# Argentina: Valuación del Cupón Atado al PBI mediante un análisis probabilístico

**Javier Okseniuk** [1]
joksenuik@cefargentina.org

Mayo 2005

***Resumen***

Se lleva a cabo una valuación del cupón atado al PBI del reciente canje de deuda pública argentina, mediante un análisis meramente probabilístico. Los resultados no dependen de la estructura de mercado sino exclusivamente del comportamiento futuro del producto. La estrategia se basa en "truncar" la distribución gaussiana del crecimiento acumulado del PBI para cada año, de manera que ese crecimiento "no podrá" ser menor a la "tasa necesaria" para ubicarse por arriba del PBI base. Con este procedimiento, el valor del cupón tendría un piso de USD 4-6 centavos para el escenario base dependiendo de la tasa de descuento.

***Abstract***

I analyze a probabilistic valuation of the GDP-linked coupon, originated after the recent Argentinean public debt swap. The valuation exclusively depends on future product performance, rather than on market structure, and is an alternative to Monte Carlo simulations. The strategy is based on "truncating" a Gaussian distribution of cumulative GDP growth for each year, so that such growth "shall not be" lower than the "necessary rate" to be above base GDP. By way of such procedure, the coupon value would have a floor ranging between 4 and 6 dollar cents for the base scenario depending on the discount rate applied.

***Key Words:*** Asset pricing, public debt swap, Brownian motion
***JEL Classification Codes:*** G1

---

[1] Economista del Centro para la Estabilidad Financiera (CEF) y de EconViews. Agradezco los valiosos comentarios de Javier García Fronti, Germán Fermo, Daniel Heymann, Alberto R. Musalem, Miguel Kiguel, Daniel Marx, Máximo Sangiácomo y Fernando Baer. Los puntos de vista expresados en este documento son exclusivos del autor y no necesariamente representan aquellos del CEF. Comentarios pueden hacerse a jokseniuk@cfsargentina.org

## 1. Introducción

La reciente oferta propuesta por el Gobierno argentino para el canje de la deuda actualmente en *default* ha introducido un elemento todavía poco generalizado a nivel internacional. Se trata de un cupón que se adicionará a las tres clases de bonos que se emitan para reemplazar la vieja deuda. En líneas generales, este cupón tendrá como objetivo, en primer lugar, agregar valor a la oferta de manera de acercar posiciones con los acreedores para que estos la acepten, al menos en un gran porcentaje. En segundo lugar, este cupón otorgaría cierta flexibilidad al Gobierno, aunque no completa, al ajustar los pagos de servicios de la nueva deuda a la capacidad de pago del Tesoro Nacional porque el cupón tendrá mayor valor si a la economía le va bien –y el Tesoro recauda más-, y tendrá valor nulo si la economía evoluciona modestamente o mal.

En este segundo punto, debemos decir que la flexibilidad que otorga este nuevo instrumento no es completa debido a una serie de cuestiones que no abordaremos en detalle en este trabajo. Por sólo mencionar algunas: i) el hecho de que exista una "asimetría" en los pagos debido a que los intereses de la nueva deuda serán más altos cuando la economía evoluciona bien (porque se agregará el pago del cupón atado al PBI) pero no menores cuando le va mal (porque este cupón no adquiere valores negativos); ii) que no esté garantizada la capacidad de pago del Tesoro a partir de una buena evolución del PBI debido a la incertidumbre sobre la elasticidad de la recaudación tributaria con respecto al producto y sobre la evolución del gasto público; y iii) que la participación de esta nueva deuda en el total de la deuda pública sea sólo de la mitad. Todo esto genera alguna divergencia entre los pagos de servicios y la real capacidad de pago del Gobierno. Excelentes estudios sobre estos temas y, en particular, sobre ventajas y desventajas de diferentes alternativas de indexación de la deuda pueden encontrarse en Borensztein y Mauro (2004), Heymann y Ramos (2003), Rodríguez y Fernández (2004) y Econviews (mayo 2004). A pesar de estos problemas, tenemos que resaltar que la incorporación del cupón atado al PBI en la reciente oferta permitirá otorgarle a la deuda pública argentina cierto aspecto de "contingente", colocando al inversor de deuda en una posición más cercana al inversor en *equity*, evitando en el futuro elevados costos de transacción en estados de naturaleza malos, y, en última instancia, mejorando la sostenibilidad de la deuda.

Sin embargo, y en relación con el primer objetivo enunciado anteriormente, muchas diferencias aparecen a la hora de valuar este cupón: algunos analistas coinciden que su valor no es despreciable mientras que otras opiniones "del mercado" aseguran no estar considerándolo cuando estudian la oferta del gobierno por su casi despreciable valor. En este sentido, no son pocas las voces que se pronuncian a favor de reemplazar el cupón (valioso pero que no es considerado valioso) por un pago en efectivo o tasas de interés más altas en los bonos otorgados en canje. El Gobierno estaría poniendo mucho en juego, dicen, pero no estaría mejorando los incentivos a entrar al canje, con lo que la estrategia óptima sería sacar el cupón atado al PBI y poner a cambio mayores pagos presentes o futuros "ciertos", que acoten las diferencias de valuación. Incluso esos pagos podrían ser menores en valor presente que el valor "real" esperado del cupón atado al PBI (dado el crecimiento esperado del PBI), y así todos ganarían más: el gobierno por pagar menos en el escenario más probable, y los inversores porque para ellos el cupón tendría valor casi nulo. Sin embargo, de lo que se trata es intentar generar nuevos instrumentos que sean realmente "contingentes" y le otorguen al Tesoro cierta flexibilidad en el futuro adecuando el monto de las erogaciones a su capacidad de pago. Es por eso que el Gobierno no tendría que contentarse si reemplaza el instrumento flexible (y caro) por otro no flexible (y barato). El precio de la prima de esta especie de "seguro" que estaría comprando el gobierno indudablemente tendrá que ser positivo; y ciertamente, si el mercado continúa siendo reticente al cupón lo mejor sería reemplazarlo. Pero si el gobierno realmente desea adquirir ese "seguro", será óptimo hacer esfuerzos en enseñarlo correctamente de manera de venderlo como un instrumento valioso.

Muchos intentos se han hecho para valuar correctamente este cupón atado al PBI. La mayoría se ha avocado a realizar simulaciones de Monte Carlo cuyos resultados, si bien pueden ser correctos, no presentan la rigurosidad ni la sencillez de un enfoque analítico, en caso de que realmente pueda llevarse a cabo dicho enfoque. Al mismo tiempo, la "asimetría" del cupón, es decir, el hecho de que pague sumas positivas en estados buenos pero no pague en estados malos, lo convierten en un instrumento similar a un *call option*, debido a que las pérdidas estarán acotadas en cada uno de los años subsiguientes. Es por esa razón que algunos analistas han utilizado las ecuaciones de Black-Scholes para valuar el cupón. Sin embargo, la validez de estas ecuaciones depende críticamente de la presencia de mercados completos y ausencia de posibilidades de arbitraje. En el caso extremo, el crecimiento esperado del PBI (*drift*) no importaría a la hora de valuar el cupón.

Considerando estos supuestos poco adecuados para analizar un instrumento nuevo de un país emergente todavía en estado de *default*, intentaré en este trabajo un procedimiento diferente para valuar el cupón atado al PBI. Será un análisis puramente "probabilístico" que no dependerá de la estructura del mercado sino exclusivamente del comportamiento futuro del producto. Será una alternativa a los experimentos de Monte Carlo que permitirá manejar más fácilmente los cambios de parámetros y cuyos resultados, en última instancia, debieran coincidir con los de estas simulaciones. Veremos más adelante que si el PBI real crece anualmente 3% o más (en promedio) en los próximos treinta años, el valor del cupón tendrá un piso de 4 a 6 centavos de dólar dependiendo de la tasa de descuento utilizada. Al mismo tiempo, el cupón tendrá un valor exponencialmente mayor a medida que mejoran las expectativas sobre el crecimiento futuro del producto. Esto tendrá relevancia si se considera la existencia de incertidumbre sobre el verdadero valor del crecimiento futuro: aunque las estimaciones subjetivas sobre este valor sean "insesgadas", la asignación de probabilidades no nulas a otros valores del parámetro, junto con la presencia de un crecimiento exponencial en el valor del cupón, podrían elevar dicho valor, dependiendo de la distribución subjetiva de probabilidades utilizada.

El trabajo continúa de la siguiente manera. En el apartado 2 se describe brevemente el funcionamiento del cupón atado al PBI establecido por el gobierno argentino en la reciente oferta de canje de deuda pública. Allí se explica la "asimetría" en los pagos y su implicancia sobre la distribución de probabilidad y sobre el valor esperado de los mismos. En el tercer apartado se define el proceso estocástico que rige la dinámica del PBI, se formaliza la distribución de probabilidad de los pagos teniendo en cuenta la asimetría de los mismos, y se obtiene el valor del cupón atado al PBI para el escenario base. La sensibilidad a diferentes tasas de crecimiento real y distintas volatilidades se muestra en el apartado 4, donde también se sugiere que una difusa "especificación del modelo", o lo que es lo mismo, que la existencia de incertidumbre sobre el verdadero valor de la tasa de crecimiento futura del PBI puede afectar el valor del cupón. También se discute la utilización de una tasa de descuento apropiada. En el apartado 5 se analizan posibles deficiencias y problemas para la valuación del cupón si se utilizan las ecuaciones de Black-Scholes. El sexto apartado concluye.

## 2. El cupón atado al PBI - La oferta del Gobierno

La reciente oferta del gobierno argentino para el canje de deuda pública añadió un instrumento relativamente novedoso, el cupón atado al PBI, que pagará anualmente una suma no nula si se cumplen tres condiciones:

- El PBI real de cada año deberá ser superior al PBI base de ese mismo año.
- La tasa de crecimiento real del PBI en un año particular deberá ser mayor a la tasa de crecimiento real del PBI base de ese año. Esta última comienza siendo de 4,26% anual en el 2005, para luego descender gradualmente hasta 3,0% anual, nivel que se alcanza en el año 2015 y se mantiene constante de ahí en adelante.
- El total de pagos efectuados por este instrumento no podrá superar el 48% del valor nominal de la deuda elegible (aproximadamente USD 40.000 millones).

