



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Tesis para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias Exactas - Área Matemática

**Reducción lagrangiana de sistemas mecánicos discretos  
con vínculos no holónomos**

Cora Inés Tori

Licenciada en Matemática (UNLP, 2004)

Director: Dr. Javier Fernandez

Codirectora: Dra. Marcela Zuccalli

La Plata, Abril 2010

*A mis padres.*

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer a todas las personas que hicieron posible este trabajo.

A mis directores, Javier y Marcela, por todo el tiempo que han dedicado a trabajar conmigo y porque al lado de ellos aprendí las cosas buenas que tiene el formar parte de un equipo de trabajo. En particular le doy las gracias a Javier, por aceptar dirigir esta tesis que representa mis primeros pasos en la investigación. Muy especialmente le agradezco a Marcela por estar siempre cerca, por su infinita paciencia y por el apoyo que siempre me brinda.

A mis padres, por comprenderme y acompañarme en todos los momentos de mi vida y por estar siempre a mi lado a pesar de las distancias.

A mi hermana, por su apoyo incondicional.

A todos mis amigos que a través de estos años han disfrutado conmigo los momentos felices y han estado a mi lado en los difíciles.

Profundamente quiero darle las gracias a mi compañero en la vida, Diego, por haber compartido conmigo todos estos años en los que transité por este doctorado, porque supo entenderme y contenerme, y por el amor que me brinda todos los días.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de fibrados . . . . .	11
2.1.1. Conexiones . . . . .	14
2.2. Mecánica Lagrangiana . . . . .	17
2.2.1. Sistemas forzados . . . . .	18
<b>3. Reducción de sistemas mecánicos no holónomos</b>	<b>20</b>
3.1. Sistemas mecánicos no holónomos generalizados . . . . .	20
3.2. Reducción de sistemas mecánicos no holónomos generalizados . . . . .	22
<b>4. Sistemas mecánicos discretos</b>	<b>29</b>
4.1. Sistemas mecánicos discretos libres . . . . .	30
4.2. Integradores de sistemas mecánicos . . . . .	33
4.2.1. Integradores variacionales . . . . .	33
4.2.2. Integradores simplécticos . . . . .	40
4.3. Sistemas mecánicos discretos no holónomos . . . . .	46
4.3.1. Existencia y unicidad de solución . . . . .	48
4.3.2. Un ejemplo . . . . .	50

4.4.	Sistemas mecánicos discretos forzados . . . . .	52
<b>5.</b>	<b>Sistemas mecánicos discretos con simetría</b>	<b>54</b>
5.1.	Sistemas mecánicos discretos con simetría . . . . .	55
5.1.1.	Conexión discreta . . . . .	55
5.1.2.	Isomorfismos asociados a una conexión discreta . . . . .	58
5.2.	Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría . . . . .	59
5.2.1.	Conexión discreta afín . . . . .	61
5.2.2.	Levantamiento horizontal discreto . . . . .	67
5.2.3.	Isomorfismos asociados a una conexión discreta afín . . . . .	73
5.2.4.	Momento no holónimo discreto . . . . .	77
<b>6.</b>	<b>Reducción Lagrangiana de sistemas discretos con simetría</b>	<b>82</b>
6.1.	Lagrangianos discretos . . . . .	83
6.2.	Curvatura mixta . . . . .	86
6.3.	Fuerza discreta reducida . . . . .	90
6.4.	Dinámica reducida . . . . .	92
6.4.1.	Teorema de reducción . . . . .	92
6.4.2.	Versión intrínseca de las ecuaciones reducidas . . . . .	103
6.4.3.	Ecuación vertical-Evolución del momento . . . . .	109
6.5.	Reconstrucción de la dinámica original . . . . .	112
<b>7.</b>	<b>Ecuaciones reducidas en casos particulares</b>	<b>116</b>
7.1.	Fibrado trivial . . . . .	117
7.1.1.	Ecuaciones horizontales . . . . .	120
7.1.2.	Ecuaciones verticales . . . . .	122
7.1.3.	Reconstrucción . . . . .	123

7.1.4. Un ejemplo . . . . .	124
7.2. Grupo de simetría como espacio de configuración . . . . .	129
7.3. Simetría de tipo Chaplygin . . . . .	132
7.3.1. Una inclusión . . . . .	134
7.3.2. Dinámica reducida . . . . .	138
7.3.3. Reconstrucción . . . . .	141
7.4. Simetrías horizontales . . . . .	142
7.4.1. Conexión discreta afín para simetrías horizontales . . . . .	144
7.4.2. Dinámica reducida . . . . .	150
7.4.3. Reconstrucción . . . . .	152
7.4.4. Un ejemplo . . . . .	153
<b>8. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>158</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La mecánica geométrica es la rama de la mecánica que estudia la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana utilizando técnicas de geometría diferencial. Este enfoque permite entender mejor la estructura geométrica de las ecuaciones de movimiento de los sistemas dinámicos considerados y facilita el análisis de las mismas.

Uno de los intereses principales de la mecánica geométrica es estudiar los sistemas mecánicos que presentan una simetría dada por la acción de un grupo de Lie. El estudio de estos sistemas y sus consecuencias es abordado por la llamada teoría de reducción, cuyo objetivo principal es encontrar un método que permita reducir los grados de libertad del sistema, utilizando las leyes de conservación que vienen dadas por la presencia de una simetría. En particular, se estudia cómo reducir el orden de las ecuaciones de movimiento que determinan la dinámica del sistema considerado.

La teoría de reducción ha sido desarrollada tanto desde el enfoque lagrangiano como desde el hamiltoniano. En este trabajo nos concentramos en abordar la reducción de sistemas mecánicos discretos desde el punto de vista lagrangiano.

Entre los primeros resultados de reducción de sistemas mecánicos clásicos podemos mencionar el trabajo de Routh (1850) en el contexto de simetrías abelianas.

Desde entonces muchos autores se han interesado en el estudio de la reducción de sistemas con simetría, entre los más destacados se encuentran Lie y Poincaré, cuyos trabajos datan de 1890 y 1901 respectivamente. Luego de muchos años, entre 1960 y 1970, el tema es retomado por Arnold en [2] y Smale en [25]. Desde ese entonces y hasta la actualidad el estudio de la reducción de sistemas mecánicos con simetría ha sido abordado por numerosos autores.

En el contexto de sistemas mecánicos con vínculos no holónomos con simetría un trabajo destacado es [4], en el que Bloch, Krishnaprasad, Marsden y Murray desarrollan el estudio de la reducción generalizando el uso de conexiones y aplicaciones momento asociadas a la simetría del sistema.

En los últimos diez años se han obtenido avances importantes en el estudio de la reducción de sistemas mecánicos con simetría. En particular, Cendra, Marsden y Ratiu han escrito dos trabajos, [9] y [10], en los cuales desarrollan la reducción desde un enfoque lagrangiano. Es decir, establecen la equivalencia entre el principio variacional que determina la dinámica del sistema original, otro principio que determina la dinámica del sistema reducido y las ecuaciones de movimiento que se deducen de cada uno de ellos. En [9] presentan la llamada reducción en etapas para sistemas mecánicos holónomos; es decir, estudian el proceso de reducción en repetidos pasos considerando las simetrías residuales. Por otro lado en [10] los autores generalizan la teoría anterior y estudian la reducción de sistemas mecánicos con vínculos no holónomos. Otro de los trabajos recientes es el de Cendra, Ferraro y Grillo, [8], en el que estudian la reducción para sistemas no holónomos en los que los vínculos variacionales no se deducen de los cinemáticos; estos sistemas son llamados sistemas mecánicos no holónomos generalizados.

El interés por la mecánica discreta desde un enfoque variacional tiene sus raíces en la literatura de control óptimo de los años sesenta; ver, por ejemplo, los trabajos



de Jordan y Polack [19], Hwang y Fang [16] y Cadzow [6]. Desde entonces, muchos autores se han interesado en estudiar la dinámica de estos sistemas, en el caso de sistemas discretos sin vínculos o con vínculos holónomos, podemos mencionar los trabajos de Wendlant y Marsden, [26], Marsden y West, [24], y las referencias que figuran en ellos. La dinámica para sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos ha sido introducida en el año 2001 por Cortés y Martínez en [12].

Una de las ideas básicas de la formulación estándar de la mecánica discreta consiste en reemplazar el espacio  $TQ$  por  $Q \times Q$ . Es decir, si se considera un sistema mecánico con espacio de configuración  $Q$ , en el contexto continuo el espacio de velocidades es  $TQ$  y el lagrangiano es una aplicación  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . En el contexto discreto se reemplaza  $TQ$  por  $Q \times Q$  considerando que dos puntos cercanos en  $Q$  son el análogo discreto de un vector velocidad y el lagrangiano discreto es una aplicación  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ . La evolución de estos sistemas está determinada por un principio variacional discreto que da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas en recurrencia; a diferencia de lo que ocurre en el contexto continuo, donde la trayectoria del sistema se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Acompañando los avances de la teoría de reducción mencionada previamente, en el contexto de la mecánica discreta también se obtuvieron resultados sobre la reducción de sistemas mecánicos discretos.

Para sistemas discretos holónomos Bobenko y Suris en [5] presentan la reducción para el caso en que la variedad de configuraciones es el grupo de simetría. También ha sido estudiado por Jalnapurkar, Leok, Marsden y West en [18] el caso en que el grupo de simetría es abeliano, dando lugar a la versión discreta de la reducción de Routh.

En el caso de los sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos se conocen algunos resultados sobre la reducción en casos particulares. Por ejemplo,

Cortés y Martínez en [12] estudian la reducción de sistemas mecánicos discretos con simetría de tipo Chaplygin. También ha sido estudiado, por McLachlan y Perlmutter en [23], el caso en que el espacio de configuraciones es el mismo grupo de simetría.

El propósito de esta tesis es avanzar en el estudio de la reducción de sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos. En este tipo de sistemas los vínculos variacionales no se deducen de los vínculos cinemáticos, es por esto que consideramos que la reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos es la contraparte discreta de la reducción de sistemas no holónomos generalizados tratada por Cendra, Ferraro y Grillo en [8].

Al comienzo de esta introducción mencionamos que el objetivo principal de la teoría de reducción es encontrar caminos que permitan reducir los grados de libertad del sistema. Una vez que obtenemos las ecuaciones de la dinámica reducida, las comparamos con las ecuaciones de la dinámica original y observamos que la disminución en los grados de libertad del sistema no consiste en trabajar con menor cantidad de variables independientes sino en que el orden de las ecuaciones con las que se trabaja es menor. Este hecho es el reflejo de lo que sucede también en los sistemas continuos, donde el sistema de ecuaciones diferenciales que determina la dinámica original está formado por ecuaciones de segundo orden mientras que el sistema que determina la dinámica reducida está formado por algunas ecuaciones de segundo orden y otras de primer orden. En el contexto discreto el orden de las ecuaciones se mide por la recurrencia de las mismas. El sistema de ecuaciones que determina la dinámica original está formado por ecuaciones en recurrencia de segundo orden, mientras que el sistema que determina la dinámica reducida está formado por ecuaciones en recurrencia de las cuales algunas son de segundo orden y otras son de primer orden.

A continuación enunciamos brevemente los contenidos de esta tesis.

- En el Capítulo 2 hacemos una reseña de las definiciones y los resultados que utilizamos en los capítulos restantes.
- En el Capítulo 3 presentamos un resumen de la reducción de sistemas mecánicos con vínculos no holónomos generalizados siguiendo el trabajo de Cendra, Ferraro y Grillo [8]. Esto cumple con dos propósitos, uno es el de mostrar el estado de avance en el estudio de la reducción de sistemas continuos y otro es el de ilustrar el modelo para el tipo de resultado que nos interesa encontrar en el caso discreto.
- En el Capítulo 4 comenzamos con una descripción de los llamados sistemas mecánicos discretos considerando en primer lugar sistemas discretos libres; es decir, sistemas mecánicos discretos que no están sujetos a vínculos. Luego, hacemos un repaso sobre métodos de integración para los sistemas mecánicos libres, destacando resultados que establecen ciertas propiedades interesantes que poseen dichos integradores. En particular, analizamos las propiedades que caracterizan a los integradores variacionales y a los simplécticos. También, hacemos una breve descripción de la relación que existe entre la mecánica continua y la discreta. Continuamos considerando los sistemas discretos con vínculos no holónomos. Y, por último, presentamos la noción de sistema mecánico discreto con fuerzas.

Cabe mencionar que a partir de aquí y a lo largo de lo que resta de la tesis ilustramos las ideas con las que tratamos a través de ejemplos sencillos. Estos ejemplos que utilizamos han sido considerados previamente por otros autores y las citas correspondientes son mencionadas en cada uno de dichos ejemplos.

- En el Capítulo 5 abordamos el estudio de los sistemas discretos con vínculos no holónomos en presencia de una simetría dada por un grupo de Lie, pre-

sentando las herramientas discretas necesarias para formular la reducción de estos sistemas. Un concepto fundamental que aparece en este capítulo, es el de conexión discreta que fue introducido por Leok, Marsden y Weinstein en [21]. Notamos que es posible extender este concepto a una idea más general y presentamos la noción de conexión discreta afín, que representa una herramienta esencial para establecer un isomorfismo que nos permite modelizar el espacio de configuraciones discreto.

- En el Capítulo 6 estudiamos la reducción de los sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos. Presentamos el Teorema de reducción que establece la equivalencia entre la dinámica del sistema original y la dinámica de un sistema definido sobre un espacio difeomorfo al espacio reducido. Por último demostramos un resultado de reconstrucción, que establece una manera de recuperar la dinámica del sistema original a partir de la dinámica del sistema reducido.
- En el Capítulo 7 especializamos el resultado de reducción del capítulo anterior a casos particulares en los que se obtienen resultados interesantes. En primer lugar, estudiamos la reducción cuando el espacio de configuraciones es un fibrado principal trivial. En segundo lugar, especializamos el caso en que el espacio de configuraciones es el grupo de simetría del sistema y recuperamos el resultado de reducción que aparece en [23]. Luego, consideramos el caso en que el grupo de simetría es una simetría de tipo Chaplygin y recuperamos el resultado de reducción que aparece en [12]. Por último, estudiamos la reducción para sistemas que presentan simetría de tipo horizontal; caso que, para sistemas continuos, fue considerado en [12].
- En el Capítulo 8 presentamos las conclusiones de esta tesis y mencionamos

algunos de los problemas que consideramos interesantes para estudiar en el futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo incluimos las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de esta tesis.

### 2.1. Teoría de fibrados

Para ampliar los conceptos que mencionamos en esta sección referimos a Kobayashi y Nomizu [20] y Abraham y Marsden [1].

**Definición 2.1.1** *Sea  $M$  una variedad diferencial y  $G$  un grupo de Lie. Un **fibrado principal** sobre  $M$  con grupo de estructura  $G$  consiste de una variedad  $Q$  y una acción de  $G$  sobre  $Q$  que satisface las siguientes condiciones:*

1.  $G$  actúa libremente sobre  $Q$  a izquierda,  $l_g^Q : Q \rightarrow Q$ ,  $l_g^Q(q) = gq$ ;
2.  $M$  es el espacio cociente de  $Q$  por la relación de equivalencia inducida por  $G$ ,  $M = Q/G$ , y la proyección canónica  $\pi : Q \rightarrow M$  es diferenciable;
3.  $Q$  es localmente trivial, es decir, cada  $x \in M$  tiene un entorno  $U$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  es isomorfo a  $U \times G$ , en el sentido que existe un difeomorfismo  $\psi :$

$\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tal que  $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$  donde  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$  es una aplicación tal que  $\varphi(gu) = g\varphi(u)$  para todo  $u \in \pi^{-1}(U)$  y todo  $g \in G$ .

En este caso, el fibrado principal se denota  $Q(M, G)$ .

Para cada  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  es una subvariedad cerrada de  $M$  y es llamada la **fibra** sobre  $x$ .

**Definición 2.1.2** Un **homomorfismo** o **aplicación de fibrados** entre fibrados principales  $f : Q'(M', G') \rightarrow Q(M, G)$  consiste de una aplicación  $f' : Q' \rightarrow Q$  y un homomorfismo  $f'' : G' \rightarrow G$  tal que  $f'(g'u') = f''(g')f'(u')$  para todo  $u' \in Q'$  y  $g' \in G'$ .

Es decir, los homomorfismos entre fibrados mandan fibras en fibras. Por simplicidad se denotan a  $f'$  y  $f''$  por la misma letra  $f$  que se usa para el homomorfismo.

**Definición 2.1.3** Un homomorfismo  $f : Q'(M', G') \rightarrow Q(M, G)$  es un **imbedding** si  $f : Q' \rightarrow Q$  es imbedding (inmersión inyectiva) y si  $f : G' \rightarrow G$  es monomorfismo.

Si  $f : Q'(M', G') \rightarrow Q(M, G)$  es un imbedding la aplicación inducida  $f : M' \rightarrow M$  también lo es. Luego, identificando  $Q'$  con  $f(Q')$ ,  $G'$  con  $f(G')$  y  $M'$  con  $f(M')$ , se dice que  $Q'(M', G')$  es un **subfibrado** de  $Q(M, G)$ .

Un espacio que aparece al intentar describir la dinámica del sistema reducido es el fibrado asociado al espacio de configuraciones con la fibra dada por el grupo de simetría; a continuación recordamos su definición.

**Definición 2.1.4** Dado un fibrado principal  $Q(M, G)$  y una variedad  $F$  sobre la que  $G$  actúa a izquierda. Luego,  $G$  actúa naturalmente sobre el producto  $Q \times F$  y el espacio cociente  $\tilde{F} = (Q \times F)/G$  es denominado **fibrado asociado** con  $Q$  con fibra  $F$ .

En el caso de fibrado asociado la proyección al cociente  $\pi_{\tilde{F}} : (Q \times F) / G \rightarrow Q/G$  está definida por  $\pi_{\tilde{F}}([(q, f)]) := \pi(q)$ .

**Definición 2.1.5** Una *sección transversal* de un fibrado  $\tilde{F} = (Q \times F) / G$  es una aplicación  $\Gamma : M = Q/G \rightarrow \tilde{F}$  tal que  $\pi_{\tilde{F}} \circ \Gamma = id_{Q/G}$ .

Para el fibrado  $Q(M, G)$  existe una sección transversal  $\Gamma : M \rightarrow Q$  si y sólo si  $Q$  es el fibrado trivial  $M \times G$ .

**Definición 2.1.6** Dados dos espacios fibrados  $\pi : Q \rightarrow M$  y  $\pi' : Q' \rightarrow M$  con fibras  $X$  y  $X'$  respectivamente, se define el **producto fibrado** de  $Q$  con  $Q'$  sobre  $M$  como

$$Q \times_M Q' := \{(q, q') \in Q \times Q' : \pi(q) = \pi'(q')\}.$$

Las proyecciones en las primera y segunda variables definen aplicaciones  $\pi_1 : Q \times_M Q' \rightarrow Q$  y  $\pi_2 : Q \times_M Q' \rightarrow Q'$  y la composición de éstas con  $\pi$  y  $\pi'$  da estructura de espacio fibrado con base  $M$  a  $Q \times_M Q'$  y fibra  $X \times X'$ .

El espacio sobre el que se define un sistema mecánico es el fibrado tangente al espacio de configuraciones, que es un ejemplo trivial de la noción de fibrado vectorial que recordamos aquí.

**Definición 2.1.7** Dado un fibrado principal  $Q(M, G)$  se define un **fibrado vectorial** como el fibrado asociado  $\tilde{F}$  con fibra  $F = \mathbb{R}^m$  sobre la cual  $G$  actúa por transformaciones lineales. Cada fibra  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in M$ , tiene la estructura de espacio vectorial.

La siguiente definición combina dos fibrados vectoriales utilizando la construcción de producto fibrado.



**Definición 2.1.8** Dados dos fibrados vectoriales  $\pi : Q \rightarrow M$  y  $\pi' : Q' \rightarrow M$ , se define la **suma de Whitney** como el fibrado vectorial  $\pi \oplus \pi' : Q \oplus Q' \rightarrow M$  donde  $Q \oplus Q'$  tiene fibra sobre  $q \in Q$  igual a la suma directa  $Q_q \oplus Q'_q$ .

**Definición 2.1.9** Una **distribución** sobre una variedad  $M$  es un subfibrado vectorial del espacio tangente  $TM$ .

**Definición 2.1.10** Sean  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial y  $f : M' \rightarrow M$  una aplicación suave. Se define el **fibrado vectorial pull-back**  $f^*\pi : f^*E \rightarrow M'$  por

$$f^*E = \{(e, m') : \pi(e) = f(m')\} \text{ y } (f^*\pi)(e, m') = m'.$$

### 2.1.1. Conexiones

A continuación recordamos la definición de conexión afín sobre una variedad diferencial, esta noción se utiliza para escribir las ecuaciones de movimiento sin utilizar coordenadas locales.

**Definición 2.1.11** Una **conexión afín**  $\nabla$  sobre una variedad diferencial  $Q$  es una aplicación  $\nabla : \mathfrak{X}(Q) \times \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$  denotada por  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  que satisface las siguientes propiedades para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(Q)$  y  $f, g \in C^\infty(Q)$ ,

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2.  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3.  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Se llama a  $\nabla_X Y$  la **derivada covariante** de  $Y$  sobre  $X$ .

Si se toman cartas locales en  $M$  con coordenadas  $q = (q^1, \dots, q^n)$  se definen las funciones  $\Gamma_{jk}^i(q)$  por

$$\nabla_{\partial/\partial q^j} \left( \frac{\partial}{\partial q^k} \right) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Las funciones  $\Gamma_{jk}^i$  son llamadas **símbolos de Christoffel** de la conexión (en la carta dada).

**Definición 2.1.12** Dada una conexión afín  $\nabla$  en un fibrado vectorial  $\pi : V \rightarrow Q$ , el **transporte paralelo** de un vector  $v_0 \in \pi^{-1}(q_0)$  a lo largo de una curva  $q(t)$  en  $Q$ ,  $t \in [a, b]$  tal que  $q(t_0) = q_0$  para un  $t_0 \in [a, b]$  fijo, es la única curva  $v(t)$  en  $V$  tal que  $v(t) \in \pi^{-1}(q(t))$  para todo  $t$ ,  $v(t_0) = v_0$  y que satisface  $\nabla_{\dot{q}(t)}(v(t)) = 0$  para todo  $t$ .

La operación de transporte paralelo determina, para  $t, t+s \in [a, b]$ , una aplicación lineal  $T_{t+s}^t : \pi^{-1}(q(t)) \rightarrow \pi^{-1}(q(t+s))$  asociada a cada curva  $q(t)$  en  $Q$ . Luego, se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.1.13** La **derivada covariante de una curva**  $v(t)$  en  $V$  está dada por

$$\frac{Dv(t)}{Dt} = \left. \frac{d}{ds} T_{t+s}^t(v(t+s)) \right|_{s=0}.$$

Los principios variacionales que rigen la dinámica de los sistemas mecánicos tratan con variaciones infinitesimales y es de suma utilidad en la determinación de las ecuaciones de movimiento contar con una herramienta que permita considerar la descomposición de las mismas en componentes horizontal y vertical. Esta herramienta está determinada por la noción de conexión que recordamos a continuación.

**Definición 2.1.14** Dado un fibrado principal  $Q(M, G)$  sobre una variedad diferencial  $M$  con grupo de estructura  $G$ . Para cada  $q \in Q$ , se denota  $\mathcal{V}_q^G$  al subespacio de

$T_qQ$  determinado por los vectores tangentes a la fibra en el punto  $q$ . Una **conexión principal** en el fibrado consiste en la elección de un subespacio  $\mathcal{H}_q$  de  $T_qQ$  tal que

1.  $T_qQ = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q^G$
2.  $\mathcal{H}_q$  es  $G$ -equivariante
3.  $\mathcal{H}_q$  depende de  $q$  en forma diferenciable.

