UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

LA INTEGRACION SOBRE UN CONJUNTO SEMIANALITICO

Miguel E. Herrera

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Año 1965

PROLOGO

Sea M un conjunto analítico complejo de una variedad analítica compleja X. Supongamos que la dimensión (compleja) de M es p; sea M^* la variedad de los puntos regulares de dimensión p de M. Según un resultado de P. Lelong (17), existe una corriente o-continua sobre X que coincide, sobre M^*, con la integración sobre la variedad M^* orientada canónicamente.

El propósito principal del presente trabajo es extender este resultado al caso en que M es un conjunto semianalítico de dimensión p de una variedad analítica real X. Como la parte regular M^* de M no es orientable en general, o si lo es, no es orientable canónicamente, resulta conveniente introducir la homología de M.

En el Capítulo I se resumen las definiciones y propiedades de los conjuntos semianalíticos, de la homología y de las corrientes que se utilizan luego. Los conjuntos semianalíticos han sido introducidos y estudiados por S. Lojasiewicz, quien ha construído una herramienta particularmente adecuada para la teoría: las descomposiciones normales. Estas son descomposiciones locales de los conjuntos semianalíticos. Aunque los conjuntos semianalíticos son triangulables (14), hemos preferido no recurrir directamente a este hecho, en cuanto a homología se refiere, sino usar la homología de Bo-

Borel-Moore (1) . Como consecuencia, las definiciones que se dan en (I, C, 6) de las corrientes de integración sobre una variedad X de clase C^{∞} son formalmente diferentes de las clásicas (cf. p. ej. (17)) , aunque equivalentes.

En el Capítulo II se prueban, utilizando las descomposiciones normales, los dos resultados centrales del trabajo (teoremas A, 2.1 y B, 2.1). Según el primero, existe una corriente de integración sobre M para cada clase de homología con coeficientes reales de M* . El segundo resultado es un teorema de Stokes. Se demuestra que el homomorfismo de conexión $H_p(M^*;R) \longrightarrow H_{p-1}(\partial M;R)$, donde ∂M designa la parte singular de M , es realizado por una operación del análisis, el borde de las corrientes. En realidad, se prueba algo mas general : en ambos teoremas el conjunto ∂M puede reemplazarse por un conjunto semianalítico cualquiera $N \subset M$ (*). Como corolario inmediato, se deduce que las únicas corrientes de integración cerradas sobre M son las correspondientes a clases en $H_p(M;R)$. En particular, la corriente asociada por P. Lelong, que corresponde a una clase fundamental del conjunto analítico complejo M , es cerrada.

En el Capítulo III se definen formas (pares) , corrientes y cadenas (semianalíticas) sobre un conjunto semianalítico M y, gracias a los resultados del Capítulo II , homomorfismos entre los respectivos espacios de homología. La homología semianalítica de M (con coeficientes reales) se identifica con la homología de Borel-Moore de M . En el caso en que M

(*) Esta posibilidad fué sugerida por S. Lojasiewicz.

es una variedad, se obtienen los isomorfismos conocidos como teoremas de De Rham (17) . El estudio de tales homomorfismos en el caso general es un problema abierto. Por último, se definen formas impares sobre M , generalizando las introducidas por De Rham en (17) y se prueba que tales formas pueden integrarse sobre M .

Deseo expresar aquí mi reconocimiento por la dirección, valiosos consejos y críticas recibidas del Prof. R. Ricabarra antes y durante la preparación de este trabajo. Agradezco también al Prof. S. Lojasiewicz por haberme facilitado una copia de su artículo sobre triangulación de conjuntos semianalíticos (14) antes de su publicación, la que me ha sido de gran utilidad, así como por la información y sugestiones que me ha transmitido durante su estadía aquí, en Buenos Aires.

M. H.

Buenos Aires, agosto de 1965.

INDICE

CAPITULO I . INTRODUCCION

A. Conjuntos semianalíticos. 1

B. Homología. 9

C. Corrientes. 24

CAPITULO II . LA INTEGRACION SOBRE UN CONJUNTO SEMIANALITICO.

A. Corrientes de integración. 40

B. Teorema de Stokes. 58

CAPITULO III . DUALIDAD EN UN CONJUNTO SEMIANALITICO.

A. Cadenas semianalíticas. 84

B. Formas y corrientes sobre un conjunto semianalítico. 95

C. Formas impares 106

CAPITULO I. - INTRODUCCION

A. - CONJUNTOS SEMIANALITICOS.

Aquí presentamos un resumen de aquella parte de la teoría de conjuntos semianalíticos que usaremos en este trabajo. Las citas para las definiciones, propiedades y parte de las demostraciones correspondientes son (13), (14), (15) y (16).

1. - Definición de conjunto semianalítico. Sea X una variedad analítica real de dimensión n y, para cada $x \in X$, sea $S(x)$ la menor familia de gérmenes en x de partes de X tal que : 1) a, $b \in S(x)$ implica $a \cup b \in S(x)$ y $a-b \in S(x)$; 2) $S(x)$ contiene todos los gérmenes en x de conjuntos $(f(y) > 0)$, donde f es analítica real en un entorno de x. Entonces se dice que un subconjunto M de X es semianalítico si para todo $x \in X$ el germen de M en x pertenece a $S(x)$.

1.1. - Una unión localmente finita y una intersección finita de conjuntos semianalíticos es semianalítica. El complemento de un conjunto semianalítico es semianalítico. Un subconjunto de una variedad analítica cerrada X' de X es semianalítico en X' si y sólo si lo es en X. La imagen de un conjunto semianalítico por un isomorfismo analítico es semianalítica. La clausura, el interior, y la frontera de un conjunto semianalítico son conjuntos semianalíticos. Un producto cartesiano finito de conjuntos semianalíticos es semianalítico.

1.2.- Sea M un conjunto semianalítico y p un entero > 0. Se dice que $x \in M$ es un punto p-regular de M si existe un entorno abierto U de x tal que $M \cap U$ es una subvariedad analítica de U de dimensión p. Se dice que $x \in M$ es 0-regular si x es un punto aislado de M. El conjunto de los puntos regulares de M (puntos p-regulares para algún p) es denso en M. Se dice que la dimensión $\dim M$ de M es $\leq p$ si no existen puntos q-regulares de M con $q > p$, y se dice que $\dim M = p$ si $\dim M \leq p$ pero no se cumple $\dim M \leq p-1$. Dim M es invariante bajo isomorfismos analíticos.

1.3.- Si M es semianalítico y $\dim M = p$, entonces $\dim M^{-} = p$ y $\dim (M^{-} - M) < p$, donde M^{-} indica la adherencia de M. Además, si M^* es el conjunto de los puntos p-regulares de M, entonces M^* es una subvariedad analítica, en general no cerrada, de dimensión p de X y $\partial M = (M - M^*)$ es un subconjunto semianalítico de X tal que $\dim \partial M \leq p-1$. Llamamos a ∂M la parte singular de M. A su vez, se puede descomponer ∂M en su parte regular y singular, y repitiendo el procedimiento se puede expresar M como unión disjunta de subvariedades analíticas de X de dimensiones estrictamente decrecientes y menores o iguales que $\dim M$. Si U es abierto en X, entonces $M \cap U$ es un conjunto semianalítico en U y $(M \cap U)^* = M^* \cap U$, $\partial(M \cap U) = (\partial M) \cap U$.

La familia de las componentes conexas de un conjunto semianalítico es localmente finita. Un conjunto semianalítico es localmente conexo.

1.4.- Sea M semianalítico en la variedad analítica X y sea $x \in M$; entonces existe un entorno U de x en X tal que $U \cap M$ es un retracto por deformación de U (cf. (13), teor. 16). En particular, todo conjunto semianalítico es un espacio HLC (homológicamente localmente contráctil; cf. (4), lra. edición).

2. - Descomposiciones normales. Indiquemos con R y C los cuerpos real real y complejo, respectivamente. Un polin omio distinguido real $H(x_1 \dots x_k ; x_h)$ en la variable x_h, centrado en el origen de $R^{k+1} = \overbrace{R \times \dots \times R}^{k+1} = ((x ; x_h) : x \in R^k \text{ y } x_h \in R)$, es un polinomio en la variable x_h cuyo coeficiente dominante es 1 y cuyos restantes coeficientes son funciones analíticas reales definidas en un entorno del origen de R^k, nulas en el origen de R^k. Un polnomio distinguido real define un polinomio distinguido complejo (de definición análoga), centrado en el origen de C^{k+1}, que indicaremos $H(z_1 \dots z_k ; z_h)$.

Un sistema normal en R^n centrado en el origen de R^n es una familia $(H_h^k ; 0 \leqslant k < h \leqslant n)$ de polinomios distinguidos reales $H_h^k(x_1 \dots x_k ; x_h)$ en la variable x_h, centrados en el origen de $R^k \times R$, con discriminantes $D_h^k(x_1 \dots x_k)$ no idénticamente nulos, y tal que en algún entorno (complejo) del origen de C^n se verifica :

a) $H_k^{k-1}(z_1 \dots z_{k-1} ; z_k) = H_h^k(z_1 \dots z_k ; z_h) = 0$
implica $H_h^{k-1}(z_1 \dots z_{k-1} ; z_h) = 0.$

b) $D_h^k(z_1 \dots z_k) = 0$ implica $H_k^{k-1}(z_1 \dots z_{k-1} ; z_k) = 0,$
para $0 \leqslant k < h \leqslant n$.

Un entorno $Q = (x = (x_1 \dots, x_n) : |x_i| < d_i , \ i= 1, \dots , n)$ del origen de R^n es normal (respecto del sistema normal mencionado) si los $H_h^k(z_1 \dots z_k ; z_h)$ son holomorfos en $(\, z = (z_1 \ldots z_n) \in C^n : |z_i| \leqslant d_i \,,\ i = 1 \ldots n \,)$, satisfacen a) y b) en este último entorno y cumplen :

c) $|z_i| < d_i$ para $i = 1 \ldots k$ y $H^k_h(z_1 \ldots z_k \,;\, z_h) = 0$ implica $|z_h| < d_h$ para $h > k$,

Los entornos normales son una base de entornos de $0 \in R^n$.

Sea ahora Q un entorno normal respecto del sistema normal H^k_h, $0 \leqslant k < h \leqslant n$. Para cada k , $k = 0, \ldots, n$, sea

$$V^k = (\, x \in Q : H^{n-1}_n = \ldots = H^k_{k+1} = 0 \,,\ H^{k-1}_k \neq 0 \,)$$ (*)

y sean $\Gamma^k_\varkappa$ $(\varkappa = 1 \ldots)$ las componentes conexas de V^k. Entonces existe una partición :

$$Q = \bigcup_0^n V^k = \bigcup_{k=0}^n \bigcup_\varkappa \Gamma^k_\varkappa \,;$$

se llama a esta partición la <u>descomposición normal</u> de Q según el sistema normal dado ; los conjuntos $\Gamma^k_\varkappa$ son los <u>miembros</u> de la descomposición.

Sea X una variedad analítica real de dimensión n y sea $c \in X$. Un sistema normal SN en X centrado en c es un par $(\varphi \,,\, SN_o)$ donde φ es un mapa analítico $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset R^n$, tal que $c \in U \subset M$ y $\varphi(c) = 0 \in R^n$, y donde SN_o es un sistema normal en R^n centrado en el origen de R^n. Un entorno normal de SN es un entorno $Q = \varphi^{-1}(Q_o)$, donde $Q_o \subset \varphi(U)$ es un entorno normal de SN_o . <u>La descomposición normal</u> de Q

(*) Se conviene $H^{-1}_0 = 1$.

según SN es la partición $Q = \bigcup_{k,\varkappa} \varphi^{-1}(\Gamma_{\varkappa}^{k})$, donde los $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ son los miembros de la descomposición normal de Q_0 según SN_0. Finalmente, una descomposición normal en $c \in X$ es la descomposición normal de un entorno normal respecto de un sistema normal en X centrado en c.

2.1. Toda descomposición normal es finita.

2.2. Sea $Q = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma_{\varkappa}^{k}$ una descomposición normal. Cada conjunto $(\bar{\Gamma}_{\varkappa}^{k} - \Gamma_{\varkappa}^{k}) \cap Q$ es unión de algunos Γ_{σ}^{j} con $j < k$; por lo tanto, para cada $k = 1 \ldots n$, $(\bar{V}^{k} - V^{k}) \cap Q \subset \bigcup (V^{i} : i = 0 \ldots k-1)$ y $\bigcup_{0}^{k} V^{i}$ es cerrado en Q.

2.3. Sea $Q = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma^{k}$ una descomposición normal en $0 \in R^{n}$ según un sistema normal $(H_{h}^{k} : 0 \leqslant k < h \leqslant n)$; entonces todo Γ_{j}^{k} con $0 < k < n$ es de la forma:

$$\Gamma_{j}^{k} = (x \in Q : \quad u = (x_1 \ldots x_k) \in \Omega \quad y \quad x_j = f_j(u), \quad j = k+1, \ldots, n),$$

donde Ω es abierto en R^{k}, $0 \in \Omega^{-}$, y las f_j son funciones analíticas sobre Ω tales que $H_{j}^{k}(u; f_j(u)) = 0$ en Ω y $\lim_{u \to 0} f_j(u) = 0$, para cada $j = k+1, \ldots, n$.

2.4. Cada miembro $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ $(0 < k \leqslant n)$ de una descomposición normal en c es una subvariedad analítica de dimensión k de Q; los $\Gamma_{\varkappa}^{n}$ son abiertos de Q y $\Gamma_{\varkappa}^{0}$ es el punto c; $c \in \bar{\Gamma}_{\varkappa}^{k}$ para todo $(k, \varkappa)$.

2.5. Sea $Q = (|x_i| < d_i, \quad i = 1 \ldots n) = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma^{k}$ una descomposición normal según un sistema normal $SN = (H_{h}^{k} : 0 \leqslant k < h \leqslant n)$ en R^{n} centrado en $0 \in R^n$. Sea $0 < p < n$. Entonces $SN_p = (H_h^k : 0 \leqslant k < h \leqslant p)$ es un sistema normal en R^p centrado en $0 \in R^p$ y $Q_p = (|x_i| < d_i$, $i = 1 \dots p)$ es un entorno normal de SN_p. Sea

$$Q_p = \bigcup_{k=0}^{p} {}_pV^k = \bigcup_{k=0}^{p} {}_p\Gamma_{\varkappa}^k$$

la descomposición normal de Q_p según SN_p. Sea $\pi : Q \longrightarrow Q_p$ la proyección $(x_1 \dots x_n) \longrightarrow (x_1 \dots x_p)$. Entonces, para cada $\Gamma_{\varkappa}^k$ con $k \leqslant p$ se tiene $\pi(\Gamma_{\varkappa}^k) = {}_p\Gamma_{\varkappa'}^k$, para algún $\varkappa'$.

2.7. Todo miembro de una descomposición normal en X es semianalítico en X.

3.- Sea X una variedad analítica real, A un subconjunto de X y $c \in X$. Se dice que una descomposición normal $Q = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma_{\varkappa}^k$ en c es compatible con A si y sólo si para cada par $(k, \varkappa)$ se cumple $\Gamma_{\varkappa}^k \subset A$ ó $\Gamma_{\varkappa}^k \subset X-A$.

3.1. Sea X una variedad analítica real, A_i $(i = 1 \dots s)$ una familia finita de conjuntos semianalíticos en X y $c \in X$. Entonces existe una base de entornos normales en c cuyas correspondientes descomposiciones normales son compatibles con cada A_i.

Si $Q = \bigcup (V^p : p = 0 \dots n) = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma_{\varkappa}^k$ es una descomposición normal compatible con el conjunto semianalítico M y $\dim M = p$, entonces $M = M \cap (\bigcup (V^i : i = 0 \dots p))$. Además $\Gamma_{\varkappa}^p \subset M$ implica $\Gamma_{\varkappa}^p \subset M^* = M - \partial M$.

3.2. Sea $O'(R^n)$ el conjunto de los mapas coordenados de R^n inducidos por las bases ortonormales de R^n ; $O'(R^n)$ se identifica con el espacio $O(n, R)$ de las matrices ortogonales de dimensión n y lo consideraremos munido de la topología usual de $O(n, R)$. Sean A_i ($i = 1 \dots s$) conjuntos semianalíticos en un entorno del origen de R^n. Sea $O'(A_1 \dots A_s)$ el subconjunto de $O'(R^n)$ formado por los mapas para los cuales existen descomposiciones normales en $0 \in R^n$ compatibles con $A_1 \dots A_s$. Entonces $O'(A_1 \dots A_s)$ es denso en $O'(R^n)$. Además, los entornos normales correspondientes forman una base de entornos de $0 \in R^n$.

4.- Sean $c_0 \dots c_k$ puntos independientes en un espacio afín Λ . El simple cerrado (abierto) definido por estos puntos es el conjunto $(\sum_0^k t_i c_i : t_i \in R , \sum t_i = 1$ y $t_i \geqslant 0$ $(t_i > 0))$. Para cada complejo simplicial K en un espacio afín Λ , $|K|$ designará al poliedro de K , o sea, al espacio topológico $\bigcup$(simples σ : $\sigma \in K$).

4.1. <u>Teorema de triangulación.</u> Sea X una variedad analítica real conexa, con base numerable de abiertos. Sea B_ν ($\nu = \dots$) una familia localmente finita de conjuntos semianalíticos en X . Entonces existe un complejo simplicial localmente finito K en un espacio afín Λ y un homeomorfismo $T : |K| \longrightarrow X$ de $|K|$ sobre X tal que :

a) para cada simple cerrado $\sigma \in K$ (de dimensión p), $T(\sigma)$ es un conjunto semianalítico de X (de dimensión p) ; si σ es un simple abierto de K , $T(\sigma)$ es una subvariedad analítica de X (de dimensión p)

y $T : \sigma \longrightarrow T(\sigma)$ es un isomorfismo analítico.

b) para todo simple abierto $\sigma \in K$ y todo B_ν , vale $T(\sigma) \subset B_\nu$ ó $T(\sigma) \subset X - B$. (*)

4.2. Corolario. Si los conjuntos B_ν son cerrados, para cada ν existe un subcomplejo K_ν de K tal que la restricción de T sobre $|K_\nu|$ es una triangulación de B_ν .

(*) El enunciado de S. Lojasiewicz es más preciso (cf. (14) ó (15).

B. - HOMOLOGIA.

La teoría de homología que usamos en este trabajo es la definida por Borel-Moore para espacios localmente compactos, tal como ha sido expuesta en (1) y (2). En esta sección se presenta un resumen de resultados de esta homología. También, se dan indicaciones sobre la demostración de ciertas propiedades de la teoría, consecuencias mas o menos inmediatas de las definiciones, que no son explícitamente mencionadas en (1) y (2), y que se utilizarán en los capítulos siguientes. La cohomología que usamos aquí es la definida en (6).

1. - K designa siempre un anillo principal, Z el anillo de los enteros y R el cuerpo de los números reales. Una familia de soportes Φ sobre un espacio topológico X es una familia de cerrados de X tales que, si A y B $\in \Phi$, entonces $A \cup B \in \Phi$, y si $B \in \Phi$ y $A \subset B$ es cerrado, entonces $A \in \Phi$. Todos los espacios topológicos que se consideran son localmente compactos. En general, designamos con c(X) ó c a la familia de los compactos de X.

Sea $\mathcal{G}$ un haz de K-módulos y Φ una familia de soportes sobre el espacio X. $H_i^{\Phi}(X, \mathcal{G})$ y $H_{\Phi}^{i}(X, \mathcal{G})$ designan al i-grupo de homología y cohomología, respectivamente, de X, con coeficientes en $\mathcal{G}$ y con soportes en Φ. Si Φ es la familia de todos los cerrados de X, escribimos directamente $H_i(X, \mathcal{G})$ y $H^i(X, \mathcal{G})$. También, indicamos con K al haz constante XxK.

2. - Para todo entero i, existe una sucesión exacta :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_c^{i+1}(X;K), K) \longrightarrow H_i(X;K) \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Hom}(H_c^i(X;K), K) \longrightarrow 0$$

Si X es localmente conexo, $H_c^0(X;K)$ es libre, y se deduce $H_{-1}(X;K) = 0$. Este es el caso si X es semianalítico.

3. Sea K^* el cuerpo cociente de K y sea $R(K)$ el K-módulo diferencial graduado (de cocadenas) tal que : $R(K)^0 = K^*$, $R(K)^1 = K^*/K$, $R(K)^q = 0$ si $q \neq 0$, y donde $d : R(K)^0 \longrightarrow R(K)^1$ es la proyección natural. $R(K)$ es una resolución inyectiva de K y $H(R(K)) = H^0(R(K)) = K$.

Sea $M = (M^q : q \in Z)$ un K-módulo diferencial graduado cuyo diferencial d tiene grado $+1$. Entonces $D(M) = (D(M)_r : r \in Z)$ denota al K-módulo diferencial graduado tal que (*):

$$D(M)_r : \mathrm{Hom}\,(M^r, K^*) \oplus \mathrm{Hom}\,(M^{r+1}, K^*/K),$$

y que, si $f \in D(M)_r$, entonces

$$d\,f = d \circ f + (-1)^{r+1} f \circ d .$$

Como $R(K)$ es inyectivo, existe una sucesión exacta que descompone:

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H^{q+1}(M), K) \longrightarrow H_q(D(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^q(M), K) \longrightarrow 0 ;$$

además, si $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de K-módulos diferenciales graduados (f y g de grado 0), entonces

(*) cf. (1), 2.5 .

$$(3.2)\qquad 0 \longrightarrow D(M'') \longrightarrow D(M) \longrightarrow D(M') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de K-módulos diferenciales graduados.

4.- Sea $= (\mathcal{A}^q : q \geqslant 0)$ una resolución c-blanda de K sobre el espacio X. Sea $\Gamma_\Phi(\mathcal{A})$ el K-módulo diferencial graduado de las secciones de $\mathcal{A}$ sobre X con soporte en Φ. Entonces se cumple $H_q(D(\Gamma_\Phi(\mathcal{A})))$ $= H_q^\Phi(X;K)$ (cf. (1), 2.7.1 1) y 3.3 (b)) y $H^q(\Gamma_\Phi(\mathcal{A})) = H^q_\Phi(X;K)$ (cf. (6), II, 4.7.1), donde las identificaciones son canónicas. Si se aplica 3.1 a M $= \Gamma_c(\mathcal{A})$, se obtiene la sucesión exacta de 2.

Sea ahora $F \subset X$ un cerrado y $U = X - F$. Tenemos la sucesión exacta :

$$(4.1)\qquad 0 \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{A}|U) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{A}|F) \longrightarrow 0$$

de la que se deduce la sucesión exacta de cohomología con soportes compactos

$$(4.2)\qquad \cdots \longrightarrow H^q_c(U;K) \longrightarrow H^q_c(X;K) \longrightarrow H^q_c(F;K) \longrightarrow H^{q+1}_c(U;K) \longrightarrow \cdots$$

(cf. (6), II.4.10). Como R(K) es inyectivo, de 4.1 se deduce la sucesión exacta

$$(4.3)\qquad 0 \longrightarrow D(\Gamma_c(\mathcal{A}|F)) \longrightarrow D(\Gamma_c(\mathcal{A})) \longrightarrow D(\Gamma_c(\mathcal{A}|U)) \longrightarrow 0 .$$

Considerando la sucesión exacta derivada, obtenemos la sucesión exacta de homología

$$(4.4)\qquad \cdots \longrightarrow H_q(F;K) \xrightarrow{i_{FX}} H_q(X;K) \xrightarrow{j^{XU}} H_q(U;K) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\partial_{UF}} H_{q-1}(F;K) \longrightarrow \cdots$$

correspondiente al par $F \subset X$. (*)

Ahora bien, como 3.1 es natural respecto de los homomorfismos en homología inducidos por 3.2 (homomorfismo de conexión inclusive), de 4.3 se deduce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(H^{q+1}(F)\,,\,K) & \longrightarrow & H_q(F;K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\,(H^q_c(F)\,,\,K) & \longrightarrow & 0 \\
(4.5) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}\,(H^{q+1}(X)\,,\,K) & \longrightarrow & H_q(X;K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\,(H^q_c(X)\,,\,K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

donde todos los grupos de cohomología tienen coeficientes en K y los homomorfismos verticales provienen de 4.2 y 4.4 .

5.- Nuevamente, sea $\mathcal{A}$ una resolución c-blanda de K sobre X. Sean F y Y cerrados de X, y sea $U = X - F$, $V = X - Y$. Como en 4.1, tenemos el diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & \Gamma_c(U\cap V) & \longrightarrow & \Gamma_c(V) & \longrightarrow & \Gamma_c(F\cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(5.1) & 0 \longrightarrow & \Gamma_c(U) & \longrightarrow & \Gamma_c(X) & \longrightarrow & \Gamma_c(F) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & \Gamma_c(U\cap Y) & \longrightarrow & \Gamma_c(Y) & \longrightarrow & \Gamma_c(F\cap Y) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(*)para la deducción de la sucesión exacta correspondiente a una familia de soportes cualesquiera, ver (2), 7.10.

en el que las filas y columnas son exactas. Si, aplicando D, se considera el diagrama dual de 5.1 y luego el correspondiente diagrama en homología, se obtiene la conmutatividad del diagrama

(5.2)
$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "i"] & \vdots \arrow[d, "i"] & \vdots \arrow[d, "i"] & \\
\cdots \arrow[r] & H_q(F) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & H_q(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"] & H_q(U) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(F \cap V) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(V) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & H_q(U \cap V) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(F \cap Y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_q(Y) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & H_{q-1}(U \cap Y) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

en el que todos los grupos de homología tienen coeficientes en K y las filas y columnas son exactas (*).

Sean $B \subset A$ conjuntos cerrados de X. Se demuestra análogamente la conmutatividad del diagrama (*)

(5.3)
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r, "i_{AX}"] & H_q(X) \arrow[r, "j^{X,X-A}"] & H_q(X-A) \arrow[r] & H_{q-1}(A) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] \arrow[u, "i_{BA}"] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[u, leftrightarrow] & H_q(X-B) \arrow[r] \arrow[u, "j^{X-B,X-A}"] & H_{q-1}(B) \arrow[r] \arrow[u, "i_{BA}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

6.- Sea X la unión de una familia localmente finita de subespacios cerrados X_α $(\alpha \in I)$. Entonces existe un homomorfismo

---

(*) el diagrama correspondiente a una familia de soportes cualesquiera de X es también conmutativo; esto se deduce de la demostración de (2), 7.10.

$$\mu_* : \prod_{\alpha \in I} H_*(X_\alpha ; K) \longrightarrow H_*(X ; K)$$

cuya restricción a un número finito de factores X_α $(\alpha \in J \subset I)$ es la suma de los homomorfismos $i_{X_\alpha, X}$ $(\alpha \in J)$. La imagen a por μ_* de un elemento $(a_\alpha : \alpha \in I)$ se llama la suma de los elementos a_α. Si U es abierto en X y no interseca mas que un número finito de X_α, se cumple

$$j^{XU}(a) = \sum_{\alpha \in I} j^{XU} \circ i_{X_\alpha, X}(a_\alpha),$$

donde la suma no contiene mas que finitos términos no nulos (cf. (2), 1.7).

En particular, sea F cerrado en X y $U = X - F = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ con finitas componentes conexas U_α $(\alpha \in J)$. Entonces $\sum_{\alpha \in J} j^{U, U_\alpha} : H_*(U;K) \longrightarrow \sum_{\alpha \in J} H_*(U_\alpha ;K)$ es un isomorfismo y $\sum_{\alpha \in J} i_{U_\alpha, U}$ es el isomorfismo recíproco. Notemos $\partial_\alpha = \partial_{U_\alpha, F}$ $(\alpha \in J)$. Entonces la conmutatividad del diagrama siguiente se deduce de 5.3 :

$$\text{(C.1)} \qquad \begin{tikzcd} H_q(U;K) \arrow[r, "\partial_{UF}"] \arrow[d, "\sum_{\alpha \in J} j^{U, U_\alpha}"'] & H_{q-1}(F) \\ \sum_{\alpha \in J} H_q(U_\alpha ;K) \arrow[ur, "\sum_{\alpha \in J} \partial_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, si $c \in H_q(U;K)$, se tiene $\partial_{UF}(c) = \partial_{UF}(\sum_{\alpha \in J} i_{U_\alpha U} \circ j^{UU_\alpha}(c))$ $= \sum_{\alpha \in J} (\partial_{UF} \circ i_{U_\alpha U}) \circ j_{UU_\alpha}(c) = \sum_{\alpha \in J} \partial_\alpha \circ j^{U, U_\alpha}(c)$.

7.- Sean X e Y espacios topológicos y Φ y Ψ familias de soportes en X e Y, respectivamente; sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua tal que $f(\Phi) \subset \Psi$ y $f|F$ es propia para todo $F \in \Phi$. Entonces f induce un homomorfismo $f_* : H^\Phi_*(X;K) \longrightarrow H^\Psi_*(Y;K)$ que conserva los grados, es transitivo y compatible con la restricción a subespacios abiertos (cf. (2), 1.5).

8.- El haz de homología local (respecto de K) de un espacio X es el haz engendrado por el prehaz $U \longrightarrow H_*(U;K)$, con los homomorfismos $j^{U,V}$ $(V \subset U)$. Se le nota $\mathcal{H}_*(X;K)$. La fibra $\mathcal{H}_*(X;K)_x$ de este haz en $x \in X$ es el grupo de homología local de X en x. Existen homomorfismos naturales (cf. (2), 1.4)

$$
(8.1) \qquad
\begin{array}{ccc}
H^{\Phi}_*(X;K) & \longrightarrow & H^0_{\Phi}(X;\mathcal{H}_*(X;K)) = \Gamma_{\Phi}(\mathcal{H}_*(X;K)) \\
 & \searrow^{\mu_x} & \downarrow \\
 & & \mathcal{H}_*(X;K)_x
\end{array}
$$

Si la dimensión cohomológica (respecto de K) $\dim_K X$ de X es $\leqslant n$, el homomorfismo

$$
(8.2) \qquad \Delta : H^{\Phi}_n(X;K) \longrightarrow H^0_{\Phi}(X;\mathcal{H}_n(X;K))
$$

es un isomorfismo, para toda familia de soportes Φ ((1), 7.3). Este es el caso si X es un conjunto semianalítico con $\dim X \leqslant n$ (cf. A, 1), pues se puede probar fácilmente, por inducción sobre $\dim X$, utilizando la sucesión exacta de cohomología asociada a $\partial X \subset X$, que entonces $\dim_K X \leqslant n$.