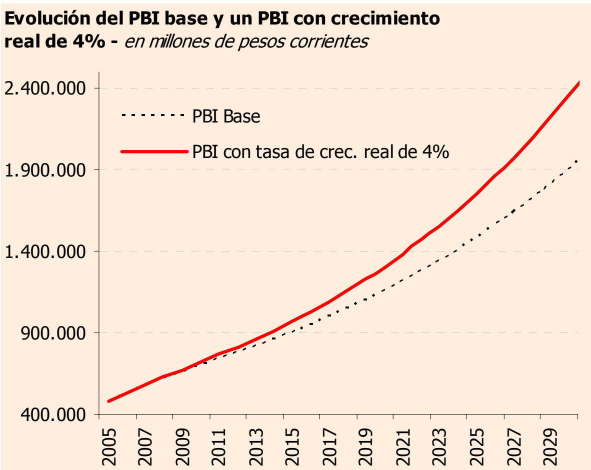
El cupón pagará el 5% de la diferencia entre el PBI efectivo y el PBI base (ambos convertidos a pesos corrientes) si se cumplen esas tres condiciones. Como se enunció, el PBI base será aquel nivel de producto cuyo crecimiento real corresponda con el vector

$$b = [4{,}26\%; 3{,}55\%; 3{,}42\%; 3{,}30\%; 3{,}29\%; 3{,}26\%; 3{,}26\%; 3{,}26\%; 3{,}22\%; 3{,}03\%; 3{,}00\%; 3{,}00\%; ....]$$

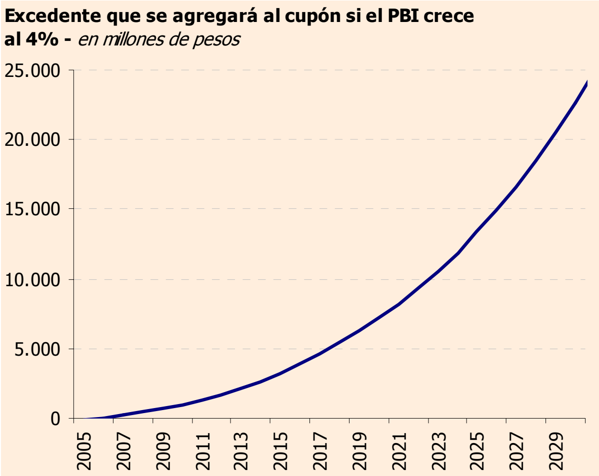
donde cada elemento del vector corresponde a la tasa de crecimiento de cada año comenzando por el 2005. A partir del año 2015, el PBI base tendrá un crecimiento constante de 3% anual mientras el cupón atado al PBI permanezca vigente. Por lo tanto, el PBI base evolucionará de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$PBI_{t+1}^{Base} = PBI_{t}^{Base} \cdot (1 + b_{t+1})$$

A modo de ejemplo, en el siguiente gráfico se muestra la evolución del PBI base y de un PBI que tiene un crecimiento real de 4% anual desde el 2005 en adelante:




Si el PBI creciera en el futuro a una tasa de 4% constantemente, el 5% de la diferencia entre la línea roja y la negra punteada se pagaría anualmente hasta el año 2035. Lo que se observa en primera instancia es que, con una tasa de crecimiento mayor a la del PBI base, la diferencia se amplía a lo largo de los años con lo que los pagos serían cada vez mayores (hasta que se alcance el techo establecido en el prospecto). La forma geométrica de los pagos puede apreciarse claramente en el siguiente gráfico:




Al contrario, si la línea roja pasara por debajo de la negra punteada, o si el crecimiento real en un año en particular fuera menor al correspondiente al PBI base de ese año, ningún pago adicional a los nuevos bonos surgidos del canje se haría en ese año.

Resumiendo, los pagos que se irán efectivizando en el futuro dependerán de la diferencia entre el PBI corriente y el PBI base (primera condición) y del hecho de que en cada año la tasa de crecimiento real sea mayor a $b_t$, el crecimiento del PBI base (segunda condición)[2]. Entonces, la función de pagos sería la siguiente:

$$Pago_{t+1} = Max\left\{\left(PBI_t - PBI_t^{Base}\right).IP_t . 5\% \; ; 0\right\} \cdot I\left(g_t > b_t\right)$$

donde PBI es el producto real, IP es el índice de precios o deflactor del PBI, I es la función indicador que toma un valor de 1 en caso de que se cumpla la desigualdad y 0 en caso contrario, $g_t$ la tasa de crecimiento real efectiva del año t, y $b_t$ la tasa de crecimiento del PBI base en el año t. Vale mencionar que los pagos de cada año se calculan en base al PBI nominal en pesos del año anterior.

Si los pagos se hicieran en dólares, como sucederá con todos los cupones atados al PBI correspondientes a los títulos nuevos en dólares adjudicados en canje, el tipo de cambio real (y nominal) será relevante. En este caso, la función de pagos será la siguiente:

$$Pago_{t+1} = Max\left\{\frac{\left(PBI_t - PBI_t^{Base}\right).IP_t}{TCN_{t+1}} \cdot 5\% \; ; 0\right\} \cdot I\left(g_t > b_t\right)$$

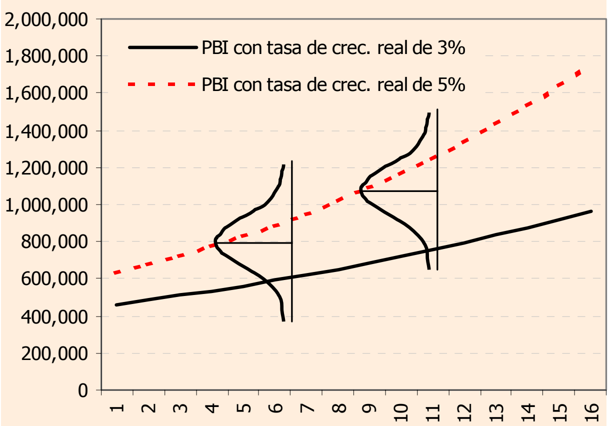
donde TCN es el tipo de cambio nominal. Naturalmente, una depreciación del Peso contra el Dólar afecta negativamente a los pagos en dólares, y lo contrario sucede con una apreciación nominal de la moneda local. También se debe destacar que la conversión a dólares se realiza en base al tipo de cambio nominal del año corriente (fecha de pago), como resulta evidente en la fórmula.

Aparentemente, la valuación de un instrumento de esta índole no debiera ser compleja: lo único que hace falta es estimar lo mejor posible el crecimiento del PBI y el tipo de cambio real para los años siguientes, y aplicar el 5% a la diferencia de este PBI con respecto al PBI base, una vez ajustados por precios y el tipo de cambio. En otras palabras,

[2] Debe destacarse que la probabilidad de que en un año particular la tasa de crecimiento sea mayor a $b_t$ no es independiente del hecho de que el nivel del PBI sea mayor al PBI base. Por este motivo, no podremos multiplicar directamente los pagos anuales del cupón por la probabilidad de que se cumpla la segunda condición. Esto se analizará más detenidamente en el tercer apartado.

lo que hace falta en última instancia es conjeturar cuál será la línea roja para luego compararla con la línea negra punteada del PBI base y así aplicarle el 5% a la diferencia. Si uno piensa que el PBI crecerá a una tasa mayor a $b_t$, el cupón tendrá valor. Por el contrario, si uno piensa que el PBI real crecerá a una tasa igual o menor al $b_t$, el cupón no tendrá valor. Por ejemplo, bajo la expectativa de que el crecimiento del PBI real será igual al del PBI base en los años sucesivos, el cupón no tendrá valor, en un principio, porque si bien existen posibilidades de que en un año el PBI crezca a una tasa mayor, existirán idénticas posibilidades de que el PBI crezca a una tasa menor, si consideramos una distribución de probabilidades simétrica.[3] De este modo, lo único que nos interesará de la distribución de probabilidades del crecimiento del PBI es el momento de orden uno, es decir, la media. La volatilidad no interesaría puesto que crecimientos (y pagos) mayores se compensarían con crecimientos (y pagos) menores.

**Evolución del PBI nominal bajo distintas tasas de crecimiento -** *en millones de dólares*



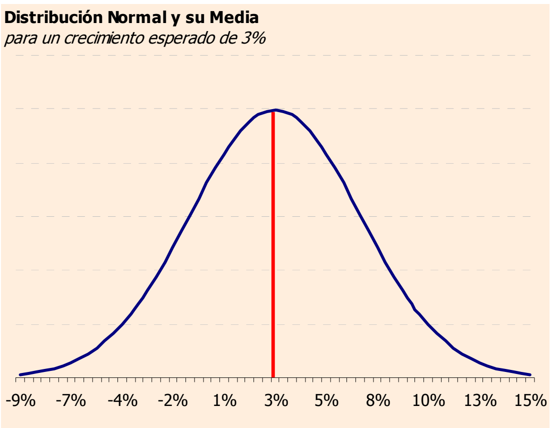

Sin embargo, tal como está diseñado el cupón, no va a existir esta simetría: el cupón pagará sumas positivas en caso de que la economía crezca a tasas mayores a $b_t$ pero no pagará sumas negativas en caso de que lo haga a tasas menores al $b_t$. Intuitivamente, si el PBI real creciera en adelante, *en promedio*, a una tasa igual a la del PBI base, el cupón no tendrá un valor nulo debido a que existirán años en los que la línea roja estará por encima de la negra punteada con lo que en esos años el cupón pagará una suma positiva (si también se efectiviza la segunda condición). Es cierto, existirán años en los que la línea roja pasará por debajo de la línea negra, pero en esos casos el cupón directamente no pagará, y la simetría se perderá. Al mismo tiempo, si mantenemos como mejor estimación una tasa *promedio* de crecimiento igual a la del PBI base, cuanto más volátil sea el crecimiento mayor valor tendrá el cupón, debido a la mayor probabilidad de alcanzar altas tasas de crecimiento (es decir, pagos elevados) que no serán compensados por pagos negativos elevados.

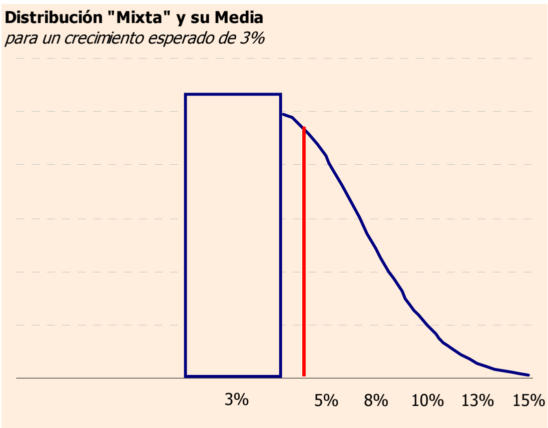
Es por esta razón que al cupón se lo ha valuado razonablemente como si fuera un *call option*. Sin embargo, este método de valuación generalmente reside en supuestos que difícilmente puedan considerarse adecuados para nuestro caso. En concreto, las ecuaciones de Black-Scholes necesitan la presencia de mercados completos y el principio de no-arbitraje, de manera que el crecimiento esperado del activo subyacente es inocuo para la valuación. Dicho de otro modo, bajo el esquema más estandarizado de Black-Scholes, si el crecimiento esperado de la economía es 5%, 3% o 1%, estas diferencias no afectarían el valor del cupón atado al PBI. Salta a la vista que la utilización de estas ecuaciones puede resultar inadecuada para nuestro propósito. Lo que haremos nosotros es seguir con la línea de análisis de probabilidad anterior, pero intentando determinar y cuantificar esa asimetría

[3] Al imponer al PBI un movimiento Browniano geométrico, en este estudio la distribución del crecimiento real del PBI será necesariamente simétrica (porque será una Normal), sin realizar un análisis más profundo de qué función de densidad es la más apropiada en estos casos.

de manera de "corregir" la media del crecimiento de cada año a partir de considerar la asimetría.