Los espacios  $\mathcal{V}_q^G$  y  $\mathcal{H}_q$  son denominados **subespacio vertical** y **subespacio horizontal**, respectivamente.

Asociada a una conexión viene dada una 1-forma de conexión a valores en  $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ , con las siguientes propiedades,

1.  $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$  para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ , donde  $\xi_Q(q) := \left. \frac{d}{dt} l_{\exp(t\xi)}^Q(q) \right|_{t=0}$  y
2.  $\mathcal{A}(dl_g^Q(q)(v_q)) = \text{Ad}_g(\mathcal{A}(v_q))$ , donde  $\text{Ad}$  es la acción adjunta de  $G$  sobre  $\mathfrak{g}$ .

En particular, para cada  $q \in Q$  se tiene que  $\mathcal{V}_q^G = \ker(d\pi_q)$  y  $\mathcal{H}_q = \ker \mathcal{A}_q$ . Las **componentes vertical y horizontal** de un vector  $v_q \in T_qQ$  se denotan por  $\text{ver}(v_q)$  y  $\text{hor}(v_q)$ , respectivamente; por definición,

$$\text{ver}(v_q) := (\mathcal{A}(v_q))_Q(q) \text{ y } \text{hor}(v_q) := v_q - \mathcal{A}(v_q).$$

**Definición 2.1.15** Un campo vectorial  $X_q \in T_qQ$  es llamado **vertical** si  $X_q \in \mathcal{V}_q^G$  y es llamado **horizontal** si  $X_q \in \mathcal{H}_q$ .

**Definición 2.1.16** El **levantamiento horizontal** es una aplicación  $h$  que le asigna a cada campo vectorial  $w$  sobre  $M$  el único campo vectorial  $w^*$  sobre  $Q$  que es horizontal y que se proyecta sobre  $w$ . Es decir, dado  $w_{\pi(q)} \in T_{\pi(q)}M$ , se tiene que  $h(w_{\pi(q)}) := w_q^*$  siendo  $w_q^* \in \mathcal{H}_q \subset T_qQ$  tal que  $d\pi(w_q^*) = w_{\pi(q)}$ .

Como ya mencionamos anteriormente, para describir la dinámica de un sistema mecánico se utiliza la noción de conexión. Luego, en las ecuaciones que determinan la dinámica del sistema reducido aparece la curvatura de la conexión, cuya definición recordamos a continuación.

**Definición 2.1.17** *La curvatura de  $\mathcal{A}$  es la 2-forma sobre  $Q$  a valores en  $\mathfrak{g}$  dada por*

$$\mathcal{B}(u_q, v_q) := \mathbf{d}\mathcal{A}(\text{hor}(u_q), \text{hor}(v_q))$$

donde  $\mathbf{d}$  denota la derivada exterior.

## 2.2. Mecánica Lagrangiana

En esta sección hacemos una revisión rápida de las nociones básicas de la formulación Lagrangiana de la mecánica que serán necesarias para presentar el contenido de los capítulos siguientes.

La formulación Lagrangiana de la mecánica está basada en la existencia de principios variacionales detrás de las leyes de Newton.

La variedad diferencial  $Q$ , de dimensión finita, que describe las configuraciones del sistema estudiado es denominada **espacio de configuraciones**. Se considera el **lagrangiano** del sistema que es una función diferenciable  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  que usualmente está dada por la energía cinética menos la energía potencial.

La **funcional de acción** del sistema está definida por

$$S(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.1)$$

donde  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  es una curva suave y  $\dot{q} : [t_0, t_1] \rightarrow TQ$  es su velocidad. Una **variación infinitesimal** de  $q$  es una curva suave  $\delta q : [t_0, t_1] \rightarrow TQ$ . Se dice que  $\delta q$

es una **variación a extremos fijos** si  $\delta q(t_0) = 0$  y  $\delta q(t_1) = 0$ .

El **Principio variacional de Hamilton** establece que las trayectorias del sistema están dadas por los puntos críticos de la funcional (2.1); es decir, satisfacen que

$$\delta \left( \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \right) = 0$$

para toda variación  $\delta q$  a extremos fijos. Aplicando las técnicas usuales de cálculo de variaciones se muestra que estos puntos críticos son las soluciones de las **ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) = 0.$$

### 2.2.1. Sistemas forzados

Como veremos en los capítulos siguientes, al tratar con sistemas mecánicos es posible que haya fuerzas externas al sistema que actúan sobre el mismo. Estas fuerzas modifican el principio variacional que rige la dinámica del sistema, como vemos a continuación.

Un **sistema mecánico forzado** es un sistema mecánico con una aplicación de fibrados  $f : TQ \rightarrow T^*Q$  llamada **fuerza Lagrangiana**.

Luego, el Principio de Hamilton se modifica y se tiene el **Principio de Lagrange-D'Alembert** que establece que las trayectorias del sistema forzado satisfacen

$$\delta \left( \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \right) + \int_{t_0}^{t_1} f(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q(t) dt = 0$$

para toda variación  $\delta q$  a extremos fijos. Por un procedimiento análogo al caso de sistemas sin fuerzas se muestra que las trayectorias del sistema son soluciones de las

## ecuaciones de Lagrange-D'Alembert

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) + f(q(t), \dot{q}(t)) = 0.$$

# Capítulo 3

## Reducción de sistemas mecánicos no holónomos

En este capítulo presentamos un breve resumen de la reducción de sistemas mecánicos no holónomos generalizados continuos. En la primera sección vamos a recordar la definición de estos sistemas y cómo se pueden obtener las ecuaciones de movimiento que describen su dinámica. Luego, en la segunda sección, consideramos la presencia de una simetría y recordamos los resultados de la reducción de dicha simetría presentados por Cendra, Ferraro y Grillo en [8].

### 3.1. Sistemas mecánicos no holónomos generalizados

**Definición 3.1.1** *Un sistema mecánico no holónimo generalizado consiste en un conjunto de objetos  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  donde  $Q$  es una variedad diferencial que describe el espacio de configuraciones,  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación suave que es el lagrangiano del sistema,  $\mathcal{D}$  es un subfibrado de  $TQ$  definido por los vínculos*

*variacionales o los desplazamientos virtuales* y  $C_K$  es una subvariedad de  $TQ$  que representa los *vínculos cinemáticos*.

Como hemos visto para los sistemas libres, la funcional de acción para un sistema  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  está definida por

$$S(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

donde  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  es una curva suave y  $\dot{q} : [t_0, t_1] \rightarrow TQ$  es su velocidad.

La dinámica de un sistema no holónomo generalizado está determinada por el **Principio de Lagrange-D'Alembert** que establece que una trayectoria del sistema  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  es una curva suave  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  que verifica los vínculos cinemáticos y es extremo de la acción  $S$  para variaciones que satisfacen los vínculos variacionales. Es decir,  $q$  en  $Q$  es una trayectoria del sistema  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  si

- $(q(t), \dot{q}(t)) \in C_K$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  y
- $dS(q)(\delta q) = 0$  para variaciones  $\delta q$  a extremos fijos tales que  $\delta q(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

El Principio de Lagrange-D'Alembert da lugar a un conjunto de ecuaciones que, si se elige una conexión afín  $\nabla_Q$  sobre  $Q$ , pueden escribirse sin trabajar en coordenadas locales.

Sean  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  el fibrado vectorial tangente y una conexión afín  $\nabla_Q : \mathfrak{X}(Q) \times \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$ , a continuación recordamos un par de definiciones que son necesarias para presentar la expresión de las ecuaciones antes mencionadas.

**Definición 3.1.2** *La derivada en la fibra de  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es la aplicación  $FL :$*



$TQ \rightarrow T^*Q$  dada por

$$\langle \mathbb{F}L(X), Z \rangle = \left. \frac{dL(X + sZ)}{ds} \right|_{s=0}$$

y la derivada en la base es la aplicación  $\mathbb{B}L : TQ \rightarrow T^*Q$  definida como

$$\langle \mathbb{B}L(X), Y \rangle = \left. \frac{dL(W(X(s)))}{ds} \right|_{s=0}$$

donde  $W$  es una curva en  $TQ$  tal que  $W(0) = X$ ,  $\left. \frac{d(\tau_Q \circ W)(t)}{dt} \right|_{t=0} = Y$  y  $(\nabla_Q)_Y W = 0$ .

En [8] se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.1** *Una curva suave  $q$  en  $Q$  es una trayectoria del sistema mecánico generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  si y sólo si  $(q(t), \dot{q}(t)) \in C_K$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  y*

$$-\frac{D}{Dt}\mathbb{F}L(q(t), \dot{q}(t)) + \mathbb{B}L(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathcal{D}_{q(t)}^\circ \text{ para todo } t \in [t_0, t_1] \quad (3.1)$$

donde  $\mathbb{F}L$  es la derivada en la fibra y  $\mathbb{B}L$  es la derivada en la base.

Como es usual, dado un espacio vectorial  $V$ , se denota con  $V^\circ$  a su anulador.

Las ecuaciones que aparecen en (3.1) son conocidas como las **ecuaciones de Lagrange-D'Alembert generalizadas**.

## 3.2. Reducción de sistemas mecánicos no holónomos generalizados

En esta sección consideramos que  $G$  es un grupo de Lie que actúa (a izquierda) sobre  $Q$  por la acción que denotamos  $l_g^Q(q)$  con  $g \in G$  y  $q \in Q$ . Suponemos que

esta acción es libre y propia de modo que define un fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  con grupo de estructura  $G$ . Esta acción induce una acción de  $G$  sobre  $TQ$  llamada **acción levantada al tangente** que está dada por

$$l_g^{TQ}(v_q) := dl_g^Q(q)(v_q)$$

para todo  $g \in G$  y  $v_q \in T_qQ$ .

**Definición 3.2.1**  $G$  es un **grupo de simetría** del sistema mecánico no holónimo generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  si, además de las hipótesis antes mencionadas,  $L$ ,  $\mathcal{D}$  y  $C_K$  son  $G$ -invariantes; es decir,  $L \circ l_g^{TQ} = L$ ,  $l_g^{TQ}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$  y  $l_g^{TQ}(C_K) \subset C_K$  para todo  $g \in G$ .

El fibrado vertical  $\mathcal{V}^G$  sobre  $Q$  es un subfibrado del tangente  $TQ$  con fibras  $\mathcal{V}_q^G := T_q(l_G^Q(\{q\}))$ , donde  $l_G^Q(\{q\})$  denota la órbita de  $q \in Q$  por la acción de  $G$ . Suponemos que la distribución  $\mathcal{S}$  con fibras  $\mathcal{S}_q := \mathcal{D}_q \cap \mathcal{V}_q^G$  tiene rango localmente constante; luego  $\mathcal{S}$  es un subfibrado de  $TQ$ . Esta condición, que se satisface en numerosos ejemplos interesantes, se verifica trivialmente cuando se supone la “hipótesis de la dimensión” considerada usualmente en la literatura que ha estudiado este tema. Esta hipótesis consiste en considerar que el espacio tangente es la suma del vertical y la distribución de los desplazamientos virtuales,  $TQ = \mathcal{V}^G + \mathcal{D}$ .

Suponemos que pueden elegirse subfibrados  $G$ -invariantes  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{U}$  de manera tal que  $\mathcal{V}^G = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{H}$  y  $TQ = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{V}^G + \mathcal{D})$ . Tenemos, entonces la siguiente descomposición del espacio tangente

$$TQ = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{U} \tag{3.2}$$

donde  $\mathcal{V}^G = \mathcal{S} \oplus \mathcal{U}$  y  $\mathcal{D} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}$ . Una manera de construir los fibrados complementarios  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{W}$  es hacerlo tomando complementos ortogonales respecto de algún producto interno  $G$ -invariante sobre  $TQ$ . Este tipo de producto interno usualmente está dado por la energía cinética del sistema.

Como mencionan Bloch, Krishnaprasad, Marsden y Murray, en [4] y Cendra, Ferraro y Grillo, en [8], se puede asociar una conexión a la descomposición (3.2).

**Definición 3.2.2** *La única conexión  $\mathcal{A}$  sobre el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  cuyo espacio horizontal es  $\text{Hor}_{\mathcal{A}} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$  es llamada **conexión no holónoma generalizada** asociada al sistema generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  y a la descomposición (3.2).*

Cuando  $G$  es un grupo de simetría del sistema no holónomo generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  se define el lagrangiano reducido  $\ell : TQ/G \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\ell([(q, \dot{q})]_G) := L(q, \dot{q})$ .

Al estudiar la reducción de sistemas mecánicos con simetría se busca establecer un principio variacional reducido y estudiar las ecuaciones de movimiento reducidas. En este sentido Cendra, Marsden y Ratiu en los trabajos [9] y [10] encuentran más conveniente trabajar en un espacio difeomorfo a  $TQ/G$  como recordamos a continuación.

Dada una conexión  $\mathcal{A}$  sobre el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  se puede definir un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre  $Q/G$ ,

$$\alpha_{\mathcal{A}} : TQ/G \rightarrow T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$$

donde  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$ ,  $\tilde{\mathfrak{g}}$  es el fibrado vectorial adjunto de  $\pi$  y  $\alpha_{\mathcal{A}}$  está dado por

$$\alpha_{\mathcal{A}}([(q, \dot{q})]_G) := d\pi(q, \dot{q}) \oplus [q, \mathcal{A}(q, \dot{q})]_G.$$

En el contexto que estamos trabajando es natural que la conexión  $\mathcal{A}$  usada para definir  $\alpha_{\mathcal{A}}$  sea la conexión no holónoma generalizada mencionada previamente. Luego, el lagrangiano reducido  $\ell$  define otro lagrangiano sobre el espacio  $T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  vía este isomorfismo; es decir, se puede definir el lagrangiano reducido  $\hat{L} : T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\hat{L}(x, \dot{x}, \bar{v}) := \ell(\alpha_{\mathcal{A}}^{-1}(x, \dot{x}, \bar{v})) = L(q, \dot{q})$$

donde  $(x, \dot{x}) = d\pi(q, \dot{q})$  y  $\bar{v} = [q, \mathcal{A}(q, \dot{q})]_G$ .

A continuación daremos una breve descripción de las variaciones involucradas en el principio variacional reducido.

Se considera el fibrado  $\tilde{\pi} : T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow Q/G$  donde  $\tilde{\pi}$  está dada por

$$\tilde{\pi}(\nu \oplus \eta) = \tau_{Q/G}(\nu) = \bar{\pi}(\eta)$$

siendo  $\tau_{Q/G} : T(Q/G) \rightarrow Q/G$  y  $\bar{\pi} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow Q/G$  las proyecciones canónicas. Se denota a la proyección canónica del fibrado tangente asociado por  $\tilde{\tau} : T(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ .

Dada una conexión afín  $\nabla_{Q/G}$  sobre  $Q/G$  y la conexión usual  $\nabla^{\mathcal{A}}$  sobre  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , se define  $\nabla = \nabla_{Q/G} \oplus \nabla^{\mathcal{A}}$  sobre  $T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  y se escribe el isomorfismo de fibrados vectoriales

$$\beta : T(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow (T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}) \oplus T(Q/G) \oplus (T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}})$$

que está dado por

$$\beta(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) \oplus d\tilde{\pi}(\xi) \oplus \nabla_{d\tilde{\pi}(\xi)}\varpi$$

donde  $\xi \in T(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}})$  y  $\varpi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  es tal que  $\varpi(0) = \tilde{\tau}(\xi)$  y  $\dot{\varpi}(0) = \xi$ .

**Teorema 3.2.1** Para cualquier curva  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow Q$  y cualquier variación  $\delta\gamma$  tales que  $\pi \circ \gamma = x$ ,  $(\alpha_{\mathcal{A}} \circ p)(\gamma') = \mu$  y  $(\alpha_{\mathcal{A}} \circ p)(\delta\gamma) = \delta x \oplus \bar{\eta}$ , siendo  $p : TQ \rightarrow TQ/G$ , se tiene que

$$\beta((d(\alpha_{\mathcal{A}} \circ p))(\delta\gamma)) = \dot{x} \oplus \bar{v} \oplus \delta x \oplus \frac{D}{Dt}\delta x \oplus \left( \frac{D}{Dt}\bar{\eta} + [\bar{v}, \bar{\eta}] - \tilde{\mathcal{B}}(\dot{x}, \delta x) \right)$$

donde  $\tilde{\mathcal{B}} : T(Q/G) \times_{Q/G} T(Q/G) \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  es la curvatura reducida de la conexión  $\mathcal{A}$  dada por  $\tilde{\mathcal{B}}(d\pi(u), d\pi(v)) := b(u, v)$  siendo  $b : TQ \times_Q TQ \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ ,  $b(v_q, w_q) := [q, B(v_q, w_q)]$  y  $\mathcal{B} : TQ \times_Q TQ \rightarrow \mathfrak{g}$  la curvatura de la conexión  $\mathcal{A}$ .

Este resultado permite expresar las variaciones  $d(\alpha_{\mathcal{A}} \circ p)(\delta\gamma) \in T(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}})$  en términos de las variables reducidas, hecho que es utilizado en [8] para obtener la expresión de las ecuaciones reducidas que aparecen en el Teorema 3.2.2.

La dinámica reducida del sistema está definida en [8] por el **Principio de Lagrange-D'Alembert-Poincaré Generalizado** que establece que una trayectoria del sistema reducido determinado por el grupo de simetría  $G$  del sistema  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$  es una curva  $\mu := (x, \dot{x}, \bar{v}) : [t_0, t_1] \rightarrow T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  que

- satisface los vínculos cinemáticos:  $\mu(t) \in \hat{C}_K := \alpha_{\mathcal{A}}(C_K/G)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  y
- es un punto crítico de la acción reducida

$$\hat{S}(x, \dot{x}, \bar{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}(x(t), \dot{x}(t), \bar{v}(t)) dt$$

para variaciones infinitesimales a extremos fijos  $\delta\mu = \delta x \oplus \delta^{\mathcal{A}}\bar{v}$  tales que, si  $q(t)$  es un levantamiento de  $x(t)$  a  $Q$ ,  $\delta x(t) \in \hat{\mathcal{D}}_{x(t)}^h := d\pi(q(t))(\mathcal{D}_{q(t)})$  y  $\delta^{\mathcal{A}}\bar{v}(t) \in \hat{\mathcal{D}}^v := \alpha_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}/G)$  tales que  $\delta^{\mathcal{A}}\bar{v}(t) = \frac{D}{Dt}\bar{\eta} + [\bar{v}, \bar{\eta}] - \tilde{\mathcal{B}}(\dot{x}, \delta x)$ .

El Principio de Lagrange-D'Alembert-Poincaré Generalizado genera una dinámica que puede ser descrita mediante ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones son llamadas **ecuaciones reducidas de Lagrange-D'Alembert-Poincaré generalizadas** y son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert para el sistema no holónimo generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$ , como se demuestra en el Teorema 9 de [8]. A continuación reescribimos dicho resultado de la siguiente manera.

**Teorema 3.2.2** Sean  $G$  un grupo de simetría del sistema no holónimo generalizado  $(Q, L, \mathcal{D}, C_K)$ , A la conexión no holónoma generalizada sobre  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  asociada a la descomposición (3.2) y  $q : [t_0, t_1] \rightarrow Q$  una curva en  $Q$ . Luego, los siguientes enunciados son equivalentes.

- La curva  $q$  satisface el Principio de Lagrange-D'Alembert.
- La curva  $\mu : [t_0, t_1] \rightarrow T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$  dada por  $\mu = (x, \dot{x}) \oplus \bar{v} = \alpha_{\mathcal{A}}([(q, \dot{q})]_G)$  satisface el Principio de Lagrange-D'Alembert-Poincaré generalizado.
- La curva  $q$  satisface  $(q(t), \dot{q}(t)) \in C_K$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  y vale (3.1).
- La curva  $\mu$  satisface  $\mu(t) \in \hat{C}_K$  y

$$-\frac{D}{Dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{v}}(\mu(t)) + \text{ad}_{\bar{v}}^* \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{v}}(\mu(t)) \in \left( \hat{\mathcal{D}}_{x(t)}^v \right)^\circ$$

$$-\frac{D}{Dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}}(\mu(t)) + \frac{\partial \hat{L}}{\partial x}(\mu(t)) - \left\langle \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{v}}, i_{x(t)} \tilde{\mathcal{B}} \right\rangle \in \left( \hat{\mathcal{D}}_{x(t)}^h \right)^\circ$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Observación 3.2.1** En el enunciado del Teorema 3.2.2 aparecen las derivadas  $\frac{\partial \hat{L}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}}$  y  $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{v}}$ . Recordamos que, dado que  $T^*(Q/G)$  y  $\tilde{\mathfrak{g}}^*$  son fibrados vectoriales, las dos

últimas son derivadas usuales

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, \bar{v}_0) \cdot x' = \left. \frac{d}{dt} \hat{L}(x_0, \dot{x}_0 + tx', \bar{v}_0) \right|_{t=0}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{v}}(x_0, \dot{x}_0, \bar{v}_0) \cdot \bar{v}' = \left. \frac{d}{dt} \hat{L}(x_0, \dot{x}_0, \bar{v}_0 + t\bar{v}') \right|_{t=0}.$$

Por último, la derivada  $\frac{\partial \hat{L}}{\partial x}$  es una derivada covariante

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, \bar{v}_0) \cdot (x(0), \dot{x}(0)) = \left. \frac{d}{ds} \hat{L}(x(s), u(s), \bar{v}(s)) \right|_{s=0}$$

donde  $(x(s), u(s), \bar{v}(s))$  es una curva horizontal respecto de la conexión  $\nabla$ .

# Capítulo 4

## Sistemas mecánicos discretos

En este capítulo hacemos una revisión de algunos de los conceptos básicos de la teoría de los sistemas mecánicos discretos con vínculos no holónomos. Para hacerlo comenzamos recordando el concepto de sistema mecánico discreto libre; es decir, un sistema que no está sujeto a vínculos. Luego, hacemos un breve repaso sobre métodos de integración para sistemas mecánicos que presentan características interesantes como lo son, por ejemplo, ciertas propiedades de conservación. Recordamos las nociones de integrador variacional e integrador simpléctico. También analizamos brevemente la relación entre la mecánica continua y la mecánica discreta. En la sección siguiente damos la definición de sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos, hacemos una breve discusión sobre las características que debe satisfacer el sistema para asegurar la existencia y unicidad de solución para las ecuaciones de movimiento discretas y terminamos la sección analizando un ejemplo en el que puede verse el buen comportamiento del integrador variacional. Por último presentamos la noción de sistema mecánico discreto con fuerzas, dado que al describir la dinámica del sistema reducido trataremos con sistemas de estas características.



## 4.1. Sistemas mecánicos discretos libres

Comenzamos recordando las definiciones generales de los sistemas mecánicos discretos libres siguiendo la teoría desarrollada por Marsden y West en [24].

Consideremos un espacio de configuración dado por una variedad diferencial  $Q$  de dimensión finita. Un **sistema mecánico discreto**  $(Q, L_d)$  está dado por el **espacio de fases discreto**  $Q \times Q$  y una función diferenciable  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  que es el **lagrangiano discreto**. En muchos casos estos sistemas discretos aproximan a sistemas continuos y, en este sentido, se consideran lagrangianos discretos que dependen de un **paso de tiempo**  $h$ . Por el momento vamos a suponer que este paso  $h$  es fijo y vamos a omitir hacer explícita la dependencia de  $L_d$  en  $h$ .

