+v)/2)^2 + 3\,(u+v)^2/4 + 12}{((u+v-w)^2+4)\,(w^2+4)}\,dw = I_1 + I_2$$

donde

$$I_1 = \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{3\,(u+v)^2/4 + 12}{((z-(u+v)/2)^2+4)\,((z+(u+v)/2)^2+4)}\,dz\ ,$$

$$I_2 = \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{z^2}{((z-(u+v)/2)^2+4)\,((z+(u+v)/2)^2+4)}\,dz\ .$$

En primer lugar vamos a evaluar I_1 .

Si descomponemos el integrando en fracciones simples, se tiene

$$\frac{1}{((z-(u+v)/2)^2+4)\,((z+(u+v)/2)^2+4)} =$$

$$= \frac{1}{((z-(u+v)/2)^2+4)}\left\{\frac{-2z}{(u+v)\,((u+v)^2+16)} + \frac{2}{(u+v)^2+16}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{((z-(u+v)/2)^2+4)}\left\{\frac{2z}{(u+v)\,((u+v)^2+16)} + \frac{2}{(u+v)^2+16}\right\}.$$

De esta manera

$$I_1 = (2/3)\;\;((-1)/(u+v))\int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{z}{(z-(u+v)/2)^2+4}\,dz \;+$$

$$+ \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{1}{(z-(u+v)/2)^2+4}\,dz \;+$$

$$+ \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{1}{(z+(u+v)/2)^2+4}\,dz \;+$$

$$+ (1/(u+v))\int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{z}{(z+(u+v)/2)^2+4}\,dz \qquad .$$

Luego,

$$I_1 = (3/2)((-\ln((u + v)^2/4 + 1)/(u + v)) + \text{arc tan}(-(u + v)/2)).$$

Ahora, vamos a evaluar I_2.

Si descomponemos el integrando en fracciones simples, se tiene

$$\frac{z^2}{((z - (u + v)/2)^2 + 4)\,((z + (u + v)/2)^2 + 4)} =$$

$$= \frac{1}{2\,(u + v)} \left\{ \frac{z}{(z - (u + v)/2)^2 + 4} - \frac{z}{(z + (u + v)/2)^2 + 4} \right\}.$$

De esta manera

$$I_2 = (1/(2\,(u + v))) \left\{ \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{z}{(z - (u + v)/2)^2 + 4}\, dz \; - \right.$$

$$\left. - \int_{(u+v)/2}^{-(u+v)/2} \frac{z}{(z + (u + v)^2 + 4}\, dz \right\} =$$

$$= (1/(2(u + v)))\ \{\ln((u + v)^2/4 + 1) + ((u + v)/2)\ \text{arc tan}(- (u + v)/2\}.$$

De esta manera se concluye el Lema.

Lema A4

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{y^2 + 12}{2\pi^2 (y^2 + 4)^2} \, dy = (1/(2\pi^2)) (\arctan(z/2) + \pi/2 + z/(4 + z^2)).$$

Demostración :

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{y^2 + 12}{2\pi^2 (y^2 + 4)^2} \, dy = (1/(2\pi^2)) \left\{ \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{y^2 + 4} \, dy + 8 \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{(y^2 + 4)^2} \, dy \right\} =$$

$$= (1/(2\pi^2)) (\arctan(z/2) + \pi/2 + z/(4 + z^2)).$$

Lema A5

$$(1/(4\pi^2)) \int_{z}^{0} \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 48}{((\bar{x} + \bar{y})^2/4 + 4)((\bar{x} - \bar{y})^2/4 + 4)(\bar{x}^2 + 4)} \, d\bar{y} \, d\bar{x} =$$

$$= (1/(2\pi^2)) \{(\arctan(z/2))^2 - \int_{z/2}^{0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \, dx - (\ln(z^2/4 + 1)/4\}.$$

Demostración :

En primer lugar calculemos

$$I = (1/(4\pi^2)) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{3\,\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 48}{((\bar{x}+\bar{y})^2/4 + 4)\,((\bar{x}-\bar{y})^2/4)\,(\bar{x}^2+4)}\, d\bar{y}\ .$$

Se tiene $I = (3\,\bar{x}^2 + 48)\, I_1 + I_2$, donde

$$I_1 = (16/(\bar{x}^2 + 4)) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{1}{((\bar{x}+\bar{y})^2 + 16)\,(\bar{x}-\bar{y})^2 + 16)}\, d\bar{y} \quad ,$$

$$I_2 = (16/(\bar{x}^2 + 4)) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{\bar{y}^2}{((\bar{x}+\bar{y})^2 + 16)\,((\bar{x}-\bar{y})^2 + 16)}\, d\bar{y}.$$