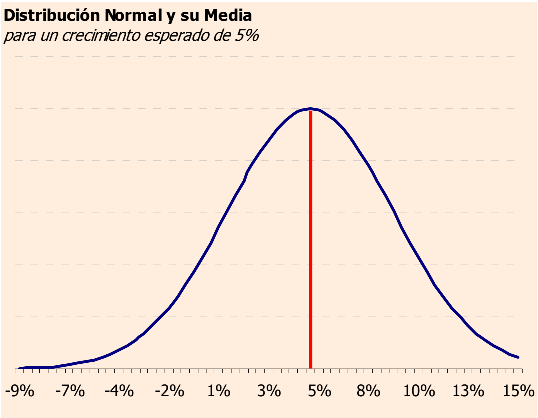
Básicamente, lo que haremos es hallar, a partir del valor esperado del crecimiento para los años siguientes, la esperanza de los pagos del cupón, teniendo en cuenta la asimetría de la distribución. Dos posibilidades surgen: podremos trabajar directamente sobre la distribución de los pagos futuros del cupón o podremos trabajar indirectamente sobre la distribución del crecimiento para luego hallar el pago correspondiente esperado a partir de la distribución "corregida". Ambos caminos son equivalentes pero yo elegiré el segundo porque pienso será más intuitivo. La asimetría, entonces, surgirá de "truncar" la distribución gaussiana del crecimiento acumulado del PBI para cada año de manera que ese crecimiento "no podrá" ser menor a la "tasa necesaria" para ubicarse por arriba del PBI base, es decir, a la tasa de crecimiento acumulada en cada año si anualmente la economía crece a las tasas $b_t$. De esta manera, la distribución continua se transformará en una distribución mixta, con una parte continua y acampanada desde el valor de esa "tasa necesaria" en adelante, y una parte discreta que acumulará la probabilidad de la cola izquierda en un solo valor ("la tasa necesaria"). En los gráficos siguientes se muestra, a modo de ejemplo, cómo se corrige la distribución original para el caso de un crecimiento acumulado esperado de 3% y asumiendo que la "tasa necesaria" es del 3%.

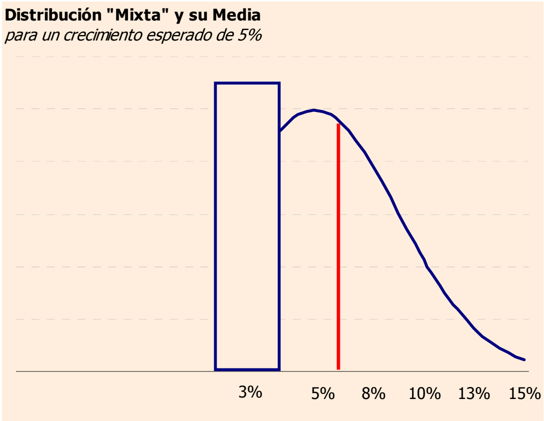


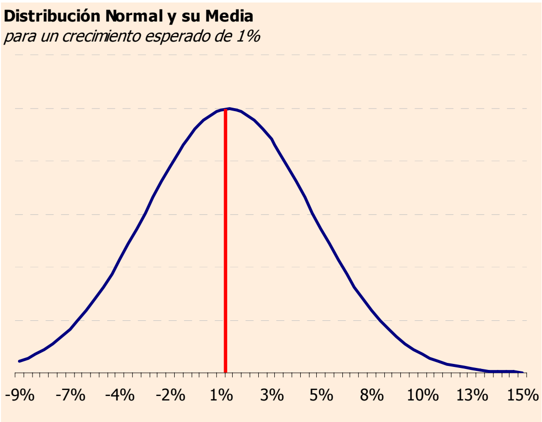

Obviamente, el PBI podrá crecer a una tasa menor al 3%. Sin embargo, con este mecanismo indirecto intentamos trabajar como si ello no fuera posible y así encontrar la nueva Media de la distribución corregida (la cual estará sesgada necesariamente hacia la derecha), para luego hallar el pago correspondiente del cupón a partir de esta nueva Media.

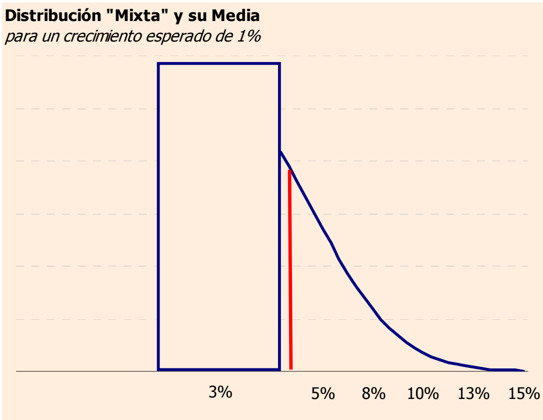
Para mostrar esto más claramente, si el crecimiento acumulado esperado fuera del 5% y la "tasa necesaria" para determinado año fuera del 3%, éstas serían las distribuciones original y corregida:




Del mismo modo, si el crecimiento acumulado esperado fuera del 1%, las distribuciones serían las siguientes:




Claramente, el sesgo será mayor cuanto menor sea la tasa de crecimiento esperada, lo cual resulta muy intuitivo: si mi expectativa de crecimiento es muy alta, la cola izquierda de la distribución hasta el valor de 3% será chica y el sesgo también lo será. Al contrario, si la expectativa de crecimiento es baja la distribución acumulada hasta el 3% será alta, y lo mismo sucederá con el “sesgo” de la media.

En el próximo apartado estudiaremos más formalmente este asunto.

## 3. El proceso estocástico del PBI y el valor del cupón

Podemos asumir que el PBI real sigue un Movimiento Browniano Geométrico, un proceso estocástico que pareciera ser “razonable” para el nivel de actividad de un país. En ese caso, la dinámica del producto estará regida por la siguiente fórmula:

$$d\,PBI_t = \mu\,PBI_t\,dt + \sigma\,PBI_t\,dB_t$$

donde $\mu$ es la tasa geométrica esperada de crecimiento real, $\sigma$ es el desvío alrededor de esa tasa, y $B_t$ es un movimiento browniano estándar. La tasa de variación del producto estaría definida por

$$\frac{d\,PBI_t}{PBI_t} = \mu\,dt + \sigma\,dB_t$$

Independientemente de qué proceso se ajusta mejor a esta variable, bajo este supuesto y por medio del lema de Ito, el cambio del $\ln PBI$ entre el momento 0 y el momento T seguirá una distribución Normal con los siguientes parámetros:

$$\ln \frac{PBI_t^e}{PBI_0} \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma \sqrt{t} \right]$$

o lo que es igual,

$$\ln PBI_t^e \sim \phi \left[ \ln PBI_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma \sqrt{t} \right]$$

donde $PBI_t^e$ es el producto esperado para el momento t, $\mu$ es la tasa geométrica de crecimiento esperado para todos los años, $\sigma$ es el desvío de ese crecimiento y $t$, el tiempo. Para resaltar, la media de la distribución no depende sólo de $\mu$ y de $t$ sino también de la volatilidad del producto, con lo que la *tasa compuesta* del crecimiento será menor cuanto más alta sea la volatilidad, algo bien conocido en la teoría financiera. Entonces, si bien, como adelantamos en el apartado anterior, la volatilidad aumentaría el valor del cupón por la presencia de pagos asimétricos, también existe un efecto que compensa dicho aumento a través de la media de la distribución. Este efecto contrario será más fuerte cuanto menor sea el "sesgo" ocasionado por la asimetría en los pagos.

También debemos recordar la relación entre la tasa geométrica ($\mu$) y la tasa aritmética, que es la que comúnmente se tiene en mente cuando se piensa en tasas de crecimiento y además es la utilizada por el gobierno para el cálculo del PBI base. La relación entre ambas es la siguiente:

$$\mu \equiv \ln(1+g)$$

donde *g* representa a la tasa aritmética. Si trabajamos con logaritmos, las tasas de crecimiento (aritméticas) esperadas para los próximos años debemos transformarlas en tasas geométricas mediante la fórmula anterior. Por ejemplo, si la expectativa de crecimiento anual es de 3% para los próximos años, entonces la tasa geométrica será,

$$\mu \equiv \ln(1+3\%) \cong 2{,}96$$

De igual modo, las tasas de crecimiento del PBI base establecidas por el gobierno tendrán que transformarse a tasas geométricas cuando trabajemos con logaritmos, de manera que

$$\beta_t \equiv \ln(1+b_t)$$

Ahora bien, podemos definir a $m_t$ como la tasa acumulada de crecimiento esperado del PBI real en cada momento t:

$$m_t \equiv \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$$

En otras palabras, el valor esperado del PBI real en cada momento t estará definido por $m_t$. Esto nos va a permitir crear la serie del PBI real esperado a partir de los parámetros elegidos de crecimiento y volatilidad:

$$\ln\left(PBI_t^e\right) = \ln\left(PBI_0\right) + m_t$$

También sabemos que el PBI base evoluciona sin incertidumbre a una tasa anual que desciende gradualmente ($b_t$). Es decir,

$$\ln\left(PBI_t^{Base}\right) = \ln\left(PBI_0\right) + \delta_t$$

definiendo a $\delta_t$ como la tasa acumulada de crecimiento en cada momento t correspondiente al PBI base:

$$\delta_{2005} \equiv \beta_{2005} \equiv \ln\left(1 + b_{2005}\right) \cong 4{,}18\%$$

$$\delta_{2006} \equiv \beta_{2005} + \beta_{2006}$$

$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \end{array}$$

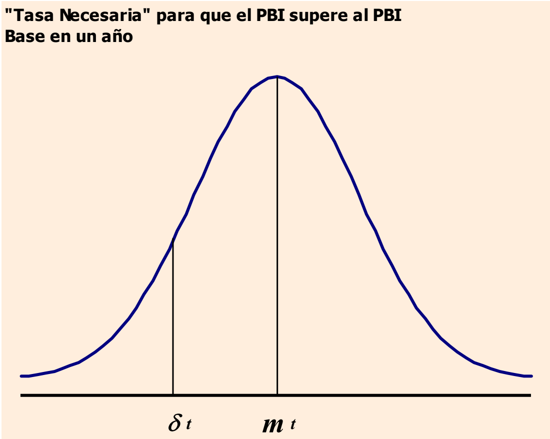
$$\delta_t \equiv \beta_{2005} + \beta_{2006} + \ldots + \beta_t \qquad \text{para t mayor a 2006}$$

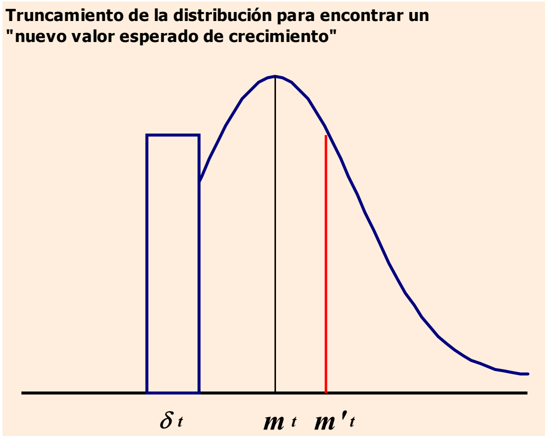
Está claro que $\delta_t$ será la “tasa necesaria” para que el PBI real alcance el nivel del PBI base en cada uno de los años siguientes. Con esa tasa de crecimiento necesaria podremos truncar la distribución de manera de colapsar la cola izquierda de la misma en un solo valor manteniendo el resto de la distribución inalterado. Truncando la distribución normal de esta manera, encontraremos luego la media de esta nueva distribución, y con ella calcularemos el pago esperado del cupón para cada año. Queda claro que para el 2005 esa “tasa necesaria” va a ser el 4,18% (geométrica), puesto que, partiendo del PBI del año 2004, si al año siguiente no se alcanza ese porcentaje el cupón pagará una suma nula. Por el contrario, si el PBI real creciera por arriba del 4,18% el cupón pagará una suma positiva.