Supongamos $\dim_K X \leqslant n$. Entonces, según el número 2, $H_i(X;K) = \mathcal{H}_i(X;K) = 0$ para todo $i > n$ y $x \in X$. Además, mediante (8.2) se puede definir el soporte de un elemento $c \in H^{\Phi}_n(X;K)$: es el soporte de la sección $\Delta(c)$.

9.- Sea ahora X una variedad topológica de dimensión n. Entonces $\dim_K X = n$, $\mathcal{H}_*(X;K)$ está concentrado en grado n y $\mathcal{H}_n(X;K)$ es localmente isomorfo al haz constante $X \times K$. $\mathcal{H}_n(X;K)$ es llamado el <u>haz de orientación</u> de X y es notado $\mathcal{Z}$. Existe un haz localmente isomorfo a $X \times K$, definido salvo isomorfismos, notado $\mathcal{Z}'$, tal que $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z}' = X \times K$. $\mathcal{Z}'$ es llamado el <u>haz inverso</u> de $\mathcal{Z}$.

X es K-orientable si y sólo si $\mathcal{Z}$ es isomorfo a $X \times K$. Una orientación de X es la elección de un isomorfismo entre $\mathcal{Z}$ y $X \times K$. Si X es Z-orientable, o si $K = Z$, entonces $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$. Si $K = Z$ y X es orientable, diremos simplemente que X es orientable.

Para todo entero i y para toda familia de soportes Φ sobre X existe un isomorfismo canónico (la dualidad de Poincaré), compatible con la restricción a un subespacio abierto

$$(9.1) \qquad \Delta : H_i^{\Phi}(X; \mathcal{Z}') \longrightarrow H_{\Phi}^i(X;K).$$

Si $(X_\alpha : \alpha \in I)$ es la familia de las componentes conexas de X, $H^0(X;K)$ se identifica canónicamente con el producto de los anillos $H^0(X_\alpha;K)$, $(\alpha \in I)$, y cada anillo es canónicamente isomorfo a K. Sea ι_α la identidad en $H^0(X_\alpha;K)$ y sea $\iota = \prod \iota_\alpha$. Entonces $\Delta^{-1}(\iota) \in H_n(X;K)$ es llamado la <u>clase fundamental</u> de X. Si X es orientable y orientada, $\Delta^{-1}(\iota)$ se identifica con un elemento de $H_n(X;K)$, que es llamado la <u>clase fundamental de la variedad orientada X</u>, y 9.1 se transforma en:

$$(9.1') \qquad \Delta : H_i^{\Phi}(X;K) \longrightarrow H_{\Phi}^i(X;K)$$

Supongamos $K = Z$ y que X es una variedad orientable y conexa. Entonces sólo existen dos isomorfismos entre $\mathcal{H}(X;Z)$ y $X \times Z$. La elección de un tal isomorfismo w es equivalente a la elección de un generador de $H_n(X,Z)$, a saber, la imagen de la clase fundamental $\Delta^{-1}(\iota)$ por el isomorfismo $w' : H_n(X; \mathcal{H}(X;Z)) \longrightarrow H_n(X;Z)$ inducido por w. Se observa que si e es un generador de $H_n(X;Z)$, la imagen de e por el homomorfismo μ_x definido en 8.1 es un generador de $\mathcal{H}(X;Z)_x$.

9.2.- Sea M un conjunto semianalítico de dimensión p. Se llama clase fundamental de M (respecto de K) a todo elemento $c \in H_p(M;K)$ tal que, para todo $x \in M - \partial M$, $\mu_x(c) \in \mathcal{H}_p(M;K)_x$ es un generador. (*)

10.- Sea X una variedad de dimensión n con un número finito de componentes conexas. Existen isomorfismos canónicos

$$
(10.1)\quad
\begin{array}{l}
H_n(X;Z) \otimes R \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^n(X;Z), Z) \otimes R \\
H_n(X;R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^n(X;R), R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^n(X;Z) \otimes R, R)
\end{array}
$$

deducidos de la sucesión exacta del nº 2 y del isomorfismo $H_c^n(X;R) \longrightarrow H_c^n(X;Z) \otimes R$. Además, como $H_c^n(X;Z)$ es libre de tipo finito, el homomorfismo natural $\mathrm{Hom}(H_c^n(X;Z), Z) \otimes R \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^n(X;Z) \otimes R, R)$ es un isomorfismo. Componiendo los tres isomorfismos obtenemos un isomorfismo canónico

$$
(10.2)\qquad H_n(X;R) \longrightarrow H_n(X;Z) \otimes R .
$$

(*)La definición ha sido dada en (2), 2.2, para un espacio de tipo VS_p. Un conjunto semianalítico de dimensión p es de tipo VS_p.

Sea M una subvariedad cerrada de X de dimensión $n-1$ tal que $U = X-M$ tiene un número finito de componentes conexas. Entonces el isomorfismo recién definido es compatible con la sucesión exacta de homología asociada al par $M \subset X$ (cf. 4.4). Esto se deduce de (4.5), de la naturalidad de los isomorfismos en (10.1) y de la compatibilidad del isomorfismo $H^n_c(X;R) \longrightarrow H^n_c(X, Z) \otimes R$ con la sucesión exacta de cohomología asociada al par $M \subset X$.

En particular, se deduce un isomorfismo canónico $\mathcal{H}(X, R) \longrightarrow \mathcal{H}(X, Z) \otimes R$, que relaciona los haces de homología de X con coeficientes en Z y R.

12.- Sean X e Y espacios topológicos y supongamos $\dim_K X = m$ y $\dim_K Y = n$. Existen homomorfismos canónicos

$$(12.1)\qquad \begin{array}{ccc} H_m(X;K) \otimes H_n(Y;K) & \xrightarrow{\alpha_X \otimes \alpha_Y} & \mathrm{Hom}(H^m_c(X), K) \otimes \mathrm{Hom}(H^n_c(Y), K) \\ \vdots & & \downarrow \lambda \\ & & \mathrm{Hom}(H^m_c(X) \otimes H^n_c(Y), K) \\ \downarrow & & \downarrow \eta \\ H_{m+n}(XxY;K) & \xrightarrow[\alpha_{XxY}]{} & \mathrm{Hom}(H^{m+n}(XxY;K), K) \end{array}$$

que, excepto λ, son isomorfismos. η se deduce del isomorfismo de Künneth $H^{m+n}_c(XxY;K) \longrightarrow H^m_c(X;K) \otimes H^n_c(Y;K)$. Por composición, se obtiene un homomorfismo "producto cartesiano" $\times : H_m(X;K) \otimes H_n(Y;K) \longrightarrow H_{m+n}(XxY;K)$. Se prueba que $\times$ es asociativo, en el sentido usual. Si $H^m_c(X)$ y $H^n_c(Y)$ son libres de tipo finito, en particular si X e Y son variedades con un número finito de componentes conexas, entonces λ es un isomorfismo y por lo tanto también (cf. (2) , 2.11) .

Sea F un subespacio cerrado de X tal que $\dim_K F = m-1$ y sea $U = X - F$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo :

$$(12.2)\quad \begin{array}{ccccc} H_{m+n}(X\times Y) & \xrightarrow{j^{X\times Y,\, U\times Y}} & H_{m+n}(U\times Y) & \xrightarrow{\partial_{U\times Y,\, F\times Y}} & H_{m+n-1}(F\times Y) \\ \times\downarrow & & \times\downarrow & & \times\downarrow \\ H_m(X)\otimes H_n(Y) & \xrightarrow[j^{X,U}\otimes \mathrm{id}]{} & H_m(U)\otimes H_n(Y) & \xrightarrow[\partial_{U,F}\otimes \mathrm{id}]{} & H_{m-1}(F)\otimes H_n(Y) \end{array}$$

donde todos los grupos tienen coeficientes en K. Esto se deduce de 4.5 , de la naturalidad de λ y η y de la conmutatividad del diagrama similar para el isomorfismo $H_c^{m+n}(X\times Y;K) \longrightarrow H_c^m(X;K) \text{ O } H_c^n(Y;K)$.

13.-Para cada entero $n > 0$ definamos $R^n_< = (\ (x_1 \dots x_n) \in R^n :\ x_1 < 0\ )$, $R^n_\leqslant = (\ (x_1 \dots x_n) \in R^n :\ x_1 \leqslant 0\ )$ y consideremos $R^{n-1} = (\ (0, x_2 \dots x_n) \in R^n\ )$. Sea $e_1 \in H_1(R;Z)$ la clase fundamental de R tal que $\partial_{R_<,0}(\ j^{R,R_<}(e_1)\ ) = [0]$ = generador canónico de la 0-homología del punto $0 \in R$, donde $\partial_{R_<,0} : H_1(R_<, Z) \longrightarrow H_0(0, Z)$ es el homomorfismo de conexión asociado al par $R_< \subset R_\leqslant$.

Para cada entero $n > 0$, definamos $e_n = \overbrace{e_1 \times \dots \times e_1}^{n} \in H_n(R^n, Z)$, con la notación del nº 12 . e_n se llama <u>la clase fundamental canónica</u> de R^n. En (2), 2.9, se dá una definición ligeramente diferente de e_n, pero por consideraciones incluídas en (2), 2.9 y 2.10, se puede ver que las dos definiciones coinciden.

Por la asociatividad del producto cartesiano se deduce que, si se considera $R^n = R^m \times R^{n-m}$, entonces $e_n = e_m \times e_{n-m}$. Este hecho, la definición de e_1 y la conmutatividad del diagrama siguiente (cf. 12) :

$$\begin{tikzcd}
H_n(R^n) \arrow[r, "{R^n,\, R^n_<}"] \arrow[d, "\times"'] & H_n(R^n_<) \arrow[r, "{\partial_{R^n_<,\, R^{n-1}}}"] \arrow[d, "\times"'] & H_{n-1}(R^{n-1}) \arrow[d, "\times"'] \\
H_1(R) \otimes H_{n-1}(R^{n-1}) \arrow[r, "{j^{R,\, R_<} \otimes \mathrm{id}}"'] & H_1(R\ ) \otimes H_{n-1}(R^{n-1}) \arrow[r, "{\partial_{R_<,\, 0} \otimes \mathrm{id}}"'] & H_0(\,0\,) \otimes H_{n-1}(R^{n-1})
\end{tikzcd}$$

donde todos los coeficientes son en Z , permiten concluír :

13.1.- $\partial_{R^m_<,\, R^{n-1}} \circ j^{R^n,\, R^n_<}(e_n) = e_{n-1}$.

Si U es un abierto de R^n, se llama a $e_U = j^{R^n,\, U}(\, e_n\,) \in H_n(U;Z)$ <u>la clase fundamental canónica de U</u>. Entonces se puede probar :

13.2.- Sean U y V abiertos de R^n y sea $f : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo de clase C^s , con $s \geqslant 1$ (*). Entonces $f_*(e_U) = e_V$ si y sólo si el jacobiano de f es >0 en U.

Sea X un espacio topológico homeomorfo a un abierto U de R^n y sea $f : X \longrightarrow U$ un homeomorfismo. Entonces $e_f = f_*^{-1}(\,c_U) \in H_n(X, Z)$ es la clase fundamental de X definida por f .

En particular, si E es un espacio vectorial real de dimensión n , una base de E define un isomorfismo $E \longrightarrow R^n$, luego una clase fundamental sobre E . Si dos bases de E se transforman según una matriz de determinante positivo, ellas definen la misma clase fundamental sobre E . Por lo tanto, una orientación algebraica de E define una clase fundamental de E (cf. (2) , 2.9). En particular, e_n corresponde a la orientación algebraica canóni-

(*) Esto es, f es un homeomorfismo y las funciones componentes de f y f^{-1} tienen derivadas continuas de orden s .

ca de R^n .

13.3.- Sea un espacio vectorial real de dimensión n y sean E' y E'' subespacios suplementarios de E de dimensiones p y $n-p$, respectivamente. Sean $e' \in H_p(E';Z)$ y $e'' \in H_{n-p}(E'';Z)$ clases fundamentales asociadas a orientaciones algebraicas de E' y E''. Entonces se prueba que $e' \times e'' \in H_n(E;Z)$ es la clase fundamental correspondiente a la orientación (algebraica) suma de las orientaciones de E' y E'' (cf. (2), 2.11) .

14.- Sea $\mathcal{L}$ un complejo simplicial localmente finito. Sea $C_q = C_q(\mathcal{L})$ el grupo de las q-cadenas simpliciales localmente finitas con coeficientes en K . Consideremos el K-módulo graduado $C_* = (C_q : q \geq 0)$, munido de su diferencial usual $\partial : C_q \longrightarrow C_{q-1}$.

Sea $C^q = C^q(\mathcal{L})$ el grupo de las q-cocadenas simpliciales finitas -esto es, nulas salvo un número finito de simples- de $\mathcal{L}$ con valores en K . Consideremos el K-módulo graduado $C^* = (C^q : q \geq 0)$ munido de su diferencial usual $\delta : C^q \longrightarrow C^{q+1}$, $\delta f(\sigma) = f(\partial\sigma)$, para toda $f \in C^q$ y $\sigma \in C_{q+1}$. C^* es un módulo libre y existe un isomorfismo canónico de módulos diferenciales :

$$C_* \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(C^* , K) , \tag{14.1}$$

donde el diferencial d del segundo módulo está definido por $d(f) = f \circ \delta$, como es usual.

Designemos mediante $H_q(\mathcal{L};K)$ y $H^q_f(\mathcal{L};K)$ los q-grupos de homología y cohomología de C_* y C^* , respectivamente. Como C^* es libre, existe una sucesión exacta que descompone (*)

(1 . 2)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_f^{q+1}(\mathcal{L};K), K) \longrightarrow H_q(\mathrm{Hom}(C^*, K)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_f^q(\mathcal{L};K), K) \longrightarrow 0$$

o, teniendo en cuenta (14.1):

(14.2)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_f^{q+1}(\mathcal{L};K), K) \longrightarrow H_q(\mathcal{L};K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_f^q(\mathcal{L};K), K) \longrightarrow 0$$

Por propiedades generales de las fórmulas de Künneth, esta sucesión es compatible con la inclusión de un subcomplejo $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$.

Sea $|\mathcal{L}|$ una realización topológica de $\mathcal{L}$. $|\mathcal{L}|$ es un espacio localmente compacto y un HLC (cf. (4), 1ra. edición). Entonces existen isomorfismos canónicos $H_f^q(\mathcal{L};K) \longrightarrow H_f^q(|\mathcal{L}|;K) \longrightarrow H_c^q(|\mathcal{L}|;K)$, donde el segundo grupo indica la cohomología singular compacta de $|\mathcal{L}|$ (cf. (4), 9-03 y (5), 20-1).

Considerando las sucesiones exactas de 2 y 14.2 y el hecho de que ambas descomponen, se obtiene un isomorfismo

(14.3) $$\varepsilon_{\mathcal{L}} : H_q(\mathcal{L};K) \longrightarrow H_q(|\mathcal{L}|;K)$$

entre la homología simplicial de $\mathcal{L}$ y la homología de Borel-Moore de su realización $|\mathcal{L}|$.

Sea $\mathcal{F}$ un subcomplejo de $\mathcal{L}$ y $|\mathcal{F}|$ la realización de $\mathcal{F}$ como subespacio cerrado de $|\mathcal{L}|$. Supongamos que K es un cuerpo. Entonces las sucesiones exactas de 2 y 14.2 y las identificaciones en cohomología nos dan un diagrama

(*) cf. (6), 5.4.2, teniendo en cuenta que C^* es un complejo de cocadenas.

(14. 3)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_q(\mathcal{L};K) \arrow[rrr] \arrow[ddd, dashed, "\xi_{\mathcal{L}}"'] & & & \mathrm{Hom}(H^q_f(\mathcal{L};K),K) \arrow[rr] \arrow[ddd] & & 0 & \\
& & 0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "(1)"] & H_q(\mathcal{F};K) \arrow[rr] \arrow[ull] \arrow[d, dashed, "\xi_{\mathcal{F}}"] & & \mathrm{Hom}(H^q_f(\mathcal{F};K),K) \arrow[rr] \arrow[ul] \arrow[d] & & 0 \\
& & 0 \arrow[r] & H_q(|\mathcal{F}|;K) \arrow[rr] \arrow[dll] & & \mathrm{Hom}(H^q_c(|\mathcal{F}|;K),K) \arrow[rr] \arrow[dl] & & 0 \\
0 \arrow[r] & H_q(|\mathcal{L}|;K) \arrow[rrr] & & & \mathrm{Hom}(H^q_c(|\mathcal{L}|;K),K) \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que las flechas verticales llenas son isomorfismos y los diagramas con flechas llenas conmutan (cf. 4.5) . Pero entonces conmuta el cuadro (1) y las identificaciones $\xi_{\mathcal{L}}$ y $\xi_{\mathcal{F}}$ son compatibles con las inclusiones $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ y $|\mathcal{F}| \subset |\mathcal{L}|$.

C.- CORRIENTES .

En este párrafo se presentan algunas definiciones y propiedades concernientes a las corrientes . Para las definiciones generales, nos remitimos a (11) y (17) .

1.- Salvo mención explícita, X designa siempre una variedad C^{∞} de dimensión n , con base numerable de abiertos, no necesariamente conexa . $D_p(X)$ es el espacio de las p-formas (o formas de dimensión p) C^{∞} , con soporte compacto, sobre X . $A_p(X)$ es el espacio de las p-formas C^{∞} sobre X , con soporte no necesariamente compacto. Se nota $D(X) = \oplus(D_p(X): 0 \leqslant p \leqslant n)$ y $A(X) = \oplus (A_p(X) : 0 \leqslant p \leqslant n)$. Sobre $A(X)$ está definido el diferencial exterior d . $A(X)$, munido de este diferencial d , es un álgebra diferencial graduada y $D(X)$ es una subálgebra diferencial graduada de $A(X)$. Consideramos a $D(X)$ munido de la noción usual de convergencia o, inclusive, de la correspondiente estructura de espacio vectorial localmente convexo límite inductivo de espacios de Frechet.

$D'(X)$ indica el espacio de las corrientes sobre X , o sea, el espacio de las formas lineales y continuas sobre $D(X)$. $D'_p(X)$ es el subespacio de las corrientes de dimensión p , o corrientes nulas sobre toda q-forma con $q \neq p$. El homomorfismo borde en $D'(X)$ es el transpuesto del diferencial d en $D(X)$. Lo indicamos con b . Una corriente T es cerrada si $bT = 0$.
Sea U un abierto de X . $T|U$ designa la corriente restricción de $T \in D'(X)$ sobre U ; $T|U \in D'(U)$ y, por definición, $(T|U)(a) = T(a)$ para toda $a \in D(U)$.

Sea $S \in D'(U)$; se dice que $T \in D'(X)$ es una extensión de S sobre X si $T|U = S$. Sean X e Y variedades C^{∞} y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación C^{∞} . Entonces f induce un homomorfismo de módulo diferencial graduado $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$, de grado 0 . Si f es propia, $f^*(D(Y)) \subset D(X)$ y está definido entonces un homomorfismo de módulo diferencial graduado, de grado cero, $f : D'(X) \longrightarrow D'(Y)$. Si $T \in D'(X)$ llamamos a $f(T)$ la imagen de T por f .

2.1. - Sea A un abierto de R^n. La norma $\|a\|$ de una forma $a \in D(A)$ es el máximo sobre A de los valores absolutos de los coeficientes -respecto del mapa canónico de A - de a . Si T es una forma lineal sobre $D(A)$ y G es un abierto relativamente compacto de R^n, la norma $\|T\|_G$ de T sobre G se define por :

$$\|T\|_G = \sup (|T(a)| : a \in D(G \cap A) \text{ y } \|a\| \leq 1) .$$

2.2. - Una corriente 0-continua sobre A es una forma lineal T sobre $D(A)$ tal que $\|T\|_G$ es finito para cada abierto G relativamente compacto en R^n que verifica $G^- \subset A$. Evidentemente $T \in D'(A)$.

Sea X una variedad. Una corriente T sobre X es 0-continua si existe una familia $(\varphi_U : U \in \mathcal{U})$ de mapas coordenados de X , $U \subset X$, $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi(U) \subset R^n$, cuyos dominios U son un cubrimiento de X y tales que, para cada $U \in \mathcal{U}$, $\varphi_U (T|U) \in D'(\varphi(U))$ es una corriente 0-continua sobre $\varphi(U)$. La definición no depende de la particular familia (φ_U). Indicaremos con $D'^0(X)$ al espacio de las corrientes 0-continuas sobre X .

2.3. - Sea X una variedad y W un abierto de X. $T \in D'(W)$ es acotada sobre X si existe una familia $(\varphi_U : U \in \mathcal{U})$ de mapas coordenados de X, $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi_U(U)$, $U \subset X$, cuyos dominios son un cubrimiento de X y tales que, para cada φ_U, $T_U = \varphi_U(T \mid W \cap U) \in D'(\varphi(W \cap U))$ cumple : para cada abierto G relativamente compacto de R^n tal que $G^- \subset \varphi(U)$, $\| T_U \|_G$ es finito.

La definición no depende de la particular familia φ_U. Si $T \in D'(W)$ está acotada sobre X, T es 0-continua sobre W.

3.1.- Teorema (*) : a) Sea W un abierto de la variedad X. Si $T \in D'^{o}(W)$ tiene una extensión T' sobre X, entonces T es acotada sobre X.

b) Recíprocamente, si T está acotada sobre X, existe una única corriente $T' \in D'^{o}(X)$, llamada la extensión simple de T sobre X, tal que :

- Para todo mapa coordenado $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset R^n$, $U \subset X$, se cumple $\| \varphi(T' \mid U) \|_G = \| \varphi(T \mid W \cap U) \|_G$ para todo abierto G relativamente compacto en R^n tal que $G^- \subset \varphi(U)$. (Se observa que $\varphi(T' \mid U) \in D'^{o}(\varphi(U))$, $\varphi(T \mid U \cap W) \in D'^{o}(\varphi(U \cap W))$).

3.2. - En las condiciones de 3.1 (b), sea $a \in D(X)$ y K el soporte de a. Sea K' un entorno abierto relativamente compacto de K y sea $(u_j : j \geqslant 0)$ una partición de la unidad sobre $K \cap W$ localmente finita y C^{∞}. Entonces se cumple $T'(a) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} T(u_j a)$ (*).

(*) cf. (11), n° 1 y 2 .

3.3.- Sea W un abierto en la variedad X. Sean S y T corrientes sobre W acotadas sobre X. Entonces la extensión simple de $S+T$ sobre X es la suma de las extensiones simples sobre X de S y T.

4.1.- <u>Definición</u>: Sea A un abierto de R^n y $T \in D'^o(A)$. Sea F un subconjunto (no necesariamente cerrado) de A. Se dice que la norma de T sobre F es cero, y se nota $\|T\|_F = 0$, si, para cada compacto K de A y cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto relativamente compacto G tal que $K \cap F \subset G \subset G^- \subset A$ y $\|T\|_G < \varepsilon$.

Sea X una variedad, $F \subset X$ y $T \in D'^o(X)$. Se dice que la norma de T sobre F es nula ($\|T\|_F = 0$) si existe una familia $(\varphi_U : U \in \mathcal{U})$, $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi(U) \subset R^n$, de mapas coordenados de X tales que sus dominios son un cubrimiento de F y que $\|\varphi_U(T|U)\|_{(U \cap F)} = 0$ para cada φ_U. La definición no depende de la particular familia φ_U.

Se prueba que, si $T \in D'^o(X)$ y $(F_i : i \geqslant 0)$ es una familia numerable de conjuntos de X tales que $\|T\|_{F_i} = 0$ para cada i, entonces $\|T\|_{\cup F_i} = 0$.

4.2.- Sea X una variedad y F un cerrado de X. Sea $T \in D'^o(X-F)$ y T' una extensión de T sobre X. Entonces T' es la extensión simple de T sobre X si y sólo si $\|T'\|_F = 0$. (cf. (8), 2.2).

Esta proposición implica inmediatamente :

4.3.- Sean $F' \subset F$ conjuntos cerrados de la variedad X. Sea $T' \in D'^o(X-F')$ tal que $\|T'\|_{F-F'} = 0$ y sea $T = T'|X-F$. Entonces, si una de las corrientes T' ó T tiene extensión simple sobre X, la otra también la tiene y ambas extensiones coinciden.

5.1. - Definición : Sean $A \subset A'$ abiertos de R^n y λ un número real >0. Se dice que $T \in D'^{o}(A)$ cumple la condición C_λ sobre A' si :

C - Para cada abierto relativamente compacto G de R^n tal que $G^- \subset A'$ existe una constante $k(G) > 0$ tal que

$$\| T \|_{B_r} \leqslant k(G).\ r^\lambda$$

para toda bola abierta $B_r \subset G$ de radio r.

Sea W un abierto de la variedad X y $T \in D'(W)$. Se dice que T cumple C_λ sobre X si existe una familia ($\varphi_U : U \in \mathcal{U}$) de mapas coordenados $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi_U(U)$, $U \subset X$, tales que, para cada φ_U, la corriente $\varphi_U(T | W \cap U) \in D'(\varphi_U (W \cap U))$ satisface C_λ sobre $\varphi_U(U)$. Entonces es evidente que T está acotada sobre X.

Se puede probar que la definición no depende de la particular familia φ_U elegida. Para ello, conviene utilizar la siguiente propiedad :

5.2. - $T \in D'(A)$ satisface C_λ sobre A' ($A \subset A'$ abiertos de R^n) si y sólo si, para todo $x_0 \in A$ existe una bola $B_o = B(x_o , r_o) \subset A$ y una constante $k(B_o)$ tal que

$$\| T \|_{B_r} \leqslant k(B_o)\, r^\lambda$$

para toda bola $B_r \subset B_o$ de radio r (cf. (11), teor.5).

5.3. - Supongamos que $T \in D'(X)$ satisface C_λ sobre X, con $\lambda > 0$. Entonces $\| T \|_M = 0$ para toda subvariedad M de X de dimensión $d < \lambda$ (cf. (8), 2.4 y (11), toer. 3).

5.4.- Supongamos, en las condiciones de 5.3, que X es una variedad analítica. Entonces $\|T\|_M = 0$ para todo conjunto semianalítico M de dimensión $< \lambda$. Esto se deduce de la descomposición de M en subvariedades de X de dimensión $< \lambda$ (cf. A, 1.4) y de 5.3.

6.- Corriente definida por una clase fundamental de una variedad.

6.1.- Sea X una variedad conexa de dimensión n. Si X es no orientable, $H_n(X, Z) = 0$ y asignamos la corriente nula sobre X al elemento nulo de $H_n(X, Z)$. Si X es orientable, sea $e \in H_n(X, Z)$ una clase fundamental de X (cf. B, 9). Es posible construír una familia $(\Psi_\alpha : \alpha \in I)$ de mapas coordenados $\Psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \Psi_\alpha(U_\alpha) \subset R^n$ de X tal que : a) U_α $(\alpha \in I)$ es un cubrimiento localmente finito de X ; b) para cada $\alpha \in I$, $e_\alpha = \Psi_{\alpha *}(j^{X, U_\alpha}(e)) \in H_n(\Psi_\alpha(U_\alpha);Z)$ es la clase fundamental canónica de $\Psi_\alpha(U_\alpha)$ (cf. B, 13), donde $j^{X, U_\alpha} : H_n(X, Z) \longrightarrow H_n(U_\alpha;Z)$ y $\Psi_{\alpha *} : H_n(U_\alpha, Z) \longrightarrow H_n(\Psi_\alpha(U_\alpha);Z)$ fueron definidos en B.

Sea u_α $(\alpha \in I)$ una partición C^∞ de la unidad sobre X subordinada a U_α $(\alpha \in I)$. Definamos $\int_{X, e} a = \sum_{\alpha \in I} \int_{R^n} \Psi_\alpha(u_\alpha a)$, para toda $a \in D_n(X)$; aquí $\Psi_\alpha(u_\alpha a) \in D_n(\Psi_\alpha(U_\alpha)) \subset D(R^n)$ y suponemos definida la integración sobre R^n (orientado canónicamente) de las formas en $D_n(R^n)$. Sólo un número finito de términos de la sumatoria pueden ser no nulos. Para probar la independencia de $\int_{X, e} a$ respecto de la familia Ψ_α $(\alpha \in I)$ utilizada, se aplica B, 13.2 junto con propiedades conocidas de la integración euclídea- Se observa que, en particular, $\int_{R^n, e_n} = \int_{R^n}$, donde $e_n \in H_n(X, Z)$ es la clase fundamental canónica de R^n. Además, $\int_{X, e} = - \int_{X, -e}$.

Se vé inmediatamente que $\int_{X, e}$ es una corriente 0-continua sobre X.

Se la llama la corriente de integración definida por la clase fundamental e de X (o por la orientación de X inducida por e).

6.2. - Sea X una variedad. Sea X_α ($\alpha \in I$) la familia de las componentes conexas de X . Sea $c \in H_n(X;R) = \prod_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha ;R)$ (cf. (2), 1.3). Entonces $c = (c_\alpha : \alpha \in I)$, donde $c_\alpha = j^{X, X_\alpha}(c) \in H_n(X_\alpha ;R)$ y, para cada α, $c_\alpha = \lambda_\alpha \otimes e_\alpha$; aquí $\lambda_\alpha \in R$ y $e_\alpha \in H_n(X_\alpha , Z)$ es una clase fundamental de X_α . Definamos

$$\int_{X, c} = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \wedge \int_{X_\alpha , e_\alpha} ;$$

los términos del segundo miembro correspondientes a componentes no orientables de X son nulos. Se verifica inmediatamente que $\lambda_\alpha \wedge \int_{X_\alpha , e_\alpha}$ no depende de la representación $c_\alpha = \lambda_\alpha \otimes e_\alpha$.

6.3. - <u>Proposición</u> : La aplicación $\int_X : H_n(X, R) \longrightarrow D'_n(X)$, $c \longrightarrow \int_{X, c}$ tiene las siguientes propiedades :

a) $\int_X$ es un monomorfismo.

b) para cada $c \in H_n(X;R)$, $\int_{X, c}$ satisface C_n sobre X (cf. 5.1).

c) para todo abierto $W \subset X$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_n(X, R) \arrow[r, "\int_X"] \arrow[d, "j^{X, W}"'] & D'_n(X) \arrow[d, "\rho^{X, W}"] \\ H_n(W, R) \arrow[r, "\int_W"'] & D'_n(W) \end{tikzcd}$$

donde $\rho^{X,W}$ indica el homomorfismo de restricción de corrientes.

c) la imagen de $H_n(X,R)$ por $\int_X$ es el grupo de las corrientes cerradas de $D_n'(X)$ (*).