Para evaluar I_1 descomponemos el integrando en fracciones simples. Luego,

$$I_1 = (16/(\bar{x}^2 + 4) \left\{ (1/(4\bar{x}\,(\bar{x}^2 + 16))) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+\bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} \right. +$$

$$+ (1/(2\,(\bar{x}^2 + 16))) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{1}{(\bar{x}+\bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} -$$

$$- (1/(4\bar{x}\,(\bar{x}^2 + 16))) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{\bar{y}}{(\bar{x}-\bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} +$$

$$\left. + (1/(2\,(\bar{x}^2 + 16))) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{1}{(\bar{x}-\bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} \right\} .$$

Por lo tanto,

$$I_1 = (16/(\bar{x}^2 + 4)) \{ -\ln(\bar{x}^2/4 + 1)/(4\ \bar{x}\ (\bar{x}^2 + 16)) - $$
$$- \text{arc}\tan(\bar{x}/2)/((8\ (\bar{x}^2 + 16)) \} .$$

Finalmente vamos a evaluar I_2.

Descomponiendo el integrando en fracciones simples se tiene

$$I_2 = (16/(\bar{x}^2 + 16)) \left\{ (-1/(4\bar{x})) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{\bar{y}}{(\bar{x} + \bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} + \right.$$

$$\left. + (1/(4\bar{x})) \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - \bar{y})^2 + 16}\, d\bar{y} \right\} =$$

$$= (16/(\bar{x}^2 + 16) \{ \ln(\bar{x}^2/4 + 1)/(4\bar{x}) - \text{arc}\tan(\bar{x}/2)/8 \} .$$

Por lo tanto,

$$I = -2/(\pi^2\ (\bar{x}^2 + 4)) \{ \ln(\bar{x}^2/4 + 1)/\bar{x} + \text{arc}\tan(\bar{x}/2) \}.$$

De esta manera

$$(1/(4\pi^2)) \int_z^0 \int_{\bar{x}}^{-\bar{x}} \frac{3\ \bar{x}^2 + \bar{y} + 48}{((\bar{x} + \bar{y})^2/4 + 4)\ ((\bar{x} - \bar{y})^2/4 + 4)\ (\bar{x}^2 + 4)}\, d\bar{y} =$$

$$= (-1/\pi^2) \quad (1/2) \int_{z/2}^{0} \frac{\ln(w^2 + 1)}{w\,(\bar{w}^2 + 1)}\, dw + \int_{z/2}^{0} \frac{\text{arc}\tan(w)}{w^2 + 1}\, dw =$$

$$= (-1/(2\pi^2)) \left\{ \int_{z/2}^{0} \frac{\ln(w^2+1)}{w}\, dw + (\ln(z^2/4+1))^2/4 - \right.$$

$$\left. - (\operatorname{arc\,tan}(z/2))^2 \right\} .$$

De esta manera queda probado el Lema.

En los siguientes lemas denotaremos

$$h^*(x,y,z) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}}\, e^{-(3x^2/4 + xy + xz/2 + y^2 + yz + 3z^2/4)/2} .$$

Lema A6

$$H^*(w) = \int_{w}^{0} \int_{w-x}^{0} \int_{w-x-y}^{0} h^*(x,y,z)\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_{w/2^{1/2}}^{0} \int_{(2/3)^{1/2}(w-s/2^{1/2})}^{s/3^{1/2}} (\Phi(r/2^{1/2}) - \Phi(3^{1/2}(w-s/2^{1/2})/2 - r/(2\,2^{1/2})))$$

$$\times\ \phi(r)\ \phi(s)\ dr\, ds ,$$

donde Φ y ϕ son las funciones de distribución y de densidad de una variable aleatoria normal con esperanza cero y varianza uno respectivamente.

Demostración :

De la definición de h^* se tiene

$$H^*(w) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_w^0 \int_{w-x}^0 \int_{w-x-y}^0 e^{-(x^2/2 + (y + x/2)^2 + 3z^2/4 + (y + x/2)z))}$$

$$x\, dz\, dy\, dx$$

Ahora bien, consideremos la transformación T^* dada por $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + x/2$, $\bar{z} = 3^{1/2}z/2$. T^* transforma la región

$R = \{(x,y,z) : w \leq x \leq 0 , w - x \leq y \leq 0 , w - x - y \leq z \leq 0 \}$

en la región

$\bar{R} = \{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) : \bar{w} \leq \bar{x} \leq 0 , \bar{w} - \bar{x}/2 \leq \bar{y} \leq \bar{x}/2 , 3^{1/2}(\bar{w} - \bar{y} - \bar{x}/2) \leq \bar{z} \leq 0\}$.