Para los años siguientes, la “tasa necesaria” para que el PBI real supere al PBI base será simplemente la tasa acumulada real del PBI base, es decir, $\delta_t$. Resulta intuitivo que dicha tasa estará más a la izquierda en la distribución de probabilidad cuanto mayor sea la tasa de crecimiento acumulada esperada para cada uno de los años.

Entonces, si en determinado año el PBI acumulara desde el año 2004 una tasa mayor a $\delta_t$, el cupón pagará una suma positiva al año siguiente. Si el crecimiento acumulado del PBI no alcanzara esta tasa, el cupón pagará 0. Para estimar el pago esperado del cupón para un año determinado, reitero, podríamos truncar la distribución de probabilidades del crecimiento acumulado del PBI para cada año, de manera de colapsar la cola izquierda de la distribución en el nivel correspondiente a la “tasa necesaria” de crecimiento[4]. De este modo, encontraremos un nuevo “valor esperado” de la tasa de crecimiento acumulada del PBI que permitirá calcular un PBI “hipotético”, el cual a su vez será el utilizado para compararlo con el PBI base y aplicar el 5% a la diferencia entre ambos (después de ajustarlos por la inflación esperada y el tipo de cambio)[5].

[4] Este procedimiento es idéntico a truncar la cola izquierda de la distribución de pagos del cupón en un año determinado en el nivel 0.
[5] El establecimiento de un “techo” en los pagos introduce una nueva dificultad en la valuación que resulta difícil de medir analíticamente. Sin embargo, este techo se alcanzaría con probabilidad significativa recién con tasas promedio de crecimiento altas, como de 3,5% anual o, especialmente, de 4% anual.




No deben quedar dudas con respecto a la distribución original sobre el crecimiento acumulado entre el momento 0 y el momento t: su media es igual a

$$m_t \equiv \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$$

y podemos definir su desvío como $\sigma^*$, de manera que [6]

$$\sigma_t^* \equiv \sigma \sqrt{t}$$

Lo que haremos a continuación, entonces, es calcular el nuevo "valor esperado" de la tasa de crecimiento acumulada (*m'*) para así poder continuar con la valuación. En principio, este valor estará compuesto de dos partes: i) el promedio ponderado de los valores que se encuentran debajo de la curva en forma de campana, ii) el valor de $\delta_t$ multiplicado por su probabilidad, que va a ser igual a la distribución acumulada hasta el valor de $\delta_t$ en el gráfico de la izquierda. La suma de estas dos partes dará como resultado el valor esperado de esta nueva distribución truncada.

El segundo punto es sencillo, porque conocemos el valor de $\delta_t$ y los parámetros asumidos de media y volatilidad (*g* y σ) para estandarizar la distribución. Con respecto al primer punto, el cálculo será similar al cálculo de la esperanza de una distribución normal pero en lugar de hacerlo para el rango [-∞, ∞ ] lo haremos para el intervalo [ $\delta_t$ , ∞ ]. Es decir,

$$\int_{\delta_t}^{\infty} x \, \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_t}{\sigma_t^*}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t^*} dx$$ con $\delta_t$ , $m_t$ y $\sigma_t^*$ definidos anteriormente.

[6] Básicamente, esta fórmula surge de la representación en *random walk* de un movimiento browniano, siendo el resultado del intento de mantener constantes la media y la varianza acumuladas, e independientes de las probabilidades de la distribución binomial asociada, de la distancia Δt, y de la cantidad de períodos hasta el momento t (como referencia véase Dixit y Pindyck (1994), págs. 68-70). Puede apreciarse que este desvío acumulado tiende a infinito con el paso del tiempo, a pesar de que está relativamente "acotado" por la presencia de la raíz cuadrada. Esto podría ser objeto de discusión, aunque generalmente las simulaciones de Monte Carlo para valuar este instrumento están diseñadas bajo un proceso de tipo *random walk*, con lo que tienen la misma varianza. Además, el movimiento browniano es un proceso utilizado comúnmente para la valuación de otros instrumentos financieros. Cuán "realista" es esta volatilidad dependerá, en última instancia, del ajuste de este proceso estocástico a la evolución del nivel de actividad.

Estandarizando, tenemos,

$$\int_{\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}}^{\infty} \left(z\sigma_t^* + m_t\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t^*} dz \quad \text{con } z \equiv \frac{x - m_t}{\sigma_t^*}, \text{ o } x \equiv z\sigma_t^* + m_t \text{, y } dx \equiv \sigma_t^*.dz$$

Esto a su vez es igual a

$$\int_{\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}}^{\infty} \frac{z\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}}^{\infty} \frac{m_t}{\sqrt{2\pi}}.\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$-\frac{\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}}^{\infty} -z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz + m_t \,.\, \Pr\left(z > \frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right) =$$

$$-\frac{\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}}^{\infty} + m_t \,.\, \Pr\left(z > \frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)$$

El segundo término ya da un resultado preciso mientras que el primero tiene como derivación

$$-\frac{\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} \left[ 0 - e^{\frac{-\left(\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)^2}{2}} \right] = \frac{\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)^2}{2}}$$

En suma, la media de esta distribución truncada surge de la suma de los tres términos:

$$m_t' = \delta_t \,.\, \Pr\left(z < \frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right) + m_t \,.\, \Pr\left(z > \frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right) + \frac{\sigma_t^*}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)^2}{2}}$$

Con este valor, entonces, podremos calcular un PBI hipotético que será comparado con el PBI base, y así aplicar el 5% a la diferencia entre ambos (después de ajustarlos por la inflación esperada y el tipo de cambio). Este resultado es lo que mostraremos a continuación. Utilizaremos como punto de partida un PBI real de $275.276 millones para el 2004, a precios de 1993, que es el PBI asumido en el prospecto del canje de deuda. Asumiremos en este primer ejemplo que el crecimiento real esperado para los próximos 30 años es del 3%, con la excepción del año 2005, durante el cual estimaremos que el producto crecerá 6%, y el año 2006, para el cual proyectamos un crecimiento de 4%. También asumiremos en este escenario base que la volatilidad del crecimiento será del 3%. El deflactor de precios del PBI se asume será de 160,6 para el promedio del año 2004. Esto implica una variación del deflactor de 9,3% en relación con el promedio del año 2003.

Si observamos el promedio y la volatilidad del crecimiento real del PBI de los últimos 35 años, notaremos que los mismos son del 1,91% y 5,93%, respectivamente. De este modo, nuestro escenario base estaría contemplando un cambio en las condiciones macroeconómicas con respecto al pasado, con una mayor tasa de crecimiento y una menor volatilidad. Ahora bien, una tasa de crecimiento esperada del 3% puede resultar modesta para un país “emergente”, especialmente si consideramos que el período pasado se caracterizó por la presencia de un no despreciable número de períodos de euforia y de crisis, y si aceptamos la relación inversa entre volatilidad en la tasa de crecimiento y su media. En concreto, las últimas tres décadas se caracterizaron por haber sido testigo, en algunos años, de regímenes cambiarios fijos o regulados, que derivaron, ex-post, en situaciones de apreciación real que terminaron siendo insostenibles. A su vez, fueron años en los que, sin querer englobar en un período, décadas tan diferentes, la prudencia fiscal fue realmente un bien escaso, a la vez que ciertas rigideces surgían de un sistema financiero y un esquema contractual dolarizado. Todo ello hacía a la economía muy vulnerable, endeble frente a *shocks* externos o cambios de expectativas. Luego de la última crisis, la situación fiscal es inéditamente holgada, el régimen de tipo de cambio flexible renueva la relevancia de la política monetaria, y el sistema financiero se ha desdolarizado, al igual que la mayor parte de los contratos privados y públicos. Es por esto que podríamos concluir que las condiciones macroeconómicas, de mantenerse en el futuro, serán únicas en muchas décadas, y la volatilidad en la actividad económica estará acotada a los cambios en el clima de negocios, en el frente interno, y a los vaivenes externos, como términos de intercambio y condiciones de liquidez mundial, que seguramente serán mejor sorteados bajo un esquema flexible como el actual. Es así como justificaré, a pesar de la dificultad para estimar la evolución futura del nivel de actividad en base a alguna teoría del crecimiento, la adopción de una tasa esperada de 3% anual como la más probable, con posibilidades de que sea mayor si se reestablece cierto “clima de negocios” a partir de un canje de deuda exitoso y nuevas entradas de capitales del exterior. De cualquier modo, llevar a cabo una buena estimación de las variables macroeconómicas está lejos de ser el objetivo de este trabajo, y por este motivo se realizarán diferentes análisis de sensibilidad en el siguiente apartado.

Antes de mostrar el resultado del escenario base, diremos que el flujo de fondos que surja deberá ponderarse por la segunda y tercera condiciones para que el pago del cupón se haga efectivo. En relación con la segunda condición, debe tenerse en cuenta la probabilidad de que el PBI real en cada año crezca a una tasa mayor a $b_t$, *dado que el PBI real se encuentra por arriba del PBI base*. Si bien es cierto que la evolución del PBI no depende de la historia del mismo porque el proceso estocástico subyacente (el movimiento browniano) es un proceso de Markov [7], esto no quiere decir que la segunda condición sea independiente de la primera. En otras palabras, no podremos multiplicar el pago hallado hasta el momento por la probabilidad de que $g_t$ sea mayor a $b_t$.[8] Para poner un ejemplo, en el año 2005 la segunda condición es equivalente (está perfectamente correlacionada) a la primer condición: si el PBI de ese año es mayor al PBI base, entonces la tasa de crecimiento real del PBI de ese año será mayor a la correspondiente al PBI base. En ese caso, la segunda condición estará garantizada y el pago estimado correspondiente a ese año (que se hará efectivo en el 2006) tendrá que multiplicarse por 1. Si lo multiplicáramos por la probabilidad de que $g_t$ sea mayor a $b_t$ estaríamos subestimando el valor del cupón. Para los años siguientes, el cálculo de la probabilidad condicional para multiplicar cada pago del flujo de fondos viene dado por:

$$\Pr\left(g_t > b_t \middle| PBI_t > PBI_t^{base}\right) = \frac{\Pr\left(g_t > b_t \cap PBI_t > PBI_t^{base}\right)}{\Pr\left(PBI_t > PBI_t^{base}\right)}$$

[7] Los procesos que cumplen con la propiedad de Markov se caracterizan por el hecho de que la distribución de probabilidad de $x_{t+1}$ (nivel de una variable aleatoria en t+1) depende sólo de $x_t$ y no de lo que haya sucedido con anterioridad a t. Es decir, las tasas de crecimiento de una variable son independientes del nivel de la misma o de tasas de crecimiento anteriores.