Demostración : a) y b) son evidentes. Para probar c), sean $c \in H_n(X,R)$ y $W_\beta \subset X_\alpha$ componentes conexas de W y X, respectivamente. Si $c_\alpha = j^{X,X_\alpha}(c)$, $c_W = j^{X,W}(c)$ y $c_\beta = j^{W,W_\beta}(c_W)$, entonces $c_\beta = j^{X_\alpha,W_\beta}(c_\alpha)$. Basta probar $\int_{X,c} | W_\beta = \int_{W,c_W} | W$. Se cumple $\int_{X,c} | W_\beta = \int_{X_\alpha, c_\alpha} | W_\beta = \lambda_\alpha \wedge \int_{X_\alpha, e_\alpha} | W$, si $c_\alpha = \lambda_\alpha \otimes e_\alpha$, y $\int_{W,c_W} | W_\beta = \int_{W_\beta, c_\beta}$, por definición. Según (B, 10), $c_\beta = j^{X_\alpha, W_\beta}(\lambda_\alpha \otimes e_\alpha)$ $= \lambda_\alpha \otimes j^{X_\alpha, W_\beta}(e_\alpha)$, y todo se reduce a comprobar la igualdad de $\int_{X_\alpha, e_\alpha} | W_\beta$ $= \int_{W_\beta, j^{X_\alpha, W_\beta}(e_\alpha)}$, lo que es consecuencia directa de las definiciones.

En cuanto a d), se prueba localmente, como en ((17), 5), que $\int_{X,c}$ es cerrada para todo $c \in H_n(X,R)$. Recíprocamente, sea $T \in D_n'(X)$ una corriente cerrada. Según un teorema de L. Schwartz, una distribución todas cuyas derivadas son nulas es una constante. Aplicando localmente este teorema a una componente X_α y teniendo en cuenta el isomorfismo local existente entre n-formas y 0-formas, se deduce $T | X_\alpha = \lambda_\alpha \wedge \int_{X_\alpha, e_\alpha} = X_\alpha, \lambda_\alpha \otimes e_\alpha$. Entonces $T = \int_{X,c}$, donde $c = (\lambda_\alpha \otimes e_\alpha : \alpha \in I)$.

7.1. - Mantengamos las hipótesis del número 6. Sea $c \in H_n(X,R)$. La corriente $\int_{X,c}$ puede estar definida sobre formas con soporte no compacto : llamemos formas integrables a aquellas formas $a \in A_n(X)$ tales que, para una

(*) este grupo se identifica con el n-grupo de homología de las corrientes sobre X (cf. (17); las corrientes que usamos aquí se deoninan "impares" en (17).

partición u_γ ($\gamma \in I$) localmente finita y C^∞ de la unidad sobre X, se cumple

$$\sum_{\gamma \in I} \left| \int_{X, c} u_\gamma \cdot a \right| < \infty .$$

Entonces se define $\int_{X, c} a = \sum_{\gamma \in I} \int_{X, c} u_\gamma \, a$, y el número no depende de la partición elegida.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo C^∞ entre las variedades X e Y, entonces $\int_{X, c} f^*(a) = \int_{Y, f_*(c)} a$ para toda forma integrable $a \in A_n(Y)$ y toda $c \in H_n(X, R)$. Esto es consecuencia de las definiciones (cf. (17), 5). En particular, $f(\int_{X, c}) = \int_{Y, f_*(c)}$.

7.2. - Sea M una subvariedad cerrada de dimensión p de X. La inclusión $i : M \longrightarrow X$ es una aplicación propia, y por lo tanto está definido el homomorfismo $i : D'(M) \longrightarrow D'(X)$, $i\,T(a) = T(i^*(a))$. Si T cumple la condición C_λ sobre M, $i\,T$ la cumple sobre X.

Supongamos que M es una subvariedad de dimensión p, no necesariamente cerrada, de X. Sea $F = M^- - M$. Entonces $i : M \longrightarrow X - F$ es propia y, para cada $c \in H_p(M;R)$ está definida $i(\int_{M, c}) \in D'(X-F)$. Supongamos que existe la extensión simple T' de $i(\int_{M, c})$ sobre X. Entonces, según 3.2 y 7.1, $T'(a) = \int_{M, c} a \,|\, M$ para toda $a \in D_p(X)$. Se observa que, en general, $a \,|\, M \in A_p(M)$.

8. - Corrientes y homología.

8.1. - Mantenemos sobre X las hipótesis del n. 1. Supongamos a X orientable y fijemos una clase fundamental $e \in H_n(X, Z)$.

Sea $\mathcal{D} = \oplus(\mathcal{D}_p : 0 \leq p \leq n)$ el haz diferencial graduado de los gérmenes de formas C^∞ sobre X. $\mathcal{D}$ es el haz engendrado por el prehaz $U \longrightarrow D(U)$ (U abierto en X) tal que, si $U \subset V$, entonces $D(V) \longrightarrow D(U)$ es el homomorfismo de restricción de formas. El producto exterior de formas define sobre $\mathcal{D}$ una estructura de haz de $\mathcal{D}_o$-módulos. Como $\mathcal{D}_o$ es fino (cf. (6), II, 3.7), lo que se prueba mediante particiones C^∞ de la unidad sobre X, resulta $\mathcal{D}$ fino, y en particular blando.

Sea $\mathcal{D}'$ el haz diferencial graduado $\oplus(\mathcal{D}'_p : 0 \leq p \leq n)$ de los gérmenes de corrientes sobre X. $\mathcal{D}'$ es el haz engendrado por el prehaz $U \longrightarrow D'(U)$ (U abierto en X), donde, si $U \subset V$ son abiertos, entonces $D'(V) \longrightarrow D'(U)$ es el homomorfismo de restricción de corrientes. La operación $D_o(U) \times D'(U) \longrightarrow D'(U)$, $(a, T) \longrightarrow a \wedge T$, donde $a \wedge T$ indica la corriente $b \longrightarrow T(a \wedge b)$ $(b \in D(U))$, define sobre $\mathcal{D}'$ una estructura de haz de $\mathcal{D}_o$-módulos. Entonces $\mathcal{D}'$ es blando.

Sea $'\mathcal{D} = \oplus('\mathcal{D}_p : 0 \leq p \leq n)$ el haz definido por $'\mathcal{D}_p = \mathcal{D}'_{n-p}$, con el diferencial $'b_p = {'\mathcal{D}_p} \longrightarrow {'\mathcal{D}_{p+1}}$, $'b_p = (-1)^{p+1} b$ $(p = 0 \ldots n-1)$. Se sabe que

$$(8.2) \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{k} {'\mathcal{D}_o} \xrightarrow{'b_o} {'\mathcal{D}_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow {'\mathcal{D}_n} \longrightarrow 0$$

es una resolución blanda de R sobre X; aquí, si t_x es el germen en x definido por $t \in R$, entonces $k(t_x)$ es el germen en x de la corriente $t \wedge |_{X,e}$ (cf. (17), n.19). También,

$$(8.3) \quad 0 \longrightarrow R' \longrightarrow \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{D}_n \longrightarrow 0$$

es una resolución blanda de R sobre X.

Para cada p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ sea $\tau_p : \mathcal{D}_p \longrightarrow {}'\mathcal{D}_p$ el homomorfismo de haz tal que, si a_x es el germen en $x \in X$ de una p-forma a, $\tau_p(a_x)$ es el germen en x de la corriente $a \wedge \int_{X,e}$. La familia τ_p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ es un homomorfismo de la resolución (8.3) en la resolución (8.2); o sea, ${}'b_p \circ \tau_p = \tau_{p+1} \circ d$ para cada $p = 0, \ldots, n-1$. Esto resulta inmediatamente de las definiciones. Entonces, teniendo en cuenta ((6), II, 4.7.1 y 4.7.2), se deduce el diagrama conmutativo de isomorfismos siguiente, válido para toda familia de soportes Φ en X:

(8.4)

$$\begin{tikzcd} H^{n-p}_{\Phi}(X;R) & H^{n-p}(D_{\Phi}(X)) \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\bar{\tau}(e)"] \\ & H_p(D'_{\Phi}(X)) \arrow[ul, "f(e)"] \end{tikzcd}$$

donde $D_{\Phi}(X)$ y $D'_{\Phi}(X)$ designan los módulos diferenciales de las secciones de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ sobre X con soporte en Φ, esto es, los espacios de formas y corrientes sobre X con soporte en Φ. Se observa que $\bar{\tau}(e)$ y $f(e)$ dependen de la clase fundamental e.

8.5.- Como ha sido expuesto en (B, 9.1), la elección de la clase fundamental $e \in H_n(X, Z)$ define un isomorfismo $\mathcal{H}(X, Z) \longrightarrow X \times Z$, y por lo tanto, según (B, 10), un isomorfismo $\mathcal{H}(X;R) \longrightarrow X \times R$ del haz de homología con coeficientes en R en el haz constante de fibra R sobre X. Obtenemos entonces un isomorfismo $\bar{w}(e) : H_p(x;R) \longrightarrow H_p(X; \mathcal{H}(X;R))$; mediante la composición con el isomorfismo de dualidad de (B, 9.1) y con

$f(e)$, definimos un isomorfismo $\nu = \nu_X$:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X;R) & \dashrightarrow & H_p(D'(X)) \\ \bar{w}(e) \downarrow & & \downarrow f(e)^{-1} \\ H_p(X; \mathcal{H}(X;R)) & \longrightarrow & H^{n-p}(X;R) \end{array} .$$

<u>ν no depende de la elección de $e \in H_n(X;Z)$</u> : En efecto, supongamos conexa a X y sea $e' = -e$ la clase fundamental opuesta de e . Entonces $\bar{w}(e') = -\bar{w}(e)$, $f(e') = -f(e)$ y resulta $f(e)^{-1} \circ \Delta \circ \bar{w}(e) = f(e')^{-1} \circ \Delta \circ \bar{w}(e')$. Si X no es conexa, este argumento se efectúa sobre cada componente conexa de X .

Si X no es necesariamente orientable, consideraremos también ν : $H_p^{\Phi}(X;R) \longrightarrow H_p(D'(X))$ definido según (8.6) sobre las componentes orientables de X y nulo sobre las componentes no orientables.

8.7.- ν es compatible con la restricción a un subespacio abierto, ya que $\bar{w}(e)$, Δ y $f(e)$ lo son. Además, sea M una subvariedad cerrada, no necesariamente conexa ni orientable, de X . Sea Φ una familia de soportes en X y $\Phi' = (A \in \Phi : A \subset M)$. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo (cf. (2), 3.4):

$$\text{(8.8)} \qquad \begin{array}{ccc} H_p^{\Phi}(X;R) & \xrightarrow{\nu_X} & H_p(D'_{\Phi}(X)) \\ i_{M,X} \uparrow & & \uparrow i' \\ H_p^{\Phi'}(M;R) & \xrightarrow[\nu_L]{} & H_p(D'_{\Phi'}(M)) \end{array}$$

donde i' es el homomorfismo en homología inducido por el homomorfismo de inclusión $D'(M) \longrightarrow D'(X)$.

Finalmente supongamos X orientable y orientada por la clase fundamental $e \in H_n(;Z)$. Sea $\Delta(e) = \Delta \circ \bar{w}(e)$. Entonces tenemos un diagrama conmutativo de isomorfismos :

$$(8.9) \qquad \begin{array}{ccc} H^{n-p}(X;R) & \xleftarrow{\;g\;} & H_p(D\ (X)) \\ {\scriptstyle \Delta^{-1}(e)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \bar{\tau}(e)} \\ H_p(X;R) & \xrightarrow[\;\nu\;]{} & H_p(D'\ (X)) \end{array}$$

9. - <u>Intersección de clases de homología</u> .

9.1. - Sea X una variedad de dimensión n orientable y orientada. Existe una aplicación bilineal

$$\begin{cases} H_p^{\Phi}(X;K) \times H_q^{\Psi}(X;K) \longrightarrow H_{p+q-n}^{\Phi\cap\Psi}(X;K) \\ (a\ ,\ b) \longrightarrow a\ .\ b\ =\ \Delta^{-1}(\Delta a \cup \Delta b) \end{cases}$$

que es asociativa, anticonmutativa y compatible con el agrandamiento de las familias de soportes. $a\ .\ b$ se llama el producto de intersección de a y b (cf (2), 1.12). Aquí Δ indica el isomorfismo de dualidad (B, 9.1) y $\cup$ el cup-producto de clases de cohomología.

Supongamos que X es conexa y $p + q = n$; sea Φ la familia de los cerrados de X y $\Psi = c =$ la familia de los compactos de X . Entonces tenemos una aplicación

$$(9.2) \qquad \langle\ \rangle : \begin{cases} H_p(X;K) \times H_q^c(X;K) \longrightarrow H_0^c(X;K) \\ (a\ ,\ b) \longrightarrow \langle a\ .\ b \rangle \end{cases}$$

donde $\langle a.b \rangle \in K$ es el elemento correspondiente a $a.b$ según el isomorfismo $H^c_0(X;K) \longrightarrow K$.

9.3.- Supongamos ahora X de clase C^∞ y orientada por la clase fundamental $e \in H_n(X;Z)$. Según de Rham, se pueden construír endomorfismos R y A de $D'(X)$ que dependen de una familia ε_1, ε_2, ... de parámetros reales positivos, familia que es finita o numerable según X sea compacta o no, y tales que (cf. (16), teor. 12) :

i) R y A son endomorfismos de grado 0 y 1, respectivamente, y cumplen:

$$RT - T = b(AT) + A(bT)$$

para toda corriente $T \in D'(X)$.

ii) Los soportes de RT y AT están incluídos en un entorno arbitrario del soporte de T , siempre que los ε_i sean suficientemente pequeños.

iii) Para toda corriente T , existe $a \in D(X)$ tal que $RT = a \wedge \int_{X,e}$. Si $T = b \wedge \int_{X,e}$ ($b \in D(X)$), entonces $AT = f \wedge \int_{X,e}$, donde $f \in D(X)$.

iv) Si cada ε_i tiende a cero, entonces $RT(a) \longrightarrow T(a)$ y $AT(a)$ tiende a cero, para cada $a \in D(X)$.

Un operador R que cumpla estas condiciones es llamado un regularizador en X .

Sean ahora S y T corrientes en X . Si, cualesquiera sean los regularizadores R y R' en X , existe el límite de $\int_{X,e} RT \wedge R'S$ cuando los parámetros de R y R' tienden a cero, entonces se denota este límite mediante los símbolos

$$\int_{X,e} S \wedge T = S \wedge T\,(1) .$$

$S \wedge T\,(1)$ se llama el índice de Kronecker de S y T. En ((16), n. 20) se prueba que $S \wedge T\,(1)$ existe si S y T son cerrados y S tiene soporte compacto. Además, en tales condiciones, $S \wedge T\,(1)$ no depende mas que de las clases de cohomología $\bar{S}$ y $\bar{T}$ de S y T. Por lo tanto, existe una aplicación bilineal

$$(9.4) \qquad \wedge(1) \quad \begin{cases} H\,(D'_c(X)) \times H\,(D'(X)) \longrightarrow R \\ (\bar{S}\,,\ \bar{T}) \longrightarrow S \wedge T\,(1) \end{cases}$$

9.5.- Proposición : Sean p y q enteros positivos tal que $p+q=n$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo (cf. B, 8.5) :

$$\begin{tikzcd} H^c_p(X;R) \times H_q(X;R) \arrow[r, "\langle\ \rangle"] \arrow[d, "\nu^c \times \nu"'] & R \\ H_p(D'_c(X) \times H_q(D'(X)) \arrow[ur, "\wedge(1)"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración : Basta comprobar la conmutatividad de los siguientes diagramas :

$$\begin{tikzcd} H^c_p(X) \times H_q(X) \arrow[r, "\Delta \times \Delta"] \arrow[d, "\nu \times \nu"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H^{n-p}_c(X) \times H^{n-q}(X) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "g^{-1} \times g^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & {} \\ Hp(D'_c(X) \times H_q(D'(X)) \arrow[r, "\tau^{-1} \times \tau^{-1}"'] \arrow[d, "\wedge(1)"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & H^{n-p}(D_c(X) \times H^{n-q}(A(X)) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\wedge(1)"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & {} \\ R \arrow[r] & R \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\smile"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H^n_c(X) \arrow[r, "\Delta^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & H^c_0 \arrow[d, "\nu"'] \arrow[drr] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & & \\
{} \arrow[r, "\wedge"'] & H^n(D(X)) \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "\int_{X,e}"] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & H_0(D'_c(X)) \arrow[rr, leftrightarrow] & & R \arrow[dlll] \\
{} \arrow[r] & R & & &
\end{tikzcd}
$$

Los diagramas (1) y (10) conmutan por 8.10 . La conmutatividad de (2) es conocida; puede deducirse, por ejemplo, de consideraciones de ((6), II, 6.6) . En (7) , ν asigna a la clase de un 0-ciclo λx ($\lambda \in R$, $x \in X$) la clase de la 0-corriente $\lambda\delta(x)$; por las identificaciones, el coeficiente λ es el número real correspondiente a ambas clases. Similarmente se prueba la conmutatividad de (6). La conmutatividad de (4) y (5) se puede probar utilizando propiedades de los regularizadores. Se observa que $\wedge$(1) es deducido del índice de Kronecker de corrientes, mientras que $\wedge$ es deducido del producto exterior de formas.

CAPITULO II. LA INTEGRACION SOBRE UN CONJUNTO SEMIANALITICO-

A.- CORRIENTES DE INTEGRACION.

1.- Sea A_p un subespacio vectorial de dimensión p de R^n. La aplicación lineal $t : R^p \longrightarrow A_p$ se dice una representación ortogonal de A_p si respeta el producto escalar canónico de R^p y el producto escalar de A_p inducido por el de R^n. Sea $T = (t_{ij})$ la n x p - matriz correspondiente a t según las bases canónicas e_j (j= 1 . . . p) y f_i (i = 1 . . . n) de R^p y R^n, respectivamente ; para todo j = 1. . . p, se cumple $t(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} f_i$ y las funciones $x_i = \sum_{j=1}^{p} t_{ij} y_j$ (i = 1 . . . n) definen la aplicación $R^p \longrightarrow R^n$, $y \longrightarrow \tilde{x}$ inducida por t. Para cada p-pla $H = (i_1 \dots i_p)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, sea T_H la p x p -matriz definida por las filas $i_1 \dots i_p$ de T. Entonces, si T es ortogonal, se verifica
$\sum_H |T_H|^2 = 1$, donde T_H es el determinante de T_H.

Sea $\bigwedge^p R^n$ la p-potencia exterior de R^n ($0 < p < n$) ; se dice que $v \in \bigwedge^p R^n$ está asociado al subespacio A_p de dimensión p de R^n si y sólo si $v \neq 0$ y $z \wedge v = 0$ para todo z A_p (((3) , 7). Se dice que una familia A_p^m ($m = 1 \dots N = \binom{n}{p}$) de subespacios de dimensión p de R^n es regular si toda familia v_m (m = 1 . . . N) de p-vectores tal que v_m está asociado a A_p^m es linealmente independiente, luego una base de $\bigwedge^p R^n$.

Sean ahora

$$t^m : R^p \longrightarrow A_p^m \qquad (m = 1 \dots \; N = \binom{n}{p})$$

representaciones ortogonales de subespacios A_p^m de dimensión p de R^n. Si se define

$$g_j^m = t^m(e_j) \qquad (j = 1 \dots p, \quad m = 1 \dots N),$$

donde e_j ($j = 1 \dots p$) es la base canónica de R^p, entonces, para cada $m = 1 \dots N$, el p-vector

$$g^m = g_1^m \wedge \dots \wedge g_p^m$$

está asociado al subespacio A_p^m. Cada g^m se expresa, según la base canónica f_i ($i = 1 \dots n$) de R^n, mediante

$$g^m = \sum_H |T_H^m| \, f_H = \sum_{i_1 \dots i_p} |T^m_{i_1 \dots i_p}| \; f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}$$

$$(H = (i_1 \dots i_p) , \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n),$$

donde $T^m_{i_1 \dots i_p}$ es la $p \times p$ -matriz determinada por las filas $i_1 \dots i_p$ de la matriz T^m correspondiente a t^m ($m = 1 \dots N$) según e_j y f_i. De aquí se deduce inmediatamente que condición necesaria y suficiente para la regularidad de la familia A_p^m ($m = 1 \dots N$) es la no anulación del determinante :

$$\text{(1.1)} \qquad \det (|T_H^m| \; : \; m = 1 \dots N \; ; \; H = (i_1 \dots i_p), \; 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n).$$

En estas condiciones, consideremos la siguiente familia de formas en $A^p(R^n)$:

$$w(A_p^m) = \sum_H |T_H^m| \; dx_H =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_p} \left(|T^m_{i_1 \ldots i_p}| \; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \; : 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \right)$$

$(m = 1 \ldots N)$.

Se verifica fácilmente que : i) $w(A_p^m)$ depende solamente de A_p^m y no de la particular representación oortogonal t^m ; ii) si $t^{m*} : A^p(R^n) \longrightarrow A^p(R^p)$ es la aplicación inducida por t^m, entonces $t^{m*}(w(A_p^m)) = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_p$ $(m = 1 \ldots N)$, donde y_i $(i = 1 \ldots p)$ son las coordenadas canónicas de R^p.

Ahora bien, la aplicación $f_i \longrightarrow dx_i$ $(i = 1 \ldots n)$, donde los dx_i son los diferenciales de las coordenadas canónicas de R^n, induce un isomorfismo de álgebra entre $\wedge(R^n)$ y la subálgebra de $A(R^n)$ de las formas diferenciales con coeficientes constantes (según las coordenadas canónicas de R^n). Para cada $m = 1 \ldots N$, la imagen de g^m por este isomorfismo es $w(A_p^m)$; por lo tanto, la familia $w(A_p^m)$ $(m = 1 \ldots N)$ es una base para el espacio vectorial de las formas con coeficientes constantes en $A^p(R^n)$ si y sólo si es no nulo el determinante (1.1) o, equivalentemente, si la familia A_p^m $(m = 1 \ldots N)$ es regular.

1.2. - <u>Lema</u> : Sean $M_1 \ldots M_s$ conjuntos semianalíticos definidos en algún entorno del origen de R^n. Sea $0 < p < n$. Entonces existen $N = \binom{n}{p}$ mapas coordenados $x^m = (x_1^m \ldots x_n^m)$ $(m = 1 \ldots N)$ en $O'(M_1 \ldots M_s)$ (cf. I, A, 3.2) tales que la familia de los subespacios $A_p^m = (x_{p+1}^m = \ldots = x_n^m = 0)$ es regular.

Demostración : Siempre existen N mapas $y^m = (y_1^m \ldots y_n^m)$ $(m = 1 \ldots N)$ en $O'(R^n)$ tales que que es regular la familia de los subespacios $(y_{p+1}^m = \ldots = y_n^m = 0)$ $(m = 1 \ldots N)$. En efecto, dada una base ortonormal g_i $(i = 1 \ldots n)$ en R^n, basta considerar las N bases ortonormales $(g_1^K, \ldots g_n^K)$ tales que, para cada $K = (i_1 \ldots i_p)$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, si $CK = (j_1 \ldots j_{n-p})$, $1 \leqslant j_1 \ldots \leqslant j_{n-p} \leqslant n)$ indica el complemento de K respecto del conjunto $(1 \ldots n)$, entonces

$$g_1^K = g_{i_1}, \ldots, g_p^K = g_{i_p}, \quad g_{p+1}^K = g_{j_1} \ldots g_n^K = g_{j_{n-p}} .$$

La familia de los p-vectores $g_K = g_1^K \wedge \ldots \wedge g_p^K$, $K = \ldots$, es linealmente independiente, luego es regular la familia de los subespacios asociados $A_K = (y_{p+1}^K = \ldots y_n^k = 0)$ $(K = \ldots)$, donde y^K es el mapa coordenado en $O'(R^n)$ definido por la base g_i^K $(i = 1 \ldots n)$; para cada K puede escribirse $g_K = \sum_H |T_H^K| f_H$, donde $f_H = f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_p}$ y T_H^K es el menor de T^K determinado por las filas $i_1 \ldots i_p$, si $H=(i_1 \ldots i_p)$, y por las p primeras columnas de T^K. Según lo dicho anteriormente, la regularidad de A_K $(K = \ldots)$ implica la no anulación del $\det (| T_H^K |)$. Según (I, A, 3.2) existen N mapas $x^K = (x_1^K \ldots x_n^K)$ $(K = \ldots)$ en $O'(M_1 \ldots M_s)$ tan cercanos de los y^K como para que sea no nulo el $\det(|Q_H^K|)$, donde las Q^K son las matrices de pasaje de los mapas y^K respecto del mapa canónico de R^n. Esto implica la regularidad del sistema de subespacios $A_p^K = (x_{p+1}^K = \ldots = x_n^K = 0)$ $(K = \ldots)$, como buscábamos.

(Para el caso complejo, cf. (11), n.5 y 6) .

2.- A partir de este momento, todas las variedades que intervienen en el capítulo tienen base numerable de abiertos. Con las notaciones definidas en el capítulo I, podemos enunciar :

2.1.- Teorema : Para toda variedad analítica real X de dimensión n y para cada par $N \subset M$ de conjuntos semianalíticos cerrados de X, de dimensiones $\dim N < \dim M = p \leqslant n$, existe un único monomorfismo

$$I(M,N) : \begin{cases} H_p(M-N\,;R) \longrightarrow D'_p(X) \\ \qquad c \longrightarrow I(M,N,c) \end{cases}$$

de la p-homología con coeficientes reales de $M-N$ en el espacio de corrientes $D'_p(X)$, tal que :

a) para todo $c \in H_p(M-N;R)$, $I(M,N,c)$ satisface la condición C_p sobre X.

b) si W es abierto en X y si $I(M \cap W, N \cap W)$ es el monomorfismo correspondiente al par $N \cap W \subset M \cap W$ de conjuntos semianalíticos en W, entonces es conmutativo el diagrama :

$$\begin{array}{ccc} H_p(M-N;R) & \xrightarrow{j^{M-N,\,(M-N)\cap W}} & H_p((M-N)\cap W;R) \\ I(M,N) \downarrow & & \downarrow I(M\cap W, N\cap W) \\ D'_p(X) & \xrightarrow[\rho^{X,W}]{} & D'_p(W) \end{array}$$

en el que $\rho^{X,W}$ designa el homomorfismo de restricción de corrientes.

c) para todo $c \in H_p(M-N;R)$, el soporte de $I(M,N,c)$ coincide con la clausura de la unión de las componentes conexas M^*_ν de $M-(N \cup \partial M)$ tales que $j^{M-N,M^*_\nu}(c) \neq 0$; si $j^{M-N,M^*_{\nu_0}}(c) = 1 \otimes e_{\nu_0}$, donde e_{ν_0} es un generador de $H_p(M^*_{\nu_0};Z)$, entonces $I(M,N,c)$ coincide sobre M con $\int_{M^*_{\nu_0},\, e_{\nu_0}}$, o sea con la corriente de integración sobre la variedad $M^*_{\nu_0}$ definida por e_{ν_0}.

$I(M,N,c)$ es llamada la corriente de integración sobre M definida por $c \in H_p(M-N;R)$. Si $N = \emptyset$, se abrevia : $I(M) = I(M,N)$ y $I(M,N,c) = I(M,c)$.

Demostración : Si $p = 0$, M es discreto y $N = \partial M = \emptyset$. En este caso definimos directamente $I(M, \emptyset, c) = \sum(\lambda_\nu \delta(x_\nu) : x_\nu \in M$ y $\lambda_\nu = j^{M,x_\nu}(c) \in H_0(x_\nu;R) = R)$, donde $\delta(x_\nu)$ es la 0-corriente $f \longrightarrow f(x_\nu)$ $(f \in D_0(X))$ y las condiciones del teorema se verifican trivialmente.

Supongamos $p > 0$. $M-(N \cup \partial M)$ es una subvariedad analítica cerrada de dimensión p de $X-(N \cup \partial M)$, luego es propia la inclusión $M-(N \cup \partial M) \longrightarrow X-(N \cup \partial M)$ e induce un homomorfismo i : $D'(M-(N \cup \partial M)) \longrightarrow D'(X-(N \cup \partial M))$. Definamos $I'(M,N)$: $H_p(M-N;R) \longrightarrow D'_p(X-(N \cup \partial M))$ mediante el diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
H_p(M-N;R) \arrow[r, "j^{M-N,\, M-(N\cup\partial M)}"] \arrow[drr, dashed, "I'(M,N)"'] & H_p(M-(N\cup\partial M;R) \arrow[r, "\int_{M-(N\cup\partial M)}"] & D'_p(M-(N\cup\partial M)) \arrow[d, "i"] \\
& & D'_p(X-(N \quad M))
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

en el que $j^{M-N,M-(N \cup \partial M)}$ y $\int_{M-(N \cup \partial M)}$ fueron definidos en

(I, B, 4.4) y (I, C, 6.2) .

2.3.- Lema : El homomorfismo $I'(M,N) : H_p(M-N;R) \longrightarrow D'_p(X-(N\cup\partial M))$, $c \longmapsto I'(M,N,c)$ satisface las siguiente propiedades:

a) para todo abierto $W \subset X$, es conmutativo el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
H_p(M-N;R) \arrow[rr, "j^{M-N,(M-N)\cap W}"] \arrow[d, "I'(M-N)"'] & & H_p((M-N)\cap W;R) \arrow[d, "I'(M\cap W, N\cap W)"] \\
D'_p(X-(N\cup\partial M)) \arrow[rr, "\rho"'] & & D'_p(W-(N\cup\partial M))
\end{tikzcd}$$

donde ρ es el homomorfismo de restricción y $I'(M\cap W, N\cap W)$ es construído como $I'(M, N)$ para el par $N\cap W \subset M\cap W$ de conjuntos semianalíticos cerrados en W .

Demostración : Sea $c_W = j^{M-N,(M-N)\cap W}(c)$. Según (I, C, 6.3), $\int_{M-(N\cup\partial M), c_W}$ cumple C_p sobre $M-(N\cup\partial M)$, y entonces $I'(M,N,c)$ cumple C_p sobre $X-(N\cup\partial M)$ (cf. I, C, 7.2) .