Se contruye una sucesión de tiempos discreta  $\{t_k = kh : k = 0, \dots, N\} \subset \mathbb{R}$  y se define el **espacio de curvas discretas** como  $\mathcal{C}_d(Q) = \{q_d : \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow Q\}$ . Se identifican las curvas discretas  $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$  con su imagen en  $Q$ ,  $q_d = \{q_k : k = 0, \dots, N\}$  donde  $q_k := q_d(t_k)$ . Asociada al lagrangiano discreto se define la **acción discreta**  $S_d : \mathcal{C}_d(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$S_d(q_d) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}).$$

El espacio tangente  $T_{q_d}(\mathcal{C}_d(Q))$  a  $\mathcal{C}_d(Q)$  es el conjunto de aplicaciones  $v_{q_d} : \{t_k : k = 0, \dots, N\} \rightarrow TQ$  tales que  $\pi_Q \circ v_{q_d} = q_d$  y que se denotan por  $v_{q_d} = \{(q_k, v_k) : k = 0, \dots, N\}$ .

El **Principio de Euler-Lagrange discreto** establece que las trayectorias del sistema discreto son extremos para esta acción con puntos extremos fijos  $q_0, q_N$ ; es decir,

$$dS_d(q_d)(\delta q_d) = 0$$

para toda variación a extremos fijos  $\delta q_d \in T_{q_d}(\mathcal{C}_d(Q))$ , es decir  $\delta q_0 = 0$  y  $\delta q_N = 0$ .

Este principio da lugar a un conjunto de ecuaciones, como vemos a continuación. Si  $D_j$  denota la derivada respecto de la  $j$ -ésima componente en un producto cartesiano tenemos que

$$\begin{aligned}
dS_d(q_d)(\delta q_d) &= \sum_{k=0}^{N-1} dL_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (D_1 L_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k) + D_2 L_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_{k+1})) \\
&= D_1 L_d(q_0, q_1)(\delta q_0) + D_2 L_d(q_0, q_1)(\delta q_1) \\
&\quad + D_1 L_d(q_{N-1}, q_N)(\delta q_{N-1}) + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N)(\delta q_N) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-2} (D_1 L_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k) + D_2 L_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_{k+1})) \\
&= D_1 L_d(q_0, q_1)(\delta q_0) + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N)(\delta q_N) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} D_1 L_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k) + \sum_{k=1}^{N-1} D_2 L_d(q_{k-1}, q_k)(\delta q_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación de la acción discreta es de la forma

$$\begin{aligned}
dS_d(q_d)(\delta q_d) &= \sum_{k=1}^{N-1} (D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k))(\delta q_k) \\
&\quad + D_1 L_d(q_0, q_1) \delta q_0 + D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) \delta q_N.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Entonces, tomando variaciones a extremos fijos tenemos que  $q_k$  es una trayectoria para el sistema discreto  $(Q, L_d)$  si y sólo si, para todo  $k$  se verifican las **ecuaciones de Euler-Lagrange discretas**

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = 0. \tag{4.2}$$

Como mencionamos al comienzo de esta sección muchas veces los sistemas mecánicos discretos aproximan a sistemas mecánicos continuos. Una manera de hacer esto es considerar un sistema mecánico con lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  y un difeomorfismo que permita identificar los vectores del espacio tangente  $TQ$  con elementos del espacio producto  $Q \times Q$ ,  $\Psi : TQ \rightarrow Q \times Q$ . Esta aplicación  $\Psi$  es conocida como **discretización** y es por medio de su inversa que se define el lagrangiano discreto,  $L_d := L \circ \Psi^{-1}$ . En algunos casos al definir  $L_d$  es conveniente incorporar una constante multiplicativa que puede depender de los parámetros de la discretización. Usualmente se llama **sistema discretizado** a un sistema discreto definido a partir de una discretización de un sistema continuo. A continuación damos un ejemplo de un sistema mecánico discreto obtenido a partir de la discretización de un sistema mecánico.

**Ejemplo 4.1.1** Consideramos el sistema mecánico dado por una partícula libre en el espacio real tridimensional,  $Q = \mathbb{R}^3$ , cuyo lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Al aplicar la discretización  $\Psi_h : TQ \rightarrow Q \times Q$ , dada por

$$\Psi_h(q, \dot{q}) := \left( q - \frac{h}{2}\dot{q}, q + \frac{h}{2}\dot{q} \right) \text{ con inversa } \Psi_h^{-1}(q_0, q_1) := \left( \frac{q_1 + q_0}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h} \right)$$

se obtiene el sistema mecánico discreto con lagrangiano discreto  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  definido como  $L_d := h(L \circ \Psi_h^{-1})$ ; es decir,

$$L_d(q_0, q_1) = \frac{1}{2h} ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2) - \frac{h}{8} ((x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2).$$

## 4.2. Integradores de sistemas mecánicos

En esta sección hacemos una breve reseña de algunas de las propiedades que caracterizan a ciertos métodos de integración de los sistemas mecánicos.

Comenzamos presentando los llamados integradores variacionales. Entre las propiedades que los caracterizan se encuentra la simplecticidad; además, en el caso de sistemas que tengan una simetría dada por la acción de un grupo de Lie, también puede mencionarse la conservación del momento discreto como una de estas propiedades. Si bien estos integradores no tienen la propiedad de conservar la energía del sistema suelen aproximarla muy bien; este hecho es ilustrado con un ejemplo al final de la Sección 4.2.1.

Luego, mencionamos un par de resultados para integradores de sistemas mecánicos continuos. En particular, trataremos los llamados integradores simplécticos siguiendo el libro de Hairer, Lubich y Wanner [15]. Entre las propiedades que los caracterizan se encuentran la simplecticidad y el buen comportamiento de la energía a tiempos largos.

### 4.2.1. Integradores variacionales

Las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (4.2) tienen solución bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre el lagrangiano discreto. En particular, si la aplicación  $D_1L_d(q, \cdot) : Q \rightarrow T_q^*Q$  es invertible para todo  $q \in Q$  las ecuaciones

$$D_1L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2L_d(q_{k-1}, q_k) = 0$$

definen una aplicación  $\mathbf{F}_{L_d} : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$ , llamada **flujo lagrangiano discreto**

$$\mathbf{F}_{L_d}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, q_{k+1})$$

que describe la evolución del sistema a tiempo discreto. Dado que esta evolución discreta surge a partir del planteo de un problema “variacional”, el integrador obtenido a partir de ella recibe el nombre de **integrador variacional**.

A continuación recordamos algunas propiedades de conservación que caracterizan a estos integradores variacionales; como referencia básica citamos los trabajos de Marsden y West [24] y Wendlant y Marsden [26].

En el contexto continuo la transformada de Legendre aplica el espacio tangente  $TQ$  en el cotangente  $T^*Q$ . De manera análoga, en el contexto discreto, se definen las **transformadas de Legendre discretas** que aplican el espacio  $Q \times Q$  en el fibrado cotangente  $T^*Q$ . Estas aplicaciones  $\mathbb{F}^+L_d, \mathbb{F}^-L_d : Q \times Q \rightarrow T^*Q$  están dadas por

$$\mathbb{F}^+L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_1 = D_2L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_1$$

$$\mathbb{F}^-L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_0 = -D_1L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_0$$

y pueden ser escritas como

$$\mathbb{F}^+L_d : (q_0, q_1) \mapsto (q_1, p_1) = (q_1, D_2L_d(q_0, q_1))$$

$$\mathbb{F}^-L_d : (q_0, q_1) \mapsto (q_0, p_0) = (q_0, -D_1L_d(q_0, q_1)).$$

Estas transformadas permiten llevar el flujo lagrangiano discreto  $\mathbf{F}_{L_d}$  al cotangente  $T^*Q$  y definir la **aplicación hamiltoniana discreta**  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d} : T^*Q \rightarrow T^*Q$  como  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d} = \mathbb{F}^\pm L_d \circ \mathbf{F}_{L_d} \circ (\mathbb{F}^\pm L_d)^{-1}$ .

**Definición 4.2.1** *Una 2-forma cerrada y no degenerada,  $\omega$ , sobre una variedad  $M$  es llamada **forma simpléctica** sobre  $M$ . En este caso se dice que el par  $(M, \omega)$  es una **variedad simpléctica**.*

Considerando coordenadas locales  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  en  $T^*Q$  existe una **forma**

**simpléctica canónica** dada por

$$\omega := dq^i \wedge dp_i.$$

Luego, el par  $(T^*Q, \omega)$  es un ejemplo de variedad simpléctica.

Como veremos en la Sección 4.2.2 en el contexto continuo la evolución de un sistema mecánico es una aplicación simpléctica. En el contexto discreto se tiene un resultado análogo. Recordamos que la **forma simpléctica lagrangiana discreta**  $\omega_{L_d}$ , en coordenadas, está dada por

$$\omega_{L_d}(q_0, q_1) := \frac{\partial^2 L_d}{\partial q_0^i \partial q_1^j} dq_0^i \wedge dq_1^j.$$

Las formas  $\omega$  y  $\omega_{L_d}$  están relacionadas vía el pull-back de las transformadas discretas,  $\omega_{L_d} = (\mathbb{F}^\pm L_d)^* \omega$ .

**Observación 4.2.1** *Cabe aclarar que la aplicación  $\omega_{L_d}$  no es una forma simpléctica en el sentido usual, dado que la misma está definida para un par de vectores tangentes que viven en dos espacios distintos; esto es,  $\omega_{L_d}(q_0, q_1) : T_{q_0}Q \times T_{q_1}Q \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Dada una aplicación  $f : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$ , se dice que  $f$  es **discretamente simpléctica** si

$$f^*(\omega_{L_d}) = \omega_{L_d}.$$

Como demuestran Wendlant y Marsden [26] (Sección 3.2) la evolución lagrangiana discreta  $\mathbf{F}_{L_d}$  es discretamente simpléctica; es decir, la forma lagrangiana discreta es conservada vía el pull-back de  $\mathbf{F}_{L_d}$

$$\mathbf{F}_{L_d}^*(\omega_{L_d}) = \omega_{L_d}.$$

**Definición 4.2.2** Sean  $(M, \omega)$  y  $(N, \rho)$  variedades simplécticas. Una función diferenciable  $g : M \rightarrow N$  es una **aplicación simpléctica** si  $g^* \rho = \omega$ .

**Observación 4.2.2** Existen resultados que interpretan las consecuencias geométricas de trabajar con una aplicación simpléctica. En particular, puede probarse que este tipo de aplicaciones conserva áreas (por ejemplo, en el caso en que  $M = N = \mathbb{R}^2$ ).

Dado que  $\omega_{L_d} = (\mathbb{F}^\pm L_d)^* \omega$  entonces la aplicación hamiltoniana  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d} : T^*Q \rightarrow T^*Q$  es simpléctica; es decir,  $(\tilde{\mathbf{F}}_{L_d})^* \omega = \omega$ . De este modo, concluimos que el integrador variacional  $\mathbf{F}_{L_d}$  define un integrador simpléctico,  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d} = \mathbb{F}^\pm L_d \circ \mathbf{F}_{L_d} \circ (\mathbb{F}^\pm L_d)^{-1}$ . Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado (ver Teorema 2.1.1. en [24]).

**Teorema 4.2.1** Si el integrador  $\mathbf{F}_h : T^*Q \rightarrow T^*Q$  es simpléctico,  $(\mathbf{F}_h)^* \omega = \omega$ , entonces existe un lagrangiano discreto  $L_d$  cuya aplicación hamiltoniana  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d}$  es  $\mathbf{F}_h$ .

Por lo tanto, podemos concluir que dado un integrador simpléctico  $\mathbf{F}_h$ , se tiene un integrador variacional determinado por  $\mathbf{F}_{L_d} = (\mathbb{F}^\pm L_d)^{-1} \circ \tilde{\mathbf{F}}_{L_d} \circ \mathbb{F}^\pm L_d$ , donde  $\tilde{\mathbf{F}}_{L_d} = \mathbf{F}_h$ .

En el contexto discreto hay otra ley de conservación que es análoga a una ley de conservación para sistemas continuos. Para presentarla, supongamos que un grupo de Lie  $G$  actúa sobre  $Q$  mediante  $l_g^Q : Q \rightarrow Q$ , de modo que si se considera la acción diagonal de  $G$  sobre  $Q \times Q$  dada por  $l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))$ , el lagrangiano discreto es invariante. Se define entonces el momento discreto  $J_d : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$  como

$$J_d(q_0, q_1)(\xi) := -D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0)$$

donde  $\xi \in \mathfrak{g} := \text{Lie } G$  y  $\xi_Q(q) := \left. \frac{d}{dt} l_{\exp(t\xi)}^Q(q) \right|_{t=0}$ . Luego, si  $L_d$  es invariante por la acción diagonal de  $G$ , se puede probar la conservación del momento discreto sobre

las trayectorias del sistema discreto. El siguiente resultado es la versión discreta del Teorema de Nöther para sistemas mecánicos libres, ver Teorema 1.3.3. en [24].

**Teorema 4.2.2 Teorema de Nöther discreto.** *Sea  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano discreto que es invariante por la acción diagonal de  $G$  sobre  $Q \times Q$ . Entonces, el momento discreto correspondiente  $J_d : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$  es una cantidad conservada del flujo lagrangiano discreto  $\mathbf{F}_{L_d} : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$ ; es decir*

$$J_d \circ \mathbf{F}_{L_d} = J_d.$$

Como veremos en la Sección 5.2.4 esta característica de los integradores variacionales no es compartida por los integradores de sistemas mecánicos con vínculos no holónomos. En tal caso, como ocurre para las simetrías de sistemas mecánicos continuos, en lugar de tener una ley de conservación se tiene una ecuación de evolución para el momento no holónimo discreto.

Si bien estos integradores no conservan en forma exacta la energía del sistema mecánico, tienen la propiedad de aproximar bien el valor de la misma. Como ha sido probado por Ge y Marsden en [13] el hecho de que un integrador sea simpléctico, conserve el momento y conserve la energía implica que el integrador es exacto, en el sentido de que genera la solución exacta del problema. Damos muestra de que estos integradores no conservan la energía pero la aproximan bien en el siguiente ejemplo. Para hacerlo consideramos un sistema discreto obtenido mediante la discretización de un sistema continuo y evaluamos la energía sobre la trayectoria discreta. Luego comparamos la evolución discreta de la energía con el valor constante de la misma.

**Ejemplo 4.2.1** *Sea  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano discreto obtenido en el Ejemplo*



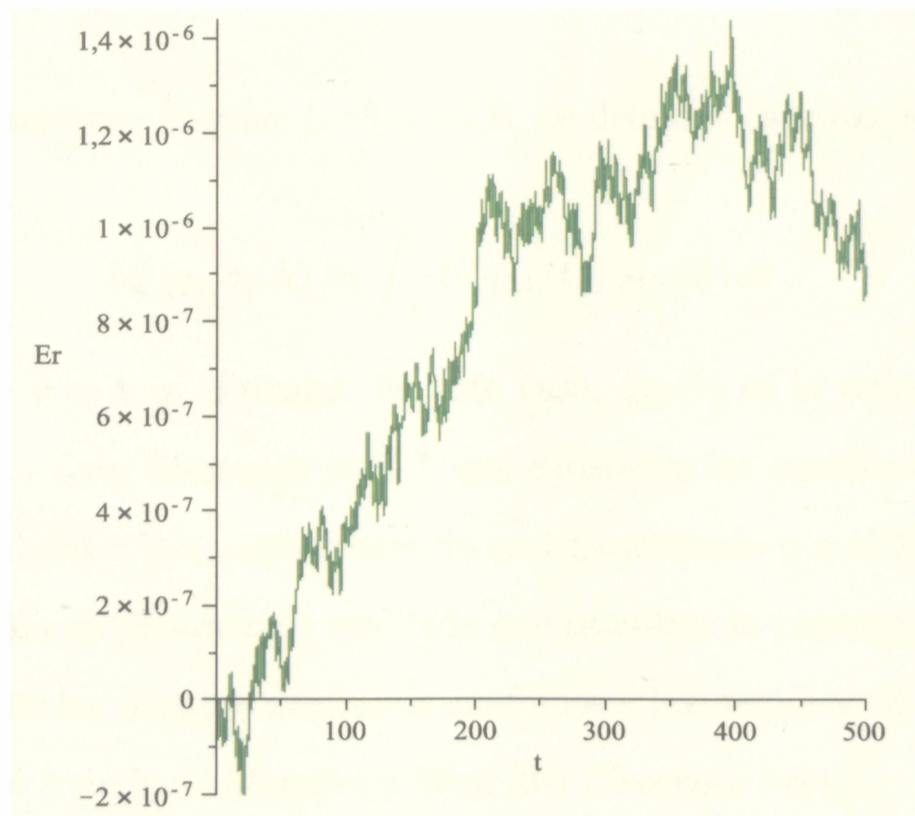
4.1.1 mediante la discretización del lagrangiano de una partícula libre en el espacio,

$$L_d(q_0, q_1) = \frac{1}{2h} ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2) - \frac{h}{8} ((x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas (4.2) para este sistema están dadas por

$$\begin{cases} -\left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_{k+1} + 2\left(-\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_k - \left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_{k-1} = 0 \\ -\left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_{k+1} + 2\left(-\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_k - \left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_{k-1} = 0 \\ \frac{1}{h} (-z_{k+1} + 2z_k - z_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

En el siguiente gráfico mostramos el error obtenido al comparar el valor exacto de la energía con el valor de la energía evaluada sobre la trayectoria discreta solución del sistema de ecuaciones anterior.



*Error en la evolución de la energía para  $h = 0,05$*

*Este buen comportamiento en la evolución de la energía puede ser justificado*

usando el Teorema 4.2.8 a partir de la simplecticidad del método.

Para finalizar esta sección mencionamos la relación que existe entre los sistemas mecánicos continuos y los discretos. Esta relación está determinada mediante un lagrangiano discreto particular, llamado lagrangiano discreto exacto. La noción de lagrangiano discreto exacto permite establecer la relación que hay entre la trayectoria de un sistema mecánico clásico y la trayectoria de un sistema discreto definido a partir del continuo. Para una exposición más detallada de este tema ver la Sección 1.6 en [24], en particular, a continuación enunciamos el Teorema 1.6.1. de dicha sección.

**Teorema 4.2.3** *Dado un lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , dos puntos  $q_0, q_1 \in Q$  y  $h \in \mathbb{R}$ , si  $\|q_1 - q_0\|$  y  $|h|$  son suficientemente pequeños, entonces existe una única solución  $q : \mathbb{R} \rightarrow Q$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.3) para  $L$  que satisface  $q(0) = q_0$  y  $q(h) = q_1$ .*

Dado un lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , se define el **lagrangiano discreto exacto** como

$$L_d^E(q_0, q_1, h) := \int_0^h L(q_{0,1}(t), \dot{q}_{0,1}(t)) dt$$

para  $h$  pequeño y  $q_0$  y  $q_1$  cercanos. En este caso,  $q_{0,1}(t)$  es la única solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L$  que satisfacen las condiciones de borde  $q_{0,1}(0) = q_0$  y  $q_{0,1}(h) = q_1$  y cuya existencia está garantizada por el Teorema 4.2.3.

A continuación enunciamos un resultado que establece la correspondencia entre las trayectorias de los sistemas mecánicos continuos y los discretos; el mismo puede encontrarse en el trabajo de Marsden y West [24] (Teorema 1.6.4.).

**Teorema 4.2.4** *Sean una sucesión de tiempos  $\{t_k = kh : k = 0, \dots, N\}$  para un paso de tiempo  $h$  suficientemente pequeño, un lagrangiano regular  $L$  y su correspondiente*

lagrangiano discreto exacto  $L_d^E$ . Entonces, las soluciones  $q : [0, t_N] \rightarrow Q$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L$  y las soluciones  $\{q_k\}_{k=0}^N$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas para  $L_d^E$  están relacionadas por

$$q_k = q(t_k) \text{ para } k = 0, \dots, N$$

$$q(t) = q_{k,k+1}(t) \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Las curvas  $q_{k,k+1} : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow Q$  son las únicas soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L$  que satisfacen  $q_{k,k+1}(kh) = q_k$  y  $q_{k,k+1}((k+1)h) = q_{k+1}$ .

#### 4.2.2. Integradores simplécticos

En esta sección hacemos un breve resumen de los llamados métodos simplécticos siguiendo el libro de Hairer, Lubich y Wanner [15].

Consideramos un sistema mecánico con lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado que existe un difeomorfismo local entre la variedad  $Q$  y algún abierto de  $\mathbb{R}^n$ , determinado por las funciones coordenadas de  $Q$ , al denotar al lagrangiano como  $L(q, \dot{q})$  estamos tomando  $q \in \mathbb{R}^n$ . Con esta notación, las trayectorias del sistema están determinadas localmente por las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

donde  $q_j$  denota la componente  $j$ -ésima de  $q \in \mathbb{R}^n$ .

Suponiendo que  $L$  es regular, es decir que la matriz  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}$  es invertible, se considera el cambio de variables

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Sea  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  el hamiltoniano que representa la energía total del sistema y que localmente está dado por

$$H(p, q) := p^T \dot{q} - L(q, \dot{q})$$

donde  $\dot{q}$  se expresa en términos de  $p$  y  $q$  usando (4.4). Las variables  $p$  definidas por (4.4) son denominadas **momentos**.

Luego, se tiene que las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.3) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

El sistema obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables  $(p, q)$  y una manera equivalente de escribirlo es

$$\dot{y} = J^{-1} \nabla H(y) \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde  $\nabla H$  es el vector cuyas componentes son los coeficientes de  $dH$  en la base  $\{dp_1, \dots, dp_n, dq_1, \dots, dq_n\}$ , se denota con  $I$  a la matriz identidad de dimensión  $n$  y  $J$  es la matriz de coeficientes de la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$  (ya considerada en la sección anterior) respecto de las coordenadas locales  $(p, q)$ . Se prueba que sobre las curvas solución de (4.5), se conserva  $H$ ; es decir

$$H(p(t), q(t)) = cte.$$

Físicamente  $H$  es identificada con la energía total del sistema que, en consecuencia, se conserva. Este hecho puede usarse para medir la “bondad” de los integradores que se aplican para resolver las ecuaciones de movimiento. Al tener como dato que la energía del sistema es una cantidad conservada, se puede evaluar la energía sobre la trayectoria obtenida después de haber aplicado algún método de integración y comparar el resultado obtenido con el valor constante de la energía.

Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser escrito (en coordenadas) como el sistema (4.5) se dice que es un **sistema hamiltoniano**. Entre las propiedades de conservación de estos sistemas hamiltonianos se encuentra la simplecticidad. Es por esto que resulta natural buscar métodos numéricos que compartan esta propiedad.

Antes de enunciar los resultados que queremos destacar, recordamos algunas definiciones.

**Observación 4.2.3** *Las ecuaciones de Hamilton (4.5), que están expresadas en coordenadas locales, determinan un sistema de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^{2n}$ . En este contexto, trabajando en coordenadas locales, en lugar de referirnos al cotangente  $T^*Q$  nos referimos a  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Se dice que un método numérico  $\Phi_h$  es de **paso simple** si en cada iteración del mismo sólo se necesita conocer el valor obtenido en la iteración anterior; es decir, dada una condición inicial  $y_0$ , el método  $\Phi_h$  genera valores  $y_1 = \Phi_h(y_0), \dots, y_{k+1} = \Phi_h(y_k)$ .

**Definición 4.2.3** *Un método de paso simple  $\Phi_h$  se dice un **método de orden  $p$**  si para problemas suficientemente regulares*

$$\dot{y} = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

el error local satisface

$$y_1 - y(t_0 + h) = \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

**Definición 4.2.4** Un método numérico de paso simple  $\Phi_h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  es llamado *método numérico simpléctico* si la aplicación  $\Phi_h$  es simpléctica siempre que el método sea aplicado a un sistema hamiltoniano suave.

A continuación enunciamos algunos resultados que establecen la simplecticidad de métodos conocidos; estos métodos están aplicados a sistemas de la forma (4.6). Para una exposición más detallada de estos resultados ver [15] y sus referencias.