[8] Como estamos analizando la probabilidad para cada año en particular, usamos directamente las tasas aritméticas $g_t$ y $b_t$.

donde el numerador muestra la probabilidad conjunta de ambas condiciones. El denominador es simplemente la probabilidad de que el crecimiento acumulado del PBI sea mayor al crecimiento acumulado del PBI base, es decir, de que $x_t$ sea mayor a $\delta_t$, definiendo a $x_t$ como la variable aleatoria correspondiente al crecimiento acumulado del producto (recordemos que su media es $m_t$). Para el numerador tenemos que deducir cuál es la probabilidad de que en determinado año el PBI real se encuentre por encima del PBI base y que en ese año el crecimiento real haya sido mayor a $b_t$. Es fácil advertir que esto será igual a la probabilidad de que el PBI real de t-1 alcance el nivel del PBI base en t-1, por la probabilidad de que el crecimiento anual del PBI en t sea mayor al crecimiento real del PBI base en t. Es decir,

$$\Pr\left(g_t > b_t \cap PBI_t > PBI_t^{base}\right) = \Pr\left(PBI_{t-1} > PBI_{t-1}^{base}\right) \cdot \Pr\left(g_t > b_t\right) = \Pr\left(x_{t-1} > \delta_{t-1}\right) \cdot \Pr\left(g_t > b_t\right)$$

donde la multiplicación de ambas probabilidades surge de la propiedad de Markov del movimiento browniano: la tasa de crecimiento del producto real en t es independiente de lo que haya sucedido con anterioridad a t. Finalmente, tenemos el siguiente resultado:

$$\Pr\left(g_t > b_t \middle| PBI_t > PBI_t^{base}\right) = \frac{\Pr\left(x_{t-1} > \delta_{t-1}\right) \cdot \Pr\left(g_t > b_t\right)}{\Pr\left(x_t > \delta_t\right)} =$$

$$= \frac{\Pr\left(z > \dfrac{\delta_{t-1} - m_{t-1}}{\sigma_{t-1}^*}\right) \cdot \Pr\left(z > \dfrac{b_t - g}{\sigma}\right)}{\Pr\left(z > \dfrac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)} = \frac{\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\delta_{t-1} - m_{t-1}}{\sigma_{t-1}^*}\right)\right] \cdot \left[1 - \Phi\left(\dfrac{b_t - g}{\sigma}\right)\right]}{1 - \Phi\left(\dfrac{\delta_t - m_t}{\sigma_t^*}\right)}$$

donde $\Phi$ denota la función de distribución acumulada de una normal estándar. Notemos que para el año 2005 esta ecuación tiene como resultado 100%, que es lo que intuitivamente habíamos deducido, debido a que en el período anterior la condición de que el PBI real sea mayor (o igual) al PBI base se cumple con certeza, y a que

$$\Pr\left(g_{2005} > b_{2005}\right) = \Pr\left(x_{2005} > \delta_{2005}\right)$$

En relación con la tercera condición la cuestión se complica un poco más, puesto que no sólo interesa el pago de cada momento t sino también los pagos anteriores. Considero que la probabilidad de ocurrencia de esta tercera condición resulta muy difícil de calcular analíticamente de manera precisa. Sin embargo, en el apéndice de este trabajo elaboro una aproximación que encuentro razonable. El resultado de esta aproximación es una variable $\omega_t$, la cual representa la probabilidad de que los pagos acumulados del cupón alcancen, en cada uno de los años, los aproximadamente 40.000 millones de dólares estipulados en la tercera condición, cortando el flujo de pagos en los años siguientes.

De este modo, los pagos anuales correspondientes al cupón atado al PBI resultarán de la siguiente ecuación:

$$Pago_{t+1} = \frac{\left[\exp\left(\ln\left(PBI_0\right) + m_t'\right) - \exp\left(\ln\left(PBI_0\right) + \delta_t\right)\right] \cdot IP_t}{TCN_{t+1}} \cdot 5\% \cdot \Pr\left(g_t > b_t \middle| PBI_t > PBI_t^{base}\right) \cdot \omega_t$$

o lo que es lo mismo,

$$Pago_{t+1} = \frac{\left[\exp\left(\ln\left(PBI_0\right)+m_t'\right)-\exp\left(\ln\left(PBI_0\right)+\delta_t\right)\right]\cdot IP_t}{TCN_{t+1}} \cdot 5\% \cdot \frac{\left[1-\Phi\left(\frac{\delta_{t-1}-m_{t-1}}{\sigma_{t-1}^*}\right)\right]\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{b_t-g}{\sigma}\right)\right]}{1-\Phi\left(\frac{\delta_t-m_t}{\sigma_t^*}\right)} \cdot \omega_t$$

Los resultados del escenario base se muestran a continuación[9]:

**Valor del Cupón Atado al PBI de acuerdo al análisis probabilístico**
*para un crecimiento real de 3% (6% para el 2005 y 4% el 2006) y una volatilidad del crecimiento del 3%*

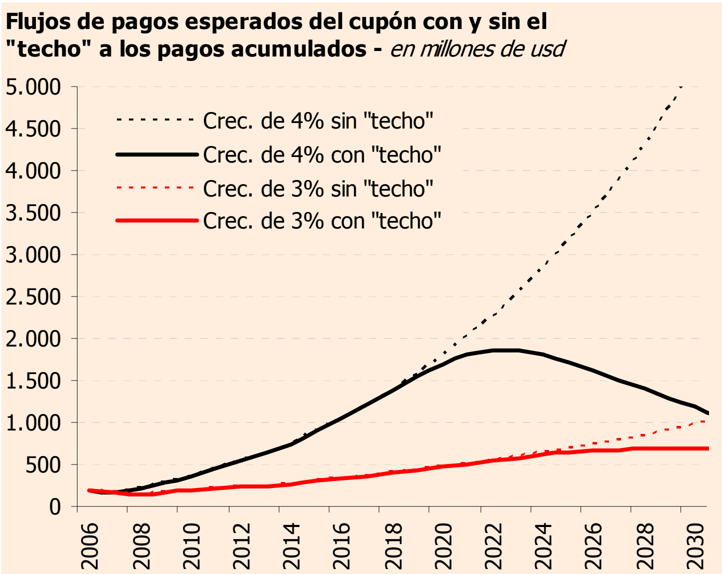
| Año | PBI Base real | PBI Esperado real | Tasa Necesaria | PBI Hipotético real | Inflación Esperada (prom.) | Tipo de Cambio Nominal esp. | Pago del Cupón (5% de la Dif. en t-1) en USD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2004 | 275.276 | 275.276 | 0,0% | 275.276 | 9,3% | 3,02 | |
| 2005 | 287.013 | 291.661 | 4,2% | 293.302 | 7,5% | 3,03 | 0 |
| 2006 | 297.212 | 303.191 | 7,7% | 305.870 | 6,0% | 2,99 | 181 |
| 2007 | 307.369 | 312.147 | 11,0% | 316.524 | 5,0% | 2,92 | 160 |
| 2008 | 317.520 | 321.366 | 14,3% | 327.333 | 4,0% | 2,89 | 149 |
| 2009 | 327.969 | 330.858 | 17,5% | 338.422 | 3,0% | 2,84 | 169 |
| 2010 | 338.676 | 340.631 | 20,7% | 349.788 | 3,0% | 2,78 | 187 |
| 2011 | 349.720 | 350.692 | 23,9% | 361.479 | 2,0% | 2,70 | 211 |
| 2012 | 361.125 | 361.050 | 27,1% | 373.520 | 2,0% | 2,70 | 227 |
| 2013 | 372.754 | 371.714 | 30,3% | 385.848 | 2,0% | 2,70 | 243 |
| 2014 | 384.033 | 382.693 | 33,3% | 398.160 | 2,0% | 2,70 | 263 |
| 2015 | 395.554 | 393.997 | 36,3% | 410.773 | 2,0% | 2,70 | 300 |
| 2016 | 407.421 | 405.634 | 39,2% | 423.751 | 2,0% | 2,70 | 331 |
| 2017 | 419.644 | 417.615 | 42,2% | 437.107 | 2,0% | 2,70 | 362 |
| 2018 | 432.233 | 429.950 | 45,1% | 450.856 | 2,0% | 2,70 | 395 |
| 2019 | 445.200 | 442.650 | 48,1% | 465.011 | 2,0% | 2,70 | 429 |
| 2020 | 458.556 | 455.724 | 51,0% | 479.585 | 2,0% | 2,70 | 466 |
| 2021 | 472.313 | 469.184 | 54,0% | 494.593 | 2,0% | 2,70 | 503 |
| 2022 | 486.482 | 483.043 | 56,9% | 510.050 | 2,0% | 2,70 | 540 |
| 2023 | 501.076 | 497.310 | 59,9% | 525.968 | 2,0% | 2,70 | 576 |
| 2024 | 516.109 | 511.999 | 62,9% | 542.365 | 2,0% | 2,70 | 609 |
| 2025 | 531.592 | 527.122 | 65,8% | 559.253 | 2,0% | 2,70 | 637 |
| 2026 | 547.540 | 542.691 | 68,8% | 576.650 | 2,0% | 2,70 | 660 |
| 2027 | 563.966 | 558.720 | 71,7% | 594.571 | 2,0% | 2,70 | 677 |
| 2028 | 580.885 | 575.223 | 74,7% | 613.032 | 2,0% | 2,70 | 689 |
| 2029 | 598.311 | 592.213 | 77,6% | 632.051 | 2,0% | 2,70 | 696 |
| 2030 | 616.261 | 609.705 | 80,6% | 651.644 | 2,0% | 2,70 | 698 |
| 2031 | 634.749 | 627.714 | 83,5% | 671.829 | 2,0% | 2,70 | 697 |
| 2032 | 653.791 | 646.254 | 86,5% | 692.625 | 2,0% | 2,70 | 692 |
| 2033 | 673.405 | 665.342 | 89,5% | 714.051 | 2,0% | 2,70 | 685 |
| 2034 | 693.607 | 684.994 | 92,4% | 736.125 | 2,0% | 2,70 | 676 |
| 2035 | | | | | | | 666 |

| | VAN | VAN* |
|---|---|---|
| 5,0% | $ 5.514 | $ 6,74 |
| 7,5% | $ 3.745 | $ 4,58 |
| 10,0% | $ 2.659 | $ 3,25 |

En la parte inferior se observa el resultado de este análisis a través del Valor Actual Neto (VAN) del flujo de los pagos esperados del cupón para distintas tasas de descuento. Para una deuda nueva de aproximadamente USD 81.800 millones, este VAN implicará una cantidad de centavos de dólar que deberá añadirse al valor estimado de los nuevos bonos Par, Discount y Cuasi-Par. Este valor es el que aparece bajo el nombre VAN*. Vemos que

[9] He asumido también que el tipo de cambio real se aprecia gradualmente hasta alcanzar un valor de 1,60 (base 2001=1) desde el valor de 2,10 correspondiente al año 2004. Al mismo tiempo, la inflación local se asume bajará desde el 7,5% del año 2005 hasta una tasa de 2% en el año 2011, a partir del cual se mantendrá constante. La tasa de inflación de EEUU se asume constante en un valor de 2%. Más adelante veremos los valores del cupón atado al PBI para otras alternativas sobre el tipo de cambio real.

para una tasa de descuento de, por ejemplo, 7,5% el cupón atado al PBI añadirá 4,6 centavos de dólar a los bonos dados en canje. En el siguiente apartado analizaremos más en detalle estos valores y especialmente la tasa de descuento adecuada para descontar este flujo. Por el momento, tal vez sea útil mostrar el impacto de la tercera condición (el "techo" a los pagos acumulados) en flujos de pagos del cupón. Ello se muestra en el siguiente gráfico:




Se observa que esta restricción impacta muy fuertemente en los pagos esperados de los últimos diez años, cuando la tasa de crecimiento promedio esperada es de 4% anual (con volatilidad de 3%). En ese caso, los pagos esperados incluso comienzan a descender a partir del año 2023, cuando la probabilidad de alcanzar el "techo" es lo suficientemente alta. Al contrario, con un crecimiento promedio esperado de 3%, el impacto del "techo" se reduce notablemente debido a que la probabilidad de alcanzarlo es mucho menor.