Para probar b), consideremos el diagrama 2.2 ; i es compatible con la restricción a un subespacio abierto de X y, según (I, B, 5.2) y (I, C, 6.3), los homomorfismos $j^{M-N,M-(N\cup\partial M)}$ y $_{M-(N\cup\partial M)}$ también lo son. Esto implica la conmutatividad del diagrama de b) .

Proseguimos la demostración del teorema probando que, para cada $c \in H_p(M-N;R)$, $I'(M,N,c)$ satisface C_p <u>sobre X</u>. Para ello se debe encontrar un cubrimiento abierto ($U \in \mathcal{U}$) por dominios U de mapas coordenados $\varphi_U : U \longrightarrow \varphi_U(U) \subset R^n$ tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$, $\varphi_U(I'(M,N,c)) \in D'_p(\varphi_U(U - (N \cup \partial M))$ cumple C_p sobre $\varphi_U(U)$ (cf. I, C, 5.1). Esto es evidente si $p = \dim M = \dim X$, ya que la integración sobre un abierto de X cumple C_p sobre X.

Supongamos $p < n$. Fijemos $c \in H_p(M-N;R)$ y $x \in X$; sea $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset R^n$ un mapa coordenado de X tal que $x \in U$ y $\varphi(x) = 0 \in R^n$. Por el lema 2.2, $I'(M,N,c) \mid U - (N \cup \partial M) = I'(M \cap U, N \cap U, c_U)$, donde $c_U = j^{M-N,(M-N)\cap U}(c)$. Además, $\varphi(I'(M \cap U, N \cap U, c_U)) = I'(M_1, N_1, t) \in D'_p(\varphi(U) - (N_1 \cup \partial M_1))$, donde $M_1 = \varphi(M \cap U)$ y $N_1 = \varphi(N \cap U)$ son conjuntos semianalíticos cerrados en $\varphi(U)$ tales que $\dim N_1 < \dim M_1 = p$, $\partial M_1 = \varphi(U \cap \partial M)$, y donde $t = \varphi_*(c_U) \in H_p(M_1 - N_1;R)$ (cf. I, C, 7.1). Bastará probar que $I'(M_1, N_1, t)$ satisface C_p en un entorno de $0 \in R^n$.

2.3. - Lema : Sea $x = (x_1 \dots x_n)$ un mapa coordenado en $O'(M_1, N_1)$ (cf. I, A, 3.2). Sea SN un correspondiente sistema normal, y Q un entorno normal respecto de SN. Sea $w(A_p)$ la p-forma asociada al subespacio $A_p = (x_{p+1} = \dots = x_n = 0)$ de R^n (cf. II, A, 2.1). Entonces existe una constante $k > 0$ tal que la 0-corriente $w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) \in D'_0(\varphi(U) - (N_1 \cup \partial M_1))$ cumple

$$(2.4) \qquad \| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) \|_{B_r} \leqslant k\, r^p$$

para toda bola abierta $B_r \subset Q$ de radio r.

Demostración : Sea $Q = \bigcup \Gamma_{\varkappa}^{k}$ la descomposición normal de Q según SN. Se cumple $M_1 = \bigcup (\Gamma_{\varkappa}^{k} : \Gamma_{\varkappa}^{k} \subset M_1$ y $k \leqslant p)$ y $\bigcup (\Gamma_{\varkappa}^{p} : \Gamma_{\varkappa}^{p} \subset M_1) \subset M_1 - (N_1 \cup \partial M_1)$. Sea $S = \bigcup (\Gamma_{\varkappa}^{k} : k < p$ y $\Gamma_{\varkappa}^{k} \subset M_1)$, de manera que $N_1 \cup \partial M_1 \subset S$; $S - (N_1 \cup \partial M_1)$ es un conjunto semianalítico en $Q - (N_1 \cup \partial M_1)$ de dimensión $< p$. Como $I'(M_1, N_1, t)$ cumple C_p en $\varphi(U) - (N_1 \cup \partial M_1)$, resulta $\| I'(M_1, N_1, t) \|_{S-(N_1 \cup \partial M_1)} = 0$ (cf. I, C, 5.4) y consecuentemente $\| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) \|_{S-(N_1 \cup \partial M_1)} = 0$. Según (I, C, 3.1 y 4.2), esto implica $\| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) \|_{B_r} = \sup (| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) (a) | : a \in D_0(B_r)$ y $\|a\| \leqslant 1) = \sup (| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) (a) | : a \in D_0(B_r - S) , \|a\| \leqslant 1)$ para cada bola abierta $B_r \subset Q$. Por lo tanto, para computar la norma $\| w(A_p) \wedge I'(M_1, N_1, t) \|_{B_r}$ solamente se precisa considerar formas en $D_0(B_r - S)$.

Por definición, $I'(M_1, N_1, t) = \sum I'(M_\nu^*, t_\nu)$, donde M_ν^* $(\nu \in J)$ es la familia de las componentes conexas de $M_1 - (N_1 \cup \partial M_1)$ y $t_\nu = j^{M_1 - N_1, M_\nu^*}(t)$ $(\nu \in J)$. Como M_ν^* es una familia localmente finita, basta probar una desigualdad similar a (2.4) para una corriente $w(A_p) \wedge I'(M_\nu^*, t_\nu)$. Sea $B_r \subset Q$ una bola de radio r y $a \in D_0(B_r - S)$ tal que $\|a\| \leqslant 1$. Entonces, si $c_\nu \neq 0$ (el caso $c_\nu = 0$ es trivial),

$$w(A_p) \wedge I'(M_\nu^*, t_\nu)(a) = \lambda_\nu \cdot \int_{M_\nu^*, e_\nu} a.\, w(A_p) \big| M_\nu^* =$$

$$\lambda_\nu \int_{M_\nu^* - S, e_\nu'} a.\, w(A_p) \big| M_\nu^* - S = \lambda_\nu \sum (\int_{\Gamma_{\varkappa}^{p}, e_{\varkappa}} a.\, w(A_p) \big| \Gamma_{\varkappa}^{p} : \Gamma_{\varkappa}^{p} \subset M_\nu^*),$$

ya que $M_\nu^* - S = \bigcup (\Gamma_\varkappa^p : \Gamma_\varkappa^p \subset M_\nu^*)$; aquí $t_\nu = \lambda_\nu \otimes e_\nu$, $e_\nu \in H_p(M_\nu^*;Z)$ es un generador, $e'_\nu = j^{M_\nu^*, M_\nu^* - S}(e_\nu)$ y $e_\varkappa = j^{M_\nu^* - S, \Gamma_\varkappa^p}(e'_\nu)$. Cada $\Gamma_\varkappa^p$ es el gráfico de una aplicación analítica $f_{i,\varkappa} : {}_p\Gamma_i \longrightarrow R^{n-p}$, donde ${}_p\Gamma_i$ es un abierto de $Q_p = \pi(Q)$, $\pi : (x_1 \dots x_n) \longrightarrow (x_1 \dots x_p, 0 \dots 0)$, y tal que $\pi \circ f_{i,\varkappa}$ = identidad en ${}_p\Gamma_i$ (I, A, 3.2). Para cada $\Gamma_\varkappa^p \subset M_\nu^*$ tenemos :

$$\int_{\Gamma_\varkappa^p, e_\varkappa} a.w(A_p) \mid \Gamma_\varkappa^p = \int_{{}_p\Gamma_i, \pi_p(e_\varkappa)} f_{i,\varkappa}^* (a.w(A_p)) =$$

$$\int_{{}_p\Gamma_i, \pi_p(e_\varkappa)} a(f_{i,\varkappa}(y_1 \dots y_p))\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_p \quad ;$$

(cf. n. 1). Por lo tanto :

$$| w(A_p) \wedge I'(M_\nu, N_\nu, t_\nu)(a) | \leqslant |\lambda_\nu| \sum (| \int_{\Gamma_\varkappa^p, e_\varkappa} (a.w(A_p) | \Gamma_\varkappa^p) | : \Gamma_\varkappa^p \subset M_\nu^*) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_\nu| \sum (\int_{\pi(\Gamma_\varkappa^p)} | a(f_{i,\varkappa}) | \, dy_1 \dots dy_p : \Gamma_\varkappa^p \subset M_\nu^*) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_\nu| \, k'_\nu . \text{ área } \pi(B_r) = k_\nu \, r^p ,$$

donde k'_ν es el número de $\Gamma_\varkappa^p$ incluídos en M_ν^* . Esto prueba 2.3.

Sean ahora $x^m = (x_1^m \dots x_n^m)$, ($m = 1 \dots \binom{n}{p}$), mapas en $O'(M_1, N_1)$ tales que la familia de subespacios de dimensión p $A^m = (x_{p+1}^m = \dots = x_n^m = 0)$ ($m = 1 \dots \binom{n}{p}$) es regular (lema 1.2) ; como la familia $w(A^m)$ $(m = \dots)$ de formas asociadas es una base del espacio vectorial de las formas sobre R^n con coeficientes constantes, cada forma $dx_H = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$, donde $(x_1 \dots x_n)$ es el mapa canónico de R^n, puede expresarse como $dx_H = \sum_m s_m^H \, w(A^m)$, ($s_m^H \in R$). Consecuentemente, si $a(x) = \sum_H a_H(x) \, ds_H$ es una forma sobre R^n, tenemos :

$$a = \sum_H a_H \left(\sum s_m^H \, w(A^m) \right) = \sum_m \left(\sum_H s_m^H a_H \right) w(A^m) =$$

$$\sum_m P_m(\ldots, a_H, \ldots) \, w(A^m) ,$$

donde los $P_m = \sum_H s_m^H a_H$, $m = 1 \ldots \binom{n}{p}$, dependen solamente de los mapas x^m ($m = 1 \ldots \binom{n}{p}$).

Para cada $m = 1 \ldots \binom{n}{p}$, sea $I^m = w(A^m) \wedge I'(M_1, N_1, t)$ y sea Q_m un entorno normal respecto del mapa x^m. Sean $k_m > 0$ las constantes que el lema 2. 3 proporciona para las corrientes $w(A^m) \wedge I'(M_1, N_1, t)$ y los entornos Q_m. Entonces, si $B_r \subset Q = \bigcap (Q_m : m = 1 \ldots \binom{n}{p})$ es una bola de radio r y si $a \in D_p(B_r - (N_1 \cup \partial M_1))$ y $\| a \| \leqslant 1$, se cumple :

$$| I'(M_1, N_1, t) (a) | = \left| I'(M_1, N_1, t) \left(\sum_m P_m(\ldots a_H \ldots) \, w(A^m) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_m \left| w(A^m) \wedge I'(M_1, N_1, t) \left(P_m(\ldots a_H \ldots) \right) \right|$$

$$\leqslant \sum_m \| w(A^m) \quad I'(M_1, N_1, t) \|_{B_r} \cdot \| P_m(\ldots a_H \ldots) \| ,$$

ya que $P_m(\ldots a_H \ldots) \in D_0(B_r - (N_1 \cup \partial M_1))$; como además $\| P_m(\ldots a_H \ldots) \| \leqslant k'_m \| a \|$, donde k'_m es una constante que depende sólo de P_m, obtenemos finalmente:

$$| I'(M_1, N_1, t) (a) | \leqslant \sum_m k_m . k'_m \, r^p = k \, r^p$$

Esta desigualdad implica $\| I'(M_1, N_1, t) \|_{B_r} \leqslant k\, r^p$, para toda bola $B_r \subset Q$, como buscábamos. Por lo tanto, $I'(M, N, t)$ satisface C_p sobre X (cf. I, C, 5.2).

Ahora podemos concluír la construcción de $I(M, N, c)$. La condición C_p asegura que $I'(M, N, c)$ está acotada en un entorno de cada punto $x \in N \cup \partial M$. Entonces definimos $I(M, N, c)$ como la extensión simple de $I'(M, N, c)$ sobre X. Su existencia está asegurada por (I, C, 3.1 (b)).

Como $I'(M, N, c)$ cumple C_p sobre X, la condición a) del teorema se verifica por (I, C, 3.1 (b)). Si c, $c' \in H_p(M-N;R)$, $I(M, N, c+c')$ y $I(M, N, c) + I(M, N, c')$ son extensiones simples de $I'(M, N, c+c')$ y $I'(M, N, c) + I'(M, N, c')$, respectivamente ; como estas últimas corrientes son iguales por 2.2, se deduce $I(M, N, c+c') = I(M, N, c) + I(M\, N, c')$; similarmente se prueba $I(M, N, \lambda c) = \lambda I(M, N, c)$ para $\lambda \in R$ y $c \in H_p(M-N;R)$. Por lo tanto $I(M, N)$ es un homomorfismo.

En la sucesión exacta de homología asociada al par $(\partial M) - N \subset M - N$, el término $H_p((\partial M)-N;R)$ es nulo, ya que $\dim (N \cup \partial M) < p$. Luego es inyectiva la proyección $j^{M-N,\, M-(N \cup \partial M)} : H_p(M-N;R) \longrightarrow H_p(M-(N \cup \partial M;R)$, $c \longrightarrow j(c)$; además, $j(c) \neq 0$ si y sólo si $j^{M-(N \cup \partial M),\, M^*_\nu}$ o j $(c) = j^{M-N,\, M^*_\nu}(c) = c_\nu \neq 0$ para alguna componente conexa M^*_ν de $M-(N \cup \partial M)$ (cf. I, B, 6) ; esto implica $I'(M^*_\nu, c_\nu) \neq 0$ y la inyectividad de $I(M, N)$.

Para probar la condición b) del teorema, sea $c \in H_p(M-N;R)$ y $c_W = j^{M-N,\, (M-N) \cap W}(c) \in H_p((M-N) \cap W;R)$, donde W es un abierto de X. $I(M, N, c) | W$ satisface C_p sobre W, luego $\| I(M, N, c) | W \|_{(N \cup \partial M) \cap W} = 0$ y $I(M, N, c) | W$ es la extensión simple sobre W (cf. I, C, 4.2) de

$$I(M,N,c) \,\Big|\, W - (N \cup \partial M) = I'(M,N,c) \,\Big|\, W - (N \cup \partial M) =$$

$$= I'(M \cap W, N \cap W, c_W) ,$$

donde la última igualdad es consecuencia de 2.2 . Pero, por definición, la extensión simple de la última corriente es $I(M \cap W, N \cap W, c_W)$, como se debía probar. La condición c) es evidente, ya que el soporte de $I(M,N,c)$ es la clausura en X del soporte de $I'(M,N,c)$ en $X - (N \cup \partial M)$, que es igual al soporte de $\int_{M-(N \cup \partial M),\ j(c)}$ en $M - (N \cup \partial M)$.

En cuanto a la unicidad, supongamos que $T : c \longrightarrow T(c)$ es otro homomorfismo $H_p(M-N;R) \longrightarrow D'_p(X)$ que cumple las condiciones del teorema . Según a) , $T(c)$ es la extensión simple sobre X de su restricción sobre $X - (N \cup \partial M)$, para cada $c \in H_p(M-N;R)$; según b), $T(c) \,|\, X-(N \cup \partial M)$ es nula sobre $X - M$; la condición c) implica que $T(c) \,\Big|\, X - (N \cup \partial M)$ $= I'(M,N,c)$ sobre $\bigcup M^*_\nu$, por lo tanto que $T(c) \,\Big|\, X - (N \cup \partial M) =$ $I'(M,N,c)$ sobre $X - (N \cup \partial M)$. Esto im plica $T(c) = I(M,N,c)$, y completa la demostración del teorema.

2.5. - Observaciones : 1. Casos particulares interesantes de este teorema son i) $N = \partial M$ (*) y ii) $M = X =$ variedad analítica real .

2. $I(M,N,c)$ es nula sobre toda componente conexa nor orientable M^*_ν de $M - (N \cup \partial M)$; en efecto, en este caso es $H_p(M^*_\nu ;R) = 0$.

(*) el resultado ha sido anunciado en (9) , utilizando solamente la homología con coeficientes enteros.

3. La condición c) de 2.1 puede reformularse así: el soporte de $I(M, N, c)$ coincide con la clausura en X del soporte de c en $M - N$ (cf. I, B, 8)).

4. Para cada $a \in D_p(X)$ y $c \in H_p(M-N;R)$, $I(M,N,c)(a) = \int_{M-(N \cup \partial M), c'} a \,|\, M - (N \cup \partial M)$, donde $c' = j^{M-N, M-(N \cup \partial M)}(c)$. Esto se deduce de las definiciones y de (I, C, 7.2).

5. Sea X una variedad analítica compleja, M un conjunto analítico complejo de X de dimensión (compleja) p, y $c \in H_{2p}(M, Z)$ la clase fundamental de M. Entonces $I(M, \emptyset, c)$ coincide con la corriente asociada por P. Lelong a M (cf. (11) y (2), 3.4).

2.4. - Corolario : En las condiciones del enunciado del teorema 2.1, sea Φ una familia de soportes en $M - N$ y $\bar{\Phi} = (A^- : A \in \Phi)$ la familia de las adherencias en X. Entonces existe un homomorfismo $I^{\Phi}(M,N) : H_p^{\Phi}(M-N;R) \longrightarrow D_p'^{\bar{\Phi}}(X)$ de la p-homología con soportes en Φ en el espacio de las corrientes de dimensión p con soportes en $\bar{\Phi}$, que es composición del homomorfismo de agrandamiento de soportes $\Psi : H_p^{\Phi}(M-N;R) \longrightarrow H_p(M-N;R)$ (cf. (2), 1.4) y de $I(M,N)$.

Demostración : Solamente hay que probar que, si $c \in H_p^{\Phi}(M-N;R)$, entonces $I^{\Phi}(M,N,c) = I(M,N,\Psi(c))$ tiene soporte en $\bar{\Phi}$. Esto es consecuencia de 2.1 (c) y la observación 2.5.3, ya que $\Psi(c)$ tiene soporte en Φ.

2.7.- <u>Corolario</u> : En las condiciones del enunciado del teorema 2.1, sea $g : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo analítico. Entonces $g(I(M,N,c)) = I(g(M), g(N), g_p(c))$, donde $g_p : H_p(M-N;R) \longrightarrow H_p(g(M)-g(N);R)$ es el isomorfismo deducido de $g \mid M-N \longrightarrow g(M) - g(N)$.

<u>Demostración</u> : Sea $c' = j^{M-N,\, M-(N\cup \partial M)}(c)$ y sean $g' = g \mid X-(N\cup \partial M)$, $g'' = g \mid M-(N\cup \partial M)$. Según (I, C, 7.1), $g''(\int_{M-(N\cup \partial M),\, c'}) = \int_{g''(M-(N\cup \partial M)),\, g''_p(c')}$, y por lo tanto $g'(I'(M,N,c)) = I'(g(M), g(N), g_p(c))$.

Pero entonces, considerando la extensión simple de $I'(M,N,c)$ en X y de $I'(g(M), g(N), g_p(c))$ en Y, se obtiene lo buscado.

3.- Ahora presentamos algunas aplicaciones del teorema 2.1.

3.1.- <u>Proposición</u> : Sean M_i, N_i $(i = 1, 2)$ conjuntos semianalíticos cerrados de la variedad analítica real X tales que : $N_i \subset M_i$ $(i = 1, 2)$, $M_1 \subset M_2$, $N_1 \subset N_2$, $\dim M_1 = \dim M_2 = p$, $\dim N_i < p$ $(i = 1, 2)$. Entonces los diagramas siguientes son conmutativos :

$$\begin{tikzcd}
H_p(M_1-N_1) \arrow[r, "i^{M_1-N_1,\, M_2-N_1}"] \arrow[dr, "I(M_1,N_1)"'] & H_p(M_2-N_1) \arrow[r, "j^{M_2-N_1,\, M_2-N_2}"] \arrow[d, "I(M_2,N_1)"] \arrow[dl, phantom, "(1)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H_p(M_2-N_2) \arrow[dl, "I(M_2,N_2)"] \\
 & D'_p(X) &
\end{tikzcd}$$

donde los grupos de homología tienen coeficientes en R.

Demostración : Probemos la conmutatividad de (1) . Sea $c \in H_p(M_2-N_1)$ y $c' = j^{M_2-N_1, M_2-N_2}(c)$. Como $\dim N_2 < p$, 2.1 (a) implica que $I(M_2, N_1, c)$ y $I(M_2, N_2, c')$ son extensiones simples de $I(M_2, N_1, c) | W$ y $I(M_2, N_2, c')$, respectivamente, donde $W = X - N_2$. Entonces 2.1 (b) implica $I(M_2, N_1, c) | W = I(M_2-N_2, \emptyset, c') = I(M_2, N_2, c') | W$, de lo que se deduce $I(M_2, N_1, c) = I(M_2, N_2, c')$.

En cuanto al segundo diagrama, sean $c \in H_p(M_1-N_1)$ y $c' = i_{M_1-N_1, M_2-N_1}(c)$. Nuevamente, basta mostrar que coinciden las restricciones de $I(M_1, N_1, c)$ y $I(M_2, N_1, c')$ sobre $W = X - (N_1 \cup \partial M_1 \cup \partial M_2)$; por 2.1 éstas son respectivamente iguales a $I(M_1 \cap W, \emptyset, c_W)$ y $I(M_2 \cap W, \emptyset, c'_W)$, donde $c_W = j^{M_1-N_1, M_1 \cap W}(c)$, $c'_W = j^{M_2-N_1, M_2 \cap W}(c') = i_{M_1 \cap W, M_2 \cap W}(c_W)$ (la última igualdad por (I, C, 5.2) ; además, $M_1 \cap W$ y $M_2 \cap W$ son variedades de dimensión p de W , y $M_1 \cap W \subset M_2 \cap W$; por lo tanto, la familia $M^*_{1\nu}$ ($\nu \in J$) de las componentes conexas de $M_1 \cap W$ es una subfamilia de $M^*_{2\kappa}$ ($\kappa \in J'$), familia de las componentes conexas de $M_2 \cap W$. Ahora bien, por definición, $I(M_1 \cap W, c_W) = \sum I(M^*_{1\nu}, c_{W\nu})$ y $I(M_2 \cap W, c'_W) = \sum I(M^*_{2\kappa}, c'_{W\kappa})$, donde $c_{W\nu} = j^{M_1 \cap W, M^*_{1\nu}}(c_W)$, $c'_{W\kappa} = j^{M_2 \cap W, M^*_{2\kappa}}(c'_W)$ ($\nu \in J$, $\kappa \in J'$) ; como $c'_{W\kappa} = c_{W\nu}$ si $M^*_{2\kappa} = M^*_{1\nu}$, o de lo contrario es $c'_{W\kappa} = 0$ (cf. I, B, 5.2) , resulta la igualdad $I(M_1 \cap W, c_W) = I(M_2 \cap W, c'_W)$ buscada.

3.2. - Proposición : Sea X una variedad analítica real de dimensión n. Sean M_s y N_s ($s \in J$) familias localmente finitas de conjuntos semianalíticos en X tales que $N_s \subset M_s$ y $\dim N_s < \dim M_s = p$ para todo $s \in J$. Sea $M = \bigcup (M_s : s \in J)$, $N = \bigcup (N_s : s \in J)$, y sea

$$j^s = j^{M_s - N_s, M_s - N} : H_p(M_s - N_s;R) \longrightarrow H_p(M_s - N;R)$$

$$i_s = i_{M_s - N, M - N} : H_p(M_s - N;R) \longrightarrow H_p(M-N;R) \qquad (s \in J)$$

y $\mu_* : \sum_J H_p(M_s - N;R) \longrightarrow H_p(M-N;R)$ el homomorfismo suma de la familia i_{s*} ($s \in J$) (cf. I, B, 6). Entonces, para toda familia $c_s \in H_p(M_s - N_s;R)$ ($s \in J$), se cumple :

$$\sum_{s \in J} I(M_s, N_s, c_s) = I(M, N, c) , \tag{3.3}$$

donde $c = \mu_* (j^s(c_s) \; (s \in J))$.

Demostración : Se observa que el primer miembro de la igualdad tiene sentido pues M_s es localmente finita. Basta probar 3.3 sobre un abierto relativamente compacto arbitrario $W \subset X$. Las restricciones de ambos miembros de 3.3 sobre W son iguales a $I_1 = \sum_{s \in J'} I(M_s \cap W, N_s \cap W, c_{sW})$ y $I_2 = I(M \cap W, N \cap W, c_W)$, respectivamente (cf. 2.1 (b)) ; aquí $c_{sW} = j^{M_s - N_s, (M_s - N_s) \cap W}(c_s)$, $c_W = j^{M-N, (M-N) \cap W}(c)$ y J' es el conjunto (finito) de los $s \in J$ tal que $M_s \cap W \neq \emptyset$.

Según 3.1, $\sum_{s \in J'} I(M_s \cap W, N_s \cap W, c_{sW}) =$

$$\sum_{s\in J'} I(M_s \cap W,\ N\cap W,\ j^{sW}(c_{sW})) = \sum_{s\in J'} I(M\cap W, N\cap W, i_{sW}\circ j^{sW}(c_{sW}))$$

$= \quad I(M \cap W,\ N \cap W,\ \sum_{s\in J'} i_{sW}\, j^{sW}(c_{sW}))$, donde $j^{sW} =$

$j^{(M_s - N_s)\cap W,\ (M_s - N)\cap W}$ y $i_{sW} = i_{(M_s - N)\cap W,\ (M-N)\cap W}$ $(s \in J')$.

Por definición de μ_*, $c_W = \sum_{s\in J'} j^{M-N,\ (M-N)\cap W} \circ i_s\ (j^s\ (c_s)))$, y obtenemos la igualdad $I_1 = I_2$ buscada pues entonces $c_W =$ $\sum_{s\in J'} i_{sW} \circ j^{sW}\ (c_{sW})$, como se deduce de la conmutatividad de :

$$\begin{tikzcd}
H_p(M_s - N_s) \arrow[r, "j^s"] \arrow[d, "j"'] & H_p(M_s - N) \arrow[r, "i_s"] \arrow[d, "j"'] & H_p(M-N) \arrow[d, "j"'] \\
H_p((M_s - N_s)\ \ W) \arrow[r, "j^{sW}"'] & H_p((M_s - N)\ \ W) \arrow[r, "i_{sW}"'] & H_p((M-N)\ \ W)
\end{tikzcd}$$

(cf. I, B, 5.2).

3.3.- <u>Corolario</u> : Sean $N_s \subset M_s$ conjuntos semianalíticos cerrados de X tales que $\dim N_s < \dim M_s = p$ y $c_s \in H_p(M_s - N_s;R)$ $(s = 1, 2)$. Sea $M = M_1 \cup M_2$, $N = N_1 \cup N_2$, $c'_s = i_{M_s - N,\ M-N} \circ j^{M_s - N_s,\ M_s - N}(c_s)$ $\in H_p(M-N;R)$ y $c = c'_1 + c'_2$. Entonces

$$I(M, N, c) = I(M_1, N_1, c_1) + I(M_2, N_2, c_2) .$$

C. - TEOREMA DE STOKES.

1. - Preliminares sobre descomposiciones normales.

En este párrafo introducimos una pequeña modificación en las descomposiciones normales, que nos será útil para la demostración del teorema de Stokes. Utilizamos constantemente las definiciones y notaciones de (I, A).

Sea $SN = (H_h^k(x_1 \dots x_k ; x_h) : 0 \leq k < h \leq n)$ un sistema normal en R^n centrado en $0 \in R^n$, y sea $Q = (\cdot\, |x_i| < d_i : i = 1 \dots n)$ un entorno normal respecto de SN. Para un p fijo, $0 < p < n$, definamos (cf. I,A, 2.5):

$$W^p = V^p \cap (H_{p-1}^{p-2} \neq 0) = (x \in Q : H_n^{n-1} = \dots = H_{p+1}^p = 0,\ H_p^{p-1} \neq 0,\ H_{p-1}^{p-2} \neq 0).$$

$${}_pW^p = {}_pV^p \cap (H_{p-1}^{p-2} \neq 0) = (x \in Q : H_p^{p-1} \neq 0 ,\ H_{p-1}^{p-2} \neq 0) .$$

Si $p = n$, definimos $W^n = {}_nW^n = (x \in Q : H_n^{n-1} \neq 0 ,\ H_{n-1}^{n-2} \neq 0)$.

Sean $W^p = \bigcup_\tau L_\tau^p$ y ${}_pW^p = \bigcup_\sigma {}_pL_\sigma$ las descomposiciones de W^p y ${}_pW^p$ en sus componentes conexas. Los conjuntos L_τ^p serán llamados "miembros modificados" (en dimensión p) de SN. Capa L_τ^p es un subconjunto abierto de alguna componente conexa Γ_π^p de V^p, luego es una subvariedad analítica de dimensión p (y un conjunto semianalítico) de R^n. Además, si SN es compatible con un conjunto $A \subset R^n$, también lo es la familia L_τ^p $(\tau = \cdots)$.

Supongamos SN compatible con un conjuunto semianalítico M de R^n tal que $\dim M = p$. Entonces $M = M \cap (\bigcup_0^p V^i) = M \cap W^p +$

$+ \ M \cap (V^p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) + \bigcup_0^{p-1} V^i)$. El último término es un conjunto semianalítico de dimensión $< p$, ya que $\bigcup_0^{p-1} V^i$ lo es, y que V^p es una variedad analítica de dimensión p tal que el polinomio H^{p-2}_{p-1} no se anula idénticamente sobre ninguna de sus componentes conexas.

También, $\overline{L}^p_\tau$ es un conjunto semianalítico de dimensión p de R^n (cf. I, A, 1) y $\partial \overline{L}^p_\tau = \overline{L}^p_\tau - L^p_\tau \subset M - (M \cap W^p)$.

Notemos :

$$\pi_p : \begin{cases} Q \longrightarrow Q_p \\ (x_1 \dots x_n) \longrightarrow (x_1 \dots x_p) \end{cases} , \ \pi^p_{p-1} : \begin{cases} Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \\ (x_1 \dots x_p) \longrightarrow (x_1 \dots x_{p-1}) \end{cases}$$

Sabemos que cada miembro ${}_p\Gamma^{p-1}_\gamma$ del sistema normal SN_p cumple $\pi^p_{p-1}({}_p\Gamma^{p-1}_i) \in SN_{p-1}$ (I, A, 2.5). Aquí los ${}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i$ son las componentes conexas de ${}_{p-1}V^{p-1} = ((x_1 \dots x_{p-1}) : H^{p-2}_{p-1} (x_1 \dots x_{p-2} ; x_{p-1}) \neq 0)$

Para cada ${}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i$, sean $f_{i,s} : {}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i \longrightarrow R$ $(0 < s < l_i$, $l_i \geq 1)$ las funciones analíticas cuyos gráficos en Q_p son los ${}_p\Gamma^{p-1}_\gamma = {}_p\Gamma^{p-1}_s$ tales que $\pi^p_{p-1} ({}_p\Gamma^{p-1}_s) = {}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i$, numeradas de manera que $f_{i,s} < f_{i,s+1}$ $(0 < s < l_i)$. Definamos $f_{i,0} = -d_p$ y $f_{i,l_i} = + d_p$ sobre ${}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i$.