Además $|\partial(x,y,z)/\partial(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| = 2/3^{1/2}$.

Luego,

$$H^*(w) = \frac{1}{3^{1/2}\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_w^0 I(\bar{x})\, e^{-\bar{x}^2/4}\, d\bar{x} ,$$

donde

$$I(\bar{x}) = \int_{w-\bar{x}/2}^{\bar{x}/2} \int_{3^{1/2}(w-y-x/2)/2}^{0} e^{-(\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{y}\bar{z}/3^{1/2})/2}\, d\bar{z}\, d\bar{y} \quad .$$

Pero

$$I(\bar{x}) = \int_{w-\bar{x}/2}^{\bar{x}/2} \int_{3^{1/2}(w-\bar{y}-\bar{x}/2)/2}^{0} e^{-((\bar{z} + \bar{y}/3^{1/2})^2 + 2\bar{y}^2/3)/2} \, d\bar{x} \, d\bar{y} =$$

$$= \int_{w-\bar{x}/2}^{\bar{x}/2} \int_{3^{1/2}(w-\bar{y}-\bar{x}/2)/2}^{0} e^{-(\bar{z} + \bar{y}/3^{1/2})^2/2} \, e^{-\bar{y}^2/3} \, d\bar{z} \, d\bar{y} =$$

$$= 6^{1/2} \pi \int_{(2/3)^{1/2}(w-\bar{x}/2)}^{\bar{x}/6^{1/2}} (\Phi(t/2^{1/2}) - \Phi(3^{1/2}(w-\bar{x}/2) - t/(2\ 2^{1/2}))$$

$$x\ \phi(t)\ dt.$$

De esta manera se concluye el Lema:

<u>Lema A7</u>

$$H_1^*(w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} h^*(0,y,z)\ dy\ dz = (4\pi)^{-1/2}\ \Phi_C(w/2^{1/2},0) \quad ,$$

donde

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} & 1 \end{pmatrix}$, Φ_C y ϕ_C son las funciones de distribución y de densidad de una variable aleatoria normal bivariada con esperanza cero y matriz de covarianza C respectivamente.

<u>Demostración:</u>

Como

$$h^{*}(0,y,z) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}}\; e^{-(y^2 + yz + 3z^2/4)/2}\;,\text{ se obtiene}$$

$$H_1^{*}(w) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} e^{-(y^2 + yz + 3z^2/4)/2}\, dy\, dz =$$

$$= \frac{3^{1/2}}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{w/2^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-3(v^2 + 2vs/3^{1/2} + s^2)/4}\, dv\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi^{1/2}}\; \Phi_C(w/2^{1/2},0)\;,$$

$$\text{donde } C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene el Lema.

Lema A8

$$H_2^*(w) = \int_w^0 \int_{-\infty}^{w-z} h^*(0,y,z)\, dy\, dz =$$

$$= (4\pi)^{-1/2} \int_{w/2^{1/2}}^0 \Phi(w - u/2^{1/2})\, \phi(u)\, du .$$

Demostración:

Se tiene

$$H_2^*(w) = \int_w^0 \int_{-\infty}^{w} h^*(0,\bar{y}-\bar{z},\bar{z})\, d\bar{y}\, d\bar{z} .$$

Por otra parte

$$h^*(0,\bar{y}-\bar{z},\bar{z}) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}}\, e^{-((\bar{y} - \bar{z}/2)^2 + \bar{z}^2/2)/2}.$$

Luego,

$$H_2^*(w) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}} \int_w^0 \int_{-\infty}^{w} e^{-\bar{z}^2/4}\, e^{-(\bar{y} - z/2)^2/2}\, d\bar{y}\, d\bar{z} =$$

$$= (4\pi)^{-1/2} \int_{w/2^{1/2}}^0 \phi(v)\, \Phi(w - v/2^{1/2})\, dv.$$

Luego, se tiene el Lema.