## 4. Análisis de sensibilidad para distintas tasas de crecimiento, volatilidades y tipo de cambio. La tasa de descuento adecuada.

Después de una crisis tan profunda como la ocurrida en Argentina recientemente, y la elevada volatilidad en las tasas de crecimiento en las últimas décadas, la dificultad para estimar con "algún grado de confianza" la tasa de crecimiento promedio esperada para los próximos 30 años no debiera sorprendernos. Como enuncié anteriormente, la tasa "histórica" fue de aproximadamente 2%, pero difícilmente una buena predicción de esta tasa para el futuro podrá organizarse a partir de una extrapolación del pasado. Una tasa promedio de 3% incluso podrá considerarse modesta si se consideran algunas variables (capacidad ociosa, stock de capital per capita, condiciones macroeconómicas actuales) o si se realizan algunas comparaciones internacionales. Y lo mismo sucede en cuanto a la volatilidad del producto: el cambio "estructural" reciente que significó una mayor flexibilidad en el régimen cambiario y contractual hace poco relevante la utilización de métodos econométricos que utilicen datos pasados para predecir la volatilidad futura. Es por eso que realizar un análisis de sensibilidad en esas variables puede resultar útil para establecer un valor "individual" a partir de valores esperados "subjetivos", o para intuir qué valores espera el mercado en cuanto a crecimiento a partir de ciertos precios del cupón.

Al mismo tiempo, debe resaltarse la crucial importancia de la elección de la tasa de descuento para descontar el flujo esperado de pagos del cupón. En este sentido, el cupón atado al PBI difiere de un bono estándar en el punto que el primero paga sólo si a la economía le va bien, mientras que no paga si a la economía le va medianamente mal. Si tenemos en cuenta que gran parte de la prima que paga un título argentino se debe (además de riesgos asociados al tipo de cambio o a la liquidez) a la probabilidad de que en un año determinado la economía descienda por debajo de un umbral de manera que no podrá hacer los pagos de servicios correspondientes en tiempo y forma (probabilidad de *default*), este riesgo estará ausente (al menos en una gran parte) en el cupón bajo análisis. Más aún, el cupón tiene como objetivo extraer parte del "excedente" del Gobierno en los estados de naturaleza buenos, y este excedente será mayor cuanto mejor sea el desempeño de la economía. Es por eso que el argumento de que la volatilidad del producto argentino (alta ex-ante) tendría que elevar la tasa de descuento empleada es falaz. La volatilidad no sólo no aumenta la probabilidad de *default* (porque el cupón paga 0 en los "estados malos") sino que mejora su valor debido al mayor excedente que puede ser apropiado, *dado el crecimiento esperado*.[10] Dicho esto, queda claro que la tasa de descuento empleada, si no idéntica a la de libre de riesgo, tendrá que ser significativamente menor a la empleada en un bono argentino estándar de la misma moneda.[11]

A continuación, entonces, se exponen diferentes valores del cupón para distintas tasas de crecimiento esperadas y volatilidades de estas tasas de crecimiento. Para una tasa de descuento de 7,5%, tenemos:

**Análisis de Sensibilidad del Cupón Atado al PBI**
*para una tasa de descuento de 7,5%*

| | | crecimiento esperado real del PBI (*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1,0%** | **2,0%** | **2,5%** | **3,0%** | **3,5%** | **4,0%** |
| **Volatilidad** | **1%** | $ 0,3 | $ 0,3 | $ 0,4 | $ 2,0 | $ 8,0 | $ 11,2 |
| | **2%** | $ 0,4 | $ 0,6 | $ 1,2 | $ 3,4 | $ 7,7 | $ 11,1 |
| | **3%** | $ 0,5 | $ 1,1 | $ 2,3 | $ 4,6 | $ 8,0 | $ 11,2 |
| | **4%** | $ 0,9 | $ 1,9 | $ 3,3 | $ 5,5 | $ 8,4 | $ 11,3 |
| | **5%** | $ 1,3 | $ 2,8 | $ 4,3 | $ 6,4 | $ 8,8 | $ 11,4 |
| | **6%** | $ 1,9 | $ 3,7 | $ 5,2 | $ 7,1 | $ 9,3 | $ 11,6 |

(*) 6% en el 2005 y 4% en el 2006

Para nuestro escenario base (3% de crecimiento -excepto para los años 2005 y 2006, con crecimientos anuales esperados de 6% y 4%, respectivamente-, y 3% de volatilidad), el cupón valdría USD 4,6 centavos, como ya adelantamos. Si el crecimiento fuera del 3,5% (manteniendo la volatilidad de 3% y manteniendo las mismas salvedades para los años 2005 y 2006), el mismo le agregaría USD 8,0 centavos a los aproximadamente USD 32 centavos que valen los bonos nuevos Par, Discount y Cuasi-Par. Si el crecimiento esperado fuera 2,5% en promedio, el cupón valdría USD 2,3 centavos. Vemos que, para una misma volatilidad, el valor crece exponencialmente a medida que sube el crecimiento esperado[12]. Por otro lado, puede apreciarse cómo la volatilidad afecta

[10] Como vimos, para altas tasas de crecimiento esperado, la volatilidad afecta negativamente la tasa compuesta de crecimiento, es decir, la pendiente de "largo plazo". Sin pérdida de generalidad, podríamos afirmar que una vez que contemplamos el efecto de la volatilidad sobre la pendiente esperada de crecimiento, el efecto que produce sobre el valor del cupón es positivo.

[11] Como riesgo potencial quedará la posibilidad de que el Gobierno entre en *default* en estados de naturaleza buenos, o la posibilidad de un "riesgo moral" asociado a la sub-declaración de las cifras oficiales de las cuentas nacionales, dos posibilidades que encuentro poco probables, a pesar de la incertidumbre sobre la elasticidad de la recaudación tributaria con respecto al producto y sobre la evolución del gasto público. A su vez, en ausencia de expectativas racionales, existe la posibilidad de que exista incertidumbre acerca del valor esperado del crecimiento. Si bien es cierto que frente a la posibilidad de que el crecimiento esperado sea "menor al esperado", esto debiera reflejarse en una mayor tasa de descuento, al mismo tiempo uno podría, como regla práctica, dejar la tasa de descuento inalterada y pasar a otra columna de crecimiento esperado.

[12] La presencia del "techo" a los pagos acumulados del cupón limita esta forma exponencial para tasas de crecimiento altas.

positivamente al valor del cupón. Sin embargo, a partir de un crecimiento esperado de 4%, la volatilidad, mediante su efecto en la pendiente del producto, llega a afectar negativamente al valor del cupón, posibilidad que ya habíamos conjeturado en el segundo apartado.

Asimismo, es interesante resaltar la presencia de una nueva "asimetría", que nada tiene que ver con las características del pago del cupón, semejantes a una opción de call. La nueva asimetría surge de la posibilidad de *incertidumbre* con respecto al *verdadero valor esperado* de la tasa de crecimiento del PBI real. En efecto, en ausencia de expectativas racionales, el inversor podrá no conocer cabalmente el parámetro correspondiente a la media de la distribución[13]. Tal vez tenga cierta idea de cuál sea esa media, pero seguramente este inversor tendrá a su vez una propia distribución de probabilidades sobre el *verdadero valor de la tasa promedio de crecimiento futuro*.[14] Si este es el caso, podemos ver claramente que esta situación modifica sensiblemente el valor del cupón desde el momento en que el mismo crece exponencialmente (y no linealmente) a medida que aumenta la tasa de crecimiento esperado. A modo de ejemplo, si el inversor asume que el verdadero valor de la tasa de crecimiento será del 3% con un 33% de probabilidad, del 2,5% con otro 33% de probabilidad, y de 3,5% con el último 33% de probabilidad, en ese caso el valor del cupón para este inversor será de 4,9 centavos de dólar (para una volatilidad de 3%). Este número resulta mayor a los 4,6 centavos de la tabla de arriba para una tasa de crecimiento esperada de 3% (con "certeza"). Con una menor incertidumbre sobre el verdadero valor de la media, el valor del cupón se aleja menos del valor de "certeza". Por ejemplo, si el valor de la media será de 3% con un 80% de probabilidad, de 2,5% con un 10% de probabilidad, y de 3,5% con 10% de probabilidad, el valor del cupón sería de 4,7 centavos de dólar. Y así podríamos encontrar infinitas posibilidades. Entonces, si bien es cierto que todo dependerá de la forma que tenga la distribución de probabilidades subjetiva de cada inversor sobre el verdadero valor de la media, lo cierto es que este es un punto que deberá tenerse en cuenta en toda valuación de manera de internalizar esta otra "asimetría".

Dicho esto, observemos la sensibilidad a la tasa de crecimiento y la volatilidad, para una tasa de descuento de 5%:

**Análisis de Sensibilidad del Cupón Atado al PBI**
*para una tasa de descuento de 5%*

| | | crecimiento esperado real del PBI (*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1,0%** | **2,0%** | **2,5%** | **3,0%** | **3,5%** | **4,0%** |
| **Volatilidad** | **1%** | $ 0,3 | $ 0,3 | $ 0,5 | $ 3,0 | $ 12,2 | $ 15,7 |
| | **2%** | $ 0,4 | $ 0,6 | $ 1,5 | $ 5,1 | $ 11,7 | $ 16,1 |
| | **3%** | $ 0,6 | $ 1,4 | $ 3,1 | $ 6,7 | $ 11,9 | $ 16,4 |
| | **4%** | $ 1,0 | $ 2,6 | $ 4,7 | $ 8,1 | $ 12,4 | $ 16,4 |
| | **5%** | $ 1,6 | $ 3,8 | $ 6,0 | $ 9,2 | $ 12,9 | $ 16,5 |
| | **6%** | $ 2,3 | $ 5,0 | $ 7,2 | $ 10,1 | $ 13,3 | $ 16,6 |

(*) 6% en el 2005 y 4% en el 2006

Para una volatilidad de 3%, vemos que el valor del cupón sube a 3,1, 6,7 y 11,9 centavos de dólar, para crecimientos esperados de 2,5%, 3% y 3,5%, respectivamente.

Finalmente, para una tasa de descuento de 10% tenemos:

[13] Para un tratamiento formal del tema véase Hansen y Sargent (2001), von zur Muehlen (2001) y Heymann (1990).

[14] Nótese que este es un problema completamente diferente a la del desvío alrededor de la media. Al mismo tiempo, se debe observar la similitud de este concepto con el del *estimador* de un parámetro.