**Teorema 4.2.5** Los llamados *métodos de Euler simplécticos*

$$\begin{array}{l} p_{k+1} = p_k - h \frac{\partial H}{\partial q}(p_{k+1}, q_k) \\ q_{k+1} = q_k + h \frac{\partial H}{\partial p}(p_{k+1}, q_k) \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} p_{k+1} = p_k - h \frac{\partial H}{\partial q}(p_k, q_{k+1}) \\ q_{k+1} = q_k + h \frac{\partial H}{\partial p}(p_k, q_{k+1}) \end{array}$$

son métodos simplécticos de orden 1.

**Teorema 4.2.6** La regla del punto medio implícita

$$y_{k+1} = y_k + hJ^{-1}\nabla H\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$$

es un método simpléctico de orden 2.

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, en particular sistemas de la forma  $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ , el mismo puede ser resuelto de varias maneras. En general el valor de una solución numérica no coincide con el valor exacto de la solución en cada punto, por esto tiene sentido buscar otra ecuación

cuya solución coincide exactamente con la solución numérica obtenida. En este caso, la ecuación diferencial cuya solución exacta es la solución numérica mencionada anteriormente es llamada “ecuación diferencial modificada”. A continuación damos una breve descripción de esta idea que nos permitirá enunciar algunos resultados interesantes.

Consideramos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{y} = f(y) \quad (4.7)$$

y un método numérico  $\Phi_h(y)$  que genera las aproximaciones  $y_0, y_1, y_2, \dots$

Dada la ecuación (4.7) con condición inicial  $y_0$ , es decir  $y(0) = y_0$ , una aplicación que a cada  $y_0$  y a cada  $t$  en el espacio donde está definida la función  $f$  le asigna el valor  $y(t)$  de la solución de (4.7) es llamada **flujo exacto** de la ecuación diferencial.

Ahora, considerando la ecuación (4.7) con condición inicial  $y_0$ , llamamos  $\varphi_t(y_0)$  al flujo exacto de (4.7) y denotamos por  $y_{k+1} = \Phi_h(y_k)$  a la solución numérica. Lo que se busca es una ecuación diferencial modificada  $\dot{\tilde{y}} = f_h(\tilde{y})$  de la forma

$$\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + h^2f_3(\tilde{y}) + \dots \quad (4.8)$$

tal que  $y_k = \tilde{y}(kh)$ . Es decir, se busca una ecuación diferencial que tenga a la solución numérica de la ecuación (4.7) como solución exacta,

$$\begin{array}{ccc} \dot{y} = f(y) & \xrightarrow{\text{exacta}} & \varphi_t(y_0) \\ & \searrow \text{numérica} & \\ \dot{\tilde{y}} = f_h(\tilde{y}) & \xrightarrow{\text{exacta}} & y_{n+1} = \Phi_h(y_n) \end{array}$$

En general, la serie que aparece en (4.8) diverge y tiene que ser truncada de manera adecuada. Aquí no trataremos las cuestiones que tengan que ver con la convergencia de la misma, para ello referimos a [15].

El siguiente resultado puede encontrarse en el libro de Hairer, Lubich y Wanner [15] (Teorema 3.1 cap. 9).

**Teorema 4.2.7** *Si un método simpléctico  $\Phi_h$  es aplicado a un sistema hamiltoniano con  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  suave, entonces la ecuación diferencial modificada (4.8) también es hamiltoniana. Más precisamente, existen funciones suaves  $H_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 2, 3, \dots$  tales que  $f_j(y) = J^{-1}\nabla H_j(y)$ .*

Consideremos un sistema hamiltoniano de la forma  $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ . Del teorema anterior se sigue que la ecuación diferencial modificada correspondiente también es hamiltoniana. Luego de un truncamiento se obtiene un hamiltoniano modificado

$$\tilde{H}(y) = H(y) + h^p H_{p+1}(y) + \dots + h^{N-1} H_N(y), \quad (4.9)$$

que se supone definido en el mismo dominio que el hamiltoniano  $H$  original.

El siguiente enunciado es un resultado de cuasi-conservación de la energía a tiempos largos mediante métodos simplécticos aplicados a sistemas hamiltonianos de la forma  $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ , el mismo puede encontrarse en el libro de Hairer, Lubich y Wanner [15] (Teorema 8.1 cap. 9).

**Teorema 4.2.8** *Dado un sistema hamiltoniano con  $H : D \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  analítico se aplica un método numérico simpléctico,  $\Phi_h$ . Si la solución numérica se mantiene dentro de un compacto  $K \subset D$ , entonces existen  $h_0$  y  $N = N(h)$  (que determina el*



truncamiento (4.9)) tales que

$$\tilde{H}(y_k) = \tilde{H}(y_0) + \mathcal{O}(e^{-h_0/2h})$$

$$H(y_k) = H(y_0) + \mathcal{O}(h^p)$$

sobre intervalos de tiempo  $kh \leq e^{h_0/2h}$ .

### 4.3. Sistemas mecánicos discretos no holónomos

En esta sección presentamos la versión discreta del Principio de Lagrange D'Alembert siguiendo la teoría desarrollada en Cortés y Martínez [12]. En particular, esta formulación resulta ser el análogo en tiempo discreto a la de los sistemas mecánicos no holónomos generalizados tratados en la sección 3.1.

**Definición 4.3.1** *Un sistema mecánico discreto no holónimo consiste en un conjunto de objetos  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  donde  $Q$  es una variedad diferencial,  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable,  $\mathcal{D}$  es un subfibrado de  $TQ$  y  $\mathcal{D}_d$  es una subvariedad de  $Q \times Q$ .*

*La variedad  $Q$  es el espacio de configuraciones, la función  $L_d$  es el lagrangiano discreto,  $\mathcal{D}$  es el espacio de vínculos variacionales y  $\mathcal{D}_d$  es el espacio de vínculos cinemáticos discretos.*

**Observación 4.3.1** *En el contexto de la definición anterior, si la distribución  $\mathcal{D}$  y la subvariedad de vínculos  $\mathcal{D}_d$  son tales que  $\mathcal{D} = TN$  y  $\mathcal{D}_d = N \times N$ , siendo  $N = \phi^{-1}(0) \subset Q$  una subvariedad de  $Q$ , se tiene un sistema **mecánico discreto holónimo** (ver Sección 3.4 en [24]). Es decir, los vínculos provienen de una subvariedad del espacio de configuraciones. En este caso, el Teorema 3.4.1 de [24] establece que las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico discreto con*

*vínculos holónomos son equivalentes a las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico discreto libre que se define a partir del sistema holónimo dado. En este contexto, los resultados presentados en la Sección 4.2.1 valen para sistemas mecánicos discretos con vínculos holónomos.*

El **Principio de Lagrange-D'Alembert discreto** establece que una trayectoria del sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  es una curva discreta  $q_k$  que

1. es un punto crítico de  $S_d$  para todas las variaciones admisibles; es decir,

$$dS_d(q_d)(\delta q_d) = 0$$

para toda variación a extremos fijos  $\delta q_d$  tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$  y

2. satisface los vínculos cinemáticos; es decir,  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$ .

De manera análoga al Principio de Euler-Lagrange discreto este principio también da lugar a un conjunto de ecuaciones. Recordando el desarrollo de la variación de la acción discreta (4.1) se tiene que  $q_k$  es una trayectoria para el sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  si y sólo si para todo  $k$

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) \in \mathcal{D}_{q_k}^\circ \text{ y } (q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d. \quad (4.10)$$

De manera equivalente, si  $\mathcal{D}_{q_k}^\circ = \langle \omega^a(q_k) \rangle$  para ciertas 1-formas  $\omega^a$  sobre  $Q$  y  $\mathcal{D}_d$  está determinada por ecuaciones locales  $\chi_K(q_k, q_{k+1}) = 0$ ,  $q_k$  es una trayectoria para el sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  si y sólo si para todo  $k$  se verifican las **ecuaciones**

## de Lagrange-D'Alembert discretas

$$\begin{cases} D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = \sum_a \lambda_{a,k} \omega^a(q_k) \\ \chi_K(q_k, q_{k+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde  $\lambda_{a,k} \in \mathbb{R}$  constantes.

### 4.3.1. Existencia y unicidad de solución

En esta sección enunciamos un resultado de McLachlan y Perlmutter [23] en el que establecen ciertas condiciones de regularidad, que son equivalentes a las mencionadas por Cortés y Martínez en [12], que aseguran la existencia y unicidad de solución para el sistema de ecuaciones (4.11). Luego, dicho sistema define un integrador variacional para el sistema mecánico discreto no holónimo  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ .

**Observación 4.3.2** *En el contexto continuo para sistemas de ecuaciones diferenciales que determinan la evolución de sistemas mecánicos no holónomos generalizados, Balseiro y Solomin en [3] determinan una condición que garantiza la existencia y unicidad de solución. De esta condición se desprende que, para cierto tipo de vínculos llamados usualmente admisibles, las dimensiones de las subvariedades  $C_K$  y  $\mathcal{D}$  coinciden.*

*De manera análoga, en el contexto discreto, McLachlan y Perlmutter en [23] y Cortés y Martínez en [12] establecen que una de las hipótesis necesarias para que el sistema de ecuaciones (4.11) tenga solución es que el espacio de vínculos cinemáticos tenga la misma dimensión que el espacio de vínculos variacionales; es decir,  $\dim \mathcal{D}_d = \dim \mathcal{D}$ . En lo que resta de esta sección suponemos que esta hipótesis vale.*

Para enunciar el resultado mencionado es necesario considerar las siguientes definiciones.

Si  $F : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación suave,  $D_1F : p_1^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$D_1F := dF|_{p_1^*(TQ)},$$

donde  $p_1 : Q \times Q \rightarrow Q$  es la proyección a la primera coordenada. Notando que  $p_1^*(TQ) \simeq TQ \times Q$  tenemos que  $D_2(D_1F) : p_2^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $p_2 : TQ \times Q \rightarrow Q$  es la proyección. Como  $p_2^*(TQ) \simeq TQ \times TQ$  usualmente se considera  $D_2D_1L_d : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 4.3.2** Sea  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano discreto. Se dice que  $L_d$  es *regular* si la aplicación bilineal  $D_2D_1L_d(q_0, q_1) : T_{q_0}Q \times T_{q_1}Q \rightarrow \mathbb{R}$  es no degenerada; es decir, si  $v_{q_0} \in T_{q_0}Q$  satisface que  $D_2D_1L_d(q_0, q_1)(v_{q_0}, v_{q_1}) = 0$  para todo  $v_{q_1} \in T_{q_1}Q$ , entonces  $v_{q_0} = 0$ .

En coordenadas, la condición de regularidad es equivalente a que la matriz  $\frac{\partial^2 L_d(q_0, q_1)}{\partial q_0 \partial q_1}$  sea invertible.

**Definición 4.3.3** Para cada  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  sea la aplicación  $\psi_{(q_0, q_1)} : Q \rightarrow (\mathcal{D}_{q_1})^*$  dada por

$$\psi_{(q_0, q_1)}(q_2) := \iota_{q_1}^*(D_1L_d(q_1, q_2) + D_2L_d(q_0, q_1))$$

donde  $(\mathcal{D}_{q_1})^*$  es el espacio dual de  $\mathcal{D}_{q_1} \subset T_{q_1}Q$  y donde  $\iota_{q_1}^* : T_{q_1}^*Q \rightarrow (\mathcal{D}_{q_1})^*$  es la aplicación dual de la inclusión  $\iota_{q_1} : \mathcal{D}_{q_1} \rightarrow T_{q_1}Q$ .

A continuación enunciamos el resultado que establece las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de solución para el sistema de ecuaciones (4.11).

**Proposición 4.3.1** Sea  $(q_0, q_1) \in \mathcal{D}_d$  y  $\pi_1 : Q \times Q \rightarrow Q$  la proyección a la primer coordenada. Suponiendo que  $\pi_1|_{\mathcal{D}_d} : \mathcal{D}_d \rightarrow Q$  es una submersión, la existencia y unicidad local del flujo discreto  $\mathbf{F}_{L_d}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, q_{k+1})$  está garantizada siempre que para cada  $q_2 \in \psi_{(q_0, q_1)}^{-1}(0) \cap (\pi_1|_{\mathcal{D}_d})^{-1}(q_1)$  y cada  $v_{q_2} \in T_{q_2}(\mathcal{D}_d(q_1))$  no nulo,

$$\langle D_2 D_1 L_d(q_1, q_2) \cdot v_{q_2}, v_{q_1} \rangle \neq 0 \quad (4.12)$$

para todo  $v_{q_1} \in \mathcal{D}_{q_1}$ . Cuando esta condición vale para todo  $q_1 \in Q$ , las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.11) generan un difeomorfismo  $\mathbf{F}_{L_d} : \mathcal{D}_d \rightarrow \mathcal{D}_d$  que está unívocamente definido.

En particular, la condición de regularidad (4.12) se satisface cuando el lagrangiano discreto  $L_d$  es regular.

### 4.3.2. Un ejemplo

Hemos mencionado en la Sección 4.2.1 que, para el caso holónomo, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas generan un operador de evolución a tiempo discreto. De manera análoga, las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas también definen un operador de evolución a tiempo discreto en el caso no holónomo.

Para finalizar esta sección retomamos el ejemplo de la partícula libre de la Sección 4.2.1 pero bajo la presencia de un vínculo no holónomo. Del mismo modo que en dicha sección, se considera el sistema discreto obtenido al discretizar el sistema continuo y se evalúa la energía sobre la trayectoria discreta obtenida al aplicar el integrador generado por las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.11).

**Ejemplo 4.3.1** Consideramos el sistema mecánico dado por una partícula en el espacio que está sujeta a un vínculo. El lagrangiano está dado por

$$L(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

y el vínculo no holónomo es  $\dot{z} = y\dot{x}$ .

Al aplicar la discretización  $\Psi_h$  del Ejemplo 4.1.1 se obtiene el sistema mecánico discreto con lagrangiano discreto  $L_d: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,

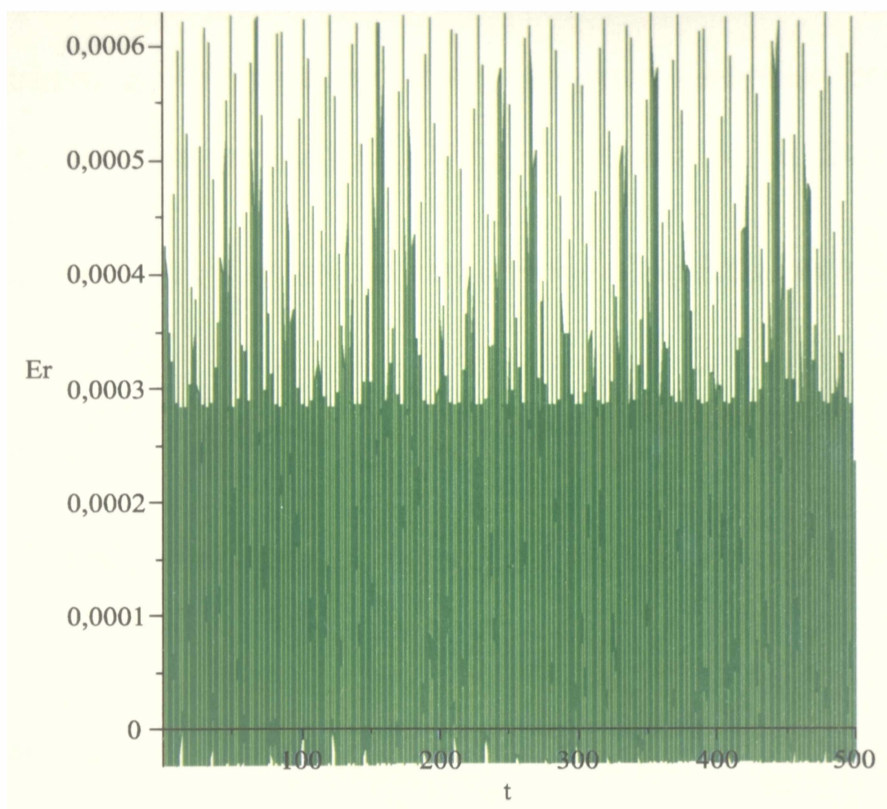
$$L_d(q_0, q_1) = \frac{1}{2h} ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2) - \frac{h}{8} ((x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2)$$

vínculos cinemáticos  $\mathcal{D}_d = \left\{ (q_0, q_1) \in Q \times Q : z_1 - z_0 = \frac{1}{2} (y_1 + y_0) (x_1 - x_0) \right\}$  y vínculos variacionales como en el sistema continuo.

Las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.11) para este sistema están dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_{k+1} + 2\left(-\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_k - \left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) x_{k-1} = -\lambda_1 y_k \\ -\left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_{k+1} + 2\left(-\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_k - \left(\frac{h}{4} + \frac{1}{h}\right) y_{k-1} = 0 \\ \frac{1}{h} (-z_{k+1} + 2z_k - z_{k-1}) = \lambda_1 \\ z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2} (y_{k+1} + y_k) (x_{k+1} - x_k) \end{array} \right.$$

En el siguiente gráfico mostramos el error obtenido al comparar el valor exacto de la energía con el valor de la energía evaluada sobre la trayectoria discreta solución del sistema de ecuaciones anterior.



*Error en la evolución de la energía para  $h = 0,05$*

#### 4.4. Sistemas mecánicos discretos forzados

Cuando describamos la dinámica del sistema reducido vamos a tratar con sistemas discretos que presentan fuerzas, por esto es necesario introducir los siguientes conceptos.

**Definición 4.4.1** *Un sistema mecánico discreto no holónimo forzado es un sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  con una 1-forma  $f_d$  definida sobre  $Q \times Q$ .*

*Denotamos*

$$f_d(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) := f_d^-(q_0, q_1)(\delta q_0) + f_d^+(q_0, q_1)(\delta q_1)$$

*donde  $f_d^- : p_1^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_d^+ : p_2^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $p_i : Q \times Q \rightarrow Q$  la proyección en la coordenada  $i$ -ésima y  $p_i^*(TQ)$  el fibrado vectorial pull-back sobre  $Q \times Q$ .*

La dinámica de un sistema mecánico discreto forzado está determinada por el **Principio de Lagrange-D'Alembert discreto para sistemas con fuerzas** que establece que la trayectoria para  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d, f_d)$  es una curva discreta  $q_k$  que

- es un punto crítico para todas las variaciones admisibles; es decir,

$$dS_d(q_d)(\delta q_d) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = 0$$

para todas las variaciones  $\delta q_d$  a extremos fijos tales que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$  y

- satisface los vínculos cinemáticos; es decir,  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$ .

Análogamente a lo hecho en la sección 3.1, si se desarrolla la variación de la acción discreta (4.1) se tiene que  $q_k$  es una trayectoria para el sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d, f_d)$  si y sólo si para todo  $k$

$$\begin{cases} D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}) + f_d^+(q_{k-1}, q_k) \in \mathcal{D}_{q_k}^\circ \\ (q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d. \end{cases}$$

Equivalentemente, si  $\mathcal{D}_{q_k}^\circ = \langle \omega^a(q_k) \rangle$  para ciertas 1-formas  $\omega^a$  y  $\mathcal{D}_d$  está determinada por ecuaciones locales  $\chi_K(q_k, q_{k+1}) = 0$ ,  $q_k$  es una trayectoria para el sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d, f_d)$  si y sólo si para todo  $k$  se verifican las **ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas para sistemas con fuerzas**

$$\begin{cases} D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}) + f_d^+(q_{k-1}, q_k) = \sum_a \lambda_{a,k} \omega^a(q_k) \\ \chi_K(q_k, q_{k+1}) = 0 \end{cases}$$

con  $\lambda_{a,k} \in \mathbb{R}$  constantes.



# Capítulo 5

## Sistemas mecánicos discretos con simetría

En este capítulo abordamos el estudio de los sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría dada por un grupo de Lie. Presentamos las herramientas discretas necesarias para avanzar en dirección al teorema de reducción.

En primer lugar hacemos una breve reseña de la teoría de conexiones discretas introducida por Leok, Marsden y Weinstein en [21]. Además, de manera análoga a lo que sucede en el contexto continuo donde una conexión  $\mathcal{A}$  permite construir un espacio modelo para  $TQ/G$ , dada una conexión discreta veremos que existen isomorfismos que identifican al espacio reducido  $(Q \times Q)/G$  con otro espacio.

En segundo lugar, extendemos la noción de conexión discreta antes mencionada presentando el concepto de conexión discreta afín. También describimos el levantamiento horizontal discreto asociado a esta noción de conexión discreta y los isomorfismos asociados a la misma que permiten identificar el espacio reducido con otro modelo que resulta más adecuado para desarrollar la teoría de reducción que queremos presentar.

## 5.1. Sistemas mecánicos discretos con simetría

A partir de ahora suponemos que hay un grupo de Lie  $G$  que actúa sobre  $Q$  de modo que  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es un fibrado principal. Esta acción de  $G$  sobre  $Q$  induce una **acción diagonal**  $l_g^{Q \times Q}$  sobre  $Q \times Q$ , definida por

$$l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1)). \quad (5.1)$$

### 5.1.1. Conexión discreta

En esta sección recordamos las nociones básicas, introducidas por Leok, Marsden y Weinstein en [21], que nos permitirán avanzar en el estudio de conexiones discretas.

**Definición 5.1.1** *El fibrado vertical discreto para la acción  $l^Q$  de  $G$  es la subvariedad*

$$\mathcal{V}_d^G := \{(q, l_g^Q(q)) \in Q \times Q : g \in G\}.$$

Para cada  $q \in Q$  definimos  $\mathcal{V}_d^G(q) := \mathcal{V}_d^G \cap (\{q\} \times Q) \subset Q \times Q$ . Los elementos de este espacio son llamados **elementos verticales**.

**Definición 5.1.2** *La composición de un elemento vertical con un elemento arbitrario de  $Q \times Q$ , con la primera componente igual, es la aplicación  $\cdot : \mathcal{V}_d^G \times_Q (Q \times Q) \rightarrow Q \times Q$  definida como*

$$(q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot (q_0, q_1) = (q_0, l_g^Q(q_1)).$$

Esta composición de elementos verticales con elementos arbitrarios de  $Q \times Q$  es la que permite definir la noción de conexión discreta que recordamos a continuación.

Una **conexión discreta** es una elección  $G$ -equivariante de un subconjunto de  $Q \times Q$ , llamado **espacio horizontal discreto**, que es complementario al espacio vertical discreto. En particular, dado  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  una conexión discreta descompone a este elemento en una componente horizontal y una vertical

$$(q_0, q_1) = \text{ver}(q_0, q_1) \cdot \text{hor}(q_0, q_1)$$

en el sentido de composición de la definición 5.1.2.

Asociada a una conexión discreta se define una 1-forma de conexión discreta como una aplicación definida sobre  $Q \times Q$  a valores en  $G$  definida de la siguiente manera. Para cada  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ , esta aplicación le asigna el único  $g \in G$  tal que  $\text{ver}(q_0, q_1) = (q_0, l_g(q_0))$ . Es decir, si denotamos  $\mathcal{C}_d : Q \times Q \rightarrow G$  a la 1-forma de conexión discreta, tenemos que  $\mathcal{C}_d(q_0, q_1) = g$ .