Ahora podemos enunciar la siguiente

1.1. - <u>Proposición</u> : (a) - Supongamos $0 < p \leq n$. Cada ${}_pL_\sigma$ cumple $\pi^p_{p-1} ({}_pL_\sigma) = {}_{p-1}\Gamma^{p-1}_i$ para algún i, y entonces ${}_pL_\sigma = ((x_1 \dots x_p) \in Q_p : f_{i,s} (x_1 \dots x_{p-1}) < x_p < f_{i,s+1} (x_1 \dots x_{p-1}))$, para algún s $(0 \leq s \leq l_i)$. En ese caso :

$$Q_p \cap {}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) = \begin{cases} \text{i) } {}_p\Gamma_s^{p-1} \cup {}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_{s+1}^{p-1} & \text{si } 0 < s < s+1 < l_i \\ \text{ii) } {}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_s^{p-1} & \text{si } 0 < s = l_i - 1 \\ \text{ii) } {}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_s^{p-1} & \text{si } 0 = s < s+1 < l_i \\ \text{iii) } {}_pL_\sigma & \text{si } 0 = s = l_i - 1 \end{cases}$$

(b) - Supongamos $0 < p < n$. Entonces cada L^p_τ cumple $\pi_p(L^p_\tau) = {}_pL_\sigma$ para algún σ ; en ese caso $\pi_p \mid \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ es un homeomorfismo sobre ${}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, y $\pi_p \mid L^p_\tau$ es un isomorfismo analítico sobre ${}_pL_\sigma$.

(c) - Para cada τ,

$$Q \cap \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) = \begin{cases} \text{i) } \Gamma_\alpha^{p-1} \cup L^p_\tau \cup \Gamma_\beta^{p-1} \\ \text{ii) } \Gamma_\alpha^{p-1} \cup L^p_\tau \\ \text{iii) } L^p_\tau \end{cases}$$

según $\pi_p(L^p_\tau) = {}_pL_\sigma$ verifique las alternativas i), ii) ó iii) en (a); si vale i), entonces $\pi_p(\Gamma_\alpha^{p-1}) = {}_p\Gamma_s^{p-1}$ y $\pi_p(\Gamma_\beta^{p-1}) = {}_p\Gamma_{s+1}^{p-1}$; si vale ii), entonces $\pi_p(\Gamma_s^{p-1}) = {}_p\Gamma_s^{p-1}$; en cualquier caso las aplicaciones $\pi_p \mid \Gamma^{p-1} \ldots$ son isomorfismos analíticos .

Demostración : (a) - Si $x' = (x'_1 \ldots x'_p) \in {}_pW^p$, entonces $\pi^p_{p-1}(x') \in {}_{p-1}V^{p-1} = Q_{p-1} - (H^{p-2}_{p-1} = 0)$; supongamos que $\pi^p_{p-1}(x')$ pertenece a la componente conexa ${}_{p-1}\Gamma_\kappa^{p-1}$ de ${}_{p-1}V^{p-1}$. Entonces existe s $(0 < s < l_i)$ tal que $f_{i,s}(x'_1 \ldots x'_{p-1}) < x'_p < f_{i,s+1}(x'_1 \ldots x'_{p-1})$. Por lo dicho antes de 1.1 es fácil ver que la componente conexa ${}_pL_\sigma$ de x' en ${}_pW^p$ es

$\{(x_1 \ldots x_p) \in Q_p : f_{i,s}(x_1 \ldots x_{p-1}) < x_p < f_{i,s+1}(x_1 \ldots x_{p-1})\}$ y que $\pi^p_{p-1}({}_pL_\sigma) = {}_{p-1}\Gamma_\varkappa^{p-1}$. Pero entonces $\bar{Q}_p \cap {}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) = f_{i,s}({}_{p-1}\Gamma_\varkappa^{p-1}) \cup {}_pL_\sigma \cup f_{i,s+1}({}_{p-1}\Gamma_\varkappa^{p-1})$, lo que implica (a).

Para probar (b), usaremos algunos lemas :

1.2.- Lema : Sea $M_p = \{x \in Q : H^p_{p+1} = \cdots = H^p_n = 0\}$; entonces $\pi_p \mid M_p : M_p \longrightarrow Q_p$ es propia (*).

Demostración : Si $K \subset Q_p$ es compacto, entonces K es cerrado en $\bar{Q}_p$ y $\pi_p^{-1}(K) \cap \bar{Q}$ es cerrado, luego compacto; entonces $\pi_p^{-1}(K) \cap \bar{M}_p \cap \bar{Q}$ es compacto. Como $\pi_p^{-1}(K) \cap \pi_p^{-1}(\bar{Q}_p - Q_p) = \pi_p^{-1}(K \cap (\bar{Q}_p - Q_p)) = \emptyset$ y $\bar{M}_p \cap (\bar{Q} - \pi_p^{-1}(\bar{Q}_p - Q_p)) = \emptyset$ (según I, A, 2 (c)), resulta $\pi_p^{-1}(K) \cap M_p = \pi_p^{-1}(K) \cap \bar{M}_p \cap \bar{Q}$ = compacto, como buscamos.

1.3.- Lema : Sean X e Y espacios topológicos separados, sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua, sea $F \subset Y$ un cerrado y $Z = f^{-1}(F)$. Si f es abierta (o propia) entonces $f \mid X - Z \longrightarrow Y - F$ es abierta (o propia)

1.4.- Lema : $\pi_p \mid M_p \cap (H^{p-1}_p \neq 0) \longrightarrow Q_p \cap (H^{p-1}_p \neq 0)$ es propia.

1.5.- Lema : $\pi_p \mid V^p \longrightarrow {}_pV^p$ es abierta y propia.

(*) esto es, la imagen inversa por $_p$ M_p de todo compacto es compacta.

Demostración : Según (I, A, 2(a)), V^p es un subespacio (cerrado) de $M_p \cap (H^{p-1}_{p-2} \neq 0)$; entonces, por 1.4, $\pi_p \mid V^p \longrightarrow {}_pV^p = Q_p$ $(H^{p-1}_{p-2} \neq 0)$ es propia. También es abierta pues, según (I, A, 2.3 y 2.5), V^p es unión de gráficos de funciones analíticas cuyos dominios son las componentes conexas de ${}_pV^p$.

Prosigamos la demostración de 1.1 . Por 1.3 y 1.5 se deduce que $\pi_p \mid W^p \longrightarrow {}_pW^p$ es abierta y propia; por lo tanto, π_p aplica toda componente conexa L^p_τ de W^p exactamente sobre alguna componente conexa ${}_pL_\sigma$ de ${}_pW^p$. Supongamos $\pi_p(L^p_\tau) = {}_pL_\sigma$. Se verifica ${}_pL_\sigma \subset \pi_p(\bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)) \subset {}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$. Como $L^p_\tau \subset V^p \subset M_p$, $\bar{L}^p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ es un subconjunto cerrado de $M_p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$; como $\pi_p \mid M_p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) \longrightarrow Q_p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ es propia, resulta $\pi_p (\bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ cerrado en $Q_p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, luego igual a ${}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, que es lo buscado. Además, $\pi_p \mid L^p_\tau$ es un isomorfismo analítico ya que L^p_τ es un subconjunto abierto de algún Γ^p_κ , y $\pi_p \mid \Gamma^p_\kappa$ es un isomorfismo analítico (cf. I, A, 2.3) .

Para ver que $\pi_p \mid \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ es un homeomorfismo sobre ${}_pL_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ basta probar que es inyectiva, ya que es continua y propia. $\pi_p \mid L^p_\tau$ es trivialmente inyectiva; supongamos que existe $y' \in ({}_p\bar{L}_\sigma - {}_pL_\sigma) \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ tal que $\pi_p^{-1} (y') \cap \bar{L}^p_\tau = y^i$ ($i = 1 \ldots s$) con $s > 1$. Sean $U^i = U_p \times U^i_{n-p}$ entornos disjuntos de los puntos y^i . Probemos que existe un entorno U'_p de y' en Q_p tal que $L^p_\tau \cap \pi_p^{-1}(U'_p) \subset \bigcup_i U_i$: de lo contrario existiría una sucesión $U_{p,n}$ ($n \in Z$) de entornos de y' en Q_p que tiende a y', y una sucesión de puntos $y_n \in (\pi_p^{-1}(U_{p,n}) \cap L^p_\tau) - \bigcup_i U^i$; entonces la sucesión (relativamente compacta) y_n tendría un punto de acumulación $y \in \pi_p^{-1}(y') \cap \bar{L}^p_\tau$ distinto de los y^i $(i = 1 \ldots s)$, lo que es absurdo. Entonces existe tal U'_p.

Ahora bien, es fácil ver que, de acuerdo con la descripción (a) de ${}_pL_\sigma$, existe un entorno U''_p de y' en Q_p tal que $U''_p \subset U'_p$ y $U''_p \subset {}_pL_\sigma$ es conexo. Entonces $\pi_p^{-1}(U''_p \cap {}_pL_\sigma)$ es un conjunto conexo incluído en $\bigcup_i U_i$, luego incluído en un U_{i_o}. Esto implica $y^i \notin L^p_\tau$ si $i \neq i_o$, lo que es absurdo. La parte (b) queda demostrada.

(c).- Consideremos una componente L^p_τ de W^p tal que ${}_pL_\sigma = \pi_p(L^p_\tau)$ verifica $Q_p \cap {}_p\bar{L}_\sigma \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) = {}_p\Gamma^{p-1}_s \cup {}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma^{p-1}_{s+1}$.
Por (b), $L' = (\pi_p \mid \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0))^{-1} ({}_p\Gamma^{p-1}_s)$ y $L'' = (\pi_p \mid \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0))^{-1} ({}_p\Gamma^{p-1}_{s+1})$ son conjuntos conexos de $Q \cap \cap \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, $L' \cap L'' = \emptyset$ y $Q \cap \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) - L^p_\tau = L' \cup L''$. Como L^p_τ es una componente conexa de $V^p \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, se verifica $Q \cap \bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) - L^p_\tau \subset Q \cap (\bar{V}^p - V^p) \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) \subset V^{p-1}$ (por I, A, 2.2); por lo tanto, si $x \in L'$, entonces $x \in \Gamma^{p-1}_\alpha$ para algún α y $x \notin \bigcup_{\beta \neq \alpha} \Gamma^{p-1}_\beta$ que es cerrado en $Q \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ (cf. I, A, 2.2). Por lo tanto existe un entorno U de x en Q tal que $L' \cap U \subset \Gamma^{p-1}_\alpha$, lo que implica, por la conexión de L', que $L' \subset \Gamma^{p-1}_\alpha$.

Según (I, A, 2.5), $\pi_p(\Gamma^{p-1}_\alpha) = {}_p\Gamma^{p-1}_{\alpha'}$ para algún α' ; como $L' \subset \Gamma^{p-1}_\alpha$ y $\pi_p(L') = {}_p\Gamma^{p-1}_s$, resulta ${}_p\Gamma^{p-1}_s = {}_p\Gamma^{p-1}_{\alpha'} = \pi_p(\Gamma^{p-1}_\alpha)$; entonces, como $\pi_p | \Gamma^{p-1}_\alpha$ es inyectivo, resulta $L' = \Gamma^{p-1}_\alpha$; análogamente se prueba $L'' = \Gamma^{p-1}_\beta$. La alternativa (ii) se demuestra de manera similar. C.Q.D.

2. - El teorema de Stokes. Ahora podemos probar el principal resultado de esta sección :

2.1. - Teorema : Sea X una variedad analítica real de dimensión n, con base numerable de abiertos. Sean $N \subset M$ conjuntos semianalíticos cerrados de X, tales que $\dim N < \dim M = p$, $0 < p \leq n$. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo (*)

$$\begin{tikzcd} H_p(M-N;R) \arrow[r, "I(M,N)"] \arrow[d, "\partial_{M,N}"'] & D'_p(X) \arrow[d, "b"] \\ H_{p-1}(N;R) \arrow[r, "I(N)"'] & D'_{p-1}(X) \end{tikzcd}$$

Aquí b es el homomorfismo borde del espacio de corrientes $D'_p(X)$ y $\partial_{M,N}$ está definido en la sucesión exacta de homología

$$\cdots \longrightarrow H_p(M;R) \xrightarrow{j^{M,M-N}} H_p(M-N;R) \xrightarrow{\partial_{M,N}} H_{p-1}(N;R) \longrightarrow \cdots$$

correspondiene al par $N \subset M$. (**)

Demostración : Fijemos $c \in H_p(M-N;R)$. Se debe probar $bI(M,N,c) = I(N, \partial_{M,N}(c))$. Sea $x \in X$. Utilizando de la manera usual particiones de la unidad sobre X, se vé que basta probar la igualdad de las dos últimas corrien-

(*) Los homomorfismos $I(M,N)$ y $I(N) = I(N, \emptyset)$ fueron definidos en (A, 2.1). Se conviene $I(N) = 0$ si $\dim N < p-1$.

(**) El caso particular de este teorema correspondiente a $N = \partial M$ ha sido anunciado en (7).

tes sobre un entorno con veniente de x. Sea $g : U \longrightarrow g(U) \subset R^n$, $x \in U$, un mapa coordenado de X centrado en x (o sea, $g(x) = 0 \in R^n$). Entonces $g(M \cap U)$, $g(\partial M \cap U) = \partial(g(M \cap U))$ y $g(N \cap U)$ son conjuntos semianalíticos en $g(U)$. Según (A, 1.2) existen mapas $x^s = (x_1^s \ldots x_n^s)$, $s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$, en $O'(g(M \cap U), g(\partial M \cap U), g(N \cap U))$, si $p < n$, o en $O'(g(\partial M \cap U), g(N \cap U))$, si $p = n$, tales que la familia $A^s = (x_p^s = \ldots = x_n^s = 0)$, $s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$, de subespacios vectoriales de dimensión p de R^n. es regular.

Para cada $s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$, sea SN_s un sistema normal según el mapa x^s compatible con $g(M \cap U)$, $g(\partial M \cap U)$ y $g(N \cap U)$, si $p < n$, o compatible con $g(\partial M \cap U)$ y $g(N \cap U)$, si $p = n$. Sean Q^s entornos normales respecto de los sitemas SN_s. Sea $Q = \bigcap (Q^s : s = 1 \ldots \binom{n}{p-1})$ y $W = g^{-1}(Q)$. Entonces probaremos $bI(M, N, c)|W = I(N, \partial_{M,N}(c))|W$, y con esto el teorema.

Según (A, 2.1 (b)) se cumple $bI(M, N, c)|W = bI(M \cap W, N \cap W, c_W)$, donde $c_W = j^{M-N,(M-N)\cap W}(c)$ y $I(N, \partial_{M,N}(c))|W = I(N \cap W, j^{N, N\cap W} \circ \partial_{M,N}(c))$. Como $j^{N, N\cap W} \circ \partial_{M,N} = \partial_{M\cap W, N\cap W} \circ j^{M-N,(M-N)\cap W}$ (cf. I, B, 5.2), se debe probar :

$$(2.2) \qquad bI(M \cap W, N \cap W, c_W) = I(N \cap W, \partial_{M\cap W, N\cap W}(c_W))$$

donde $c_W \in H_p((M-N) \cap W; R)$ y $\partial_{M\cap W, N\cap W} : H_p((M-N)\cap W; R) \longrightarrow H_{p-1}(N \cap W; R)$. Notemos $M' = g(M \cap W)$ y $N' = g(N \cap W)$, conjuntos semianalíticos en Q. Sea $c' = g_p(c_W)$, donde

$g_p : H_p((M-N)\cap W;R) \longrightarrow H_p(M'-N';R)$ es el isomorfismo inducido por $g|(M-N)\cap W \longrightarrow M'-N'$, y sea $t' = g_{p-1}(\partial_{M\cap W, N\cap W}(c_W))$, donde $g_{p-1} : H_{p-1}(N\cap W;R) \longrightarrow H_{p-1}(N';R)$ es el isomorfismo inducido por $g|N\cap W \longrightarrow N'$. Relaciones de conmutatividad evidentes (cf. I, B, 7)) aseguran que $t' = \partial_{M',N'}(c')$. Por lo tanto, el isomorfismo $g|W \longrightarrow Q$ transforma los miembros de (2.2) en $bI(M',N',c)$ y $I(N', \partial_{M',N'}(c'))$, respectivamente, y el teorema se reduce a probar la igualdad :

$$(2.3) \qquad b\, I(M',N',c) = I(N',t'),$$

donde $c' \in H_p(M'-N';R)$, $t' = \partial_{M',N'}(c')$ y $\partial_{M',N'}$ está definido en la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_p(M';R) \longrightarrow H_p(M'-N';R) \xrightarrow{\partial_{M',N'}} H_{p-1}(N';R) \longrightarrow \cdots$$

Se observa que $M' = g(M\cap U)\cap Q$, $\partial M' = \partial g(M\cap U)\cap Q$ y $N' = g(N\cap U)\cap Q$ son conjuntos semianalíticos cerrados en Q.

Fijemos un sistema normal SN_s, de los ya elegidos, y su entorno normal Q^s. En los lemas siguientes no consideraremos los otros sistemas normales, por lo que suprimiremos el subíndice s de todas las notaciones.

. Como la descomposición $Q = \bigcup_{k,\varkappa} \Gamma^k_\varkappa$ asociada a SN es compatible con M', $\partial M'$, y N', lo mismo sucede con la familia L^p_τ ($\tau = \ldots$) de miembros modificados (en dimensión p) de SN (cf. n.1). Por lo tanto, si $L^p_\tau \subset M'$, entonces $L^p_\tau \subset M' - (N' \cup \partial M')$, ya que $\dim (N' \cup \partial M') < \dim L^p_\tau$, y se tiene $M_* = \bigcup (L^p_\tau : L^p_\tau \subset M') = M\cap W^p \subset M'-N'$.

2.4. - <u>Lema</u> : Sea $J = (\tau : L^p_\tau \subset M')$. Entonces

$$I(M',N',c') = \sum_{\tau\in J} I(\overline{L}^p_\tau, \partial\overline{L}^p_\tau, c_\tau)$$

donde $c_\tau = j^{M'-N', L^p_\tau}(c')$, $j^{M'-N', L^p_\tau} : H_p(M'-N';R) \longrightarrow H_p(L^p_\tau;R)$.

<u>Demostración</u> : Sea $N'_o = M' - (M' \cap W^p) = M - \bigcup(L^p_\tau : \tau \in J)$; según el número 1 y lo dicho anteriormente, $N' \cup \partial M' \subset N'_o$ y $\dim N'_o < p$. Por (II, A, 3.1), $I(M',N',c') = I(M',N'_o, c'_o)$, donde $c'_o = j^{M'-N', M'-N'_o}(c') \in H_p(M'-N'_o;R)$.

Además, $(L^p_\tau : \tau \in J)$ es la familia de las componentes conexas de $M' - N'_o = M' \cap W^p$; Por lo tanto $\partial\overline{L}^p_\tau = \overline{L}^p_\tau - L^p_\tau \subset N'_o$ y L^p_τ es cerrado en $M' - N'_o$ para todo $\tau \in J$. Además, $c'_o = \sum(i_{L^p_\tau, M'-N'_o} \circ j^{M'-N'_o, L^p_\tau}(c'_o) : \tau \in J)$, donde $i_{L^p_\tau, M'-N'_o} : H_p(L^p_\tau;R) \longrightarrow H_p(M'-N'_o;R)$, $j^{M'-N'_o, L^p_\tau} : H_p(M'-N'_o;R) \longrightarrow H_p(L^p_\tau;R)$. Entonces, por (II, A, 3.2), se cumple $I(M',N'_o, c'_o) = \sum(I(\overline{L}^p_\tau, \partial\overline{L}^p_\tau, j^{M'-N'_o, L^p_\tau}(c'_o)) : \tau \in J)$; como $j^{M'-N'_o, L^p_\tau}(c'_o) = j^{M'-N'_o, L^p_\tau} \circ j^{M'-N', M'-N'_o}(c') = j^{M'-N', L^p_\tau}(c') = c_\tau$, obtenemos lo buscado.

2.5. - <u>Lema</u> : Sea $M_* = \bigcup(L^p_\tau : \tau \in J)$; sea $J_1 = (h : \Gamma^{p-1}_h \subset N) \subset J_o = (h : \Gamma^{p-1}_h \subset M)$. Entonces :

$$I(N', \partial_{M',N'}(c')) = \sum(I(\overline{\Gamma}^{p-1}_h, \partial\overline{\Gamma}^{p-1}_h, t_h) : h \in J_o),$$

donde $t_h = \partial_h \circ j^{M'-N', M_*}(c')$ y ∂_h está definido en la sucesión exacta de homología asociada al par $\Gamma_h^{p-1} \subset M_* \cup \Gamma_h^{p-1}$:

$$(2.6) \quad \ldots \longrightarrow H_p(M_* \cup \Gamma_h^{p-1}) \dashrightarrow H_p(M_*) \longrightarrow H_{p-1}(\Gamma_h^{p-1}) \longrightarrow \ldots$$

<u>Demostración</u> : Primero, la sucesión 2.6 está definida, ya que, para cada $h \in J_o$, M_* es abierto en $M_* \cup \Gamma_h^{p-1}$, porque $M_* \subset V^p$ y $\bar{\Gamma}_h^{p-1} - \Gamma_h^{p-1} \subset \bigcup_o^{p-2} V^i$. Entonces, como SN es compatible con N', se deduce $N' = \bigcup(\Gamma_h^{p-1} : h \in J_1) + N' \cap (\bigcup_o^{p-2} V^i)$, donde $\dim (N' \cap (\bigcup_o^{p-2} V^i)) \leqslant p-1$ y $\partial \Gamma_h^{p-1} = \bar{\Gamma}_h^{p-1} - \Gamma_h^{p-1} \subset N' \cap (\bigcup_o^{p-2} V^i)$ $(h \in J_1)$. Pero entonces, aplicando (II, A, 3.2) y razonando commo en el fin del lema anterior, deducimos :

$$(2.7) \qquad I(N', \partial_{M',N'}(c')) = \sum (I(\bar{\Gamma}_h^{p-1}, \partial\bar{\Gamma}_h^{p-1}, t_h) : h \in J_1),$$

donde $t^h = j^{N', \Gamma_h^{p-1}}(\partial_{M',N'}(c')) \in H_p(\Gamma_h^{p-1};R)$ $(h \in J_1)$. Se observa que $J_1 \neq \emptyset$ si y sólo si $\dim N' = p-1$; si $J_1 = \emptyset$, ambos miembros en 2.7 son nulos ; si $J_1 \neq \emptyset$, Γ_h^{p-1} es un subconjunto abierto de N' para cada $h \in J_1$, ya que por la compatibilidad de SN con $\partial N'$ se deduce $\Gamma_h^{p-1} \subset N' - \partial N'$.

Probemos que los segundos miembros de 2.6 y 2.7 son iguales. Basta ver que i) $h \in J_o - J_1$ implica $t_h = 0$; ii) $h \in J_1$ implica $t_h = t^h$:

i) Si $h \in J_o - J_1$, $M_* \cup \Gamma_h^{p-1}$ es un subconjunto abierto de $M' - N'$. En efecto, $M' - (M_* \cup \Gamma_h^{p-1}) = (M' - \Gamma_h^{p-1}) \cap (M' - M_*) =$

$= (M' - \Gamma_h^{p-1}) \cap (V^p \cap (H_{p-1}^{p-2} = 0) + \bigcup_o^{p-1} V^i) = A_1 + A_2$ (cf. n.1) ;
aquí $A_2 = (M' - \Gamma_h^{p-1}) \cap (\bigcup_o^{p-1} V^i) = \bigcup (\Gamma_\kappa^k : \Gamma_\kappa^k \subset M' - \Gamma_h^{p-1}$, $k \leqslant p-1)$ y, como $\bar{\Gamma}^k - \Gamma^k \subset \bigcup_o^{k-1} V^i$, $\bar{A}_2 = A_2$; Por otra parte, sea $x \in \bar{A}_1 - A_1$ ($A_1 = (M' - \Gamma_h^{p-1}) \cap (V^p \cap (H_{p-1}^{p-2} = 0))$; necesariamente $x \in M'$, luego $x \in M' - \Gamma_h^{p-1}$, ya que $H_{p-1}^{p-2} \neq 0$ sobre Γ_h^{p-1} ; entonces $x \notin A_1$ implica $x \in (V^p \cap (H_{p-1}^{p-2} = 0))^- - V^p \cap (H_{p-1}^{p-2} = 0) \subset \bigcup_o^{p-2} V^i$, lo que prueba $\bar{A}_1 - A_1 \subset A_2$. Entonces $A_1 + A_2$ es un conjunto cerrado en M', $M_* \cup \Gamma_h^{p-1}$ es un abierto en M' y, finalmente, un abierto en $M' - N'$.

Pero entonces $t_h = \partial_h \circ j^{M_* \cup \Gamma_h^{p-1}, M_*} \circ j^{M'-N', M_* \cup \Gamma_h^{p-1}} (c') = 0$.

ii) Supongamos $h \in J_1$; entonces $\Gamma_h^{p-1} \subset N'$. La conmutatividad del diagrama siguiente, obtenido considerando el par $N' \subset M'$ y el subespacio abierto $U = M'_* \cup \Gamma_h^{p-1} \subset M'$ (cf. I, B, 5.2) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_p(M'-N';R) & \xrightarrow{\quad M', N' \quad} & H_{p-1}(N';R) & \longrightarrow \cdots \\
 & \Big\downarrow j^{M'-N', M'_*} & & \Big\downarrow j^{N', \Gamma_h^{p-1}} & \\
\cdots \longrightarrow & H_p(M'_*;R) & \xrightarrow{\qquad\qquad} & H_{p-1}(\Gamma_h^{p-1};R) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

asegura $t_h = t^h$, para todo $h \in J_1$. Esto demuestra 2.5 .

2.8. - Lema : Para cada L_τ^p ($\tau \in J$) y cada forma $a \in D_{p-1}(Q)$ del tipo $a(x) = a_o(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1}$ (donde $x = (x_1 \ldots x_n)$ es el mapa coordenado de R^n fijado en la página 66) , se cumple :

$$(2.9)\qquad b\, I(\bar{L}^p_\tau,\ \partial \bar{L}^p_\tau,\ c)(a) = \sum (\, I(\bar{\Gamma}^{p-1}_h,\ \partial\bar{\Gamma}^{p-1}_h,\ t_h)(a)\ :\ h \in J_o\,),$$

donde $c \in H_p(L^p_\tau; R)$ y $t_h = \partial_{\tau h}(c) \in H_{p-1}(\Gamma^{p-1}_h; R)$ está definido mediante la sucesión exacta de homología :

$$\cdots \longrightarrow H_p(L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_h) \longrightarrow H_p(L^p_\tau) \xrightarrow{\partial_{\tau h}} H_{p-1}(\Gamma^{p-1}_h) \longrightarrow \cdots$$

<u>Demostración</u> : Se observa que la sucesión exacta está definida, ya que $\bar{\Gamma}^{p-1}_h \subset \bigcup_o^{p-1} V^i$, conjunto que es disjunto con L^p_τ, lo que implica que Γ^{p-1}_h es cerrado en $L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_h$ para todo $\tau \in J$ y $h \in J_o$.

Consideremos primero el caso $0 < p < n$. Fijemos un L^p_τ con $\tau \in J$. Todo Γ^{p-1}_h ($h \in J_o$) tal que $\Gamma^{p-1}_h \cap \bar{L}^p_\tau = \emptyset$ es una componente conexa de $L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_h$, y por lo tanto $\partial_{\tau h} = 0$. Ahora bien, la familia de los Γ^{p-1}_h que intersecan $\bar{L}^p_\tau$ coincide con la de los Γ^{p-1}_h que intersecan $\bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$, ya que $H^{p-2}_{p-1} \neq 0$ sobre cada Γ^{p-1}_h, y ya sabemos que $\bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0)$ verifica las alternativas (i), (ii) o (iii) de la proposición 1.1 del n.1 .

Supongamos $\bar{L}^p_\tau \cap (H^{p-2}_{p-1} \neq 0) = L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_\alpha$ con $\alpha \in J_o$. Entonces (2.9) se reduce a :

$$(2.10)\qquad I(\bar{L}^p_\tau,\ \partial \bar{L}^p_\tau, c)(da) = I(\bar{\Gamma}^{p-1}_\alpha,\ \partial\bar{\Gamma}^{p-1}_\alpha,\ t_\alpha)(a),$$

donde $t_\alpha = \partial_{\tau\alpha}(c)$. De acuerdo con 1.1 (c), sean ${}_pL_\sigma \in {}_pW^p$ y ${}_p\Gamma^{p-1}_i$ los conjuntos en Q_p tales que $\pi_p | L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_\alpha$ es un homeomorfismo sobre ${}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma^{p-1}_i$ y que $\pi_p | L^p_\tau$ y $\pi_p | \Gamma^{p-1}_\alpha$ son isomorfismos analíticos sobre ${}_pL_\sigma$ y ${}_p\Gamma^{p-1}_i$, respectivamente. Sea $g = (\pi_p | L^p_\tau \cup \Gamma^{p-1}_\alpha)^{-1}$

el homeomorfismo inverso. Supongamos que ${}_pL_\sigma = \{ (x_1 \ldots x_p) \in Q_p :$ $(x_1 \ldots x_{p-1}) \in {}_{p-1}\Gamma_i^{p-1}$ y $-d_p < x_p < f(x_1 \ldots x_{p-1}) \}$, donde $f : {}_{p-1}\Gamma_i^{p-1} \longrightarrow R$ es analítica y su gráfico en Q_p es ${}_p\Gamma_i^{p-1}$.