Lema A9

$$H_3^*(w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} h^*(x,0,z)\, dx\, dz = (4\pi)^{-1/2}\, \Phi_C((2/3)^{1/2}w,0) \quad ,$$

donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Demostración:

Como

$$h^*(x,0,z) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}} \quad {}^{-(3x^2/4 \,+\, xz/2 \,+\, 3z^2/4)/2} \quad ,$$

se tiene

$$H_3^*(w) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} e^{-(3x^2/4 \,+\, xz/2 \,+\, 3z^2/4)/2}\, dx\, dz =$$

$$= \frac{2}{3\,(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{3^{1/2}w/2} \int_{-\infty}^{0} e^{-(u^2 \,+\, 2uv/3 \,+\, v^2)/2}\, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{4\,(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{(2/3)^{1/2}w} \int_{-\infty}^{0} e^{-9(\bar{u}^2 \,+\, 2\bar{u}\bar{v}/3 \,+\, \bar{v}^2)/16}\, d\bar{u}\, d\bar{v} =$$

$$= (4\pi)^{-1/2}\, \Phi_C((2/3)^{1/2}w,0) \quad ,$$

donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

De esta manera se concluye el Lema.

<u>Lema A10</u>

$$H_4^*(w) = \int_w^0 \int_{-\infty}^{w-z} h^*(x,0,z)\, dx\, dz =$$

$$= (4\pi)^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2}w}^{0} \Phi(3^{1/2}w/2 - u/2^{1/2})\, \phi(u)\, du .$$

<u>Demostración</u> :

Se tiene

$$H_4^*(w) = \int_w^0 \int_{-\infty}^{w} h\, (\bar{x}-\bar{z},0,\bar{z})\, d\bar{x}\, d\bar{z} .$$

Por otra parte

$$h^*(\bar{x}-\bar{z},0,\bar{z}) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}}\, e^{-((3^{1/2}\bar{x}/2 - \bar{z}/3^{1/2})^2 + 2\bar{z}^2/3)/2} .$$

De esta manera

$$H_4^*(w) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_w^0 \int_{-\infty}^{w} e^{-\bar{z}^2/3}\; e^{-(3^{1/2}\bar{x}/2 - \bar{z}/3^{1/2})^2/2}\, d\bar{x}\, d\bar{z} =$$

$$= (4\,\pi\,)^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2} w}^{0} \phi(v)\;\; \Phi(3^{1/2}\; w/2 - v/2^{1/2})\; dv.$$

Luego se tiene el Lema.

Lema A11

$$H_5^*(w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} h^*(x,y,0)\; dx\; dy \;=\; (4\,\pi\,)^{-1/2}\; \Phi_C((2/3)^{1/2}\, w\,,0) \quad ,$$

$$\text{donde} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración :

Como

$$h^*(x,y,0) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \quad e^{-(3x^2/4 \,+\, xy \,+\, y^2)/2} \;,$$

se tiene

$$H_5^*(w) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{0} e^{-(3x^2/4 \,+\, xy \,+\, y^2)/2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{3^{1/2}}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{(2/3)^{1/2} w} \int_{-\infty}^{0} e^{-3(\bar{u}^2 \,+\, 2\bar{u}\bar{y}/3^{1/2} \,+\, \bar{y}^2)/4}\, d\bar{u}\, d\bar{y} =$$

$$= (4\,\pi)^{-1/2}\, \Phi_C((2/3)^{1/2}\, w\,, 0)\ ,$$

donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} & 1 \end{pmatrix}$.

De esta manera se tiene el Lema.

<u>Lema A12</u>

$$H_6^*(w) = \int_{w}^{0} \int_{-\infty}^{w-y} h^*(x,y,0)\, dx\, dy =$$

$$= (4\,\pi)^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2} w}^{0} \Phi(3^{1/2}\, w/2 \,-\, u/(2\,2^{1/2}))\ \phi(u)\, du\ .$$

<u>Demostración:</u>

Se tiene

$$H_6^*(w) = \int_{w}^{0} \int_{-\infty}^{w} h^*(\bar{x}-\bar{y},\bar{y},0)\, d\bar{x}\, d\bar{y}.$$

Además

$$h^*(\bar{x}-\bar{y},\bar{y},0) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \; e^{-(3(\bar{x}\,-\,\bar{y}/3)^2/8\,-\,\bar{y}^2/3)} \; .$$

Luego,

$$H_6^*(w) = \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_w^0 \int_{-\infty}^{w} e^{-\bar{y}^2/3}\, e^{-3(\bar{x}\,-\,\bar{y}/3)^2/8}\, d\bar{x}\, d\bar{y} =$$

$$= (4\,\pi)^{-1/2} \int_{(2/3)^{1/2}\,w}^{0} \phi(v)\; \Phi(3^{1/2}\,w/2\;-\;v/(2\,2^{1/2}))\; dv \; .$$

Luego se tiene el Lema.