**Ejemplo 5.1.1** Consideremos el caso  $Q = \mathbb{R}^3$  y el grupo  $G = \mathbb{R}^2$  actuando sobre  $Q$ ,  $G \times Q \rightarrow Q$  mediante

$$((r, s), (x, y, z)) \longmapsto (x + r, y, z + s).$$

Dada esta acción se tiene también la acción diagonal de  $G$  sobre  $Q \times Q$  y el espacio vertical discreto en  $q_0 \in Q$  es

$$\mathcal{V}_d^G(q_0) = \{(q_0, gq_0) : g \in G\} = \{(q_0, (x_0 + r, y_0, z_0 + s)) : (r, s) \in \mathbb{R}^2\}.$$

La composición de un elemento vertical  $(q_0, gq_0)$  discreto con un elemento arbitrario en este caso está dada por

$$(q_0, (x_0 + r, y_0, z_0 + s))(q_0, q_1) = (q_0, (x_1 + r, y_1, z_1 + s)).$$

Luego, notamos que dado cualquier elemento  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  podemos escribirlo como

$$(q_0, q_1) = (q_0, (x_0 + (x_1 - x_0), y_0, z_0 + (z_1 - z_0))) (q_0, (x_0, y_1, z_0))$$

donde  $(q_0, (x_0 + (x_1 - x_0), y_0, z_0 + (z_1 - z_0))) = (q_0, gq_0)$  con  $g = (x_1 - x_0, z_1 - z_0)$ .

Entonces, el espacio horizontal discreto en  $q_0 \in Q$  es el espacio dado por

$$\text{Hor}_{q_0} = \{(q_0, (x_0, y_1, z_0)) \in Q \times Q\}.$$

Por lo tanto, vemos que cualquier elemento de  $Q \times Q$  puede pensarse como la composición de un elemento vertical con uno horizontal. En este sentido, el espacio recién definido es complementario al espacio vertical discreto en  $Q \times Q$ . Notemos, además, que  $\text{Hor}_{q_0}$  es  $G$ -equivariante.

Como hemos mencionado, una conexión discreta es la elección de un espacio  $G$ -equivariante que sea complementario al espacio vertical discreto. En nuestro caso, hemos encontrado un espacio que complementa al espacio vertical discreto. La 1-forma de conexión  $C_d : Q \times Q \rightarrow G$  asociada a esta conexión que hemos elegido está dada por

$$C_d(q_0, q_1) = (x_1 - x_0, z_1 - z_0).$$

En el contexto continuo, dada una conexión existe el levantamiento horizontal asociado a ella. En el contexto discreto se establece la noción análoga. El **levantamiento horizontal discreto** de  $(r_0, r_1) \in Q/G \times Q/G$  es el subconjunto de  $Q \times Q$  de los elementos horizontales y que se proyectan a  $(r_0, r_1)$ . Dado un punto base  $q \in Q$ , el levantamiento horizontal discreto es único y se tiene la aplicación  $(\cdot, \cdot)^h : Q/G \times Q/G \rightarrow Q \times Q$ .

**Notación 5.1.1** Si  $(r_0, r_1)_q^h = (q_0, q_1)$  denotamos a la segunda componente del levantamiento horizontal discreto como  $\overline{(r_0, r_1)_q^h} = q_1$ .

### 5.1.2. Isomorfismos asociados a una conexión discreta

Al trabajar, en el contexto continuo, con sistemas mecánicos que presentan simetría se considera el espacio reducido  $TQ/G$ . Como hemos mencionado en la Sección 3.2, es conveniente tener otro modelo para este espacio y, vía una conexión no holónoma generalizada, se construye un isomorfismo que lo identifica con  $T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ . De manera análoga, en el contexto discreto, cuando se tienen sistemas con simetría se considera el espacio  $(Q \times Q)/G$  y también se construye un isomorfismo que permite identificar a este espacio con otro que es más conveniente para trabajar. Por esto en esta sección recordamos una manera de construir tal modelo que fue presentada por Leok, Marsden y Weinstein en [21], donde utilizan la noción de conexión discreta.

Comenzamos con la definición de fibrado asociado a  $G$ , un caso particular de la Definición 2.1.4.

**Definición 5.1.3** Sea  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  un fibrado principal y consideremos la acción de  $G$  sobre  $Q \times G$  dada por  $l_g^{Q \times G}(q, w) := (l_g^Q(q), l_g^G(w))$  donde  $l_g^G(w) := gwg^{-1}$ . Siendo  $\pi$  un fibrado principal el cociente  $\tilde{G} := (Q \times G)/G$  por esta acción es una variedad, llamada el **fibrado conjugado asociado**. La aplicación cociente es denotada por  $\rho : Q \times G \rightarrow \tilde{G}$ . Las proyecciones sobre cada una de las dos componentes de  $Q \times G$  inducen funciones suaves  $p^{Q/G} : \tilde{G} \rightarrow Q/G$  y  $p^{G/G} : \tilde{G} \rightarrow G/G$ . La aplicación  $p^{Q/G}$  es la proyección del fibrado  $\tilde{G}$  sobre  $Q/G$  con fibra  $G$ .

El siguiente resultado puede encontrarse en [21], Proposición 4.13.

**Proposición 5.1.1** *La aplicación  $\alpha_{C_d} : (Q \times Q) / G \rightarrow (Q/G \times Q/G) \times_{Q/G} \tilde{G}$  definida por*

$$\alpha_{C_d}([(q_0, q_1)]_G) := (\pi(q_0), \pi(q_1), [q_0, C_d(q_0, q_1)]_G)$$

*es un isomorfismo de fibrados bien definido. La inversa de  $\alpha_{C_d}$  está dada por*

$$\alpha_{C_d}^{-1}(r_0, r_1, [q, g]_G) = \left[ \left( q, l_g^Q \left( \overline{(r_0, r_1)_q^h} \right) \right) \right]_G$$

*para cualquier  $q \in Q$  tal que  $\pi(q) = r_0$ .*

## 5.2. Sistemas mecánicos discretos no holónomos con simetría

**Definición 5.2.1** *Un grupo de Lie  $G$  es un grupo de simetría para el sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  si, además de ser  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  un fibrado principal,  $L_d$  y  $\mathcal{D}_d$  son invariantes por la acción  $l^{Q \times Q}$  y  $\mathcal{D}$  es invariante por la acción  $l^{TQ}$ . Si el sistema es forzado, además se requiere que la fuerza discreta  $f_d$  sea  $G$ -invariante.*

En esta sección utilizaremos varias estructuras que hemos mencionado en la sección 3.2; en particular, consideramos los subfibrados  $\mathcal{W}, \mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}^G$  de  $TQ$  y la descomposición del espacio tangente  $TQ$  dada por (3.2). Asociada a esta descomposición consideramos la conexión no holónoma, con 1-forma de conexión  $\mathcal{A} : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ , y el levantamiento horizontal correspondiente  $h : Q \times_{Q/G} T(Q/G) \rightarrow TQ$ . Recordamos de la sección 2.1.1 que esta aplicación está dada por  $h(q, w_{\pi(q)}) := v_q$  donde  $v_q \in \text{Hor}_q^{\mathcal{A}}$  y  $d\pi(q)(v_q) = w_{\pi(q)}$ .

Se considera la acción de  $G$  sobre  $Q \times_{Q/G} T(Q/G)$  definida por

$$l_g^{Q \times_{Q/G} T(Q/G)}(q, w_{\pi(q)}) := (l_g^Q(q), w_{\pi(q)}).$$

**Lema 5.2.1** *El levantamiento horizontal  $h$  es  $G$ -equivariante, considerando las acciones  $l^{TQ}$  y  $l^{Q \times_{Q/G} T(Q/G)}$ .*

**Demostración.** Queremos probar que dado  $g \in G$ ,

$$h \left( l_g^{Q \times_{Q/G} T(Q/G)}(q, w_{\pi(q)}) \right) = l_g^{TQ} \left( h(q, w_{\pi(q)}) \right).$$

Para esto, vemos que

$$h \left( l_g^{Q \times_{Q/G} T(Q/G)}(q, w_{\pi(q)}) \right) = h \left( l_g^Q(q), w_{\pi(q)} \right) = v_{l_g^Q(q)}$$

donde  $v_{l_g^Q(q)} \in \text{Hor}_{l_g^Q(q)}^A$  y  $d\pi \left( l_g^Q(q) \right) \left( v_{l_g^Q(q)} \right) = w_{\pi(q)}$ .

Por otro lado,  $l_g^{TQ} \left( h(q, w_{\pi(q)}) \right) = l_g^{TQ}(\bar{v}_q) = dl_g^Q(q)(\bar{v}_q)$  donde  $\bar{v}_q \in \text{Hor}_q^A$  y  $d\pi(q)(\bar{v}_q) = w_{\pi(q)}$ . Como  $\text{Hor}^A$  es  $G$ -invariante,  $dl_g^Q(q)(\bar{v}_q) \in \text{Hor}_{l_g^Q(q)}^A$  y, además,  $d\pi \left( l_g^Q(q) \right) \left( dl_g^Q(q)(\bar{v}_q) \right) = w_{\pi(q)}$  entonces, por unicidad del levantamiento horizontal, tenemos que  $dl_g^Q(q)(\bar{v}_q) = v_{l_g^Q(q)}$ . ■

Para cada  $q \in Q$ , los elementos  $\xi \in \mathfrak{g}$  tales que  $\xi_Q(q) \in \mathcal{D}_q$  constituyen un espacio vectorial. Este espacio vectorial puede ser diferente para los distintos valores de  $q$ , por esto se considera el espacio

$$\mathfrak{g}^{\mathcal{D}} = \{(q, \xi) \in Q \times \mathfrak{g} : \xi_Q(q) \in \mathcal{D}_q\}$$

que es un fibrado vectorial sobre  $Q$ , considerando la proyección en la primera variable. El diferencial de la acción  $l^Q$  establece un isomorfismo entre los fibrados  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$  y

$\mathcal{S}$ , esto es  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}} \simeq \mathcal{S}$ .

### 5.2.1. Conexión discreta afín

En esta sección introducimos el concepto de conexión discreta afín y la usamos para construir un isomorfismo que ocupará, en el contexto discreto, un rol análogo al que cumplió el isomorfismo  $\alpha_{\mathcal{A}}$ , en el contexto continuo que hemos visto en la sección 3.2. Básicamente lo que presentamos en esta sección es una extensión del concepto de conexión discreta introducido por Leok, Marsden y Weinstein en [21] que fue descrito en la sección 5.1.1.

**Definición 5.2.2** Sean  $\gamma : Q \rightarrow G$  una función suave tal que  $\gamma(l_g^Q(q)) = g\gamma(q)g^{-1}$  para todo  $g \in G$  y  $q \in Q$ ,  $\Gamma := \left\{ \left( q, l_{\gamma(q)}^Q(q) \right) : q \in Q \right\}$  y  $\text{Hor} \subset Q \times Q$  una subvariedad  $G$ -invariante tal que  $\Gamma \subset \text{Hor}$ . Para cada  $q \in Q$  sea  $\text{Hor}(q) := \text{Hor} \cap (\{q\} \times Q)$  y  $\text{Hor}^2(q) := p_2(\text{Hor}(q))$ .

Decimos que  $\text{Hor}$  define una **conexión discreta afín**  $\mathcal{A}_d$  sobre el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  si, para cada  $q \in Q$  y para todo  $q_1 \in l_G^Q(\{q\}) \cap \text{Hor}^2(q)$ ,

$$\text{Hor}^2(q) \subset Q \text{ es una subvariedad y } T_{q_1}Q = T_{q_1}\left(l_G^Q(\{q\})\right) \oplus T_{q_1}(\text{Hor}^2(q)). \quad (5.2)$$

Al espacio  $\text{Hor}$  lo denotamos por  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d}$  y llamamos a  $\gamma$  (o a  $\Gamma$ ) el **nivel** de  $\mathcal{A}_d$ .

**Observación 5.2.1** Recordando el concepto de transversalidad de variedades (ver [14]), la condición (5.2) es equivalente a que  $l_G^Q(\{q\})$  y  $\text{Hor}^2(q)$  se corten transversalmente y  $\dim(\text{Hor}^2(q)) = \dim Q - \dim G$ .

**Observación 5.2.2** La noción de conexión discreta, mencionada en la Sección 5.1.1 y estudiada en [21], coincide con la de conexión discreta afín cuando el nivel es la diagonal de  $Q \times Q$ ; es decir,  $\Gamma = \Delta(Q \times Q) = \{(q, q) : q \in Q\}$ .



**Observación 5.2.3** *Si bien  $Q \times Q$  debiera ser una versión discreta de  $TQ$ , hay diferencias fundamentales entre estos dos espacios. En primer lugar, si se considera la proyección a la primera coordenada se tiene que ambos espacios son fibrados sobre  $Q$ ; sin embargo,  $TQ$  es un fibrado vectorial mientras que  $Q \times Q$  en general no lo es. En particular, en  $TQ$  pueden sumarse vectores tangentes en el mismo punto mientras que para los elementos de  $Q \times Q$  no hay un concepto similar. Una manera de obtener, en  $Q \times Q$ , una idea similar a la adición en  $TQ$  es considerar la noción de composición introducida en la definición 5.1.2. Si bien esta idea de combinar elementos con el mismo punto base hace posible relacionar elementos verticales discretos con otros arbitrarios, la misma no es un análogo completo a la adición. Sin embargo, es suficiente para tratar con conexiones discretas.*

Como hemos mencionado en la sección 2.1.1, en un fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , las conexiones proveen descomposiciones del espacio tangente a la variedad de modo que

$$T_q Q = \mathcal{V}_q^G \oplus \text{Hor}_q \text{ para todo } q \in Q. \quad (5.3)$$

En el contexto discreto se espera descomponer a  $\{q\} \times Q$  en términos del espacio vertical discreto y de algún espacio complementario. Dado que en este contexto no contamos con una estructura lineal, definimos conexiones discretas afines en términos de espacios que son complementarios al espacio vertical discreto en el sentido de la definición 5.2.2. En la siguiente proposición vemos que esta definición es equivalente a poder descomponer al espacio  $\{q\} \times Q$ , al menos en un entorno del nivel  $\Gamma$ , como  $\{q\} \times Q = \mathcal{V}_d^G(q) \cdot \text{Hor}(q)$  que es el análogo discreto de (5.3).

**Proposición 5.2.1** *Sea  $\mathcal{A}_d$  una conexión discreta afín en el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  con función de nivel  $\gamma$ . Luego, existe un conjunto abierto  $U \subset Q \times Q$  con  $\Gamma \subset U$  y tal que, para todo  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  con  $\pi(q_1)$  suficientemente cerca de*

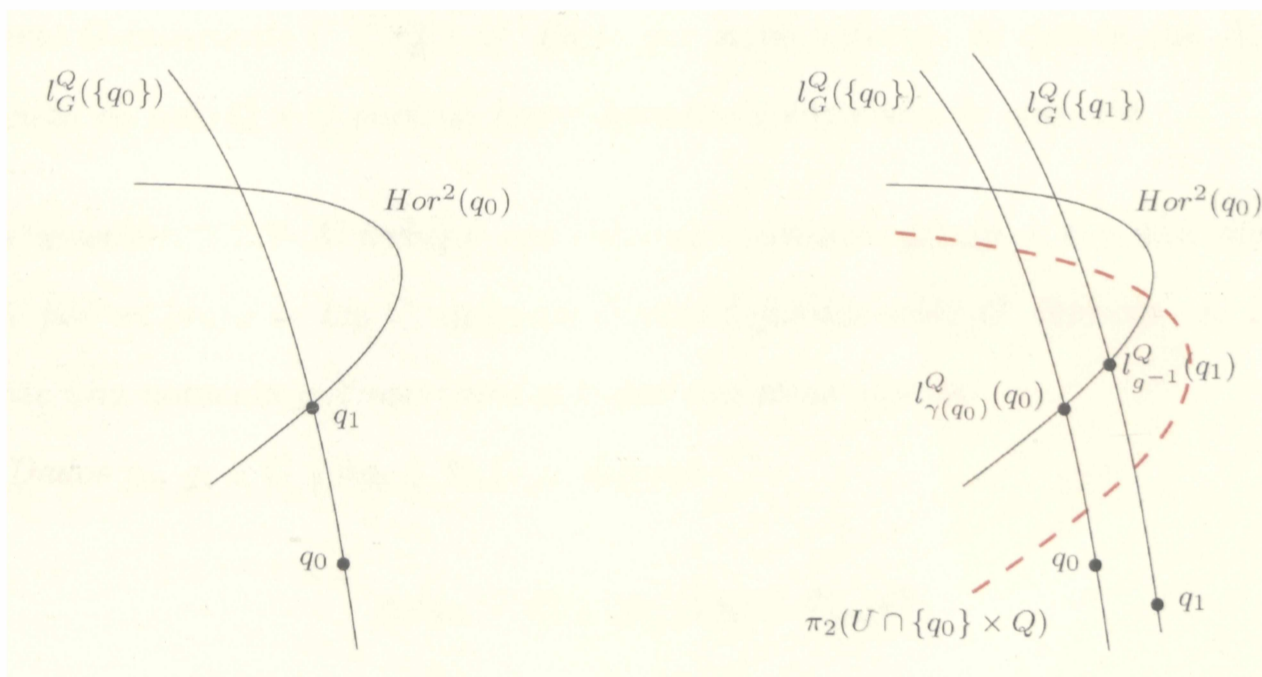
$\pi(q_0)$ , existe un único  $g \in G$  tal que

$$(q_0, q_1) = (q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot (q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)) \quad (5.4)$$

con  $(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0) \cap U$ .

**Demostración.** En primer lugar, notemos que  $l_{\gamma(q_0)}^Q(q_0) \in l_G^Q(\{q_0\}) \cap \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0)$ . Entonces, la condición de transversalidad entre  $l_G^Q(\{q_0\})$  y  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0)$  implica que  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0)$  interseca a todas las órbitas de  $G$  que están cerca de la que pasa por  $q_0$ . Luego, para cualquier  $q_1$  con  $\pi(q_1)$  suficientemente cercano a  $\pi(q_0)$ , existe  $g \in G$  tal que  $l_{g^{-1}}^Q(q_1) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0)$ .

Además, por la condición de transversalidad existe un entorno abierto  $V_{q_0} \subset Q$  donde la intersección  $l_G^Q(\{q_1\}) \cap \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0) \cap V_{q_0}$  consta de un solo punto. Por lo tanto, existe un único  $g \in G$  tal que  $l_{g^{-1}}^Q(q_1) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}^2(q_0) \cap V_{q_0}$ . Por último, considerando la suavidad de Hor se construye  $U$  considerando la unión de estos conjuntos  $V_{q_0}$ . ■



**Observación 5.2.4** Volviendo a la definición de conexión discreta afín, quizás resulte extraño el requerimiento de contar con el dato de una función de nivel  $\gamma$ .

Sin embargo, si se espera que una descomposición como (5.4) sea posible, tomando  $q_1 = q_0$ , vemos que  $(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_0)) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0)$ ; entonces  $\gamma(q_0) := g^{-1}$  es una función de nivel para la conexión  $\mathcal{A}_d$ .

**Definición 5.2.3** Dada una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  definimos la **1-forma de conexión discreta**  $\mathcal{A}_d : Q \times Q \rightarrow G$  como  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) := g$  donde  $g \in G$  es el único elemento del grupo que aparece en la descomposición (5.4).

**Observación 5.2.5** Cabe señalar que estamos utilizando la misma notación para referirnos tanto a la conexión discreta afín como a su 1-forma de conexión asociada. También debemos aclarar que  $\mathcal{A}_d$  no es una 1-forma en el sentido usual, sino que simplemente es una función. Este nombre proviene del hecho de que cuando Leok, Marsden y Weinstein la introducen en [21] también introducen la noción de “k-forma discreta” y  $\mathcal{A}_d$  es una 1-forma discreta en ese sentido.

**Observación 5.2.6** Por la Proposición 5.2.1,  $\mathcal{A}_d$  sólo está definida en un conjunto abierto  $G$ -invariante  $U \subset Q \times Q$ . En lo que sigue haremos de cuenta que  $\mathcal{A}_d$  está definida en todo  $Q \times Q$  para no hacer demasiado engorrosa la notación.

**Observación 5.2.7** Al trabajar con sistemas mecánicos discretos con una simetría dada por un grupo de Lie  $G$ , aparecen objetos definidos sobre  $G$ . Recordamos brevemente una notación que usaremos al tratar con estos objetos.

Dados  $g_0, g_1 \in G$  y  $\delta g_0 \in T_{g_0}G$  se definen

$$g_1 \delta g_0 := dL_{g_1}(g_0)(\delta g_0) \in T_{g_1 g_0}G$$

$$\delta g_0 g_1 := dR_{g_1}(g_0)(\delta g_0) \in T_{g_0 g_1}G$$

donde  $L_{g_1}$  y  $R_{g_1}$  denotan la multiplicación a izquierda y a derecha en  $G$  respectiva-

mente. Análogamente, dado  $\alpha_0 \in T_{g_0}^*G$  se definen

$$\begin{aligned} g_1\alpha_0 &:= \left(dL_{g_1^{-1}}(g_1g_0)\right)^*(\alpha_0) \in T_{g_1g_0}^*G \\ \alpha_0g_1 &:= \left(dR_{g_1^{-1}}(g_0g_1)\right)^*(\alpha_0) \in T_{g_0g_1}^*G. \end{aligned}$$

Por último, notamos que para  $\alpha_0 \in T_{g_0}^*G$  y  $\delta g_0 \in T_{g_0}G$ , podemos escribir a  $\delta g_0$  como  $\delta g_0 = dL_{g_1^{-1}}(g_1g_0)dL_{g_1}(g_0)(\delta g_0)$  o como  $\delta g_0 = dR_{g_1^{-1}}(g_0g_1)dR_{g_1}(g_0)(\delta g_0)$ . Así, se tienen las identidades

$$\alpha_0(\delta g_0) = (g_1\alpha_0)(g_1\delta g_0) = (\alpha_0g_1)(\delta g_0g_1).$$

**Proposición 5.2.2** Sea  $\mathcal{A}_d$  una conexión discreta afín en el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ . Luego, para todo  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  y  $g_0, g_1 \in G$ , se tiene que

$$\mathcal{A}_d(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = g_1\mathcal{A}_d(q_0, q_1)g_0^{-1}, \quad (5.5)$$

siempre que ambos miembros de esta igualdad estén definidos.

Recíprocamente, dada una función suave  $\mathcal{A} : Q \times Q \rightarrow G$  que satisfaga la condición (5.5),  $\text{Hor} := \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : \mathcal{A}(q_0, q_1) = e\}$  define una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  con función de nivel  $\gamma(q) := \mathcal{A}(q, q)^{-1}$  cuya 1-forma de conexión discreta es  $\mathcal{A}$ .

**Demostración.** Sean  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = g$  y  $\mathcal{A}_d(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = \tilde{g}$ . Entonces, por la proposición 5.2.1 tenemos que

$$(q_0, q_1) = (q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot \underbrace{(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1))}_{\in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0)}$$

$$(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = (l_{g_0}^Q(q_0), l_{\tilde{g}}^Q(l_{g_0}^Q(q_0))) \cdot \underbrace{(l_{g_0}^Q(q_0), l_{\tilde{g}^{-1}}^Q(l_{g_1}^Q(q_1)))}_{\in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(l_{g_0}^Q(q_0))}. \quad (5.6)$$

Además, como  $(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0)$  y  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0)$  es  $G$ -invariante, entonces  $(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_0 g^{-1}}^Q(q_1)) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(l_{g_0}^Q(q_0))$  y podemos escribir

$$\begin{aligned} (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) &= (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1 g g_0^{-1}}^Q(l_{g_0}^Q(q_0))) \cdot (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_0 g^{-1} g_1^{-1}}^Q(l_{g_1}^Q(q_1))) \\ &= (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1 g g_0^{-1}}^Q(l_{g_0}^Q(q_0))) \cdot \underbrace{(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_0 g^{-1}}^Q(q_1))}_{\in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(l_{g_0}^Q(q_0))}. \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta (5.6), esta última expresión y que la descomposición (5.4) es única, tenemos que  $\tilde{g} = g_1 g g_0^{-1}$ ; es decir,  $\mathcal{A}_d(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = g_1 \mathcal{A}_d(q_0, q_1) g_0^{-1}$ .