Según (A, 2.5.8), se cumple $I(\bar{\Gamma}_\alpha^{p-1}, \partial\bar{\Gamma}_\alpha^{p-1}, t_\alpha)(a) = \int_{\Gamma_\alpha^{p-1}, t_\alpha} a \big| \Gamma_\alpha^{p-1}$ y $I(\bar{L}_\tau^p, \partial\bar{L}_\tau^p, c)(da) = \int_{L_\tau^p, c} da \big| L_\tau^p$. Como $\pi_p \big| L_\tau^p$ y $\pi_p \big| \Gamma_\alpha^{p-1}$ son isomorfismos analíticos, se concluye $\int_{\Gamma_\alpha^{p-1}, t_\alpha} a \big| \Gamma_\alpha^{p-1} =$ $\int_{{}_p\Gamma_i^{p-1}, t_i} (\pi_p \big| \Gamma_\alpha^{p-1})(a \big| \Gamma_\alpha^{p-1})$ y $\int_{L_\tau^p, c} da\, L^p = \int_{{}_pL_\sigma, c_\sigma} d(\pi_p \big| L_\tau^p)(a \big| L^p)$, donde $t_i = (\pi_p \big| \Gamma_\alpha^{p-1})_{p-1}(t_\alpha)$, $(\pi_p \big| \Gamma_\alpha^{p-1})_{p-1} : H_{p-1}(\Gamma_\alpha^{p-1}; R) \longrightarrow H_{p-1}({}_p\Gamma_i^{p-1}; R)$ y $c_\sigma = (\pi_p \big| L_\tau^p)_p(c)$, $(\pi_p \big| L_\tau^p)_p : H_p(L_\tau^p; R) \longrightarrow H_p({}_pL_\sigma; R)$; como g es un homeomorfismo, $t_i = \partial(c_\sigma)$, donde ∂ es el homomorfismo definido en la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H_p({}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_i^{p-1}) \longrightarrow H_p({}_pL_\sigma) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}({}_p\Gamma_i^{p-1}) \longrightarrow \cdots$$

Las formas C^∞ $(\pi_p \big| L_\tau^p)^*(a)$ y $(\pi_p \big| \Gamma_\alpha^{p-1})^*(a)$ son las restricciones sobre ${}_pL_\sigma$ y ${}_p\Gamma_i^{p-1}$, respectivamente, de $a_0(g)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1} = a(g(x_1 \ldots x_p))\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1}$, forma continua sobre ${}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_i^{p-1}$ ya que $g : {}_pL_\sigma \cup {}_p\Gamma_i^{p-1} \longrightarrow L_\tau^p \cup \Gamma_\alpha^{p-1}$ es un homeomorfismo. Además,

$d(\pi_p \big| L_\tau^p)^*(a) = \dfrac{\partial a_0(g)}{\partial x_p} dx_p \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1}$, y entonces, si $c_\sigma = \lambda_\sigma \otimes e_\sigma$, donde $\lambda_\sigma \in R$ y $e_\sigma \in H_p({}_pL_\sigma; Z)$ es un generador, se verifica:

$$(2.11)\qquad \int_{{}_pL_\sigma,\, c_\sigma} d(\pi_p | L^p_\tau)^*(a) = \lambda_\sigma \int_{{}_pL_\sigma,\, e_\sigma} \frac{\partial a(g)}{\partial x_p} dx_p \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1} =$$

$$= \varepsilon \lambda_\sigma \int_{{}_pL_\sigma,\, e'_\sigma} \frac{\partial a(g)}{\partial x_p}\; dx_p \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1} ,$$

donde $e'_\sigma \in H_p({}_pL_\sigma ;Z)$ es el generador definido por el mapa $(x_p, x_1 \ldots x_{p-1})$ de R^p y donde $\varepsilon = +1$ ó -1 según $e_\sigma = e'_\sigma$ ó $e_\sigma = -e'_\sigma$.

Para cada $(x_1 \ldots x_{p-1}) \in {}_{p-1}\Gamma_i^{p-1}$, se cumple :

$$\int_{-d_p}^{f(x_1 \ldots x_{p-1})} \frac{\partial}{\partial u} a(g(x_1 \ldots x_{p-1}, u))du = a(g(x_1 \ldots x_{p-1}, f(x_1 \ldots x_{p-1}))) ,$$

ya que g es continua sobre $((x_1 \ldots x_{p-1}, u) : -d_p < u \leqslant f(x_1 \ldots x_{p-1}))$ y analítica sobre $((x_1 \ldots x_p, u) : -d_p < u < f(x_1 \ldots x_{p-1}))$ y que $a \in D_o(Q)$; entonces, integrando parcialmente en el último término de (2.11) respecto x_p , se obtiene (cf. (19), III, 19) :

$$(2.12)\qquad \int_{pL_\sigma,\, c} d(\pi_p | L^p_\tau)^*(a) = \lambda_\sigma \varepsilon \int_{{}_{p-1}\Gamma_i^{p-1},\, e_{p-1}} a(g(x_1 \ldots x_{p-1}, f(x_1 \ldots x_{p-1}))) . dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{p-1} ,$$

donde $e_{p-1} \in H_{p-1}({}_{p-1}\Gamma_i^{p-1} ;Z)$ es la clase fundamental canónica de ${}_{p-1}\Gamma_i^{p-1} \subset R^{p-1}$ (cf. I, B) . A su turno, la última integral es igual a :

$$\lambda_\sigma \varepsilon \int_{{}_p\Gamma_i^{p-1},\, e'} (\pi_p | \Gamma_\alpha^{p-1})^*(a | \Gamma_\alpha^{p-1}) = \lambda_\sigma \int_{{}_p\Gamma_i^{p-1},\, \varepsilon e'} (\pi_p | \Gamma_\alpha^{p-1})^*(a | \Gamma_\alpha^{p-1}) ,$$

donde $e' \in H_{p-1}({}_p\Gamma_i^{p-1} ;Z)$ es la clase fundamental definida por el mapa

$$\pi^p_{p-1} | {}_p\Gamma_i^{p-1} : {}_p\Gamma_i^{p-1} \longrightarrow {}_{p-1}\Gamma_i^{p-1} ,\quad (x_1 \ldots x_{p-1}, x_p) \longrightarrow (x_1 \ldots x_{p-1}) ,$$

de ${}_p\Gamma_i^{p-1}$ (cf. I, B, 13).

Por lo tanto, debemos probar la igualdad de las corrientes $\lambda_\sigma \int_{{}_p\Gamma_i^{p-1}, \varepsilon e'}$ y $\int_{{}_p\Gamma_i^{p-1}, t_i}$. Si $c_\sigma = \lambda_\sigma \otimes e_\sigma$, tenemos $t_i = \partial_{{}_pL_\sigma, {}_p\Gamma_i^{p-1}}(c_\sigma) = \lambda_\sigma \otimes \partial_1(e_\sigma)$ (cf. I, B, 10), donde $\partial_1 : H_p({}_pL_\sigma;Z) \longrightarrow H_{p-1}({}_p\Gamma_i^{p-1};Z)$; por consiguiente, basta probar $\varepsilon e' = \partial_1(e_\sigma)$, ó $e' = \partial_1(\varepsilon e_\sigma)$, donde $\varepsilon e_\sigma = e'_\sigma$.

Mediante un homeomorfismo conveniente, el problema se reduce al siguiente:

2.13. - <u>Lema</u> : Sea U abierto en $R^{p-1} = ((0, x_1 \dots x_{p-1})) \subset R^p$; sea $e_p^* \in H_p(R_< \times U;Z)$ la clase fundamental canónica de $R_< \times U$ (cf. notación de I, B, 13). Entonces $\partial(e_p^*) = e'_{p-1}$, donde ∂ está definido en la sucesión exacta de homología :

$$0 \longrightarrow H_p(R_\leqslant \times U;Z) \xrightarrow{j} H_p(R_< \times U;Z) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(U;Z) \longrightarrow \dots$$

y e'_{p-1} es la clase fundamental canónica de U .

La demostración es inmediata. Basta restringir (I, B, 13.1) sobre $R_< \times U$ para el caso $n = p$.

2.14. - <u>Lema</u> : Para cada forma $a \in D_{p-1}(Q)$ del tipo $a(x) = a_o(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p-1}$, donde $x = (x_1 \dots x_n)$ es un mapa de la familia x^s ($s = 1 \dots \binom{n}{p-1}$), se cumple :

$$b\, I(M', N', c')(a) = I(N', \partial_{M',N'}(c'))(a) .$$

<u>Demostración</u> : Por 2.4 y 2.8 se cumple :

$$b\, I(M', N', c') = \sum_{\tau \in J} b\, I(\bar{L}^p_\tau, \partial \bar{L}^p_\tau, c_\tau)(a) =$$

$$= \sum_{\tau \in J} \Big(\sum_{h \in J_o} I(\bar{\Gamma}^{p-1}_h, \partial \bar{\Gamma}^{p-1}_h, t_{\tau h})(a) = \sum_{h \in J_o} I(\bar{\Gamma}^{p-1}_h, \partial \bar{\Gamma}^{p-1}_h, t^h)(a),$$

donde $c_\tau = j^{M'-N', L^p_\tau}(c') \in H_p(L^p_\tau; R)$, $t_{\tau h} = \partial_{\tau h}(c_\tau) = \partial_{L^p_\tau, \Gamma^{p-1}_h}(c_\tau)$ $H_{p-1}(\Gamma^{p-1}_h; R)$, $t^h = \sum (t_{\tau h} : \tau \in J) \in H_{p-1}(\Gamma^{p-1}_h; R)$. Según 2.5, sólo hace falta probar $t^h = t_h$ para todo $h \in J_o$; aquí $t_h = \partial_h (j^{M'-N', M_*}(c')$, $\partial_h = \partial_{M_*, \Gamma^{p-1}_h}$. Esto se deduce de la conmutatividad del diagrama siguiente (cf. I, B, 5.2 y 6.1) :

$$\begin{tikzcd}
H_p(M'-N') \arrow[r, "j^{M'-N', M_*}"] \arrow[dr, "\sum_J j^{M'-N', L^p_\tau}"'] & H_p(M_*) \arrow[r, "\partial_h"] \arrow[d, "\sum_J j^{M_*, L^p_\tau}"] & H_{p-1}(\Gamma^{p-1}_h) \\
 & \sum_{\tau \in J} H_p(L^p_\tau) \arrow[ur, "\sum_J \partial_{\tau h}"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, $t_h = \partial_h \circ j^{M'-N', M_*}(c') = \sum_{\tau \in J} \partial_{\tau h} \circ j^{M_*, L^p} \circ j^{M'-N', M_*}(c')$

$= \sum_{\tau \in J} {}_h \circ j^{M'-N', L^p}(c') = \sum_{\tau \in J} \partial_{\tau h}(c_\tau) = t^h$. CQD.

Ahora podemos concluir la demostración del teorema. Consideremos los mapas $x^s = (x^s_1 \dots x^s_n)$ definidos al principio. La familia de los subespacios

A^s ($s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$) es regular y por lo tanto, según (A, 1), la familia de las (p-1) - formas asociadas $w(A^s)$ ($s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$) es una base para el espacio de las formas en $A(R^n)$ con coeficientes constantes (respecto del mapa canónico de R^n). Consecuentemente, cada forma $a \in D_{p-1}(Q)$ puede escribirse :

$$a = \sum a_{i_1 \ldots i_{p-1}}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}} = \sum_{s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}} a_s(x)\, w(A^s),$$

donde $a_s(x) \in D_o(Q)$ es una combinación lineal con coeficiantes reales de los coeficientes $a_{i_1 \ldots i_{p-1}}$. Para cada $s = 1 \ldots \binom{n}{p-1}$, $w(A^s)$ se expresa, según el mapa x^s, como $w(A^s) = dx_1^s \wedge \ldots \wedge dx_{p-1}^s$ (cf. A, 1). Por lo tanto, el lema 2.13 es aplicable a cada término $a_s(x).\, w(A^s)$, y obtenemos :

$$b\, I(M', N', c')(a) = I(N', \partial_{M', N'}(a)$$

para toda $a \in D_{p-1}(Q)$. CQD.

2.14. - <u>Corolario</u> : En las condiciones del teorema 2.1, $I(M, N, c)$ es cerrada si y sólo si $c \in j^{M, M-N}(H_p(M;R))$. En particular, $I(M, N, c)$ es siempre cerrada si $H_{p-1}(N;R) = 0$, lo que se verifica, en especial, cuando $\dim N < p-1$.

<u>Demostración</u> : Basta tener en cuenta, en el diagrama de 2.1, que $I(N)$ es un monomorfismo y que la sucesión de homología :

$$0 \longrightarrow H_p(M;R) \longrightarrow H_p(M-N;R) \longrightarrow H_{p-1}(N;R) \longrightarrow \ldots$$

es exacta.

2.15. - Corolario : La corriente asociada por **P. Lelong** en (11) a un conjunto analítico complejo M de dimensión (compleja) p es cerrada (cf. A, 2.5.2).

2.16. - Corolario : En las condiciones del teorema 2.1, sea Φ una familia de soportes en M y sean $\Phi' = \Phi|N = (A \in \Phi : A \subset N)$ y $\Phi'' = \Phi \cap (M-N) = (A \cap (M-N) : A \in \Phi)$ las familias de soportes en N y $M-N$, respectivamente, inducidas por Φ. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
H_p^{\Phi''}(M-N;R) \arrow[r, "I^{\Phi''}(M,N)"] \arrow[d, "\delta'_{M,N}"'] & D_p'^{\Phi''}(X) \arrow[d, "b"] \\
H_{p-1}^{\Phi'}(N;R) \arrow[r, "I^{\Phi'}(N)"'] & D_{p-1}'^{\Phi'}(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración : Los homomorfismos horizontales fueron definidos en (II, A, 2.6). El homomorfismo de conexión $\delta'_{M,N}$ para familias de soportes cualesquiera está definido en (2), 7.10 (*). El corolario es entonces consecuencia inmediata de la definición dada en (II, A, 2.6), del teorema 2.1 y de la conmutatividad del diagrama siguiente, que puede probarse utilizando consideraciones incluídas en (2), 7.10 :

(*) con una errata : en lugar de $\Phi|U$ debe ir $\Phi \cap U$.

$$\begin{array}{ccc} H_p^{\Phi''}(M-N;R) & \longrightarrow & H_p(M-N;R) \\ \gamma' \Big\downarrow & & \Big\downarrow \partial_{M,N} \\ H_p^{\Phi'}(N;R) & \longrightarrow & H_p(N;R) \end{array}$$

Aquí los homomorfismos horizontales son los de "agrandamiento de soporte" .

2.17. - Observaciones : 1. Si $\dim N < p-1$, se puede probar que $I(M, N, c)$ es cerrada por el método que P. Lelong utilizó en (11) , sin recurrir al teorema de Stokes. Esto ha sido esbozado en (8).

2. Si M es un simple geométrico orientado de dimensión p (no degenerado) en un espacio afín, $I(M, \partial M, c)$ coincide con la integración usual sobre M , donde $c \in H_p(M-\partial M;R)$ es el generador definido por la orientación de M (identificando la homología de Borel-Moore con la homología poliedral; cf. (1), 5). Entonces es fácil ver que 2.1 se reduce al teorema de Stokes clásico, como enunciado, por ejemplo, en (16), n. 6) .

3. - Aplicaciones.

3.1. - Sean X_i variedades diferenciables de clase C^∞, de dimensiones n_i ($i = 1 , 2$) . Sean $X = X_1 \times X_2$ la variedad producto y $q_i : X \longrightarrow X_i$ ($i = 1 , 2$) las proyecciones. Sean $q_i^* : D(X_i) \longrightarrow A(X_i)$ los correspondientes homomorfismos inducidos y sea $q^* = q_1^* \wedge q_2^* : D(X_1) \boxtimes D(X_2) \longrightarrow D(X)$, $a_1 \boxtimes a_2 \longrightarrow q_1^*(a_1) \wedge q_2^*(a_2)$. Se sabe que q^* es un isomorfismo de espacio vectorial topológico, si se considera $D(X_1) \boxtimes D(X_2)$ munido de su topología tensorial inductiva, que $q^*(D(X_1) \otimes D(X_2))$ es denso en $D(X)$ y que q^* se extiende a un isomorfismo $\bar{q} : D(X_1) \bar{\otimes} D(X_2) \longrightarrow D(X)$, del completado de $D(X_1) \otimes D(X_2)$ sobre $D(X)$ (cf. ((7), cap. I, n. 3), (10) y (17)). Entonces existe un único isomorfismo $\bar{\otimes} : D'_{p_1}(X_1) \otimes D'_{p_2}(X_2) \longrightarrow D'_{p_1+p_2}(X)$, $T_1 \otimes T_2$ —— $T_1 \bar{\otimes} T_2$, tal que $T_1 \bar{\otimes} T_2$: $q_1^*(a_1) \wedge q_2^*(a_2) \longrightarrow T_1(a_1) \cdot T_2(a_2)$, para todo par $a_i \in D(X_i)$ (i = 1, 2).

3.2. - Proposición : Sean $N_i \subset M_i$ conjuntos semianalíticos cerrados en la variedad analítica real X_i, tales que $\dim N_i < \dim M_i = p_i \leqslant \dim X_i = n_i$ (i = 1 , 2). Entonces $N = (M_1 \times N_2) \cup (N_1 \times M_2)$ y $M_1 x M_2$ son conjuntos semianalíticos en $X_1 \times X_2$, $\dim N < \dim (M_1 \times M_2)$ y el diagrama siguiente es conmutativo (cf. I, B, 12) :

$$\begin{array}{ccc} H_{p_1}(M_1-N_1) \otimes H_{p_2}(M_2-N_2) & \xrightarrow{\ \times\ } & H_{p_1+p_2}((M_1-N_1)x(M_2-N_2)) \\ {\scriptstyle I(M_1, N_1) \otimes I(M_2, N_2)} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle I(M_1 x M_2, N)} \\ D'_{p_1}(X_1) \otimes D'_{p_2}(X_2) & \xrightarrow[\bar{\otimes}]{} & D'_{p_1+p_2}(X) \end{array}$$

Demostración : Se observa que $M_1 \times M_2 = (M_1 x X_2) \cap (X_1 x M_2)$ es evidentemente semianalítico en $X_1 x X_2$ y que $\dim (M_1 \times M_2) = p_1 + p_2$. Esto último se prueba por inducción sobre $\dim (M_1 \times M_2)$, utilizando la descomposición $M_i = M_i^* \cup \partial M_i$ de M_i en su parte regular y singular (cf. I, A, 1.2)-

Sea $c_i \in H_p(M_i - N_i ;R)$ (i = 1 , 2). Basta demostrar que $S = I(M_1, N_1, c_1) \bar{\otimes} I(M_2, N_2, c_2)$ y $T = I(M_1 \times M_2, N, c_1 \times c_2)$ coinciden sobre toda forma del tipo $a_1^* \wedge a_2^*$, $a_i^* = q_i^*(a_i)$, $a_i \in D_{p_i}(X_i)$.

Según (B, 2.1), $I(M_1, N_1, c_1)$, $I(M_2, N_2, c_2)$ y T satisfacen la condición C_{p_1}, C_{p_2}, y $C_{p_1+p_2}$ sobre X_1, X_2 y $X_1 \times X_2$, respectivamente. Probemos que S satisface $C_{p_1+p_2}$ sobre X. Procediendo localmente, basta probar que, si $S_i \in D'(R^{n_i})$ satisfacen C_{p_i} sobre R^{n_i}, entonces $S_1 \bar{\boxtimes} S_2$ satisface $C_{p_1+p_2}$ sobre $R^{n_1+n_2}$. Pero esto es evidente, sí se consideran solamente formas del conjunto $q^*(D(R^{n_1}) \boxtimes D(R^{n_2}))$, denso en $D(R^{n_1} \times R^{n_2})$.

Sea $N' = N \cup (\partial M_1) \times M_2) \cup (M_1 \times \partial M_2)$. Entonces $\dim N' < p_1+p_2$ y por (I, B, 5.4) y (I, B, 4.2) S y T son las extensiones simples sobre X de $S \mid X - N'$ y $T \mid X - N'$. Basta probar entonces que las últimas corrientes coinciden. Se observa que, si $(x, y) \in M_1 \times M_2 - N'$, entonces x (y) es un punto p_1-regular (p_2-regular) de M_1 (de M_2).

Sean $\varphi : U \longrightarrow R^{n_1}$, $\psi : V \longrightarrow R^{n_2}$ mapas coordenados C^∞ de X_1 y X_2 tales que $U \times V \subset M_1 \times M_2 - N'$ y que $\varphi(U \cap M_1) =$
$((x_1 \dots x_{p_1}, 0 \dots 0)) = R^{p_1} \subset R^{n_1}$, $\psi(V \cap M_2) = ((y_1 \dots y_{p_2}, 0 \dots 0))$
$= R^{p_2} \subset R^{n_2}$.

Sean $c_i' = (\varphi \mid U \cap M_i)_{p_i} \circ j^{M_i - N_i,\ U \cap M_i}(c_i) \in H_{p_i}(R^{p_i};R)$. Probemos que $S \mid U \times V = \int_{M_1 \cap U,\ j(c_1)} \boxtimes \int_{M_2 \cap V,\ j(c_2)}$ y que $T \mid U \times V =$
$\int_{(M_1 \times M_2) \cap (U \times V),\ j(c_1 \times c_2)}$ son iguales o, equivalentemente, que
$\int_{R^{p_1}, c_1'} \bar{\boxtimes} \int_{R^{p_2}, c_2'}$ y $\int_{R^{p_1} \times R^{p_2},\ c_1' \times c_2'}$, corrientes en
$D'_{p_1+p_2}(R^{n_1} \times R^{n_2})$ imágenes por $\varphi \times \psi$ de $S \mid U \times V$ y $T \mid U \times V$, son igua-

les. Supongamos $c_i' = \lambda_i \,\bar{\otimes}\, e_i$, donde $e_i \in H_{p_i}(R^{p_i};Z)$ es una clase fundamental de R^{p_i} $(i = 1, 2)$. Consideremos formas $a_i \in D_{p_i}(R^{n_i})$. Entonces

$$\int_{R^{p_1}, c_1'} \bar{\otimes} \int_{R^{p_2}, c_2'} (a_1^* \wedge a_2^*) = \int_{R^{p_1}, c_1'} a_1 \cdot \int_{R^{p_2}, c_2'} a_2 =$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \int_{R^{p_1}, e_1} a_1 \cdot \int_{R^{p_2}, e_2} a_2 ,$$

$$\int_{R^{p_1} \times R^{p_2},\ c_1' \times c_2'} a_1^* \wedge a_2^* = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \int_{R^{p_1} \times R^{p_2},\ e_1 \times e_2} a_1^* \wedge a_2^* ,$$

y los últimos miembros son iguales. Esto se deduce de propiedades conocidas de la integración euclídea (cf. (17), III, 19) y de que la orientación (algebraica) definida por $e_1 \times e_2$ sobre $R^{p_1} \times R^{p_2}$ es la suma de las orientaciones definidas por e_1 y e_2 (cf. I, B, 13.3).

3.3.- <u>Corolario</u> : En las condiciones de la proposición anterior, sea $\partial_i = \partial_{M_i, N_i}$ definido por la sucesión exacta :

$$0 \longrightarrow H_{p_i}(M_i;R) \longrightarrow H_{p_i}(M_i - N_i;R) \xrightarrow{\partial_i} H_{p_i - 1}(N_i;R) \longrightarrow \cdots \quad (i = 1, 2)$$

Entonces, dados elementos $c_i \in H_{p_i}(M_i - N_i;R)$, se cumple

$$b\, I(M_1 \times M_2 , N, c_1 \times c_2) = I(N_1 \times M_2, N_1 \times N_2, (\partial_1 c_1) \times c_2) +$$
$$+ (-1)^{p_1} I(M_1 \times N_2, N_1 \times N_2, c_1 \times \partial_2 c_2) .$$

<u>Demostración</u> : En general, si $S_i \in D'_{p_i}(X_i)$ $(i = 1, 2)$, entonces $b(S_1 \,\bar{\otimes}\, S_2) = (b_1 S_1) \,\bar{\otimes}\, S_2 + (-1)^{p_1} S_1 \,\bar{\otimes}\, b_2 S_2$, donde b_i es el homomor-

fismo borde en $D'(X_i)$ (cf. (17)) . Entonces, según 2.1 ,

$$b\, I(M_1 \times M_2\,,\, N,\, c_1 \times c_2) \;=\; b\,(\, I(M_1,\, N_1,\, c_1)\, \overline{\boxtimes}\, I\,(M_2,\, N_2,\, c_2)\,) \;=$$

$$= I\,(N_1,\, \partial_1 c_1)\, \overline{\boxtimes}\, I\,(M_2,\, N_2,\, c_2) \;+\; (-1)^{p_1}\, I(M_1,\, N_1,\, c_1)\, \overline{\boxtimes}\, I(N_2,\, \partial_2 c_2\,) =$$

$$= \; I(\, N_1 \times M_2,\, N_1 \times N_2,\, (\partial_1 c_1) \times c_2) \;+\; (-1)^{p_1} I(M_1 \times N_2,\, N_1 \times N_2,\, c_1 \times \partial_2 c_2\,)\,.$$

CQD.

Según 2.14 , si M es semianalítico cerrado de dimensión p en X , entonces $I(M, c)$ es una corriente cerrada para toda clase $c \in H_p(M;R)$. Sea $I_{M,X} : H_p(M;R) \longrightarrow H_p(D'(X))$ el homomorfismo de $H_p(M;R)$ en el grupo de homología de las corrientes sobre X inducido por $I(M)$.

3.4. - Proposición : Sea X una variedad analítica real orientable de dimensión n . Sea $\nu(X) : H_p(X;R) \longrightarrow H_p(D'(X))$ el isomorfismo definido en (I, C, 8) . Sea M un subconjunto semianalítico cerrado de dimensión p de X . Entonces el siguiente diagrama es conmutativo (*) :

$$\begin{tikzcd}
H_p(X;R) \arrow[r, "\nu_X"] & H_p(D'(X)) \\
H_p(M;R) \arrow[u, "i_{M,X}"] \arrow[ur, "I_{M,X}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

.

Demostración : Sea ∂M la parte singular de M y sean $M^* = M - \partial M$ y $X^* = X - \partial M$. Consideremos el diagrama :

(*) En ((2), 3.4) y ((9), teor. 3) pueden encontrarse casos particulares de esta proposición.

$$\begin{tikzcd}
 & H_p(X;R) \arrow[dr, "\nu_X"] \arrow[ddd, "j^{X,X^*}"] & \\
H_p(M;R) \arrow[ur, "i_{M,X}"] \arrow[rr, "I_{M,X}"] \arrow[d, "j^{M,M^*}"'] & & H_p(D'(X)) \arrow[d, "\rho^{X,X^*}"] \\
H_p(M^*;R) \arrow[rr, "I_{M^*,X^*}"] \arrow[dr, "i_{M^*,X^*}"'] & & H_p(D'(X^*)) \\
 & H_p(X^*;R) \arrow[ur, "\nu_{X^*}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde ρ^{X,X^*} indica el homomorfismo inducido por la restricción de las corrientes. Aquí el diagrama inferior es conmutativo, según (I, C, 8.8), ya que M^* es una subvariedad de X^* y I_{M^*,X^*} coincide, por definición, con $i' \circ \nu(M^*)$ (notación de I, C, 8.8) . Los diagramas verticales conmutan por (I, A, 5.2) y (I, C 8.7) . Además, j^{X,X^*} es inyectivo puesto que dim $M < p$, y $\nu(X)$ y $\nu(X^*)$ son isomorfismos ; por lo tanto es inyectivo ρ^{X,X^*}.

Sea $c \in H_p(M;R)$; basta probar la igualdad de $\rho^{X,X^*} \circ \nu(X) \circ i_{M,X}(c)$ y $\rho^{X,X^*} \circ I_{M,X}(c)$. Pero $\rho^{X,X^*} \circ I_{M,X}(c) = I_{M^*,X^*} \circ j^{M,M^*}(c) = \nu(X^*) \circ j^{X,X^*} \circ i_{M,X}(c) = \rho^{X,X^*} \circ \nu(X) \circ i_{M,X}(c)$.

3.5.- <u>Corolario</u> : En las condiciones de la proposición anterior, sea Φ una familia de soportes en X y $\Phi' = \Phi | M$. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo (cf. 2.16 y I, C, 8.6) :

$$\begin{tikzcd}
H_p^{\Phi}(X,R) \arrow[r, "\nu_X^{\Phi}"] & H_p(D'_{\Phi}(X)) \\
H_p^{\Phi'}(M;R) \arrow[u, "i_{M,X}"] \arrow[ur, "I_{M,X}^{\Phi'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración : Basta factorizar ν_X^{Φ} y $I_{M,X}^{\Phi'}$ a través de los homomorfismos $H_p^{\Phi}(X;R) \longrightarrow H_p(X;R)$, $H_p^{\Phi'}(M;R) \longrightarrow H_p(M;R)$.

3.6. - Corolario : Sean M y M' conjuntos semianalíticos cerrados en la variedad orientada X , tales que $\dim M = p$, $\dim M' = q$ y $p+q = n$. Sean c y c' clases en $H_p(M;R)$ y $H_q(M';R)$, respectivamente. Entonces el producto de intersección de $i_{M,X}(c)$ y $i_{M',X}(c')$ cumple :

$$\langle i_{M,X}(c) \cdot i_{M',X}(c') \rangle = I(M,c) \wedge I(M',c') (1) .$$

Demostración : Según (I, C, 9.5) , $\langle i_{M,X}(c) \cdot i_{M',X}(c') \rangle =$ $\nu^c (i_{M,X}(c)) \wedge (i_{M',X}(c'))$ (1) ; según 3.5 , $\nu^c (i_{M,X}(c))$ es la clase de homologíade $I(M,c)$, y $\nu(i_{M',X}(c'))$ es la clase de $I(M',c')$.

CAPITULO III. DUALIDAD EN UN CONJUNTO SEMIANALITICO.

En este capítulo se definen formas diferenciales y corrientes sobre un conjunto semianalítico M, generalizando las nociones habituales sobre una variedad diferenciable. Para expresar ciertas relaciones entre la homología de M y la homología de las formas y corrientes sobre M (*), resulta conveniente introducir las cadenas semianalíticas de M. Estas cadenas desempeñan un papel similar al de las cadenas singulares C^{∞} en una variedad C^{∞}.