**Análisis de Sensibilidad del Cupón Atado al PBI**
*para una tasa de descuento de 10%*

| | | crecimiento esperado real del PBI (*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1,0%** | **2,0%** | **2,5%** | **3,0%** | **3,5%** | **4,0%** |
| **Volatilidad** | **1%** | $ 0,3 | $ 0,3 | $ 0,4 | $ 1,4 | $ 5,4 | $ 8,2 |
| | **2%** | $ 0,3 | $ 0,5 | $ 0,9 | $ 2,4 | $ 5,3 | $ 7,9 |
| | **3%** | $ 0,5 | $ 0,9 | $ 1,7 | $ 3,3 | $ 5,5 | $ 7,9 |
| | **4%** | $ 0,8 | $ 1,5 | $ 2,5 | $ 4,0 | $ 5,9 | $ 8,0 |
| | **5%** | $ 1,1 | $ 2,2 | $ 3,2 | $ 4,6 | $ 6,3 | $ 8,1 |
| | **6%** | $ 1,6 | $ 2,8 | $ 3,8 | $ 5,1 | $ 6,7 | $ 8,3 |

(*) 6% en el 2005 y 4% en el 2006

Concluiré este apartado diciendo que, de acuerdo a lo manifestado anteriormente, la tasa de descuento apropiada debería ubicarse cerca de 7,5%.

*Sensibilidad al Tipo de Cambio Real bilateral*

Hemos trabajado hasta el momento bajo la hipótesis de una apreciación real y gradual del tipo de cambio, desde un valor de 2,10 en el año 2004 (base 2001=1) hasta un valor de 1,60 para el año 2011. Dada la inflación supuesta para la economía local y para la economía estadounidense, esto implica un tipo de cambio nominal de 2,70 para dicho año, que se mantendrá constante hasta el último año relevante. Lo que haremos a continuación es obtener distintos valores del instrumento analizado para distintos supuestos sobre el tipo de cambio real, manteniendo los parámetros del año base: 3% de crecimiento real anual y 3% de volatilidad de ese crecimiento. Al respecto, dos observaciones deben hacerse: i) para valuar este instrumento (que es un instrumento en pesos) en pesos constantes, debemos suponer un tipo de cambio real que se deprecia constantemente a la tasa de inflación norteamericana. Esto es así porque, en ese caso, los aumentos de los precios locales se compensarían con el aumento en el tipo de cambio nominal, lo que genera el mismo resultado que una situación en donde precios y tipo de cambio se mantienen constantes.[15] ii) con este análisis de sensibilidad no estamos suponiendo ninguna relación entre el tipo de cambio real y la tasa de crecimiento real del PBI, puesto que no es el objetivo de este trabajo y demandaría un análisis más profundo. De esta manera, evaluaremos los efectos marginales del tipo de cambio real sobre el valor del cupón, manteniendo los parámetros esperados de volatilidad y crecimiento.

Las alternativas que evaluaremos, entonces, son i) un tipo de cambio real que desciende gradualmente hasta 1,60 en el 2011, año a partir del cual se mantiene constante (posibilidad que habíamos considerado en el escenario base), ii) un tipo de cambio real que desciende gradualmente hasta 1,80 en el 2007, año a partir del cual se mantiene constante, y iii) un tipo de cambio real que se mantiene constante en 2,10, valor correspondiente al año 2004. Deliberadamente, dejo afuera la posibilidad de que el tipo de cambio real se deprecie en los próximos años, a pesar de que esta es la situación compatible con una constancia en los precios locales y en el tipo de cambio nominal (de manera de obtener un flujo de fondos en pesos constantes). Esta decisión puede resultar justificable debido a que ya son

[15] Esta metodología para analizar los distintos valores del instrumento bajo diferentes alternativas del tipo de cambio real difiere de una práctica usual en el sector financiero que consiste en elaborar un flujo de fondos directamente en términos reales, es decir, sin considerar la inflación o el tipo de cambio. En ese caso, si se quiere llevar el valor a dólares y se espera que el tipo de cambio real se aprecie en el futuro, la solución es descontar el flujo a una tasa menor que la que correspondería a un flujo en dólares. A mi juicio, esa estrategia le quita claridad a la valuación debido a que es difícil ver a simple vista qué tasa de descuento corresponde a determinado nivel de tipo de cambio real de largo plazo. Además, considero que la metodología empleada en este trabajo resulta más afín al espíritu de ubicar los *valores esperados* de todas las variables en el numerador del flujo de fondos, y dejar para el denominador sólo los *valores inesperados*.

evidentes las presiones hacia una apreciación real, tendencia que considero continuará en el futuro a pesar de una eventual suba en las tasas de interés internacionales o un probable deterioro en los términos de intercambio. Los resultados son los siguientes:

**Valor del Cupón atado al PBI según el Tipo de Cambio Real con crecimiento y volatilidad del escenario base**
*TCR=2,10 en 2004 (base 2001=100)*

| | | Tipo de Cambio Real "de equilibrio" | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **1,6** | **1,8** | **2,1** |
| **Tasa de Descuento** | **5,0%** | $ 6,7 | $ 6,2 | $ 5,5 |
| | **7,5%** | $ 4,6 | $ 4,2 | $ 3,7 |
| | **10,0%** | $ 3,3 | $ 3,0 | $ 2,6 |

Resulta claro que a menor apreciación real menor valor del cupón medido en dólares, como era de esperar. Aunque las diferencias no son tan significativas. Para el caso concreto de una tasa de descuento de 7,5%, el cupón tiene un valor de 4,6 centavos para un TCR de "equilibrio" de 1,6, y de 3,7 centavos si el TCR se mantiene constante.

## 5. Valuación del Cupón según Black-Scholes

La similitud del cupón con un *call option* por la forma de sus pagos (positivos y crecientes si la economía crece a más del 3% -en el mediano plazo-, y nulos si la economía crece por debajo del 3%) hace que las ecuaciones de Black-Scholes parezcan un instrumento adecuado para valuarlo.

Recordemos que las ecuaciones de Black-Scholes para un *call option* son las siguientes:

$$c = PBI_0 \cdot N(d_1) - e^{-rT} \cdot X \cdot N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(PBI_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ,$$

$$d_2 = \frac{\ln(PBI_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

y *N(x)* es la distribución de probabilidad acumulada de una normal estándar. Por su lado, *X* es el precio *strike*, que en nuestro caso va a ser el PBI base correspondiente al año T, y *r* es la tasa libre de riesgo. La volatilidad sigue estando representada por $\sigma$.[16] Bajo este método, el cupón atado al PBI sería una cadena de opciones de compra con vencimientos desde el año 2005 (T=1) hasta el año 2035 (T=31). La suma de estas opciones daría como resultado el valor del cupón.

Debemos tener en cuenta, sin embargo, algunos de los supuestos implícitos en esta metodología que pueden generar problemas para valuar el cupón atado al PBI:

- Mercados Completos

[16] Adviértase la ausencia de cualquier variable correspondiente al crecimiento real del PBI (activo subyacente).

- No hay posibilidades de arbitraje
- Posibilidad de "rebalancear" el portafolio constantemente

En última instancia, la utilización de las ecuaciones de Black-Scholes para valuar el cupón atado al PBI significaría tres cosas:

- Puede armarse un "portafolio" libre de riesgo compuesto por una posición corta en el cupón atado al PBI (el *call option*) y una posición larga en el activo subyacente (el PBI). Al respecto, como no hay ningún activo que replique exactamente al PBI, ese portafolio libre de riesgo no puede armarse.
- Si este portafolio existiera, y si el mismo rindiera más que la tasa libre de riesgo, aparecerían posibilidades de arbitraje que harían descender ese rendimiento hasta igualar la tasa libre de riesgo. Esto es similar a decir que el mercado podrá modificar el "rendimiento" del PBI (el crecimiento real) con compras y ventas.
- Finalmente, el crecimiento del PBI real no importaría en absoluto en la valuación del cupón porque no podrá alejarse demasiado de una combinación algebraica de la tasa libre de riesgo.

Además, con el empleo de estas ecuaciones aparece el problema de la elección de la tasa libre de riesgo; el valor de estas "opciones" es extremadamente sensible a esta tasa, como se puede apreciar en el siguiente cuadro[17]:

**Valor del Cupón atado al PBI según el modelo de Black-Scholes**
*para una volatilidad de 3%*

| Tasa Libre de Riesgo | Valor del Cupón |
|---|---|
| 1% | $ 0,1 |
| 2% | $ 1,4 |
| 3% | $ 15,7 |

Todo esto hace que las fórmulas de Black-Scholes sean poco apropiadas para valuar el cupón atado al PBI.

## 6. Conclusiones

En este estudio se presenta un método de valuación alternativo a las simulaciones de Monte Carlo para el cupón atado al PBI, un nuevo instrumento que surge de la reciente propuesta de canje de deuda del gobierno argentino. La volatilidad del nivel de actividad junto con la asimetría en los pagos del cupón, asimetría que surge de la existencia pagos positivos si la economía evoluciona bien mientras que no paga sumas negativas si evoluciona mal, hacen que se deba modificar la distribución de probabilidad y el valor de la media del crecimiento del producto (y de los pagos del instrumento) para una correcta valuación del cupón. De esta manera, y a modo de ejemplo, si la economía evolucionara (en *promedio* o en *valor esperado*) como el PBI base, el cupón tendrá en realidad un valor no nulo debido a las fluctuaciones alrededor de la media: valores altos del producto con respecto al PBI base originarán pagos positivos que no serán compensados con pagos negativos en aquellos años de valores bajos del producto.

Esta característica de los pagos hace que el cupón se asemeje a una serie de opciones de compra con vencimientos anuales. Sin embargo, la utilización de las

[17] En la tabla no se computa el efecto de la segunda y tercera condición de pago del cupón.

ecuaciones de Black-Scholes para valuar el cupón atado al PBI puede resultar inapropiada debido a una serie de supuestos sobre los cuales se asienta la validez de dichas ecuaciones. Entre ellos, la presencia de mercados completos, la ausencia de posibilidades de arbitraje y la posibilidad de "rebalancear" constantemente un portafolio ficticio, resultan demasiado restrictivos para nuestro propósito. Al mismo tiempo, la imposibilidad de "arbitrar" el PBI y la extrema sensibilidad a la tasa libre de riesgo, incentivan la búsqueda de un método alternativo para valuar el cupón.

La metodología que se expone en este trabajo se basa en un análisis de probabilidad sencillo que no depende de la estructura de mercado. Los valores para el cupón que se encuentran bajo este análisis dependen tanto de la volatilidad del producto como de la tasa de crecimiento esperada, al contrario de lo que sucede bajo el método Black-Scholes, cuyo resultado sólo depende de la volatilidad (además de la tasa libre de riesgo y otros parámetros). El valor del cupón tendría un piso de 4 a 6 centavos de dólar para el escenario base (3% de crecimiento esperado y 3% de volatilidad del crecimiento) dependiendo de la tasa de descuento utilizada. Debido a que el riesgo de este instrumento es menor que el caso de un bono estándar, la tasa de descuento utilizada tendría que ser significativamente menor que la que suele utilizarse para los títulos públicos argentinos.