Para probar la recíproca, comenzamos por considerar el conjunto de nivel asociado a la función  $\gamma$ ,  $\Gamma = \{(q, l_{\gamma(q)}^Q(q)) : q \in Q\}$ . Notemos que, como  $\mathcal{A}$  satisface (5.5), dado  $(q, l_{\gamma(q)}^Q(q)) \in \Gamma$ ,

$$\mathcal{A}(q, l_{\gamma(q)}^Q(q)) = \mathcal{A}(q, q) (\gamma(q))^{-1} = e$$

y por lo tanto  $\Gamma \subset \text{Hor}$ .

Veamos que  $e \in G$  es valor regular de  $\mathcal{A}$ ; es decir, para  $(q_0, q_1) \in \text{Hor}$ ,  $d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)$  es suryectivo. Para esto, dado  $v_e \in T_e G$ , tenemos que  $v_e = \left. \frac{d}{dt} \alpha(t) \right|_{t=0}$  para alguna curva  $\alpha(t) \subset G$  tal que  $\alpha(0) = e$ . En particular, se puede tomar  $\alpha(t) = g(t) (\tilde{g}(t))^{-1}$  para curvas  $g$  y  $\tilde{g}$  en  $G$  tales que  $g(0) = \tilde{g}(0) = e$ . Luego, como  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e$ ,

$$\begin{aligned} v_e &= \left. \frac{d}{dt} g(t) (\tilde{g}(t))^{-1} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} g(t) \mathcal{A}_d(q_0, q_1) (\tilde{g}(t))^{-1} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}_d(l_{g(t)}^Q(q_0), l_{\tilde{g}(t)}^Q(q_1)) \right|_{t=0} = d\mathcal{A}_d(q_0, q_1) (v_0, v_1) \end{aligned}$$

donde  $(v_0, v_1) = \left( \frac{d}{dt} l_{g(t)}^Q(q_0) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} l_{\tilde{g}(t)}^Q(q_1) \Big|_{t=0} \right) \in T_{(q_0, q_1)}(Q \times Q)$ . Por lo tanto, existe  $(v_0, v_1) \in T_{(q_0, q_1)}(Q \times Q)$  tal que  $v_e = d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(v_0, v_1)$ . Esto nos permite afirmar que  $\text{Hor}$  es una subvariedad de  $Q \times Q$ .

De manera análoga podemos ver que  $\text{Hor}^2(q_0) = \{q \in Q : \mathcal{A}(q_0, q) = e\}$  es una subvariedad de  $Q$  con  $\dim(\text{Hor}^2(q_0)) = \dim Q - \dim G$ .

Además,  $\text{Hor}$  es  $G$ -invariante debido a la  $G$ -equivariancia de  $\mathcal{A}$ .

Sólo resta probar que para todo  $q_1 \in l_G^Q(\{q\}) \cap \text{Hor}^2(q)$ , vale la descomposición  $T_{q_1}Q = T_{q_1}(l_G^Q(\{q\})) \oplus T_{q_1}(\text{Hor}^2(q))$ .

Para esto, comenzamos notando que  $T_{q_1}(\text{Hor}^2(q_0)) = \ker(d\mathcal{A}(q_0, \cdot) : T_{q_1}Q \rightarrow \mathfrak{g})$  y queremos probar que  $T_{q_1}(l_G^Q(\{q_0\})) \cap T_{q_1}(\text{Hor}^2(q_0)) = \{0\}$ .

Supongamos que  $\xi_Q(q_1) \in T_{q_1}(l_G^Q(\{q_0\})) \cap T_{q_1}(\text{Hor}^2(q_0))$  para algún  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Luego, usando la notación introducida en la Observación 5.2.7, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= d\mathcal{A}(q_0, q_1) \xi_Q(q_1) = \frac{d}{dt} d\mathcal{A}\left(q_0, l_{\exp(t\xi)}^Q(q_1)\right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} d(\exp(t\xi) \mathcal{A}(q_0, q_1)) \Big|_{t=0} = \xi \mathcal{A}(q_0, q_1) = \xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T_{q_1}(l_G^Q(\{q_0\})) \cap T_{q_1}(\text{Hor}^2(q_0)) = \{0\}$  y como  $\dim(\text{Hor}^2(q_0)) = \dim Q - \dim G$ ,

$$T_{q_1}Q = T_{q_1}(l_G^Q(\{q\})) \oplus T_{q_1}(\text{Hor}^2(q)).$$

■

### 5.2.2. Levantamiento horizontal discreto

De manera análoga a lo que sucede con las conexiones en el contexto continuo, las conexiones discretas afines definen levantamientos horizontales discretos asociados.

**Definición 5.2.4** Sea  $\mathcal{A}_d$  una conexión discreta afín sobre el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ . El levantamiento horizontal discreto  $h_d : Q \times Q/G \rightarrow Q \times Q$  asociado a  $\mathcal{A}_d$  está dado por

$$h_d^{q_0}(r_1) := (q_0, q_1) \Leftrightarrow (q_0, q_1) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d} \text{ y } \pi(q_1) = r_1.$$

Definimos  $\overline{h_d^{q_0}} := p_2 \circ h_d^{q_0}$ .

**Observación 5.2.8** Notamos que  $h_d$  está bien definido ya que, dados  $q_0 \in Q$  y  $r_1 \in Q/G$ , para cualquier  $q_1 \in \pi^{-1}(r_1)$  tenemos que

$$(q_0, q_1) = \left( q_0, l_{\mathcal{A}_d(q_0, q_1)}^Q(q_0) \right) \cdot \left( q_0, l_{(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))^{-1}}^Q(q_1) \right)$$

con  $\left( q_0, l_{(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))^{-1}}^Q(q_1) \right) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}$ . Entonces,

$$h_d^{q_0}(r_1) = \left( q_0, l_{(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))^{-1}}^Q(q_1) \right). \quad (5.7)$$

En el siguiente lema consideramos la acción de  $G$  sobre  $Q \times Q/G$ , inducida al extender trivialmente la acción  $l_g^Q$  sobre  $Q/G$ , dada por

$$l_g^{Q \times Q/G}(q, r) := (l_g^Q(q), r).$$

**Lema 5.2.2** Sea  $\mathcal{A}_d$  una conexión discreta afín sobre  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  y consideremos las acciones  $l_g^{Q \times Q}$  y  $l_g^{Q \times Q/G}$ . Entonces,  $h_d$  es  $G$ -equivariante.

**Demostración.** Teniendo en cuenta (5.7),

$$h_d(l_g^{Q \times Q/G}(q_0, r_1)) = h_d(l_g^Q(q_0), r_1) = \left( l_g^Q(q_0), l_{(\mathcal{A}_d(l_g^Q(q_0), q_1))^{-1}}^Q(q_1) \right)$$

donde  $q_1 \in \pi^{-1}(r_1)$ .

Recordando (5.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \left( l_g^Q(q_0), l_{(\mathcal{A}_d(l_g^Q(q_0), q_1))}^{-1}(q_1) \right) &= \left( l_g^Q(q_0), l_{g(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))}^{-1}(q_1) \right) \\ &= l_g^{Q \times Q} \left( q_0, l_{(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))}^{-1}(q_1) \right) \\ &= l_g^{Q \times Q} (h_d(q_0, r_1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $h_d \left( l_g^{Q \times Q/G}(q_0, r_1) \right) = l_g^{Q \times Q}(h_d(q_0, r_1))$ . ■

**Lema 5.2.3** *Una aplicación suave y  $G$ -equivariante  $\eta : Q \times Q/G \rightarrow Q \times Q$  tal que  $\pi \circ p_2 \circ \eta^q = id_{Q/G}$  para todo  $q \in Q$  es equivalente a una conexión discreta afín cuyo levantamiento horizontal discreto asociado es  $\eta$ .*

**Demostración.** Consideremos  $\eta$  en las condiciones del enunciado; es decir, dado  $(q_0, \pi(q)) \in Q \times Q/G$  se tiene  $\eta(q_0, \pi(q)) = (q_0, \tilde{q})$  donde  $\pi(\tilde{q}) = \pi(q)$ .

Definimos la aplicación  $\mathcal{A} : Q \times Q \rightarrow G$  por  $\mathcal{A}(q_0, q_1) = g$  donde  $g$  es tal que si  $\eta(q_0, \pi(q_1)) = (q_0, \tilde{q}_1)$  entonces  $l_g^Q(q_1) = \tilde{q}_1$ .

Notemos que  $\eta(l_{g_0}^Q(q_0), \pi(l_{g_1}^Q(q_1))) = \eta(l_{g_0}^Q(q_0), \pi(q_1))$ ; además, por  $G$ -equivariancia de  $\eta$ , vemos que

$$\begin{aligned} \eta(l_{g_0}^Q(q_0), \pi(q_1)) &= \eta \left( l_{g_0}^{Q \times Q/G}(q_0, \pi(q_1)) \right) = l_{g_0}^{Q \times Q}(\eta(q_0, \pi(q_1))) \\ &= l_{g_0}^{Q \times Q}(q_0, \tilde{q}_1) = (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_0}^Q(\tilde{q}_1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\eta(l_{g_0}^Q(q_0), \pi(l_{g_1}^Q(q_1))) = (l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_0}^Q(\tilde{q}_1))$ . Esto implica que  $\mathcal{A}(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = \tilde{g}$  donde  $\tilde{g}$  es tal que  $l_{\tilde{g}}^Q(l_{g_1}^Q(q_1)) = l_{g_0}^Q(\tilde{q}_1)$ .

Luego,

$$l_{\tilde{g}}^Q(l_{g_1}^Q(q_1)) = l_{g_0}^Q(\tilde{q}_1) = l_{g_0}^Q(l_g^Q(q_1))$$



entonces  $\tilde{g}g_1 = g_0g$  y obtenemos que  $\tilde{g} = g_0gg_1^{-1}$ ; es decir,

$$\mathcal{A}(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = g_0\mathcal{A}(q_0, q_1)g_1^{-1}.$$

Entonces, tenemos una aplicación que satisface (5.5) y, por la Proposición 5.2.2 tenemos que  $\text{Hor} := \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : \mathcal{A}(q_0, q_1) = e\}$  define una conexión discreta afín.

Recíprocamente, dada una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  existe un levantamiento horizontal discreto  $h_d^q$  asociado dado por (5.7) que satisface  $\pi \circ p_2 \circ h_d^q = id_{Q/G}$ . ■

**Observación 5.2.9** *Las conexiones discretas y levantamientos horizontales discretos pueden no estar definidos en todos lados. En efecto, si  $h_d : Q \times Q/G \rightarrow Q \times Q$  está bien definido, entonces para cualquier  $q \in Q$ , la aplicación  $r \mapsto \overline{h_d^q}(r)$  es una sección global del fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , entonces el fibrado es trivial. Luego para fibrados principales no triviales  $h_d$  y  $\mathcal{A}_d$  están definidas en algún conjunto abierto del espacio total.*

Por otro lado, si  $Q$  tiene una métrica riemanniana  $G$ -invariante (como usualmente sucede para sistemas mecánicos) la siguiente construcción provee una conexión discreta afín. Consideramos una función de nivel  $\gamma : Q \rightarrow G$  y definimos

$$\text{Hor} := \left\{ (q, \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v)) \in Q \times Q \text{ para algún } v \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp \subset T_{\tilde{\gamma}(q)}Q \right\}$$

donde  $\exp$  y  $\perp$  son los correspondientes a la métrica riemanniana considerada y  $\tilde{\gamma}(q) := l_{\gamma(q)}^Q(q)$ .

Para probar que este espacio define una conexión discreta afín comenzamos no-

tando que es  $G$ -invariante. En efecto, sean  $(q, \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v)) \in \text{Hor}$  y  $g \in G$

$$\begin{aligned} l_g^{Q \times Q}(q, \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v)) &= (l_g^Q(q), l_g^Q(\exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v))) \\ &= (l_g^Q(q), \exp_{l_g^Q(\tilde{\gamma}(q))}(l_g^{TQ}(v))) \\ &= (l_g^Q(q), \exp_{l_{g\tilde{\gamma}(q)}^Q(q)}(l_g^{TQ}(v))) \\ &= (l_g^Q(q), \exp_{l_{g\tilde{\gamma}(q)g^{-1}}^Q(l_g^Q(q))}(l_g^{TQ}(v))). \end{aligned}$$

Como la métrica es  $G$ -invariante,  $l_g^{TQ}(v) \in (l_g^{TQ}(\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G))^\perp$  con  $l_g^{TQ}(\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G) = \mathcal{V}_{l_{g\tilde{\gamma}(q)g^{-1}}^Q(l_g^Q(q))}^G$  entonces  $l_g^{Q \times Q}(q, \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v)) \in \text{Hor}$  y queda probado que  $\text{Hor}$  es  $G$ -invariante.

Notamos que dado  $q \in Q$ ,  $(q, l_{\tilde{\gamma}(q)}^Q(q)) = (q, \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(0))$  entonces  $\Gamma \subset \text{Hor}$ .

Ahora, sean  $q \in Q$  y  $q_1 \in l_G^Q(\{q\}) \cap \text{Hor}^2(q)$ ,

- $\text{Hor}^2(q) = \text{Im} \left( \exp_{\tilde{\gamma}(q)} : (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp \rightarrow Q \right)$  es subvariedad de  $Q$ .
- $\dim(\text{Hor}^2(q)) = \dim(\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp = \dim Q - \dim G$ .
- Tenemos que  $q_1 = l_h^Q(q)$  para algún  $h \in G$  y  $q_1 = \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v_1)$  para algún  $v_1 \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp$ . Sea  $v \in T_{q_1}(l_G^Q(\{q\})) \cap T_{q_1}(\text{Hor}^2(q))$ .

Por un lado, como  $T_{q_1}(l_G^Q(\{q\})) = T_{q_1}(l_G^Q(\{q_1\}))$ , vemos que

$$v \in \mathcal{V}_{q_1}^G.$$

Por otro lado,  $v = \left. \frac{d}{dt} \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(u(t)) \right|_{t=0}$  donde  $u(t) \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp$  es tal que  $u(0) = v_1$  (notar que esta condición implica que  $\exp_{\tilde{\gamma}(q)}(u(0)) = q_1$ ). Luego,

$$v = \left. \frac{d}{dt} \exp_{\tilde{\gamma}(q)}(u(t)) \right|_{t=0} = d(\exp_{\tilde{\gamma}(q)})_{v_1}(\dot{u}(0))$$

Como  $u(t) \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp$  entonces  $\dot{u}(t) \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp$  para todo  $t$ .

Si restringimos la exponencial a la variedad dada por la órbita  $l_G^Q(\{q_1\})$ , tenemos  $\exp_{q_1} : T_{q_1}(l_G^Q(\{q_1\})) \rightarrow l_G^Q(\{q_1\})$  entonces

$$d(\exp_{q_1})_v : T_v(T_{q_1}(l_G^Q(\{q_1\}))) \simeq T_{q_1}(l_G^Q(\{q_1\})) \rightarrow T_{\exp_{q_1}(v)}(l_G^Q(\{q_1\}))$$

y luego  $d(\exp_{q_1})_v(v) \in T_{\exp_{q_1}(v)}(l_G^Q(\{q_1\}))$ .

Sabemos que

$$\langle d(\exp_{q_1})_v(v), d(\exp_{q_1})_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ para } w \in T_v(T_{q_1}Q) \simeq T_{q_1}Q.$$

Luego, si  $w \in (\mathcal{V}_{q_1}^G)^\perp$  entonces  $d(\exp_{q_1})_v(w) \in (T_{\exp_{q_1}(v)}(l_G^Q(\{q_1\})))^\perp$ .

Como  $\dot{u}(0) \in (\mathcal{V}_{\tilde{\gamma}(q)}^G)^\perp$  entonces

$$v = d(\exp_{\tilde{\gamma}(q)})_{v_1}(\dot{u}(0)) \in (T_{\exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v_1)}(l_G^Q(\{\tilde{\gamma}(q)\})))^\perp$$

y notamos que

$$T_{\exp_{\tilde{\gamma}(q)}(v_1)}(l_G^Q(\{\tilde{\gamma}(q)\})) = T_{q_1}(l_G^Q(\{\tilde{\gamma}(q)\})) = T_{q_1}(l_G^Q(\{q_1\})) = \mathcal{V}_{q_1}^G.$$

Por lo tanto,  $v \in (\mathcal{V}_{q_1}^G)^\perp$  y tenemos  $T_{q_1}(l_G^Q(\{q\})) \cap T_{q_1}(\text{Hor}^2(q)) = \{0\}$ .

A continuación mostramos un ejemplo de conexión discreta afín en un fibrado principal.

**Ejemplo 5.2.1** Consideremos  $Q := \mathbb{R}^2$  y la acción de  $G := \mathbb{R}$  dada por  $l_g^Q(q) := (x, y + g)$ , donde  $q = (x, y)$ . Es claro que  $p_1 = \pi : Q \rightarrow Q/G$  define un fibrado principal (trivial) con grupo de estructura  $G$ .

Queremos encontrar una variedad  $\text{Hor}$  que sea complementaria de  $\mathcal{V}_d^G = \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : x_0 = x_1\}$  en  $Q \times Q$ . Para esto, dado  $q_0 \in Q$  consideramos complementos de la órbita  $l_G^Q(\{q_0\})$ .

Dado  $b \in \mathbb{R}$ , se define la familia de espacios

$$\text{Hor}^2(q_0) := \{q_1 \in Q : y_1 - y_0 = b(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2\}.$$

Veremos que el espacio  $\text{Hor} = \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : y_1 - y_0 = b(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2\}$  define una conexión discreta afín.

Como  $l_G^Q(\{q_0\}) \cap \text{Hor}^2(q_0) = \{q_0\}$ , queda por ver que  $\text{Hor}^2(q_0)$  es tal que  $T_{q_0}Q = T_{q_0}(l_G^Q(\{q_0\})) \oplus T_{q_0}(\text{Hor}^2(q_0))$ . Esto es evidente porque  $T_{q_0}(l_G^Q(\{q_0\})) = \langle \partial_y|_{q_0} \rangle$  y  $T_{q_0}\text{Hor}^2(q_0) = \langle \partial_x|_{q_0} + bx_0 \partial_y|_{q_0} \rangle$ . Denotamos la conexión discreta afín definida por  $\text{Hor}$  como  $\mathcal{A}_d^b$ .

Como

$$(q_0, q_1) = (q_0, l_g^Q(q_0)) \cdot \underbrace{(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1))}_{\in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d^b}}$$

tenemos que

$$\mathcal{A}_d^b(q_0, q_1) = y_1 - y_0 - b(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2 \text{ y}$$

$$h_d^{q_0}(r_1) = (q_0, (r_1, y_0 + b(r_1 + x_0)(r_1 - x_0)/2)).$$

### 5.2.3. Isomorfismos asociados a una conexión discreta afín

Como ya hemos mencionado en la Sección 5.1.2 cuando se estudia la reducción de sistemas mecánicos discretos con simetría es necesario trabajar sobre el espacio reducido  $(Q \times Q)/G$  y es conveniente tener otro modelo para describir este espacio.

En esta sección presentamos una manera de construir tal modelo utilizando la noción de conexión discreta afín y siguiendo los pasos de [21] que hemos recordado en la Sección 5.1.2.

En lo que sigue haremos uso de la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &: Q \times G \times Q/G \rightarrow Q \\ \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1) &:= l_{w_0}^Q \left( \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right).\end{aligned}$$

Extendiendo la acción de  $G$  sobre  $Q \times G$  trivialmente sobre  $Q/G$  y considerando la acción de  $G$  sobre  $Q$ , tenemos que la  $G$ -equivariancia de  $h_d$  implica la  $G$ -equivariancia de  $\tilde{F}_1$ .

**Proposición 5.2.3** *Sea  $\mathcal{A}_d$  una conexión discreta afín sobre  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ . Consideremos las aplicaciones*

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} : Q \times Q &\rightarrow Q \times G \times Q/G & y & & \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d} : Q \times G \times Q/G &\rightarrow Q \times Q \\ \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}(q_0, q_1) &:= (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi(q_1)) & & & \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}(q_0, w_0, r_1) &:= \left( q_0, \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1) \right)\end{aligned}$$

Luego,  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$  y  $\tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$  son suaves y mutuamente inversas (cuando se restringen al dominio de  $\mathcal{A}_d$ ). Además, considerando las acciones  $l_g^{Q \times Q}$  y  $l_g^{Q \times G \times Q/G}(q_0, w_0, r_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1)$ , ambas funciones son  $G$ -equivariantes. Entonces se tienen los respectivos difeomorfismos inducidos sobre los espacios cociente  $\Phi_{\mathcal{A}_d} : (Q \times Q)/G \rightarrow \tilde{G} \times Q/G$  y  $\Psi_{\mathcal{A}_d} : \tilde{G} \times Q/G \rightarrow (Q \times Q)/G$ .

**Demostración.** De la definición de  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$  y  $\tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$  se deduce que ambas aplicaciones son suaves. Ahora vamos a verificar que son mutuamente inversas. En primer lugar,

$$\left( \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} \circ \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d} \right) (q_0, w_0, r_1) = \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} \left( q_0, \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} \left( q_0, l_{w_0}^Q \left( \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right) \right) \\
&= \left( q_0, \mathcal{A}_d \left( q_0, l_{w_0}^Q \left( \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right) \right), \pi \left( l_{w_0}^Q \left( \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right) \right) \right) \\
&= \left( q_0, w_0 \mathcal{A}_d \left( q_0, \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right), r_1 \right) \\
&= (q_0, w_0, r_1)
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que  $\mathcal{A}_d \left( q_0, \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right) = e$  por ser  $\left( q_0, \overline{h_d^{q_0}}(r_1) \right) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}(q_0)$ . En segundo lugar,

$$\begin{aligned}
\left( \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d} \circ \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} \right) (q_0, q_1) &= \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d} (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi(q_1)) \\
&= \left( q_0, \tilde{F}_1(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi(q_1)) \right) \\
&= \left( q_0, l_{\mathcal{A}_d(q_0, q_1)}^Q \left( \overline{h_d^{q_0}}(\pi(q_1)) \right) \right) \\
&= \left( q_0, l_{\mathcal{A}_d(q_0, q_1)}^Q \left( l_{(\mathcal{A}_d(q_0, q_1))^{-1}}^Q(q_1) \right) \right) \\
&= (q_0, q_1).
\end{aligned}$$

Por último mencionamos que la  $G$ -equivariancia de  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$  se deduce de la equivariancia de  $\mathcal{A}_d$  y la de  $\tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$  se deduce de la equivariancia de  $\tilde{F}_1$ . ■

**Observación 5.2.10** Si  $\mathcal{A}_d$  y  $\overline{h_d}$  no están definidos globalmente las aplicaciones  $\Phi_{\mathcal{A}_d}$  y  $\Psi_{\mathcal{A}_d}$  son difeomorfismos entre entornos abiertos de  $\Gamma/G$  y  $(Q \times \{e\})/G \times Q/G$ .

En el siguiente diagrama denotamos por  $\tilde{\pi}$  a la proyección  $\tilde{\pi} : Q \times Q \rightarrow (Q \times Q)/G$  y  $\gamma := \Phi_{\mathcal{A}_d} \circ \tilde{\pi}$ ,

$$\begin{array}{ccc}
Q \times Q & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}} & Q \times G \times Q/G \\
\downarrow \tilde{\pi} & \searrow \gamma & \downarrow \rho \times id \\
(Q \times Q)/G & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}_d}} & \tilde{G} \times Q/G
\end{array}$$

**Lema 5.2.4** Sea  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  y  $(\delta q_0, \delta q_1) \in T_{(q_0, q_1)}(Q \times Q)$ . Entonces,

$$d\gamma(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) = (d\rho(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1))(\delta q_0, d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1)), d\pi(q_1)(\delta q_1)).$$

**Demostración.** Como  $\gamma = (\rho \times id) \circ \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$ ,

$$\gamma(q_0, q_1) = (\rho \times id)(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi(q_1)) = (\rho(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi(q_1)).$$

Luego, al calcular su diferencial obtenemos el resultado del enunciado. ■

**Ejemplo 5.2.2** En el contexto del ejemplo 5.2.1, tenemos  $Q = Q/G \times G$  donde la acción de  $G$  sobre  $Q$  corresponde a la multiplicación a izquierda en el grupo.