A. - CADENAS SEMIANALITICAS.

1.1. - Sea X una variedad analítica real conexa de dimensión n, con base numerable de abiertos. Sea L un conjunto semianalítico cerrado de dimensión p de X. Sea K un dominio principal.

Designemos con $S_{a,q}(L;K)$ al conjunto de las ternas (M, N, c) tales que $N \subset M$ son conjuntos semianalíticos cerrados de X, $M \subset L$, $\dim N < \dim M = q \leqslant p$ y $c \in H_q(M-N;K)$. Si $N = \emptyset$ = conjunto vacío, abreviamos $(M, \emptyset, c) = (M, c)$.

1.2. - Operaciones sobre $S_{a,q}(L;K)$.

Definimos una operación $+$ sobre $S_{a,q}(L;K)$ mediante :

$$+ : \begin{cases} S_{a,q}(L;K) \times S_{a,q}(L;K) \longrightarrow S_{a,q}(L;K) \\ (M_1, N_1, c_1),\ (M_2, N_2, c_2) \longrightarrow (M_1 \quad M_2, N_1 \quad N_2, c) \end{cases}$$

(*) Un problema similar fué sugerido por F. Norguet en (12), 10-21.

donde $c = h(c_1 , c_2)$ está definido mediante la composición :

$$
\begin{tikzcd}
H_q(M_1-N_1) \times H_q(M_2-N_2) \arrow[r, "j^1 \times j^2"] \arrow[ddr, dashed, "h"'] & H_q(M_1-N) \times H_q(M_2-N) \arrow[d, "i_1 \times i_2"] \\
 & H_q(M-N) \times H_q(M-N) \arrow[d, "+"] \\
 & H_q(M-N)
\end{tikzcd}
$$

Aquí todos los grupos de homología tienen coeficientes en K, $M = M_1 \cup M_2$, $N = N_1 \cup N_2$, $j^s = j^{M_s - N_s,\, M_s - N}$ y $i_s = i_{M_s - N,\, M-N}$ $(s = 1, 2)$.

Se vé inmediatamente que $+$ es asociativa y conmutativa.

Existe una acción de K sobre $S_{a,q}(L;K)$ definida por :

$$
\begin{cases}
K \times S_{a,q}(L;K) \longrightarrow S_{a,q}(L;K) \\
(k, (M,N,c)) \longrightarrow k \cdot (M,N,c) = (M,N,kc) .
\end{cases}
$$

Es evidente que $\cdot$ es lineal respecto de $+$. En particular, $-(M,N,c) = (M,N,-c)$.

Definamos ahora el conjunto $O_{a,q}(L) = ((M,N,0) \in S_{a,q}(L))$, donde 0 es el elemento nulo de $H_q(M-N;K)$; se cumple $O_{a,q}(L) + O_{a,q}(L) \subset O_{a,q}(L)$ y $K \cdot O_{a,q}(L) \subset O_{a,q}(L)$. Entonces la siguiente relación $\simeq$ es una relación de equivalencia $R(L)$ sobre $S_{a,q}(L)$:

(1.3) $\alpha \simeq \beta$ si y sólo si $\alpha - \beta \in O_{a,q}(L)$.

Notemos con $S_q(L;K)$ al cociente de $S_{a,q}(L;K)$ por la relación

$R(L)$. Las operaciones $+$ y $.$ son compatibles con $R(L)$ y definen sobre $S_q(L)$ una estructura de K-módulo unitario. Seguiremos notando con $+$ y $.$ las operaciones inducidas sobre $S_q(L;K)$. Indicaremos con $[M, N, c]$ la clase en $S_q(L;K)$ de $(M, N, c) \in S_{a,q}(L;K)$. El elemento nulo de $S_q(L;K)$ es la clase de cualquier terna $(M, N, 0) \in S_{a,q}(L;K)$; además, $-[M, N, c] = [M, N, -c]$.

Notemos con $S(L;K)$ al K-módulo graduado $\sum (S_q(L;K) : q \in Z)$, donde $S_q(L;K)$ es nulo si $q < 0$ ó $q > \dim L$.

1.4. - <u>Proposición</u> : Existe sobre $S(L;K)$ una estructura de K-módulo diferencial graduado, con diferencial ∂ de grado -1.

<u>Demostración</u> : Sólo es necesario construír el diferencial ∂. Para cada q $(0 \leqslant q \leqslant \dim L)$, definamos la aplicación :

$$\partial' : \begin{cases} S_{a,q}(L;K) \longrightarrow S_{a,q-1}(L;K) \\ (M, N, c) \longrightarrow (N, \partial_{M,N}(c)) \end{cases}$$

donde $\partial_{M,N}$ está definido en la sucesión exacta de homología :

$$0 \longrightarrow H_q(M-N;K) \xrightarrow{\partial_{M,N}} H_{q-1}(N;K) \longrightarrow H_{q-1}(M;K) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Evidentemente, $\partial'(O_{a,q}(L)) \subset O_{a,q-1}(L)$; por lo tanto ∂' es compatible con la relación $R(L)$ sobre $\sum (S_{a,q}(L;K) : 0 \leqslant q \leqslant n)$ y define una aplicación $\partial : S_q(L;K) \longrightarrow S_{q-1}(L;K)$ $(0 \leqslant q \leqslant p)$. Por definición, $\partial'(M, N, c) = 0$ si $\dim N < \dim M - 1$; en particular, $\partial' \circ \partial' (M, N, c) =$

$\partial'(N, \partial_{M,N}(c)) = 0$ para toda terna (M, N, c). Por lo tanto $\partial \circ \partial = 0$.

Veamos que ∂ es lineal. Sean $(M_s, N_s, c_s) \in S_{a,q}(L;K)$ ($s = 1, 2$), y sea $(M, N, c) = (M_1, N_1, c_1) + (M_2, N_2, c_2)$. De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_q(M_s - N_s) \arrow[r, "j^s"] \arrow[d, "\partial_{M_s, N_s}"'] & H_q(M_s - N) \arrow[r, "i_s"] \arrow[d, "\partial_{M_s, N}"] & H_q(M-N) \\
H_{q-1}(N_s) \arrow[r, "i'_s"'] & H_{q-1}(N) \arrow[ur, "\partial_{M,N}"'] &
\end{tikzcd}$$

en el que todos los grupos de homología tienen coeficientes en K, y en el que $j^s = j^{M_s - N_s, M_s - N}$, $i_s = i_{M_s - N, M-N}$ y $i'_s = i_{N_s, N}$ (cf. I, B, 5.2 y 6), se deduce $\partial_{M,N}(c) = \partial_{M,N}(h(c_1, c_2)) = \partial_{M,N}(i_1 \circ j^1(c_1) + i_2 \circ j^2(c_2)) = i'_1 \circ \partial_{M_1, N_1}(c_1) + i'_2 \circ \partial_{M_2, N_2}(c_2)$. Por lo tanto, $\partial'((M_1, N_1, c_1) + (M_2, N_2, c_2)) = (N, \partial_{M,N}(c)) = (N_1, \partial_{M_1, N_1}(c)) + (N_2, \partial_{M_2, N_2}(c_2)) = \partial'(M_1, N_1, c_1) + \partial'(M_2, N_2, c_2)$. Esto implica $\partial([M_1, N_1, c_1] + [M_2, N_2, c_2]) = [M_1, N_1, c_1] + [M_2, N_2, c_2]$; como evidentemente $\partial(k[M_1, N_1, c_1]) = k . \partial[M_1, N_1, c_1]$, ∂ es un homomorfismo.

1.5. - Sea ahora P un conjunto semianalítico cerrado de X incluído en L. La relación $R(P)$, definida como en 1.3 sobre $S_a(P;K)$, es compatible con $R(L)$, luego la inclusión $S_a(P;K) \subset S_a(L;K)$ induce un monomorfismo $i' : S(P;K) \longrightarrow S(L;K)$. Identificaremos habitualmente $S(P;K)$ con $i'(S(P;K))$. Esta identificación es compatible con los diferenciales de

$S(P;K)$ y $S(L;K)$, luego el diferencial de $S(L;K)$ induce un diferencial en $S(L;K) / S(P;K) = S(L;K) / i'(S(P;K))$, y tenemos una sucesión exacta de K-módulos diferenciales graduados :

(1.6) $$0 \longrightarrow S(P;K) \longrightarrow S(L;K) \longrightarrow S(L;K) / S(P;K) \longrightarrow 0$$

1.7. - Definición : Sea L un conjunto semianalítico cerrado de X. Se llama grupo de las cadenas semianalíticas sobre L, con coeficientes en K, al K-módulo diferencial graduado $S(L;K)$. Sea $P \subset L$ un conjunto semianalítico cerrado. Se llama grupo de las cadenas semianalíticas relativas de L, módulo P, con coeficientes en K, al K-módulo diferencial graduado $S(LmP;K) = S(L;K) / S(P;K)$.

Se llama q-grupo de homología semianalítica de L, con coeficientes en K, al q-módulo derivado $H_q(S(L;K))$. Se llama q-grupo de homología semianalítica relativa de L, módulo P, con coeficientes en K, al q-módulo derivado $H_q(S(LmP;K))$.

1.8. - Corolario : Sean $P \subset L$ conjuntos semianalíticos cerrados de X. Existe una sucesión exacta de homología semianalítica :

(1.9) $$\ldots \longrightarrow H_q(S(P;K)) \xrightarrow{\bar{i}} H_q(S(L;K)) \xrightarrow{\bar{j}} H_q(S(LmP;K)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{q-1}(S(P;K)) \longrightarrow \ldots$$

deducida de 1.6 .

2.1. - Teorema : Sean $P \subset L$ conjuntos semianalíticos cerrados de la variedad X. Existe un homomorfismo entre la sucesión exacta de homología semianalítica 1.9 y la sucesión exacta de homología de Borel-Moore del par $P \subset L$ (cf. I, B, 4.4) . O sea, existe un diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(P) \arrow[r, "i^{P,L}"] & H_q(L) \arrow[r, "j^{L,L-P}"] & H_q(L-P) \arrow[r, "\partial_{L-P,P}"] & H_{q-1}(P) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(S(P)) \arrow[u, "\Psi_P"] \arrow[r, "\bar{i}"'] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & H_q(S(L)) \arrow[u, "\Psi_L"] \arrow[r, "\bar{j}"'] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & H_q(S(LmP)) \arrow[u, "\Psi_{L,P}"'] \arrow[r, "\bar{\partial}"'] \arrow[ur, phantom, "(3)"] & H_{q-1}(S(P)) \arrow[u, "\Psi_P"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde todos los coeficientes son en el dominio principal K. Si K es un cuerpo, los homomorfismos verticales son isomorfismos.

Demostración : a) Construcción de Ψ_L. Consideremos el diferencial ∂ en $S(L;K)$. Notemos $Z(L) =$ Núcleo (∂) y $B(L) =$ Imagen (∂) ; entonces $H_q(S(L)) = Z_q(L) / B_q(L)$. Definamos un homomorfismo $\varphi : Z_q(L) \longrightarrow H_q(L)$ de la manera siguiente . Cada clase $[M, N, c]$ en $Z_q(L)$ tiene un representante $(M, c') = (M, \emptyset, c')$. En efecto, si $[M, N, c]$ es un ciclo se cumple $\partial'(M, N, c) = (N, \partial_{M,N}(c)) = (N, 0)$, donde $\partial_{M,N}$ está definido en la sucesión exacta :

$$0 \longrightarrow H_q(M) \xrightarrow{j^{M,M-N}} H_q(M-N) \xrightarrow{\partial_{M,N}} H_q(N) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Por la exactitud, existe un único $c' \in H_q(M)$ tal que $j^{M,M-N}(c') = c$, y evidentemente (M, c') pertenece a la clase de (M, N, c). Entonces definimos $\varphi[M, N, c] = \varphi[M, c'] = i_{M,L}(c')$, donde $i_{M,L} : H_q(M) \longrightarrow$

$H_q(L)$.

Probemos que φ está bien definido. Supongàmos que (M_1, c_1) y (M_2, c_2) son elementos $R(L)$ - equivalentes de $Z_q(L)$. Sea $M = M_1 \cup M_2$; por definición, $i_{M_1, M}(c_1) = i_{M_2, M}(c_2)$, y entonces $i_{M_1, L}(c_1) = i_{M, L} \circ i_{M_1, M}(c_1) = i_{M, L} \circ i_{M_2, M}(c_2) = i_{M_2, L}(c_2)$.

Probemos que φ es un homomorfismo. Es evidente que $\varphi(k[M, c]) = k\,\varphi([M, c])$ para cada $k \in K$ y $[M, c] \in Z_q(L)$. Sean $[M_s, c_s]$ $(s = 1, 2)$ clases en $Z_q(L)$. Sea $M = M_1 \cup M_2$ y $c = i_{M_1, M}(c_1) + i_{M_2, M}(c_2)$; entonces $\varphi([M_1, c_1]) + \varphi([M_2, c_2]) = i_{M_1, L}(c_1) + i_{M_2, L}(c_2) = i_{M, L}(i_{M_1, M}(c_1) + i_{M_2, M}(c_2)) = \varphi([M, c]) = \varphi([M_1, c_1] + [M_2, c_2])$.

Supongamos que $[N, c] \in B_q(L)$. Entonces existe $(M, N, t) \in S_{a, q+1}(L)$ tal que $\partial'(M, N, t) = (N, c)$; esto implica $t \in H_q(M-N)$ y $\partial_{M, N}(t) = c$. Según el siguiente diagrama conmutativo (cf. I, B, 5.2)

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(L-N) \arrow[r, "\partial_{L,N}"] & H_q(N) \arrow[r, "i_{N,L}"] & H_q(L) \\
H_{q+1}(M-N) \arrow[u, "i_{M-N,L-N}"] \arrow[r, "\partial_{M,N}"'] & H_q(N) \arrow[u, dash, "i"']
\end{tikzcd}$$

tenemos $[N, c] = i_{N, L}(c) = i_{N, L} \circ \partial_{L, N} \circ i_{M-N, L-N}(t) = 0$, ya que la fila superior del diagrama es exacta. Esto prueba $\varphi(B_q(L)) = 0$. Entonces φ induce el homomorfismo buscado $\psi_L : H_q(S(L;K)) = Z_q(L)/B_q(L) \longrightarrow H_q(L;K)$.

b) Definición de $\Psi'_{L,P}$. Sea $\alpha = [M, N, c] \in S_q(L;K)$ un representante de un ciclo $\bar{\alpha} \in S_q(LmP;K)$; esto significa que $\partial[M, N, c] = [N, t] \in i'(S_{q-1}(P))$, donde $t = \partial_{M,N}(c)$. Entonces existe $(N', t') \in S_{q-1}(P)$ tal que (N', t') es $R(L)$-equivalente con (N, t) . Probemos que existe $(M, N'', c'') \simeq (M, N, c)$ tal que $N'' \subset P$. Sea $N'' = N \cap N'$, y consideremos la sucesión exacta de Mayer -Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H_{q-1}(N'') \xrightarrow{f} H_{q-1}(N) + H_{q-1}(N') \xrightarrow{g} H_{q-1}(N \cup N') \longrightarrow \cdots$$

donde $f = i_{N'',N} - i_{N'',N}$ y $g = i_{N,N\,N'} + i_{N',N\,N'}$. Como (N,t) es equivalente con (N', t') , resulta $g(t + t') = 0$, y entonces existe $t'' \in H_{q-1}(N'')$ tal que $i_{N'',N}(t'') = t$. Ahora bien, de la conmutatividad del diagrama siguiente (cf. I, B, 5.2) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \text{——} & H_q(M) & \xrightarrow{j^{M,M-N}} & H_q(M-N) & \xrightarrow{\partial_{M,N}} & H_{q-1}(N) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j^{M,M-N''}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^{N,N-N''}} \\
0 & \text{——} & H_q(M-N'') & \xrightarrow[j^{M-N,M-N''}]{} & H_q(M-N) & \xrightarrow[\partial_{M-N,M-N''}]{} & H_{q-1}(N-N'')
\end{array}$$

se deduce $\partial_{M-N,M-N''}(c) = j^{N,N-N''} \circ \partial_{M,N}(c) = j^{N,N-N''} \circ i_{N'',N}(t'') = 0$; por lo tanto existe un único $c'' \in H_q(M-N'')$ tal que $j^{M-N'',M-N}(c'') = c$. Esto último implica $(M, N'', c'') \simeq (M, N, c)$, donde $N'' \subset P$, como buscábamos. Ahora definimos $\varphi_{L,P} : Z_q(LmP) \longrightarrow H_q(L-P)$ mediante $\varphi_{L,P}(\bar{\alpha}) = i_{M-P,L-P} \circ j^{M-N'',M-P}(c'')$. Se vé que, si $[M, N, c] \in S_q(P;K)$, entonces el último miembro es nulo; por lo tanto $\varphi_{L,P}(\bar{\alpha})$ no depende del representante α de $\bar{\alpha}$. También $\varphi_{L,P}(\bar{\alpha})$ no depende del representante $[M, N'', c'']$ de α .

Por último, $\varphi_{L,P}$ es nulo sobre el grupo de los bordes $B_q(LmP)$. En efecto, sea $[M, c] = [M', M, t]$ un representante de un borde $\bar{\alpha} \in B_q LmP)$. Tenemos $\varphi_{L,P}(\bar{\alpha}) = i_{M-P, L-P} \circ j^{M, M-P}(c) = j^{L, L-P} \circ i_{M, L}(c)$, según (I, B, 5.2) . Pero $i_{M, L}(c) = \Psi_L([M, c]) = 0$, según vimos en a), y por lo tanto $\varphi_{L,P}$ induce el homomorfismo buscado $\Psi_{L,P} : Z_q(LmP) / B_q(LmP) = H_q(S(LmP;K)) \longrightarrow H_q(L-P;K)$.

c) Conmutatividad del diagrama de 2.1 : La conmutatividad de (1) es evidente. Para probar la de (2) , sea $[M, c] \in S_q(L;K)$. Según las definiciones, $\Psi_L([M, c]) = i_{M, L}(c)$ y $\Psi_{L,P} \circ \bar{j}([M, c]) = i_{M-P, L-P} \circ j^{M, M-P}(c)$; por (I, B, 5.2), este último elemento es igual a $j^{L, L-P} \circ i_{M, L}(c)$, como buscamos.

Consideremos el diagrama (3) . Sea $\alpha = [M, N, c]$ un representante de un ciclo $\bar{\alpha} \in Z_q(LmP)$ tal que $N \subset P$. Sea $\bar{\bar{\alpha}}$ la clase de $\bar{\alpha}$ en $H_q(S(LmP))$. Entonces $\bar{\partial}(\bar{\bar{\alpha}})$ es la clase en $H_{q-1}(S(P))$ de $\partial\alpha = [N, \partial_{M,N}(c)]$, y $\Psi_P \circ \bar{\partial}(\bar{\bar{\alpha}}) = i_{N,P} \circ \partial_{M,N}(c)$. Por otra parte, $\Psi_{L,P}(\bar{\bar{\alpha}}) = i_{M-P, L-P} \circ j^{M-N, M-P}(c)$, y para obtener la igualdad $\partial_{L-P,P} \circ \Psi_{L,P}(\bar{\bar{\alpha}}) = \Psi_P \circ \bar{\partial}(\bar{\bar{\alpha}})$ buscada basta considerar el diagrama conmutativo (cf. I, B, 6) :

$$\begin{tikzcd}
H_q(L-P) \arrow[drr, "\partial_{L,P}"] & & \\
H_q(M-P) \arrow[u, "i_{M-P,L-P}"] \arrow[rr, "\partial_{M,P}"'] & & H_{q-1}(P) \\
H_q(M-N) \arrow[u, "j_{M-N,M-P}"] \arrow[rr, "\partial_{M,N}"'] & & H_{q-1}(N) \arrow[u, "i_{N,P}"']
\end{tikzcd}$$

Antes de proseguir con la segunda parte del teorema, notemos que ψ_L (y ψ_P) es inyectivo, cualquiera sea el dominio principal K. En efecto, si $\alpha = [N, c] \in Z_q(L)$ es un representante de una clase $\bar{\alpha} \in H_q(S(L))$ tal que $\psi_L(\bar{\alpha}) = i_{N,L}(c) = 0$, entonces, por la exactitud de

$$0 \longrightarrow H_{q+1}(L-N) \xrightarrow{\partial_{L,N}} H_q(N) \xrightarrow{i_{N,L}} H_q(L) \longrightarrow \cdots ,$$

existe $t \in H_{q+1}(L-N)$ tal que $\partial_{L,N}(t) = c$. Luego $[L, N, t] \in S_{q+1}(L)$ cumple $\partial [L, N, t] = \alpha$, y $\bar{\alpha} = 0$.

d) K es un cuerpo. Bastará probar que ψ_L (y ψ_P) es un isomorfismo. Entonces, por el lema de los cinco, resultará $\psi_{L,P}$ un isomorfismo. ψ_L es siempre inyectivo. Probemos que es suryectivo. Según (I, A, 4.2) existe una triangulación semianalítica de L, esto es, un complejo simplicial $\mathfrak{L}$ en un espacio afín Λ y un homeomorfismo $\tau : |\mathfrak{L}| \longrightarrow L$ tal que, para cada simple cerrado de dimensión p, $\sigma \in \mathfrak{L}$, $\tau(\sigma)$ es un conjunto semianalítico de dimensión p de X.

Según (I, B, 14) existe un isomorfismo $\varsigma_L : H_q(\mathfrak{L};K) \longrightarrow H_q(L;K)$ entre la homología simplicial (localmente finita) de $\mathfrak{L}$ y la homología de Borel-Moore de L, que es compatible con la inclusión de un subcomplejo

$\mathcal{T}$ de $\mathcal{L}$ (y éste es el único punto donde se utiliza que K es un cuerpo) .

Sea $c \in H_q(L;K)$ y $\tilde{c} = \xi_L^{-1}(c)$; sea $c' = \sum(\lambda_s c_s : \lambda_s \in K,\ s \in I)$ un q-ciclo simplicial de $\mathcal{L}$ que represente $\tilde{c}$, y sea $\mathcal{L}_o$ el subcomplejo de $\mathcal{L}$ formado por los simples c_s ($s \in I$) y sus caras. Entonces $L_o = \bigcup(\tau(\sigma) : \sigma \in \mathcal{L}_o)$ es un conjunto semianalítico cerrado de dimensión q de X (ya que la familia $\tau(\sigma)$ ($\sigma \in \mathcal{L}_o$) es localmente finita) . Sea $\tilde{c}_o$ la clase de homología de c' en $H_q(\mathcal{L}_o;K)$. Si $\xi_{L_o} : H_q(\mathcal{L}_o;K) \longrightarrow H_q(L_o;K)$ es la correspondiente identificación para L_o , entonces $[L_o, \xi_{L_o}(\tilde{c}_o)] \in Z_q(L;K)$. Sea α la clase de $[L_o, \xi_{L_o}(\tilde{c}_o)]$ en $H_q(S(L;K))$. Por definición, $\psi_L(\alpha) = i_{L_o, L}(\xi_{L_o}(\tilde{c}_o)) = \xi_L \circ i_{\mathcal{L}_o, \mathcal{L}}(\tilde{c}_o)$; la última igualdad se verifica por la conmutatividad de :

$$\begin{tikzcd}
H_q(\mathcal{L};K) \arrow[r, "\xi_L"] & H_q(L;K) \\
H_q(\mathcal{L}_o;K) \arrow[u, "i_{\mathcal{L}_o, \mathcal{L}}"] \arrow[r, "\xi_{L_o}"'] & H_q(L_o;K) \arrow[u, "i_{L_o, L}"']
\end{tikzcd} \quad .$$

Como $i_{\mathcal{L}_o, \mathcal{L}}(\tilde{c}_o) = \tilde{c}$, se obtiene $\psi_L(\alpha) = \xi_L(\tilde{c}) = c$, lo que prueba que ψ_L es suryectivo. Esto completa la demostración del teorema .

B.- FORMAS Y CORRIENTES SOBRE UN CONJUNTO SEMIANALITICO.

1.1.- Sea X una variedad analítica real conexa, de dimensión n, con base numerable de abiertos. Sea M un conjunto semianalítico cerrado de X de dimensión p. Según (I, A, 1.4) existe una descomposición $M = \bigcup (M_i^* : i = p \dots 0)$ de M en subvariedades analíticas disjuntas M_i^* de dimensión i de X. Aquí $M = M_p^* + \partial M$ y M_p^* es la variedad de los puntos p-regulares de M, $\partial M = M_{p-1}^* + \partial^2 M$ y M_{p-1}^* es la variedad de los puntos $(p-1)$-regulares de M, etc ; M_o^* es un conjunto discreto de X.

Diremos que $a \in D_q(X)$ se anula sobre M, y lo notamos $a \,|\, M = 0$, si la restricción $a \,|\, M_i^* \in D_q(M_i^*)$ de a sobre M_i^* es nula. Sea $D_q(X, M) = (a \in D_q(X) \; : \; a \,|\, M = 0)$. Como el diferencial exterior d en $D(X)$ es compatible con la restricción a una subvariedad de X, se vé que $d (D_q(X, M)) \subset D_{q+1}(X, M)$. Entonces $D(X, M) = \sum (D_q(X, M) \; : 0 \leqslant q \leqslant n)$ es una subálgebra diferencial graduada de $D(X)$ y es un módulo sobre $D(X)$. Se observa que $D_q(X, M) = D_q(X)$ para todo $q > \dim M$, y que $D_q(X, M) \subset D_q(X, \partial M)$ para todo q.

1.2.- <u>Definición</u> : Se llama álgebra de las formas diferenciales C^{∞} sobre M, con soporte compacto, al álgebra diferencial graduada cociente $D(M) = D(X) / D(X, M)$. Análogamente $A(M) = A(X) / A(X, M)$ designa al álgebra de las formas con soporte cualquiera sobre M. Si $a \in D(X)$, se indica con $a|M$ a la clase de a en $D(M)$; se dice también que

$a|M$ es la restricción de a sobre M (*) .

1.3. - <u>Proposición</u> : a) $D_q(M) = 0$ para todo $q > \dim M$.

b) Si $N \subset M$ son conjuntos semianalíticos de X , existe un homomorfismo canónico de álgebra diferencial graduada $D(M) \longrightarrow D(N)$, llamado homomorfismo de restricción .

c) Si M es una subvariedad analítica de X - o sea, si $\partial M = \emptyset$ - entonces $D(X) / D(X, M)$ se identifica canónicamente con el álgebra de las formas diferenciales de la variedad M .

d) Si M es un conjunto semianalítico cerrado de la variedad Y , y si Y es una subvariedad analítica cerrada de la variedad X , entonces $D(X)/D(X, M) = D(Y)/D(Y, M)$ canónicamente .

e) Si se considera $D(X)$ munido de su topología usual de espacio vectorial localmente convexo (cf. (10) ó (17)), y si M es un conjunto semianalítico cerrado de X , entonces $D(X, M)$ es un subespacio cerrado de $D(X)$; por lo tanto, si se asigna a $D(M)$ la topología cociente de $D(X)$ por $D(X, M)$, la proyección $D(X) \longrightarrow D(M)$ es continua y abierta.

<u>Demostración</u> : a) es evidente. Para probar b) , basta comprobar $D(X, M) \subset D(X, N)$. Procedamos por inducción sobre $\dim M$. El caso $\dim M = 0$ es trivial. Supongamos $\dim M > 0$; sea $a \in D(X, M)$ y sea $V \subset M$ una de las variedades de la descomposición de N en subvariedades. Basta probar $a|V = 0$. Esto es equivalente a $a|V - \partial M = 0$

(*) Esta definición es algo mas general que la dada en (12), 10-21 .

y $a|V - (V - \partial M)^- = 0$, ya que $(V - \partial M) \cup (V - (V - \partial M)^-)$ es denso en V. Como $V - \partial M$ es una subvariedad de $M - \partial M = M^*_p$ y $a|M^*_p = 0$, tenemos $a|V - \partial M = 0$; además, $V - (V - \partial M)^-$ es una variedad incluída en $M - (M - \partial M)^- \subset \partial M$, y por la hipótesis inductiva $\dim \partial M < \dim M$ y $a|\partial M = 0$ implican $a|V - (V - \partial M)^- = 0$.

c) es conocido. Sea $\mathcal{D}_X$ ($\mathcal{D}_{X,M}$) el haz de gérmenes de formas C^∞ sobre X (de formas C^∞ cuya restricción sobre M es nula); provisionalmente, sea $\mathcal{D}^*_M$ el haz de gérmenes de formas C^∞ de la variedad M, extendido por cero sobre X. Como $\mathcal{D}_{X,M}$ es blando, ya que $\mathcal{D}_X$ lo es, resulta $H^1_c(X;\mathcal{D}_{X,M}) = 0$ y la sucesión exacta de cohomología con soportes compactos asociada a la sucesión exacta de haces :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{X,M} \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}^*_M \longrightarrow 0$$

nos dá la sucesión exacta :

$$0 \longrightarrow D(X,M) \longrightarrow D(X) \longrightarrow D^*(M) \longrightarrow 0 ,$$

lo que implica $D(M) = D(X)/D(X,M) = D^*(M)$.

d) En efecto, el homomorfismo de restricción $D(X) \longrightarrow D(Y)$ induce un isomorfismo $D(X)/D(X,M) \longrightarrow D(Y)/D(Y,M)$.

e) Efectivamente, sean $\rho_j : M^*_j \longrightarrow X$ las inclusiones correspondientes a la descomposición de M en las subvariedades M^*_j ($j = 0 \ldots \dim M$) de X ; sean $\rho^*_j : D(X) \longrightarrow A(M^*_j)$ los respectivos homomorfismos de restricción, que se saben continuos ($A(M^*_j)$ munido de la topología usual de espacio de Frechet ; cf. (10) ó (17)) . Entonces $D(X, M) = \bigcap (\rho_j^{*-1}(0) : j = 0 \ldots \dim M)$ es cerrado .

2.1. - Sea M un subconjunto semianalítico cerrado de la variedad analítica X . Sea $D'_q(M) = (T \in D'_q(X) : T(a) = 0$ para toda $a \in D(X, M))$. El homomorfismo borde b en $D'(X)$ verifica $b (D'_q(M)) \subset D'_{q-1}(M)$, ya que $d (D_{q-1}(X, M)) \subset D_q(X, M)$. Por lo tanto, $D'(M) = \sum (D'_q(M) ; 0 \leqslant q \leqslant \dim M)$ es un subespacio vectorial diferencial graduado de $D'(X)$.