Por último, la existencia de incertidumbre sobre el verdadero valor de la tasa de crecimiento promedio futura puede afectar el valor del cupón, dependiendo de la distribución de probabilidad subjetiva que cada individuo asigna sobre dicho valor promedio. En particular, como el valor del cupón crece exponencialmente cuando sube la tasa de crecimiento esperado, si la distribución de probabilidad sobre el crecimiento promedio futuro es simétrica y centrada en un valor de 3%, el valor del cupón superará al del escenario base, y será cada vez más alto cuanto mayor sea la incertidumbre sobre el verdadero valor medio de la tasa de crecimiento.

## 7. Referencias


Borensztein, M. y P. Mauro, "The Case for GDP-indexed Bonds", 2004, IMF Policy Discussion Paper.

Dixit A. y R. Pindyck, "Investment Under Uncertainty", 1994, Princeton University Press.

EconViews Nº8, "A Turning Point for Growth and Debt?", mayo 2004

Hansen, L.P. y T. Sargent, "Acknowledging Misspecification in Macroeconomic Theory", 2001, mimeo

Heymann, D., "Decisiones con Conocimiento Limitado: sobre la Posible Inconsistencia de Planes Óptimos", agosto 1990, Revista de Economía, Banco Central del Uruguay

Heymann, D. y A. Ramos, "La Sustentabilidad Macroeconómica a Mediano Plazo", 2003, CEPAL

Rodríguez, C. y M. Fernández, "Una Propuesta para la Reestructuración de la Deuda Pública: Bono-Exportación vs. Bono-PBI", 2004, UCEMA

Von zur Muehlen, P., "Activist vs. Non-Activist Monetary Policy: Optimal Rules Under Extreme Uncertainty", 2001, mimeo

## 8. Apéndice – El “techo” a los pagos acumulados

La tercera condición de pago de la oferta establece un techo a las erogaciones acumuladas, las cuales no podrán superar el 48% de del valor nominal de la deuda elegible. El monto medido en dólares dependerá de la composición de la nueva deuda por monedas y de la evolución del valor de las monedas, pero será aproximadamente de USD 40.000 millones.

Esta condición incorpora una nueva dificultad para la valuación del cupón. De hecho, el resultado analítico preciso del impacto de este “techo” presenta muchos problemas, esencialmente porque la probabilidad de alcanzarlo en determinado año no depende sólo de lo ocurrido en ese año sino también de los anteriores. Por esta razón, a continuación se hará una aproximación “lineal” al asunto que considero razonable y no debiera presentar diferencias significativas con respecto a un cálculo más preciso.

En primer lugar, denominemos $P_t$ a la variable aleatoria que define al pago efectivo del cupón en el año t. Para el año 2006 (t=1), está claro que la probabilidad de que el pago del cupón (de acuerdo a los datos del PBI del año 2005) supere los USD 40.000 millones es prácticamente nula debido a que el PBI tendría que crecer en el 2005 a una tasa exorbitante. Es decir,

$$\Pr(P_1 > 40.000) \cong 0$$

Siguiendo este razonamiento, para el año 2007 (t=2) tenemos dos variables aleatorias, $P_1$ y $P_2$, que deberán sumarse para realizar el cálculo de probabilidad

$$\Pr(P_1 + P_2 > 40.000)$$

Sin embargo, podemos aproximar esto de manera lineal utilizando solamente la variable aleatoria $P_2$. El pago (aleatorio) de t=1 será igual a la diferencia entre el pago en t=2 ($P_2$) y 0, es decir $P_2/2$. En realidad, con este método estaríamos sobreestimando la probabilidad de que se superen los USD 40.000 millones (y por ende, subestimando el valor del cupón) debido a que ya sabemos que los pagos crecen exponencialmente a lo largo del tiempo, con lo que el valor promedio de $P_1$ será ciertamente menor a $P_2/2$. No obstante, la “convexidad” de estos pagos es realmente muy tenue de manera que esta aproximación lineal se presenta como una buena alternativa. Entonces, para el año 2007 la probabilidad relevante sería

$$\Pr\left(\frac{P_2}{2} + P_2 > 40.000\right)$$

De igual modo, para t=3 tenemos

$$\Pr\left(\frac{1}{3}P_3 + \frac{2}{3}P_3 + P_3 > 40.000\right)$$

y para t=4,

$$\Pr\left(\frac{1}{4}P_4 + \frac{2}{4}P_4 + \frac{3}{4}P_4 + P_4 > 40.000\right)$$

Con estos ejemplos, no debiera sorprender a nadie la siguiente generalización para el año t,

$$\Pr\left(0{,}5\,(t+1)P_t > 40.000\right)$$

Antes de continuar, diremos que el crecimiento real del PBI supuesto para los años 2005 y 2006, por cierto elevado, hace que el "piso" de los pagos no sea 0 sino un número que yo aproximo a USD 160 millones. De este modo, la distancia con $P_t$ para los años intermedios no se hará con respecto a 0 sino a 160. Si bien esto último modifica ínfimamente los resultados, la probabilidad relevante quedaría de la siguiente manera

$$\Pr\left(0{,}5\,(t+1)P_t + 0{,}5\,(t-1)160 > 40.000\right)$$

Ahora bien, para que la probabilidad pueda ser multiplicada directamente a los flujos de pagos del cupón obtenidos en el trabajo debemos condicionarla al hecho de que el PBI se encuentre por encima del PBI base, tal cual se hizo para la segunda condición. Si no hiciéramos esto, estaríamos subestimando los pagos (y la probabilidad de que la tercera condición sea restrictiva), debido a la estructura asimétrica de los pagos. Además, lo que nos interesa es la probabilidad de que no se alcance la tercera condición, de manera que el flujo de pagos deberá multiplicarse por

$$1-\frac{\Pr\left(0{,}5\,(t+1)P_t + 0{,}5\,(t-1)160 > 40.000\right)}{\Pr\left(x_t > \delta_t\right)}$$

donde $x_t$ es la variable aleatoria correspondiente al crecimiento acumulado del PBI y $\delta_t$ la tasa de crecimiento acumulado del PBI base. En esta fórmula hemos asumido que el evento correspondiente a la tercera condición está incluido dentro del evento correspondiente a la primera condición (que el PBI sea mayor al PBI base). Por ello, la probabilidad conjunta de ambos eventos es simplemente la probabilidad marginal de la tercera condición.

Para el tratamiento del numerador, y llevarlo a una variable aleatoria con distribución conocida, debemos reemplazar $P_t$ por su definición:

$$P_{t+1} = \frac{\left[\exp\left(\ln\left(PBI_0\right)+x_t\right)-PBI_t^{base}\right]\cdot IP_t}{TCN_{t+1}}\cdot 5\%\cdot\lambda_t$$

donde $\lambda_t$ es la probabilidad condicional correspondiente a la segunda condición. Nótese que la única variable aleatoria es $x_t$, cuya distribución conocemos. Reemplazando $P_{t+1}$ en la probabilidad anterior tenemos,

$$\Pr\left(0{,}5\,(t+1)\frac{\left[\exp\left(\ln\left(PBI_0\right)+x_t\right)-PBI_t^{base}\right]\cdot IP_t}{TCN_{t+1}}\cdot 5\%\cdot\lambda_t > 40.000-0{,}5\,(t-1)160\right)$$

expresión que podemos desarrollar algebraicamente,

$$\Pr\left\{\exp\left(\ln\left(PBI_0\right)+x_t\right) > \frac{\left[40.000-0{,}5\,(t-1)160\right]\cdot TCN_{t+1}}{0{,}5\,(t+1)\cdot IP_t\cdot 5\%\cdot\lambda_t}+PBI_t^{base}\right\}$$

de manera que

$$\Pr\left\{x_t > \ln\left[\left(\frac{\left[40.000-0{,}5\,(t-1)160\right]\cdot TCN_{t+1}}{0{,}5\,(t+1)\cdot IP_t\cdot 5\%\cdot\lambda_t}+PBI_t^{base}\right)\cdot\frac{1}{PBI_0}\right]\right\}$$

Sabiendo que $x_t$ tiene media $m_t$ y desvío $\sigma^*_t$, esta probabilidad será

$$1-\Phi\left\{\ln\left[\left(\frac{[40.000-0{,}5\,(t-1)160]\cdot TCN_{t+1}}{0{,}5\,(t+1)\cdot IP_t\cdot 5\%\cdot\lambda_t}+PBI_t^{base}\right)\cdot\frac{1}{PBI_0}\right]\right\}$$

donde $\Phi$ denota la función de distribución acumulada de una normal estándar. Reemplazando esto en la expresión de más arriba obtenemos la probabilidad que deberá multiplicarse a cada uno de los pagos anuales del cupón, probabilidad que denominaremos $\omega_t$:

$$\omega_t=1-\frac{1-\Phi\left\{\ln\left[\left(\frac{[40.000-0{,}5\,(t-1)160]\cdot TCN_{t+1}}{0{,}5\,(t+1)\cdot IP_t\cdot 5\%\cdot\lambda_t}+PBI_t^{base}\right)\cdot\frac{1}{PBI_0}\right]\right\}}{1-\Phi\left(\frac{\delta_t-m_t}{\sigma_t^*}\right)}$$

Para una mejor ilustración de este resultado, a continuación se muestra la probabilidad de que los pagos acumulados del cupón superen los 40.000 millones de dólares, en cada uno de los años y para distintas tasas esperadas de crecimiento real del PBI, utilizando una volatilidad esperada de 3%:

**Probabilidad de alcanzar el "techo" de aprox. usd 40.000 millones en los pagos acumulados, en cada uno de los años**
*con una volatilidad de 3%*

| Fecha de Pago | tasa de crecimiento real esperada (*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1,0%** | **2,0%** | **2,5%** | **3,0%** | **3,5%** | **4,0%** |
| **2006** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2007** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2008** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2009** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2010** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2011** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2012** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2013** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2014** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2015** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2016** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2017** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2018** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **2019** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 2% |
| **2020** | 0% | 0% | 0% | 0% | 1% | 5% |
| **2021** | 0% | 0% | 0% | 0% | 2% | 11% |
| **2022** | 0% | 0% | 0% | 1% | 5% | 18% |
| **2023** | 0% | 0% | 0% | 2% | 9% | 27% |
| **2024** | 0% | 0% | 1% | 4% | 15% | 36% |
| **2025** | 0% | 0% | 1% | 7% | 21% | 45% |
| **2026** | 0% | 0% | 3% | 10% | 27% | 54% |
| **2027** | 0% | 1% | 4% | 14% | 34% | 61% |
| **2028** | 0% | 1% | 6% | 18% | 41% | 67% |
| **2029** | 0% | 2% | 9% | 23% | 47% | 73% |
| **2030** | 0% | 4% | 11% | 28% | 52% | 77% |
| **2031** | 0% | 5% | 14% | 33% | 58% | 81% |
| **2032** | 1% | 7% | 18% | 37% | 62% | 84% |
| **2033** | 1% | 9% | 21% | 42% | 67% | 87% |
| **2034** | 1% | 11% | 25% | 46% | 70% | 89% |
| **2035** | 2% | 14% | 29% | 50% | 74% | 91% |

(*) 6% para el 2005 y 4% para el 2006

Como era de esperar, la probabilidad de alcanzar el “techo” sube a medida que pasa el tiempo y a medida que incrementamos la tasa de crecimiento anual esperada del producto.