Dado que  $G$  es abeliano la conjugación es la identidad,  $l_g^G(w) := gwg^{-1} = w$ . Entonces,  $\tilde{G} \simeq Q/G \times G$  y la proyección al cociente es  $\rho((r_0, h_0), w_0) = (r_0, w_0)$ . En particular, podemos considerar una sección de  $\rho$  dada por  $s(r_0, w_0) := ((r_0, 0), w_0)$ .

Los isomorfismos que aparecen en la Proposición 5.2.3 están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d^b}(q_0, q_1) &= ((x_0, y_0), y_1 - y_0 - b(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2, x_1) \text{ y} \\ \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d^b}^{-1}((r_0, h_0), w_0, r_1) &= ((r_0, h_0), (r_1, h_0 + b(r_1 + r_0)(r_1 - r_0)/2 + w_0)). \end{aligned}$$

**Observación 5.2.11** Los espacios  $Q \times G \times Q/G$  y  $\tilde{G} \times Q/G$  no son los únicos que pueden considerarse. De hecho, dada una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  es posible considerar el isomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{A}_d} : (Q \times Q)/G &\rightarrow (Q/G \times Q/G) \times_{Q/G} \tilde{G} \\ \alpha_{\mathcal{A}_d}(\tilde{\pi}(q_0, q_1)) &:= ((\pi(q_0), \pi(q_1)), \rho(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1))). \end{aligned}$$

Este isomorfismo es el análogo al isomorfismo usado en el contexto continuo en la

sección 3.2 para describir la reducción lagrangiana de sistemas mecánicos y ha sido introducido por Leok, Marsden y Weinstein en [21] en su propuesta para reducir sistemas mecánicos discretos sin restricciones. Sin embargo, la presencia del producto fibrado en el espacio que modela al espacio reducido hace más dificultoso el trabajo en comparación con el producto cartesiano que aparece en el espacio  $\tilde{G} \times Q/G$ .

#### 5.2.4. Momento no holónimo discreto

En el caso de los sistemas mecánicos con vínculos holónomos, ya sea en el contexto continuo como en el discreto, la presencia de simetrías continuas da lugar a la existencia de cantidades conservadas (los momentos). Esto es el bien conocido Teorema de Nöther en sus versiones continua y discreta. En el caso de sistemas que presentan vínculos no holónomos este hecho deja de ser válido, esencialmente por el efecto de las fuerzas del vínculo. Sin embargo, en este contexto, se obtiene una ecuación que describe la evolución del momento sobre la trayectoria del sistema.

**Definición 5.2.5** *Dado un sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  con grupo de simetría  $G$ , el momento no holónimo discreto es la aplicación  $J_d : Q \times Q \rightarrow (\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})^*$  definida por*

$$J_d(q_0, q_1)(q_0, \xi) := -D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0), \quad (5.8)$$

para todo  $(q_0, \xi) \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$ .

Dada una sección del fibrado  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$ ,  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ , se define la aplicación  $(J_d)_{\tilde{\xi}} : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera

$$(J_d)_{\tilde{\xi}}(q_0, q_1) := J_d(q_0, q_1) \left( q_0, \tilde{\xi}(q_0) \right).$$



**Lema 5.2.5** Para  $\xi \in \mathfrak{g}$  y  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ ,

$$D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) = -D_2 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_1). \quad (5.9)$$

**Demostración.** Como  $L_d$  es  $G$ -invariante, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$L_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), l_{\exp(t\xi)}^Q(q_1) \right) = L_d(q_0, q_1).$$

En particular, derivando la expresión anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} L_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), l_{\exp(t\xi)}^Q(q_1) \right) \right|_{t=0} \\ &= D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) + D_2 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_1) \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado del enunciado. ■

**Observación 5.2.12** Por definición, cuando  $Q \times Q$  y  $\mathfrak{g}^D$  son considerados fibrados sobre  $Q$  con respecto a la proyección sobre la primera variable,  $J_d$  es una aplicación de fibrados. Cortés define  $J_d^{nh}$  en [11] de una manera levemente diferente:  $J_d^{nh}(q_0, q_1)(q_1, \xi) := D_2 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_1)$ , que es una aplicación de fibrados cuando se considera la proyección sobre la segunda variable en  $Q \times Q$ . En cualquier caso, por (5.9), ambas aplicaciones son esencialmente la misma. Además,  $(J_d)_{\tilde{\xi}} = (J_d^{nh})_{\tilde{\xi}}$  para toda sección  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^D)$ .

Una trayectoria del sistema mecánico discreto no holónomo está determinada por el Principio de Lagrange-D'Alembert discreto. Cuando los vínculos variacionales se descomponen en  $\mathcal{D} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}$ , es posible descomponer las variaciones admisibles en variaciones horizontales y verticales, según provengan de  $\mathcal{H}$  o de  $\mathcal{S}$ . De acuerdo a esta descomposición también es posible descomponer el principio variacional, como

se enuncia en el siguiente resultado.

**Proposición 5.2.4** *Sea  $q$ . una curva discreta en  $Q$ . Luego, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $q$ . satisface 1; es decir,

$$dS_d(q.) (\delta q.) = 0$$

para toda variación a extremos fijos  $\delta q$ . tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ .

2.  $q$ . satisface

$$dS_d(q.) (\delta q^{\mathcal{H}}) = 0 \quad y \quad dS_d(q.) (\delta q^{\mathcal{S}}) = 0$$

para todo par de variaciones a extremos fijos  $\delta q^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$  y  $\delta q^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ .

**Demostración.** Como  $q$ . satisface 1 tenemos que

$$dS_d(q.) (\delta q.) = 0$$

para toda variación  $\delta q$ . tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ . Como  $\mathcal{D} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}$  podemos escribir  $\delta q_k = \delta q_k^{\mathcal{H}} + \delta q_k^{\mathcal{S}}$  con  $\delta q_k^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_{q_k}$  y  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{q_k}$ . Por último, por ser los elementos de  $\mathcal{H}$  y los de  $\mathcal{S}$  independientes, se desprende la equivalencia entre los ítems 1 y 2.

■

El siguiente resultado establece la equivalencia entre el principio variacional vertical y la evolución del momento no holónomo discreto.

**Teorema 5.2.1** *Sea  $q$ . una curva discreta en  $Q$ . Luego, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $q$ . satisface el principio variacional vertical. Es decir,  $dS_d(q.) (\delta q^{\mathcal{S}}) = 0$  para toda variación a extremos fijos tal que  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{q_k}$  para todo  $k$ .

2. Para todas las secciones  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ ,

$$(J_d)_{\tilde{\xi}}(q_k, q_{k+1}) - (J_d)_{\tilde{\xi}}(q_{k-1}, q_k) = -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) - \tilde{\xi}(q_{k-1}) \right)_Q(q_{k-1}). \quad (5.10)$$

**Demostración.** Dada  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ , notamos que (5.10), es equivalente a

$$\begin{aligned} & (J_d)_{\tilde{\xi}}(q_k, q_{k+1}) - (J_d)_{\tilde{\xi}}(q_{k-1}, q_k) = \\ & -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_{k-1}) + D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_{k-1}) \right)_Q(q_{k-1}). \end{aligned}$$

Es decir,

$$(J_d)_{\tilde{\xi}}(q_k, q_{k+1}) = -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_{k-1})$$

o, por definición de  $(J_d)_{\tilde{\xi}}$ ,

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k) = D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_{k-1}). \quad (5.11)$$

Por el Lema 5.2.5 tenemos que el segundo miembro de esta expresión se reescribe como

$$D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_{k-1}) = -D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k).$$

Reemplazando esta identidad en (5.11) tenemos que

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k) = -D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k)$$

$$(D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k)) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k) = 0. \quad (5.12)$$

Dado que  $\mathcal{S}_{q_k} = \{\xi_Q(q_k) : \xi \in \mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}}\}$  entonces, toda variación  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{q_k}$  es tal que  $\delta q_k^{\mathcal{S}} = (\xi_k)_Q(q_k)$  para algún  $\xi_k \in \mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}}$ . En particular, si consideramos la sección  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$  tal que  $\tilde{\xi}(q_k) = \xi_k$  entonces (5.12) es equivalente a que

$$(D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k))(\delta q_k^{\mathcal{S}}) = 0$$

para toda variación  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{q_k}$ . Esto equivale a que  $dS_d(q)(\delta q^{\mathcal{S}}) = 0$  para toda variación a extremos fijos tal que  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}_{q_k}$  para todo  $k$ . ■

**Observación 5.2.13** *La ecuación de evolución del momento no holónomo discreto (5.10) fue obtenida primero por Cortés y Martínez en [12], donde prueban que la solución de las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas satisface (5.10). En [17] Iglesias, Marrero y Martín de Diego obtienen la ecuación de evolución del momento no holónomo discreto en el contexto de grupoides de Lie.*

# Capítulo 6

## Reducción Lagrangiana de sistemas discretos con simetría

En este capítulo presentamos la relación entre la dinámica de un sistema mecánico discreto no holónomo con simetría definido sobre  $Q \times Q$  y la dinámica sobre el espacio  $\tilde{G} \times Q/G$  con el que podemos identificar al espacio reducido  $(Q \times Q)/G$ . En la primera sección comenzamos presentando los distintos lagrangianos discretos que surgen a partir del lagrangiano discreto original luego de considerar la simetría del sistema. Luego, en las dos secciones siguientes, presentamos las nociones de curvatura mixta y fuerzas discretas reducidas que surgen al escribir las ecuaciones de movimiento del sistema reducido. En este punto ya tenemos todas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el resultado de reducción. En la misma sección también presentamos la versión intrínseca de las ecuaciones reducidas y extendemos el Teorema 5.2.1 mencionando una equivalencia adicional. Terminamos este capítulo presentando un resultado de reconstrucción que establece una manera de obtener la dinámica del sistema original a partir de la dinámica del sistema reducido.

## 6.1. Lagrangianos discretos

En esta sección introducimos lagrangianos discretos definidos sobre los distintos espacios involucrados en el proceso de reducción que queremos presentar.

Dado un sistema mecánico discreto no holónimo  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  con grupo de simetría  $G$  y una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$ , construimos un sistema dinámico sobre  $Q \times G \times Q/G$  mediante el isomorfismo  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$ . En particular, la dinámica será descrita en términos de la función  $\check{L}_d := L_d \circ \tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$ .

Como  $L_d$  es  $G$ -invariante induce una aplicación sobre  $(Q \times Q)/G$  y, mediante el isomorfismo  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$ , una sobre  $\tilde{G} \times Q/G$  que denotaremos  $\hat{L}_d$ . Además, la invariancia de  $L_d$  y la equivariancia de  $\tilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$  implican la invariancia de  $\check{L}_d$ .

Explícitamente, tenemos

$$\check{L}_d(q_0, w_0, r_1) = L_d(q_0, \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)) \text{ y } \hat{L}_d(\rho(q_0, w_0), r_1) = \check{L}_d(q_0, w_0, r_1). \quad (6.1)$$

En el siguiente diagrama consideramos las aplicaciones recién mencionadas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{R} \\
 & & & \nearrow L_d & \\
 & & & \check{L}_d & \\
 Q \times Q & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}} & Q \times G \times Q/G & \xrightarrow{L_d} & \\
 \downarrow \tilde{\pi} & \searrow \gamma & \downarrow \rho \times id & \nearrow L_d & \\
 (Q \times Q)/G & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}} & \tilde{G} \times Q/G & & 
 \end{array}$$

Definimos la acción discreta reducida asociada al lagrangiano discreto reducido  $\hat{L}_d$ ,

$$\hat{S}_d(v., r.) := \sum_{k=0}^{N-1} \hat{L}_d(v_k, r_{k+1}).$$

**Ejemplo 6.1.1** Consideremos el sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  donde  $Q := \mathbb{R}^2$ , con  $q = (x, y)$ , y

$$L_d(q_0, q_1) := \frac{m}{2} ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2)$$

$$\mathcal{D}_q := \left\{ \dot{x} \partial_x|_q + \dot{y} \partial_y|_q \in TQ : \dot{y} = x\dot{x} \right\} = \left\langle \partial_x|_q - x \partial_y|_q \right\rangle \subset T_q Q$$

$$\mathcal{D}_d := \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : y_1 - y_0 = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2\}.$$

Este sistema se obtiene al discretizar el sistema definido por una partícula libre en  $\mathbb{R}^2$  sujeta a un vínculo no holónimo. En este caso, consideramos la discretización dada por  $\Psi_h^{-1}(q_0, q_1) := \left( \frac{q_1 + q_0}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h} \right)$  donde fijamos el valor del paso  $h$  de la discretización en  $h = 1$ .

Las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert (4.10) para este sistema son ecuaciones que pueden ser completamente resueltas. Sin embargo, en lugar de presentar estas ecuaciones y su resolución, haremos un estudio detallado de su reducción considerando una simetría del sistema. La idea es ilustrar las técnicas desarrolladas en las secciones siguientes a través de un ejemplo sencillo.

El grupo  $G := \mathbb{R}$  actúa sobre  $Q$  por traslaciones en la segunda coordenada como hemos considerado en el Ejemplo 5.2.1. Es claro que  $L_d$  y  $\mathcal{D}_d$  son invariantes por la acción diagonal de  $G$  sobre  $Q \times Q$  y que  $\mathcal{D}_q$  es invariante por la acción levantada de  $G$  sobre  $TQ$ ; por todo esto  $G$  es un grupo de simetría para el sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ .

Para  $b \in \mathbb{R}$  arbitrario, la conexión discreta  $\mathcal{A}_d^b$  mencionada en el Ejemplo 5.2.1 define isomorfismos  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d^b}$  y  $\Phi_{\mathcal{A}_d^b}$  que usaremos en el estudio de la reducción del sistema.

Por el Ejemplo 5.2.2 tenemos que  $\tilde{G} \times Q/G \simeq Q/G \times G \times Q/G$ ; luego, los

lagrangianos discretos reducidos son

$$\begin{aligned}\check{L}_d((r_0, h_0), w_0, r_1) &= \frac{m}{2} \left( (r_1 - r_0)^2 + (w_0 + b(r_1 + r_0)(r_1 - r_0)/2)^2 \right) \\ \hat{L}_d(r_0, w_0, r_1) &= \check{L}_d((r_0, 0), w_0, r_1).\end{aligned}$$

Volviendo al contexto general, tenemos  $\hat{L}_d(v_0, r_1) = \hat{L}_d(\rho(q_0, w_0), r_1)$  donde  $v_0 = \rho(q_0, w_0) \in \tilde{G}$  para algún  $(q_0, w_0) \in Q \times G$ . Luego, teniendo en cuenta (6.1) y que en el producto Cartesiano  $Q \times G \times Q/G$  el diferencial se descompone como la suma de los diferenciales sobre cada espacio, tenemos que

$$\begin{aligned}d\hat{L}_d(v_0, r_1) &= d\hat{L}_d(\rho(q_0, w_0), r_1) = d\check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\delta q_0, \delta w_0, \delta r_1) \\ &= D_1\check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\delta q_0) + D_2\check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\delta w_0) \\ &\quad + D_3\check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\delta r_1).\end{aligned}\tag{6.2}$$

El segundo término de esta última expresión será estudiado en detalle en la sección 6.3.

**Lema 6.1.1** *Consideremos los morfismos de fibrados vectoriales  $D_1\check{L}_d : p_1^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $D_2\check{L}_d : p_2^*(TG) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son las proyecciones de  $Q \times G \times Q/G$  sobre los factores correspondientes. Estos morfismos son  $G$ -equivariantes considerando las acciones de  $G$  sobre los espacios respectivos,  $l^{Q \times G \times Q/G}$ ,  $l^Q$  y  $l^G$  y sus acciones levantadas correspondientes.*

**Demostración.** En primer lugar, dado que  $\check{L}_d$  es  $G$ -invariante, su diferencial  $d\check{L}_d : T(Q \times G \times Q/G) \rightarrow \mathbb{R}$  también lo es. Es decir,

$$\begin{aligned}d\check{L}_d \left( l_g^{Q \times G \times Q/G}(q_0, w_0, r_1) \right) \left( l_g^{T(Q \times G \times Q/G)}(\delta q_0, \delta w_0, \delta r_1) \right) \\ = d\check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\delta q_0, \delta w_0, \delta r_1).\end{aligned}\tag{6.3}$$



En segundo lugar, notamos que

$$\begin{aligned}
d\check{L}_d \left( l_g^{Q \times G \times Q/G} (q_0, w_0, r_1) \right) \left( l_g^{T(Q \times G \times Q/G)} (\delta q_0, \delta w_0, \delta r_1) \right) = \\
d\check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TQ} (\delta q_0), l_g^{TG} (\delta w_0), \delta r_1 \right) = \\
D_1 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TQ} (\delta q_0) \right) + D_2 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TG} (\delta w_0) \right) \\
+ D_3 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \delta r_1.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

A partir de (6.3) y (6.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
D_1 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TQ} (\delta q_0) \right) + D_2 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TG} (\delta w_0) \right) \\
+ D_3 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \delta r_1 = d\check{L}_d (q_0, w_0, r_1) (\delta q_0, \delta w_0, \delta r_1).
\end{aligned}$$

Como ya mencionamos en (6.2) este último diferencial se descompone como suma de los diferenciales en cada coordenada. Además, podemos descomponer  $T(Q \times G \times Q/G) = p_1^*(TQ) \oplus p_2^*(TG) \oplus p_3^*(T(Q/G))$  y, así los diferenciales en cada una de las coordenadas son morfismos de fibrados vectoriales sobre  $Q \times G \times Q/G$ .

De este modo, obtenemos que

$$\begin{aligned}
D_1 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TQ} (\delta q_0) \right) &= D_1 \check{L}_d (q_0, w_0, r_1) (\delta q_0) \\
D_2 \check{L}_d \left( l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1 \right) \left( l_g^{TG} (\delta w_0) \right) &= D_2 \check{L}_d (q_0, w_0, r_1) (\delta w_0)
\end{aligned}$$

■

## 6.2. Curvatura mixta

Dado un fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , una conexión  $\mathcal{A}$  y una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  introducimos un objeto que, en algún sentido, relaciona las nociones de

horizontalidad continua y discreta establecidas por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_d$  respectivamente.

**Definición 6.2.1** *La curvatura mixta  $\mathcal{B}_m$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_d$  es el morfismo de fibrados vectoriales sobre  $Q \times Q$ ,  $\mathcal{B}_m : T(Q \times Q) \rightarrow \mathcal{A}_d^*(TG)$  definido por*

$$\mathcal{B}_m(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) := d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_0), \text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_1))$$

donde  $\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q)$  denota la componente horizontal de  $\delta q$ , respecto de la conexión  $\mathcal{A}$ .

Al considerar el isomorfismo  $T(Q \times Q) \simeq p_1^*(TQ) \oplus p_2^*(TQ)$ , la curvatura mixta se descompone como  $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}_m^+ + \mathcal{B}_m^-$ , donde  $\mathcal{B}_m^+ : p_2^*(TQ) \rightarrow \mathcal{A}_d^*(TG)$  y  $\mathcal{B}_m^- : p_1^*(TQ) \rightarrow \mathcal{A}_d^*(TG)$  están dadas por

$$\mathcal{B}_m^+(q_0, q_1)(\delta q_1) := \mathcal{B}_m(q_0, q_1)(0, \delta q_1) = D_2\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_1))$$

$$\mathcal{B}_m^-(q_0, q_1)(\delta q_0) := \mathcal{B}_m(q_0, q_1)(\delta q_0, 0) = D_1\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_0)).$$

**Observación 6.2.1** *Una primera diferencia entre la curvatura mixta y la curvatura usual de una conexión es que la usual puede ser representada por una 2-forma mientras que la mixta es representada por una 1-forma.*

**Observación 6.2.2** *La curvatura mixta mide cómo se alejan las deformaciones  $\mathcal{A}$ -horizontales en  $(q_0, q_1)$  de las variedades de nivel de  $\mathcal{A}_d$ .*

**Ejemplo 6.2.1** *Vamos a evaluar la curvatura mixta en el contexto del ejemplo 6.1.1 y continuar con el estudio de la reducción de ese sistema.*

Primero necesitamos considerar una conexión  $\mathcal{A}$  en el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  cuyo espacio horizontal es  $\text{Hor}_{\mathcal{A}} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$  donde  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{S}$  son los que aparecen

en la descomposición (3.2) que, en este caso, es

$$T_q Q = \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{W}_q} \oplus \underbrace{\langle \partial_x|_q + x \partial_y|_q \rangle}_{=\mathcal{H}_q} \oplus \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{S}_q} \oplus \underbrace{\langle \partial_y|_q \rangle}_{=\mathcal{U}_q}.$$

La 1-forma de conexión de  $\mathcal{A}$  está dada por

$$\mathcal{A} \left( \dot{x} \partial_x|_q + \dot{y} \partial_y|_q \right) = \dot{y} - x \dot{x}$$

y su levantamiento horizontal asociado es

$$h^q (\dot{r} \partial_r|_r) = \partial_x|_q + r \partial_y|_q.$$

Luego, recordando que la 1-forma de conexión para conexión discreta afín es  $\mathcal{A}_d^b(q_0, q_1) = y_1 - y_0 - b(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)/2$ , la curvatura mixta de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_d^b$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m(q_0, q_1)(\delta q_0, \delta q_1) &= d\mathcal{A}_d^b(q_0, q_1)(\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_0), \text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q_1)) \\ &= \partial_{w_0}|_{\mathcal{A}_d^b(q_0, q_1)} \otimes \left( d_{y_1}|_{q_1} - d_{y_0}|_{q_0} - bx_1 d_{x_1}|_{q_1} + bx_0 d_{x_0}|_{q_0} \right) \\ &\quad \left( c_0 \left( \partial_{x_0}|_{q_0} + x_0 \partial_{y_0}|_{q_0} \right) + c_1 \left( \partial_{x_1}|_{q_1} + x_1 \partial_{y_1}|_{q_1} \right) \right) \\ &= (1 - b)(c_1 x_1 - c_0 x_0) \partial_{w_0}|_{\mathcal{A}_d^b(q_0, q_1)}. \end{aligned}$$

Notar que el hecho de que la curvatura mixta se anule o no depende del valor del parámetro  $b$ .

Como la curvatura  $\mathcal{B}$  de una conexión  $\mathcal{A}$  define una curvatura reducida  $\tilde{\mathcal{B}}$  sobre  $T(Q/G) \times_{Q/G} T(Q/G)$ , de manera análoga la curvatura mixta define un objeto reducido sobre  $(Q \times Q)/G$  o, vía el isomorfismo  $\Phi_{\mathcal{A}_d}$ , sobre  $\tilde{G} \times Q/G$ . A continuación estudiamos este objeto reducido.