2.2. - <u>Definición</u> : Se llama espacio de las corrientes sobre M al espacio vectorial diferencial graduado $D'(M)$.

2.3. - <u>Proposición</u> : a) $D'_q(M) = 0$ para todo $q > \dim M$. Si $T \in D'(M)$, el soporte de T está incluído en M .

b) Toda $T \in D'(M)$ induce una forma lineal T^* sobre $D(M) = D(X)/D(X, M)$. Si se considera $D(M)$ munido de la topología cociente definida en 1.2 (e) , $T \longrightarrow T^*$ identifica $D'(M)$ con el espacio de los funcionales lineales y continuos sobre $D(M)$.

c) Sean $N \subset M$ conjuntos semianalíticos cerrados de X . Entonces existe un homomorfismo canónico de inclusión $i'_* : D'(N) \longrightarrow D'(M)$, deducido de la inclusión $D(X, M) \subset D(X, N)$; i'_* es un homomorfismo de módulo diferencial graduado y es inyectivo. En esta situación, identificamos generalmente $D'(N)$ con $i'_*(D'(N))$.

d) Si M es una subvariedad analítica de dimensión p de X - o sea, si $\partial M = \emptyset$ - $D'(M)$, definido según 2.2, se identifica con el espacio de corrientes de la variedad M.

d') Como complemento de d), observemos que, si $M = (x_0)$ es un punto, entonces $D'(x_0) = (r.\delta(x_0) : r \in R)$, donde $\delta(x_0)$ es la 0-corriente $f \longrightarrow f(x_0)$ $(f \in D_0(X))$.

e) Sea M un subconjunto semianalítico cerrado de la subvariedad cerrada Y de X. Entonces $D'_X(M) = (T \in D'(X) :$ T es nula sobre $D(X, M))$ se identifica con $D'_Y(M) = (T \in D'(Y) :$ T es nula sobre $D(Y, M))$.

Demostración : a) y b) son evidentes; c) también. Probemos d). Notemos con $D'_*(M)$ el espacio de corrientes de la variedad M. La restricción $D(X) \longrightarrow D(M)$, $a \longrightarrow a|M$ induce un monomorfismo $i : D'_*(M) \longrightarrow D'(X)$, $i\,S(a) = S(a|M)$. Evidentemente, $i(D'_*(M))$ es un subespacio de $D'(M)$. Para probar la igualdad de estos dos espacios, sea $T \in D'(M)$. Sea U_s $(s \in J)$ un cubrimiento localmente finito de un entorno de M en X mediante abiertos U_s que son dominios de mapas C^∞ $\varphi_s : U_s \longrightarrow R^n$ tales que $\varphi_s(U_s \cap M) = ((x_1 \ldots x_p, 0 \ldots 0) \in R^n)$. Sea λ_s $(s \in J)$ una partición C^∞ de la unidad sobre $\bigcup(U_s : s \in J)$ subordinada al cubrimiento U_s $(s \in J)$. Bastará probar que $\lambda_s T \in i(D'_*(M))$, o que $T_s \in i(D'_*(R^p))$; aquí $T_s \in D'(R^n)$ es la imagen de $\lambda_s T$ por φ_s, $D'_*(R^p)$ es el espacio de las corrientes de la variedad $R^p \subset R^n$ y $i : D'_*(R^p) \longrightarrow D'(R^n)$ es el homomorfismo inducido por la restricción $D(R^n) \longrightarrow D(R^p)$. Sea $f = f(x_{p+1} \dots x_n) \in D_o(R^{n-p})$ una función igual a 1 en algún entorno del origen de R^{n-p}. Entonces $Q_s : g \longrightarrow T_s(f.g)$ $(g \in D(R^p))$ es una corriente en $D'_*(R^p)$ y cumple $i\, Q_s(a) = Q_s(a|M) = T_s(f.(a|M))$ $T_s(a)$, para toda $a \in D(R^n)$, ya que $a - f.(a|M) \in D(R^n, R^p)$ y T_s es nula sobre $D(R^n, R^p)$. Entonces $T_s = i\, Q_s$, como buscamos.

d') En efecto, $D'(x_o)$ está incluído en el conjunto de las distribuciones sobre X con soporte en x_o. Tales distribuciones son combinaciones lineales de derivadas de $\delta(x_o)$ (cf. (18), III, 10). Consideremos una derivada $\dfrac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \delta(x_o) = \delta^p$ de orden $p = p_1 + \dots + p_n > 0$. Es fácil construír una función $a \in D_o(X)$ tal que $a(x_o) = 0$ y $\dfrac{\partial^p a}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(x_o) \neq 0$. Pero entonces la distribución recién definida no es nula sobre $D_o(X, x_o)$, luego $\delta^p \notin D'(x_o)$. Pero entonces sólo los múltiplos reales de $\delta(x_o)$ pertenecen a $D'(x_o)$.

e) es evidente ya que, según d), $D'(Y) = (T \in D'(X) : T$ es nula sobre $D(X, Y))$.

2.4.- Sean $N \subset M$ conjuntos semianalíticos cerrados de la variedad X. Como consecuencia de 2.2 (c), existe una sucesión exacta de módulos diferenciales graduados :

$$0 \longrightarrow D'(N) \xrightarrow{i^!_*} D'(M) \xrightarrow{j^!_*} D'(M)/D'(N) \longrightarrow 0$$

2.5. - Definición : Se llama espacio de las corrientes sobre M, módulo N, al módulo diferencial graduado $D'(MmN) = D'(M)/D'(N)$, con el diferencial inducido por el borde de $D'(M)$.

En las condiciones de esta definición, se deduce la existencia de una sucesión exacta de homología de corrientes :

$$(2.6) \qquad \cdots \longrightarrow H_q(D'(N)) \xrightarrow{i'} H_q(D'(M)) \xrightarrow{j'} H_q(D'(MmN)) \xrightarrow{b'}$$

$$\xrightarrow{b'} H_{q-1}(D'(N)) \longrightarrow \cdots$$

3.1. - Proposición : Sea L un conjunto semianalítico cerrado de la variedad analítica X. Existe un homomorfismo no trivial de módulo diferencial graduado $I : S(L;R) \longrightarrow D'(L)$ del espacio de las cadenas semianalíticas de L con coeficientes reales en el espacio de las corrientes sobre L.

Demostración : Consideremos el conjunto $S_{a,q}(L;R) = S_{a,q}(L)$ definido en (A, 1.1). Definamos la aplicación $I' : S_{a,q}(L) \longrightarrow D'_q(X)$, $(M,N,c) \longrightarrow I(M,N,c)$, donde el último símbolo designa la corriente de integración sobre M definida por $c \in H_q(M-N;c)$ (cf. II, A, 2.1). Si $a \in D_q(X,M)$, se tiene $a|M - \partial M = 0$ (cf. 1.1) y por lo tanto $a|M - (N \cup \partial M) = 0$; aplicando (II, A, 2.5.4) se deduce $I(M,N,c)(a) = 0$, luego que $I(M,N,c) \in D'_q(M) \subset D'_q(L)$ para todo $(M,N,c) \in S_{a,q}(L)$.

Sean $(M_s, N_s, c_s) \in S_{a,q}(L)$ ($s = 1, 2$) dos ternas $R(L)$-equivalentes. Esto significa que, si $M = M_1 \cup M_2$, $N = N_1 \cup N_2$, entonces $(M_1, N_1, c_1) + (M_2, N_2, -c_2) = (M, N, 0)$, con $0 = h(c_1, c_2)$ (cf. A, 1.2). Entonces, según (II, A, 3.3), se cumple $o = I(M,N,c) = I(M_1,N_1,c_1) + I(M_2,N_2,-c_2)$. Por lo tanto, $I(M_1,N_1,c_1) = I(M_2,N_2,c_2)$, y la aplicación I' es compatible con la relación $R(L)$ sobre $S_{a,q}(L)$ y define una aplicación :

$$I : \begin{cases} S_q(L;R) \longrightarrow D'_q(L) \\ [M,N,c] \longrightarrow I[M,N,c], \quad (0 \leqslant q \leqslant \dim L). \end{cases}$$

Veamos que I es un homomorfismo. Sean $r \in R$ y $[M,N,c] \in S_q(L)$. Según (II, A, 2.1) $I(M,N) : H_q(M-N;R) \longrightarrow D'(X)$ es un homomorfismo, y entonces $I[r[M,N,c]] = I(r(M,N,c)) = I(M,N,r.c) = r\, I(M,N,c) = r.\, I[M,N,c]$. Sean ahora $(M_s, N_s, c_s) \in S_{a,q}(L)$ $(s = 1, 2)$, y sea $(M,N,c) = (M_1,N_1,c_1) + (M_2,N_2,c_2)$. Por (II, A, 3.3) se cumple $I(M,N,c) = I(M_1,N_1,c_1) + I(M_2,N_2,c_2)$, y esto implica la aditividad de I.

Sea ahora $[M,N,c] \in S_q(L;R)$; por (II, B, 2.1) se cumple

$$b\, I[M,N,c] = b\, I(M,N,c) = I(N, \partial_{M,N}(c)) = I[\partial[M,N,c]]$$

(cf. A, 1.4). Entonces $b\, I = I \partial$, y I es un homomorfismo de módulo diferencial graduado.

3.2.- <u>Corolario</u> : a) Existe un homomorfismo $I_L : H_*(S(L;R)) \longrightarrow H_*(D'(L))$ de la homología semianalítica con coeficientes reales de L en la homología de las corrientes sobre L.

b) Si L es una variedad analítica, I_L es un isomorfismo y existe un diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} H_*(L;R) \arrow[r, "\nu_L"] & H_*(D'(L)) \\ H_*(S(L;R)) \arrow[u, "\Psi_L"] \arrow[ur, "I_L"'] & \end{tikzcd}$$

donde ν_L es el isomorfismo canónico definido en (I, B, 8.5) y Ψ_L es el isomorfismo definido en (A, 2.1) .

<u>Demostración</u> : a) I_L es el homomorfismo derivado de $I : S_*(L) \longrightarrow D'_*(L)$. b) Supongamos que L es una variedad. Para probar conmutativo el diagrama, sea $[M, c] \in S_q(L;R)$ un ciclo representante de una clase $\alpha \in H_q(S(L;R))$. Por definición de Ψ_L, se cumple $\Psi_L(\alpha) = i_{M,L}(c)$ (cf. A, 2.1) . Por (II, B, 3.4) existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_q(L;R) \arrow[r, "\nu_L"] & H_q(D'(L)) \\ H_q(M;R) \arrow[u, "i_{M,L}"] \arrow[ur, "I_{M,L}"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\nu_L \circ \Psi_L(\alpha) = \nu_L \circ i_{M,L}(c) = I_{M,L}(c) =$ clase de $I(M,c) = I[M,c]$ en $H_q(D'(L))$, y esta clase es, por definición, $I_L(\alpha)$.

De la conmutatividad del diagrama se deduce que I_L es un isomorfismo.

3.3.- Corolario : Sean $P \subset L$ conjuntos semianalíticos cerrados de X. Existe un diagrama conmutativo :

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(D'(P)) \arrow[r, "i'"] & H_q(D'(L)) \arrow[r, "j'"] & H_q(D'(LmP)) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(S(P)) \arrow[r, "\bar{i}"'] \arrow[u, "I_P"] & H_q(S(L)) \arrow[r, "\bar{j}"'] \arrow[u, "I_L"] & H_q(S(LmP)) \arrow[r] \arrow[u, "I_{L,P}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

donde las filas horizontales son las sucesiones exactas de homología semianalítica y de homología con corrientes (cf. A, 1.8 y B, 2.5).

Demostración : Consideremos el diagrama siguiente, donde las filas horizontales son exactas :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D'(P) \arrow[r] & D'(L) \arrow[r] & D'(L)/D'(P) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S(P) \arrow[r] \arrow[u, "I'_P"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & S(L) \arrow[r] \arrow[u, "I'(L)"'] & S(L)/S(P) \arrow[r] \arrow[u, "I'_{L,P}"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

Por (II, B, 3.1) , conmuta (1) ; entonces conmuta todo el diagrama y, considerando el correspondiente diagrama en homología, se obtiene lo buscado.

4.- Sea M un conjunto semianalítico cerrado de la variedad X ; supongamos $\dim M = p$. Sea $c \in H_p(M;R)$. Consideremos el homomorfismo $\tau(M) : D_q(M) \longrightarrow D'_{p-q}(M)$, $a \longrightarrow a \wedge I(M,c)$ ($0 \leqslant q \leqslant p$), donde

$a \wedge I(M, c)(f) = I(M, c)(a \wedge f)$, para toda $f \in D_{p-q}(M)$. Como $I(M, c)$ es cerrada, se cumple $da \wedge I(M, c)(f) = I(M, c)(da \wedge f) = (-1)^{q+1} I(M, c)(a \wedge df)$ $= (-1)^{q+1}\, b\,(a \wedge I(M, c))(f)$, ya que $d(a \wedge f) = da \wedge f + (-1)^q a \wedge df$.

Por lo tanto, en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D_q(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\tau(M)"'] & D_{q+1}(M) \arrow[d, "\tau(M)"] \\ D'_{p-q}(M) \arrow[r] & D'_{p-q-1}(M) \end{tikzcd}$$

se verifica $\tau(M) \circ d = (-1)^{q+1}\, b \circ \tau(M)$, y se deduce un homomorfismo $\bar{\tau}(M, c) : H_q(D(M)) \longrightarrow H_{p-q}(D'(M))$ $(0 \leqslant q \leqslant p)$. Si M es una variedad y c es una clase fundamental de M, $\bar{\tau}(M)$ es un isomorfismo (cf. I, B, 8.4).

C. - FORMAS IMPARES.

En (I, C) se ha visto que para definir una corriente de integración sobre una variedad diferenciable X de dimensión n es necesario orientar X o, mas generalmente, elegir una clase en $H_n(X,R)$. Lo mismo sucede en el caso semianalítico : existe una corriente de integración $I(M,N,c)$ para cada $c \in H_p(M-N;R)$ ($N \subset M$ conjuntos semianalíticos y $\dim M = p$; cf. II, A, 2.1).

De Rahm ha mostrado que es posible definir una corriente de integración sobre X sin necesidad de fijar una clase de homología de X, siempre que se integren las formas "impares" de X (cf. (17)). Esto resulta particularmente útil cuando X no es orientable.

En este párrafo definimos las formas impares sobre un conjunto semianalítico M, y probamos que tales formas pueden integrarse sobre M. En el caso en que M es una variedad, estas formas impares se identifican con las definidas en (17), salvo diferencias de lenguaje.

1.- Sean $N \subset M$ conjuntos semianalíticos cerrados de la variedad analítica X, tales que $p' = \dim N < \dim M = p \leqslant \dim X = n$. Sea $\mathcal{H}^X_*(M,N;R) = \sum (\mathcal{H}^X_q(M,N;R) : 0 \leqslant q \leqslant \dim M)$ el haz engendrado sobre X por el prehaz $U \longrightarrow H_*((M-N)\cap U;R)$ (U abierto en X) tal que, si $V \subset U$, el homomorfismo $H_*((M-N)\cap U;R) \longrightarrow H_*((M-N)\cap V;R)$ es la restricción $j^{(M-N)\cap U,\,(M-N)\cap V}$ (cf. I, B, 4.4). Si $N = \emptyset$, abreviamos $\mathcal{H}_*^X(M, \emptyset; R) = \mathcal{H}_*^X(M;R)$. En este caso, $\mathcal{H}_*^X(M;R)$ es la extensión por cero sobre X del haz de homología $\mathcal{H}_*(M;R)$ de M (*).

Según (I, B, 5.2), los homomorfismos $\partial_{M\cap U, N\cap U}$: $H_p((M-N)\cap U;R) \longrightarrow H_{p-1}(N\cap U;R)$ (U abierto en X) son compatibles con la restricción a un subespacio abierto, y obtenemos por lo tanto un homomorfismo de haz :

$$(1.1) \qquad \partial^X_{M,N} : \mathcal{H}^X_p(M,N) \longrightarrow \mathcal{H}^X_{p-1}(N).$$

Sea $\mathcal{D}'_X = \sum(\mathcal{D}'_{q,X} : 0 \leqslant q \leqslant n)$ el haz diferencial graduado de los gérmenes de corrientes sobre X. Notemos con b_X su diferencial. Por la condición (b) de (II, A, 2.1), la colección de monomorfismos $H_p((M-N)\cap U;R) \longrightarrow D'(U)$ (U abierto en X) define un monomorfismo de haz :

$$\mathcal{J}^X(M,N) : \mathcal{H}^X_p(M,N;R) \longrightarrow \mathcal{D}'_{p,X}.$$

Análogamente, existe un monomorfismo $\mathcal{J}^X(N) : \mathcal{H}^X_{p-1}(N;R) \longrightarrow \mathcal{D}'_{p-1,X}$. Pero entonces estas definiciones y el teorema (II, B, 2.1) implican inmediatamente el teorema :

1.2. - <u>Teorema</u> : En las condiciones del teorema (II, B, 2.1), el diagrama siguiente es conmutativo :

(*) Sea Y un subespacio cerrado del espacio topológico X, y sea $\mathcal{L}$ un haz de grupos abelianos sobre Y. La extensión por cero de $\mathcal{L}$ sobre X es el haz $U \longrightarrow \mathcal{L}(U\cap Y)$ (U abierto en X) (cf. (6), II, 2.9.2)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_p^X(M,N;R) \arrow[r, "\mathfrak{I}^X(M,N)"] \arrow[d, "\partial^X(M,N)"'] & \mathcal{D}'_{p,X} \arrow[d, "b^X"] \\ \mathcal{H}_{p-1}^X(N;R) \arrow[r, "\mathfrak{I}^X(N)"'] & \mathcal{D}'_{p-1,X} \end{tikzcd} .$$

Sean $\mathcal{D}'^X_M$ y $\mathcal{D}'^X_N$ los haces diferenciales graduados de gérmenes de corrientes sobre los conjuntos M y N, respectivamente. Según 2.3 (a), $\mathcal{D}'^X_M$ está concentrado sobre M (*) y $\mathcal{D}'^X_N$ está concentrado sobre N. Notemos con $\mathcal{D}'_M$ la restricción de $\mathcal{D}'^X_M$ sobre M y con $\mathcal{D}'^M_N$ y $\mathcal{D}'_N$ la restricción de $\mathcal{D}'^X_N$ sobre M y N, respectivamente. Se observa que las secciones de $\mathcal{D}'_M$ sobre M se identifican con las corrientes de M.

Como fué observado en (B, 3.1), $I(M,N,c) \in D'_p(M)$ para todo $c \in H_p(M-N;R)$; por lo tanto, $\mathfrak{I}^X_{(M,N)}(\mathcal{H}^X_p(M,N;R)) \subset \mathcal{D}'^X_{p,M}$ y $\mathfrak{I}^X_{(N)}(\mathcal{H}^X_{p-1}(N;R)) \subset \mathcal{D}'^X_{p-1,N} \subset \mathcal{D}'^X_{p-1,M}$. Restringiendo sobre M el diagrama de 1.2, obtenemos el diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_p(M,N;R) \arrow[r, "\mathfrak{I}(M,N)"] \arrow[d, "\partial(M,N)"'] & \mathcal{D}'_{p,M} \arrow[d, "b^M"] \\ \mathcal{H}^M_{p-1}(N;R) \arrow[r, "\mathfrak{I}^M(N)"'] & \mathcal{D}'_{p-1,M} \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Aquí $\mathcal{H}_p(M,N)$ y $\mathcal{H}^M_{p-1}(N)$ son las restricciones de $\mathcal{H}^X_p(M,N)$ y $\mathcal{H}^X_{p-1}(N)$ sobre M, y $\mathfrak{I}(M,N)$, $\mathfrak{I}^M(N)$, $\partial(M,N)$ y b_M

(*) o sea, la fibra de $\mathcal{D}'_M$ sobre puntos $x \in X-M$ es nula .

son las correspondientes restricciones de los homomorfismos de 1.2 .

Sea $\mathcal{D}_X = \sum (\mathcal{D}_{p,X} : 0 \leqslant p \leqslant n)$ el haz diferencial graduado de los gérmenes de formas diferenciales C^∞ sobre X. Sea $\mathcal{D}^X_{X,M}$ el haz $U \longrightarrow D(U, M \cap U)$ (U abierto en X) sobre X, donde $D(U, M \cap U)$ indica el subespacio de $D(U)$ de las formas nulas sobre $M \cap U$ (cf. B, 1.1). Sea $\mathcal{D}^X_M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}^X_{X,M}$ el haz cociente, y sea $\mathcal{D}_M$ la restricción de $\mathcal{D}^X_M$ sobre M. $\mathcal{D}_M$ es un haz diferencial graduado con diferencial d_M.

2.1. - Definición : Sean $N \subset M$ conjuntos semianalíticos cerrados de la variedad analítica X. Supongamos $\dim N < \dim M = p \leqslant \dim X$. Se llama haz de gérmenes de formas diferenciales (pares, C^∞) sobre M al haz diferencial graduado $\mathcal{D}_M = \sum (\mathcal{D}_{q,M} : 0 \leqslant q \leqslant \dim M)$ recién definido.

Se llama haz de gérmenes de formas diferenciales impares sobre M, módulo N, al haz producto tensorial ${}_i\mathcal{D}_M = \mathcal{H}^M_p(M-N;R) \otimes \mathcal{D}_M$. ${}_i\mathcal{D}_M$ es un haz diferencial graduado, con la graduación y el diferencial ${}_id_M = 1 \otimes d_M$ deducidos de $\mathcal{D}_M$.

Se llaman formas impares sobre M, con soporte compacto, módulo N, a los elementos del espacio vectorial diferencial graduado ${}_iD(M) = \sum ({}_iD_q(M)_N : 0 \leqslant q \leqslant p)$ de las secciones con soporte compacto de ${}_i\mathcal{D}_M$ sobre M. Si $N = \emptyset$, se abrevia ${}_iD(M)_\emptyset = {}_iD(M)$.

2.2. - <u>Proposición</u> : a) El espacio $\Gamma_c(\mathcal{D}_M)$ de las secciones con soporte compacto de $\mathcal{D}_M$ sobre M se identifica con $D(M)$, espacio de las formas diferenciables de M.

b) Supongamos $N = \emptyset$ y $\mathcal{H}(M;R)$ isomorfo a $M \times R$ = haz constante de fibra R. Entonces, la elección de un isomorfismo $\varphi : \mathcal{H}(M;R) \longrightarrow M \times R$ identifica ${}_i D(M)$ con $D(M)$.

<u>Demostración</u> : Mediante el isomorfismo φ de b), se tiene ${}_i\mathcal{D}_M = R \otimes \mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M$, y basta entonces comprobar a). Se observa que las condiciones de b) se realizan, por ejemplo, si M es una subvariedad analítica orientable de X (y $N = \emptyset$).

En cuanto a a), como $\mathcal{D}^X_M$ está concentrado sobre M, el espacio $\Gamma(\mathcal{D}^X_M)$ de las secciones de $\mathcal{D}^X_M$ sobre X se identifica con el espacio $\Gamma(\mathcal{D}_M)$ de las secciones (extendidas por cero) de $\mathcal{D}_M$ sobre M (cf. (6), II, 2.9.2). Considerando la sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^X_{X,M} \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{D}^X_M \longrightarrow 0$$

y la sucesión de cohomología con soportes compactos asociada, se deduce la exactitud de

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{D}^X_{X,M}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{D}_X) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{D}^X_M) \longrightarrow 0 ,$$

ya que $H^1_c(X, \mathcal{D}^X_{X,M}) = 0$ porque $\mathcal{D}^X_{X,M}$ es blando. Pero entonces, teniendo en cuenta que $\Gamma_c(\mathcal{D}_X) = D(X)$ y $\Gamma_c(\mathcal{D}^X_{X,M}) = D(X,M)$, se deduce $\Gamma_c(\mathcal{D}_M) \simeq \Gamma_c(\mathcal{D}^X_M) = D(X) / D(X,M) = D(M)$ (cf. III, B, 1.2).

2.3. - <u>Proposición</u> : En las condiciones de la definición 2.1, existe una corriente de integración <u>par</u> sobre M, módulo N; o sea, existe una aplicación lineal no nula (*)

$$ {}_i I_{M,N} : {}_i D(M)_N \longrightarrow R $$

<u>Demostración</u> : Sea $a \in {}_i D_p(M)_N$. Mediante una adecuada partición C^∞ de la unidad sobre un entorno del soporte de a, se puede probar que existe una familia finita U_j ($j \in J$) de abiertos de X, y familias $c_j \in H_p((M-N) \cap U_j ; R)$ y $a_j \in \Gamma_c(\mathcal{D}_{p,M} | U_j \cap M) = D_p(U_j \cap M)$ (cf. 2.2 (a)), tales que $a = \sum_{j \in J} c_j \otimes a_j$. Entonces definimos :

$$ {}_i I_{M,N}(a) = \sum_{j \in J} \mathfrak{J}(M,N)(c_j)(a_j), $$

donde $\mathfrak{J}(M,N)(c_j)$ es la corriente de $U_j \cap M$ imagen de c_j por $\mathfrak{J}_{(M,N)}$ (cf. 1.3). Se prueba inmediatamente que ${}_i I_{M,N}(a)$ no depende de la particular descomposición $a = \sum_{j \in J} c_j \otimes a_j$. C.Q.D.

2.4. - <u>Observación</u> : El espacio de las secciones de $\mathcal{H}_p(M-N;R)$ es, localmente, de dimensión finita. Utilizando este hecho, se puede definir una topología tensorial sobre ${}_i D(M)_N$ que coincide, en las condiciones de 2.2 (b), con la topología de $D(M)$. Entonces ${}_i I_{M,N}$ resulta continuo.

El homomorfismo $\rho_{M,N} : D(M) \longrightarrow D(N)$ de restricción y el homomorfismo $\partial_{M,N} : \mathcal{H}_p(M,N) \longrightarrow \mathcal{H}^M_{p-1}(N)$, restricción sobre M del

(*) siguiendo a De Rahm (17), las corrientes pares son los funcionales lineales (y continuos) sobre las formas impares .

homomorfismo $\partial^{X}_{M,N}$ definido en 1.1, permiten definir un homomorfismo

(2.4) $$_{i}\rho_{M,N} : {}_{i}D_{q}(M)_{N} \longrightarrow {}_{i}D_{q-1}(N) \qquad (0 \leqslant q \leqslant p)$$

de la manera siguiente : si $f = c \otimes a \in {}_{i}D_{q}(M)_{N}$, donde $c \in H_{p}((M-N)\cap U)$, U es abierto en X y $a \in D(M)$ tiene soporte compacto en U, entonces :

$$_{i}\rho_{M,N}(f) = \partial_{M\cap U, N\cap U}(c) \otimes \rho_{M,N}(a),$$

donde $\partial_{M\cap U, N\cap U} : H_{q}((M-N)\cap U) \longrightarrow H_{q-1}(N\cap U)$ es el homomorfismo de conexión correspondiente al par $N\cap U \subset M\cap U$. Mediante particiones de la unidad se extiende la definición de $_{i}\rho_{M,N}$ a todas las formas en $_{i}D_{q}(M)_{N}$.

2.5.- Proposición : En las condiciones de la definición 2.1, supongamos $\dim N = p-1$. Sean $_{i}I_{M,N}$ y $_{i}I_{N}$ las corrientes pares de integración sobre M (módulo N) y sobre N. Entonces, para toda $f \in {}_{i}D_{p-1}(M)$, se cumple,:

$$b_{M}\ {}_{i}I_{M,N}(f) = {}_{i}I_{M,N}(d_{M}(f)) = {}_{i}I_{N}({}_{i}\rho_{M,N}(f)).$$

Demostración : Siempre podemos suponer que $f = c \otimes a$ es del tipo utilizado para definir el homomorfismo de 2.4. Entonces $d_{M}(f) = c \otimes da$, y $_{i}I_{M,N}(d_{M}(f)) = \mathfrak{J}_{(M,N)}(c)(da) = \mathfrak{J}^{M}_{(N)}(\partial_{(M,N)}c)(a) = \mathfrak{J}_{(N)}(\partial_{(M,N)}c)(\rho_{M,N}(a)) = {}_{i}I_{N}({}_{i}\rho_{M,N}(f))$, según 1.3, como buscamos.

BIBLIOGRAFIA

(1) Borel (A) y Moore (J.C.). - Homology theory for locally compact spaces; Mich. math. J., t. 7 (1960), p. 137-159.

(2) Borel (A) y Haefliger (A). - La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique; Bull. Soc. math. France, 89 (1961), p. 461-513.

(3) Bourbaki (N). - Algèbre; Chapitre III; Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind., 1044)

(4) Cartan (Henri). - Topologie algébrique; le. et 2e. édition, Séminaire Cartan, t. 1, 1948-1949; Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

(5) . - Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux; 2e. édition, Séminaire Cartan, t. 3, 1950-1951; Paris, Sécretariat mathématique, 1955.

(6) Godement (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux; Paris, Hermann, 1958 (Act. Scient. et ind., 1252).

(7) Grothendieck (A). - Produits tensorielles topologiques et espaces nucléaires; Memoirs of the A.M.S., n. 16, 1955.

(8) Herrera (Miguel). - On the extension of currents; Rev. Unión Mat. Arg., por publicar.

(9) . - Intégration sur un ensemble semianalytique; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 763-765 (18 janvier 1965).

(10) . - Regularización de corrientes; (Exposición), por publicar.

(11) Lelong (P). - Intégration sur un ensemble analytique complexe; Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), p. 239-262.

(12) . - Séminaire d'Analyse, 1958/59; Paris, Secrétariat mathématique, 1959.

(13) Lojasiewicz (S) . - Une propiérté topologique des sous-ensembles analytiques réels; Colloques Internationaux du C.N.R.S., Paris, 25-30 Juin 1962, n. 117, p. 87-89 .

(14) . - Triangulation of semianalytic sets; Universidad de Pisa, por aparecer.

(15) . - División de distribuciones y triangulación de conjuntos semianalíticos; Universidad de Buenos Aires, Fac. C. Exactas y Naturales, Dep. Matemáticas; por aparecer.

(16) . - Sur le problème de la division; Studia Mathematica, T. XVIII, 1959, p. 88-136.

(17) De Rham (G) . - Variétés Différentiables, Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. 1222) .

(18) Schwartz (L) . - Théorie des distributions, t. 1, Paris, Hermann, 1950 (Act. scient. et ind. 1091).

(19) Whitney (H) . - Geometric Integration theory; Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1957.