<u>Lema A13</u>

$$H_7^*(w) = \int_w^0 \int_{w-y}^0 h^*(w\text{-}y\text{-}z,y,z)\; dz\; dy =$$

$$= w\,(4\,\pi)^{-1/2}\; e^{-w^2/4} \int_0^{1/2^{1/2}} \phi(w\,\bar{u})\;\; (2\,\Phi(w\,(1/2\;-\;\bar{u}/2^{1/2}))\;-\;1)\; d\bar{u} \; .$$

<u>Demostración</u>:

Se tiene

$$h^*(w\text{-}y\text{-}z,y,z) =$$

$$= \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \; e^{-w^2(3/4\;-\;y/(2\,w)\;+\;3\,(y/w)^2/4\;-\,z/w\,+\,(z/w)^2\,+\,yz/w^2)/2} \; .$$

Luego, -

$H_7^*(w) =$

$$= \frac{1}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_w^0 \int_{w-y}^0 e^{-w^2(3/4-y/(2w)\,+\,3(y/w)^2/4\,-\,z/w\,+\,(z/w)^2\,+\,yz/w^2)/2}$$

$$x\ dz =$$

$$= \frac{w^2}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_0^1 \int_0^{1-\bar{y}} e^{-w^2(3/4\,-\,\bar{y}/2\,+\,3\bar{y}^2/4\,-\,\bar{z}\,+\,\bar{z}^2\,+\,\bar{y}\bar{z})/2}\, d\bar{z} \quad .$$

Por otra parte

$$e^{-w^2(3/4\,-\,\bar{y}/2\,+\,3\bar{y}^2/4\,-\,\bar{z}\,+\,\bar{z}^2\,+\,\bar{y}\bar{z})/2} =$$

$$= e^{-w^2(3/4\,+\,(\bar{z}\,+\,\bar{y}/2)^2\,+\,\bar{y}^2/2\,-\,(\bar{z}\,+\,\bar{y}/2))/2} \quad .$$

De esta manera

$$H_7^*(w) = \frac{w^2}{2\,(2\,\pi)^{3/2}} \int_0^1 \int_0^{1-\bar{y}} e^{-w^2\bar{y}^2/4}\, e^{-w^2(3/4\,+\,(\bar{z}\,+\,\bar{y}/2)^2\,-\,(\bar{z}\,+\,\bar{y}/2))/2}$$

$$x\ d\bar{z}\ d\bar{y} =$$

$$= w(4\,\pi)^{-1/2}\, e^{-w^2/4} \int_0^{1/2^{1/2}} \phi(w\,\bar{u})\ \ (2\,\Phi(w(1/2\,-\,\bar{u}/2^{1/2}))\,-\,1)\, d\bar{u} \ .$$

Luego se tiene el Lema.

N. E. Genetti

REFERENCIAS

Friedman, M. (1937). "The use of ranks to avoid of Normality implicit in the analysis of variance". Journal of the American Statistical Association, 32 : 675-698.

Hodges, J.L. Jr., and Lehmann, E.L. (1962). "Rank methods for combinations of independent experiments in the analysis of variance". Annals of Mathematical Statistics, 33 : 482-497.

Lehmann, E.L. (1975). Nonparametrics-Statistical Methods Based on Ranks. San Francisco : Holden-Day, Inc.

Mehra, K.L. and Sarangi, J. (1967). "Asymptotic efficiency of certain rank tests for comparative experiments". Annals of Mathematical Statistics, 38 : 90-107.

Puri, M.L. and Sen, P.K. (1971). Nonparametric Methods in Multivariate Analysis. New York : John Wiley and Sons.

Quade, D. (1972). "Analyzing randomized blocks by weighted rankings". Report SW 18/72, Mathematical Center, Amsterdam.

Quade, D. (1979). "Using weighted rankings in the analysis of complete blocks with additive block effects". Journal of the American Statistical Association, 69 : 368-373.

Silva, C. (1977). "Analysis of randomized blocks designs based on weighted rankings". Mimeo Series N°1137, Institute of Statistics, Chapell Hill, N.C.

Silva, C. (1981). "Aplicación de Rangos Ponderedados al Análisis de Bloques Aleatorizados : Distribuciones asintóticas". Journal of the Inter-American Statistical Institute, 124, 25-35.

Yohai, V. (1981). "A Nonparametric Test for a Complete Randomized Blocks layout with Three Treatments". Presentado en la Primera Conferencia Latinoamericana de Estadística y Probabilidades de la Sociedad Bernoulli de Estadística y Probabilidad- Caracas.