En primer lugar, como  $\mathcal{A}_d : Q \times Q \rightarrow G$  es  $G$ -equivariante considerando las acciones  $l^{Q \times Q}$  y  $l^G$  y sus respectivas acciones levantadas  $l^{T(Q \times Q)}$  y  $l^{TG}$ , el diferencial  $d\mathcal{A}_d : T(Q \times Q) \rightarrow TG$  es  $G$ -equivariante. Luego, induce un morfismo  $\widetilde{d\mathcal{A}_d} : T(Q \times Q)/G \rightarrow TG/G$  sobre los fibrados vectoriales cociente

$$\begin{array}{ccc} T(Q \times Q)/G & \xrightarrow{\widetilde{d\mathcal{A}_d}} & TG/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Q \times Q)/G & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}_d} & G/G \end{array}$$

En segundo lugar, si consideramos la aplicación  $\sigma : \tilde{G} \times Q/G \rightarrow Q/G \times Q/G$  dada por  $\sigma(v_0, r_1) := (p^{Q/G}(v_0), r_1)$  donde  $p^{Q/G} : \tilde{G} \rightarrow Q/G$  es la proyección al cociente se tienen los fibrados pull-back  $\sigma^*(T(Q/G \times Q/G))$  sobre  $\tilde{G} \times Q/G$  y  $(\rho \times id)^*(\sigma^*(T(Q/G \times Q/G)))$  sobre  $Q \times G \times Q/G$ . Definimos  $\tilde{\chi} : (\rho \times id)^*(\sigma^*(T(Q/G \times Q/G))) \rightarrow T(Q \times Q)$  como

$$\tilde{\chi}(q_0, w_0, r_1)(\delta r_0, \delta r_1) := (h^{q_0}(\delta r_0), h^{q_1}(\delta r_1)) \text{ donde } q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1).$$

Como  $\tilde{F}_1$  y el levantamiento horizontal son  $G$ -equivariantes,  $\tilde{\chi}$  define un morfismo de fibrados vectoriales  $\chi$  sobre los espacios cociente

$$\begin{array}{ccc} \sigma^*(T(Q/G \times Q/G)) & \xrightarrow{\chi} & T(Q \times Q)/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{G} \times Q/G & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{A}_d}} & (Q \times Q)/G \end{array}$$

Vamos a considerar la composición  $\widetilde{d\mathcal{A}_d} \circ \chi$  como un morfismo de fibrados vectoriales  $\widetilde{d\mathcal{A}_d} \circ \chi : \sigma^*(T(Q/G \times Q/G)) \rightarrow (\tilde{\mathcal{A}}_d \circ \Psi_{\mathcal{A}_d})^*(TG/G)$  sobre el mismo espacio

base  $\tilde{G} \times Q/G$ . De hecho, si denotamos  $p^{G/G} : \tilde{G} \rightarrow G/G$  a la proyección que hace de  $\tilde{G}$  un fibrado sobre  $G/G$ , tenemos que  $\tilde{\mathcal{A}}_d \circ \Psi_{\mathcal{A}_d} = p^{G/G} \circ p_1 : \tilde{G} \times Q/G \rightarrow G/G$  y podemos presentar la siguiente definición.

**Definición 6.2.2** *La curvatura mixta reducida  $\hat{\mathcal{B}}_m$  es el morfismo de fibrados sobre  $\tilde{G} \times Q/G$ ,  $\hat{\mathcal{B}}_m := \widetilde{d\mathcal{A}}_d \circ \chi : \sigma^*(T(Q/G \times Q/G)) \rightarrow (p^{G/G} \circ p_1)^*(TG/G)$ .*

*Explícitamente,*

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_m(v_0, r_1)(\delta r_0, \delta r_1) &:= [\mathcal{B}_m(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0), h^{q_1}(\delta r_1))] \\ &= [d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0), h^{q_1}(\delta r_1))] \end{aligned}$$

donde  $v_0 = \rho(q_0, w_0)$ ,  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$  y  $[\cdot]$  denota clases de equivalencia en  $TG/G$ .

Asociada a la descomposición  $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}_m^+ + \mathcal{B}_m^-$  hay una descomposición  $\hat{\mathcal{B}}_m = \hat{\mathcal{B}}_m^+ + \hat{\mathcal{B}}_m^-$  donde los morfismos  $\hat{\mathcal{B}}_m^+ : p_2^*(T(Q/G)) \rightarrow (p^{G/G} \circ p_1)^*(TG/G)$  y  $\hat{\mathcal{B}}_m^- : (p^{Q/G} \circ p_1)^*(T(Q/G)) \rightarrow (p^{G/G} \circ p_1)^*(TG/G)$  están definidos por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_m^+(v_0, r_1)(\delta r_1) &:= [\mathcal{B}_m^+(q_0, q_1)(h^{q_1}(\delta r_1))] = [D_2\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_1}(\delta r_1))] \\ \hat{\mathcal{B}}_m^-(v_0, r_1)(\delta r_0) &:= [\mathcal{B}_m^-(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0))] = [D_1\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0))] . \end{aligned}$$

### 6.3. Fuerza discreta reducida

En esta sección estudiaremos el segundo término de la última expresión que aparece en (6.2), tal como anticipamos en ese momento en la sección 6.1.

Por el Lema 6.1.1,  $D_2\check{\mathcal{L}}_d : p_2^*(TG) \rightarrow \mathbb{R}$  es un morfismo  $G$ -equivariante de fibrados vectoriales sobre  $Q \times G \times Q/G$ . Por lo tanto, induce un morfismo  $\widetilde{D_2\check{\mathcal{L}}_d}$  de los fibrados vectoriales cociente correspondientes

$$\begin{array}{ccc}
p_2^*(TG/G) & \xrightarrow{\widetilde{D_2\hat{L}_d}} & \mathbb{R} \\
\downarrow & \swarrow & \\
\tilde{G} \times Q/G & & 
\end{array}$$

Notemos que  $(p_2^*(TG))/G \simeq (p^{G/G} \circ p_1)^*(TG/G)$  y, así, la composición  $\widetilde{D_2\hat{L}_d} \circ \hat{B}_m$  es un morfismo de fibrados vectoriales bien definido.

**Definición 6.3.1** *La fuerza discreta reducida es el morfismo de fibrados vectoriales sobre  $\tilde{G} \times Q/G$  definida por  $\hat{F}_d := \widetilde{D_2\hat{L}_d} \circ \hat{B}_m : \sigma^*(T(Q/G \times Q/G)) \rightarrow \mathbb{R}$ . Explícitamente, esta 1-forma sobre  $\tilde{G} \times Q/G$  está dada por*

$$\hat{F}_d(v_0, r_1)(\delta r_0, \delta r_1) := D_2\check{L}_d(q_0, w_0, r_1) d\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0), h^{q_1}(\delta r_1)) \quad (6.5)$$

donde  $v_0 = \rho(q_0, w_0)$  y  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$ . Nuevamente, usando  $T(Q/G \times Q/G) \simeq p_1^*(T(Q/G)) \oplus p_2^*(T(Q/G))$ , definimos  $\hat{F}_d^+ := \widetilde{D_2\check{L}_d} \circ \hat{B}_m^+$  y  $\hat{F}_d^- := \widetilde{D_2\check{L}_d} \circ \hat{B}_m^-$  y tenemos  $\hat{F}_d = \hat{F}_d^+ + \hat{F}_d^-$ ; explícitamente,

$$\hat{F}_d^+(v_0, r_1)(\delta r_1) := D_2\check{L}_d(q_0, w_0, r_1) D_2\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_1}(\delta r_1)) \quad (6.6)$$

$$\hat{F}_d^-(v_0, r_1)(\delta r_0) := D_2\check{L}_d(q_0, w_0, r_1) D_1\mathcal{A}_d(q_0, q_1)(h^{q_0}(\delta r_0)).$$

**Ejemplo 6.3.1** *En este ejemplo evaluamos la fuerza discreta reducida en el contexto del ejemplo 6.1.1 para continuar con el estudio de la reducción de la simetría del sistema.*

Recordando que  $\tilde{G} \simeq Q/G \times G$ , dado  $(v_0, r_1) \in \tilde{G} \times Q/G$ , podemos considerar  $(v_0, r_1) = (r_0, w_0, r_1) \in Q/G \times G \times Q/G$  y tomar  $q_0 = (r_0, 0)$ ; luego,  $q_1 := l_{w_0}(\overline{h_d^{q_0}}(r_1)) = (r_1, w_0 + b(r_1^2 - r_0^2)/2)$ .

Como  $D_2\check{L}_d((r_0, 0), w_0, r_1) = m(w_0 + b(r_1^2 - r_0^2)/2) dw_0|_{w_0}$  podemos evaluar la fuerza discreta reducida, usando los resultados obtenidos en el ejemplo 6.2.1, y obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{F}_d(r_0, w_0, r_1) (c_0 \partial_{r_0}|_{r_0}, c_1 \partial_{r_1}|_{r_1}) &= m(w_0 + b(r_1^2 - r_0^2)/2) dw_0|_{w_0} \\ &\quad ((1 - b)(c_1 r_1 - c_0 r_0) \partial_{w_0}|_{w_0}) \\ &= m(w_0 + b(r_1^2 - r_0^2)/2) (1 - b)(c_1 r_1 - c_0 r_0). \end{aligned}$$

En forma equivalente,

$$\hat{F}_d(r_0, w_0, r_1) = m(w_0 + b(r_1^2 - r_0^2)/2) (1 - b)(r_1 dr_1 - r_0 dr_0).$$

## 6.4. Dinámica reducida

Comenzamos esta sección presentando el resultado de reducción para sistemas mecánicos discretos no holónomos que hemos mencionado anteriormente. Continuamos presentando la versión intrínseca de las ecuaciones reducidas y, por último, extendemos el Teorema 5.2.1 incorporando una equivalencia que involucra a la versión intrínseca de la ecuación vertical reducida.

### 6.4.1. Teorema de reducción

En esta sección relacionamos la dinámica de un sistema mecánico discreto no holónimo que presenta una simetría con un sistema dinámico reducido, que es definido usando un principio variacional. A continuación enunciamos el teorema que relaciona la dinámica del sistema original con la dinámica de un sistema reducido definido sobre el espacio  $\tilde{G} \times Q/G$ .

**Teorema 6.4.1** Sea  $q$ . una curva discreta en  $Q$ ,  $r_k := \pi(q_k)$ ,  $w_k := \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})$  y  $v_k := \rho(q_k, w_k)$  las curvas discretas correspondientes en  $Q/G$ ,  $G$  y  $\tilde{G}$ . Entonces, dado un sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  con grupo de simetría  $G$ , los siguientes enunciados son equivalentes.

1.  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$  y  $q$ . satisface el principio variacional  $dS_d(q)(\delta q) = 0$  para toda variación  $\delta q$ . a extremos fijos tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ .
2.  $q$ . satisface las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.10) para todo  $k$ .
3.  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d := \Phi_{\mathcal{A}_d}(\mathcal{D}_d/G)$  para todo  $k$  y  $d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = 0$  para toda variación  $(\delta v., \delta r.)$  a extremos fijos que satisface que

$$\delta r_k \in \hat{\mathcal{D}}_{r_k} := d\pi_{q_k}(\mathcal{D}_{q_k}) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \delta v_k := & d\rho(q_k, w_k)(h^{q_k}(\delta r_k), d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(h^{q_k}(\delta r_k), h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1}))) \\ & + d\rho(q_k, w_k)\left((\xi_k)_Q(q_k), d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})\left((\xi_k)_Q(q_k), (\xi_{k+1})_Q(q_{k+1})\right)\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde  $(q_k, \xi_k) \in \mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}}$ .

4.  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  para todo  $k$  y  $(v., r.)$  satisface las siguientes condiciones para cada  $(v_{k-1}, r_k, v_k, r_{k+1})$  fijo.

- $\phi \in T_{r_k}^*(Q/G)$  definida por

$$\begin{aligned} \phi := & D_1\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \circ h^{q_k} + D_3\check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) \\ & + \hat{F}_d^-(v_k, r_{k+1}) + \hat{F}_d^+(v_{k-1}, r_k) \end{aligned} \quad (6.8)$$



se anula sobre  $\hat{\mathcal{D}}_{r_k}$ , es decir

$$\phi \in \hat{\mathcal{D}}_{r_k}^\circ. \quad (6.9)$$

▪  $\psi \in \mathfrak{g}^*$  definida por

$$\psi := D_2 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) w_{k-1}^{-1} - D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k^{-1} \quad (6.10)$$

se anula sobre  $\mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}}$ , es decir

$$\psi \in (\mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}})^\circ. \quad (6.11)$$

**Demostración.** En primer lugar, estudiamos la equivalencia entre los vínculos cinemáticos y su contraparte reducida; es decir, la equivalencia entre las condiciones  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  y  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$ .

Si  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  entonces,  $\tilde{\pi}(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d/G$  y  $(v_k, r_{k+1}) = \Phi_{\mathcal{A}_d}(\tilde{\pi}(q_k, q_{k+1})) \in \Phi_{\mathcal{A}_d}(\mathcal{D}_d/G)$ .

Recíprocamente, si  $(v_k, r_{k+1}) = \Phi_{\mathcal{A}_d}(\tilde{\pi}(q_k, q_{k+1})) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  tenemos que  $\tilde{\pi}(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d/G$  y entonces  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$ .

En segundo lugar, estudiamos la equivalencia entre los principios variacionales y las ecuaciones.

1  $\Leftrightarrow$  2. Es un resultado conocido del cálculo de variaciones.

3  $\Rightarrow$  1. Dada una variación  $\delta q$  a extremos fijos tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ , definimos  $\delta r_k := d\pi_{q_k}(\delta q_k)$  y  $\xi_k := \mathcal{A}(q_k)(\delta q_k)$  y tenemos que las variaciones  $\delta q_k$  pueden expresarse como  $\delta q_k = h^{q_k}(\delta r_k) + (\xi_k)_Q(q_k)$ . Además, definimos  $\delta v_k$  según (6.7).

Usando el Lema 5.2.4 para evaluar  $d\gamma$ , vemos que

$$\begin{aligned}
dS_d(q.) (\delta q.) &= \sum_{k=0}^{N-1} dL_d(q_k, q_{k+1}) (\delta q_k, \delta q_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} d\hat{L}_d(\gamma(q_k, q_{k+1})) d\gamma(q_k, q_{k+1}) (\delta q_k, \delta q_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} d\hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) (\delta v_k, \delta r_{k+1}) = d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.).
\end{aligned}$$

Luego, como vale 3 del enunciado  $d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = 0$  entonces  $dS_d(q.) (\delta q.) = 0$  y así  $q.$  satisface la condición 1.

1  $\Rightarrow$  3. Dada una variación  $(\delta v., \delta r.)$  a extremos fijos que satisface las condiciones del enunciado, definimos  $\delta q_k := h^{q_k}(\delta r_k) + (\xi_k)_Q(q_k)$ . Luego, por el Lema 5.2.4 y la fórmula explícita (6.7), tenemos que  $(\delta v_k, \delta r_{k+1}) = d\gamma(q_k, q_{k+1}) (\delta q_k, \delta q_{k+1})$  y lo usamos para ver, mediante un razonamiento análogo al utilizado en la implicación 3  $\Rightarrow$  1, que

$$d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = dS_d(q.) (\delta q.).$$

Por lo tanto, como la variación  $\delta q.$  satisface la hipótesis 1,  $dS_d(q.) (\delta q.) = 0$  lo que implica que  $d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = 0$ .

3  $\Leftrightarrow$  4. Escribiendo  $\delta v_k = d\rho(q_k, w_k) (\delta q_k, \delta w_k)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) &= \sum_{k=0}^{N-1} d\hat{L}_d(v_k, r_{k+1}) (\delta v_k, \delta r_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} d\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\delta q_k, \delta w_k, \delta r_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} D_1\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\delta q_k) + D_2\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\delta w_k) \\
&\quad + D_3\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\delta r_{k+1}).
\end{aligned}$$

Ahora, usando la conexión  $\mathcal{A}$  para descomponer  $\delta q_k = h^{q_k} (\delta r_k) + (\xi_k)_Q (q_k)$  y considerando que

$$\begin{aligned} \delta w_k &= d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) \\ &= D_1\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k) + D_2\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_{k+1}) \\ &= D_1\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})\left(h^{q_k}(\delta r_k) + (\xi_k)_Q(q_k)\right) \\ &\quad + D_2\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})\left(h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1}) + (\xi_{k+1})_Q(q_{k+1})\right) \end{aligned}$$

reescribimos la variación discreta anterior reordenando los términos y recordando que tomamos variaciones a extremos fijos

$$\begin{aligned} d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_1\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \circ h^{q_k} + D_3\check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) \right. \\ &\quad + D_2\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) D_1\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) \circ h^{q_k} \\ &\quad + D_2\check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) D_2\mathcal{A}_d(q_{k-1}, q_k) \circ h^{q_k} \left. (\delta r_k) \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_1\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \left( (\xi_k)_Q(q_k) \right) \right. \\ &\quad \left. + D_2\check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) \left( (\xi_k)_Q(q_k), (\xi_{k+1})_Q(q_{k+1}) \right) \right). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Como las variaciones  $\delta r.$  son independientes de las variaciones generadas por  $\xi.$ , tenemos que la condición  $d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = 0$  del ítem 3 del enunciado equivale a que la primera y la segunda sumatoria que aparecen en (6.12) se anulen en forma independiente, para toda variación a extremos fijos  $\delta r.$  con  $\delta r_k \in \hat{\mathcal{D}}_{r_k}$  para todo  $k$  y para toda  $\xi.$  con  $(q_k, \xi_k) \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$  para todo  $k$  y con  $\xi_0 = \xi_N = 0$ .

Recordando que las variaciones  $\delta r.$  son independientes y la expresión para las fuerzas discretas reducidas (6.6) podemos ver que la anulación de la primer sumatoria

de (6.12) equivale a la condición

$$0 = \left( D_1 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \circ h^{q_k} + D_3 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) \right. \\ \left. + \hat{F}_d^-(v_k, r_{k+1}) + \hat{F}_d^+(v_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k)$$

donde  $\delta r_k \in \hat{\mathcal{D}}_{r_k}$  para todo  $k$ . Esto es equivalente a que  $\phi$ , definido en (6.8) satisfaga la condición (6.9).

Antes de probar la equivalencia de la condición (6.11) con la anulación de la segunda sumatoria de (6.12) necesitamos algunos cálculos auxiliares.

Comenzamos notando que, por definición de diferencial y haciendo uso de la propiedad (5.5) tenemos que

$$d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_d(\exp(t\xi_k) q_k, \exp(t\xi_{k+1}) q_{k+1}) \Big|_{t=0} \\ = \frac{d}{dt} \exp(t\xi_{k+1}) \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) \exp(-t\xi_k) \Big|_{t=0}.$$

Además la última expresión puede reescribirse en términos  $\xi$ . y de  $w$ ., recordando la notación introducida en la Observación 5.2.7, de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \exp(t\xi_{k+1}) \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) \exp(-t\xi_k) \Big|_{t=0} \\ = dL_{e\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})}(e)(-\xi_k) + dR_{\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})e}(e)(\xi_{k+1}) \\ = dR_{w_k}(e)(\xi_{k+1}) - dL_{w_k}(e)(\xi_k) = \xi_{k+1} w_k - w_k \xi_k.$$

Otro de los cálculos auxiliares que nos será de utilidad es el siguiente. Como  $\check{L}_d$  es  $G$ -invariante, es decir  $\check{L}_d(l_g^Q(q_k), w_k, r_{k+1}) = \check{L}_d(q_k, l_{g^{-1}}^G(w_k), r_{k+1})$ , entonces

tenemos que

$$\begin{aligned}
D_1 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \left( (\xi_k)_Q(q_k) \right) &= \frac{d}{dt} \check{L}_d \left( l_{\exp(t\xi_k)}^Q(q_k), w_k, r_{k+1} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \check{L}_d \left( q_k, l_{(\exp(t\xi_k))^{-1}}^G(w_k), r_{k+1} \right) \Big|_{t=0} \\
&= D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \frac{d}{dt} l_{\exp(-t\xi_k)}^G(w_k) \Big|_{t=0} \\
&= D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \frac{d}{dt} \exp(-t\xi_k) w_k \exp(t\xi_k) \Big|_{t=0} \\
&= D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (-\xi_k w_k + w_k \xi_k)
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos vuelto a utilizar la notación de la Observación 5.2.7.

Por último, aplicamos lo obtenido para ver que la anulación de la segunda sumatoria de (6.12) equivale a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_1 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) \left( (\xi_k)_Q(q_k) \right) \right. \\
&\quad \left. + D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) \left( (\xi_k)_Q(q_k), (\xi_{k+1})_Q(q_{k+1}) \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (-\xi_k w_k + w_k \xi_k) \right. \\
&\quad \left. + D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\xi_{k+1} w_k - w_k \xi_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) (\xi_{k+1} w_k - \xi_k w_k).
\end{aligned}$$

Y, reordenando los términos en la última expresión, obtenemos que

$$0 = \sum_{k=1}^{N-1} \left( D_2 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) w_{k-1}^{-1} - D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k \right) (\xi_k)$$

para todo  $\xi$ . tal que  $(q_k, \xi_k) \in \mathfrak{g}_{q_k}^D$ . Esto es equivalente a que  $\psi$ , definido en (6.10) satisfaga la condición (6.11). ■

De la demostración del Teorema 6.4.1 se tiene el siguiente resultado.

**Lema 6.4.1** *Con la notación del Teorema 6.4.1 las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *La curva discreta  $q$ . satisface  $dS_d(q.) (\delta q^S) = 0$  para toda variación a extremos fijos tal que  $\delta q_k^S \in \mathcal{S}_{q_k}$  para todo  $k$ .*
2. *La curva  $(v., r.)$  satisface la condición (6.11) para  $\psi$  definida por (6.10).*

**Observación 6.4.1** *Notamos que las ecuaciones horizontales (6.9) para  $\phi$  definida por (6.8) tienen términos de fuerzas que, por (6.5) son la composición de derivadas del lagrangiano reducido y de una función que involucra a las conexiones  $A$  y  $A_d$ . Como en el contexto continuo, las fuerzas que aparecen en la ecuación análoga involucran a la curvatura reducida de la conexión no holónoma, nosotros hemos elegido nombrar al término correspondiente en el contexto discreto curvatura mixta reducida. En este caso, de manera análoga al contexto continuo, recuperamos el resultado en el que la anulación de la curvatura mixta reducida implica la anulación de las fuerzas discretas en el sistema reducido. Más allá de este hecho, no tenemos otra buena razón para darles a  $\mathcal{B}_m$  o  $\hat{\mathcal{B}}_m$  el nombre de “curvaturas”.*

**Observación 6.4.2** *Para los sistemas mecánicos clásicos, las ecuaciones de Lagrange-D’Alembert (3.1) son ecuaciones diferenciales de segundo orden, mientras que sus contrapartes reducidas que aparecen en el Teorema 3.2.2 son de segundo orden en las variables de  $Q/G$  pero sólo de primer orden en las variables de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Análogamente, para sistemas mecánicos discretos, las ecuaciones de Lagrange-D’Alembert discretas (4.10) son ecuaciones de recurrencia de segundo orden mientras que las ecuaciones*

reducidas que aparecen en el Teorema 6.4.1 son de segundo orden en las variables de  $Q/G$  y sólo de primer orden en las variables de  $\tilde{G}$ .

**Observación 6.4.3** *El espíritu del Teorema 6.4.1 es similar al de los teoremas de reducción, como el Teorema 3.2.2. Sin embargo, hay una diferencia técnica entre ambos tipos de resultados. En el caso continuo, aún en el contexto generalizado, la elección de una conexión en el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  sirve para construir un modelo para el espacio reducido y determina una descomposición vertical / horizontal del principio variacional y de las ecuaciones de movimiento. En el contexto discreto una conexión continua cumple el mismo propósito de descomposición pero una conexión discreta se usa para construir un modelo de espacio reducido. Sería interesante ver si existe alguna ventaja al usar dos conexiones diferentes en la reducción de sistemas mecánicos no holónomos continuos.*

**Ejemplo 6.4.1** *Ahora aplicamos el Teorema 6.4.1 para continuar con el análisis del Ejemplo 6.1.1 y encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema reducido.*

*Por un lado, los vínculos variacionales reducidos están determinados por*

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{D}}_{r_k} &= d\pi(r_k, 0) (\mathcal{D}_{(r_k, 0)}) = d\pi(r_k, 0) \left( \left\langle \partial_x|_{(r_k, 0)} - r_k \partial_y|_{(r_k, 0)} \right\rangle \right) \\ &= \left\langle \partial_r|_{r_k} \right\rangle = T_{r_k}(Q/G).\end{aligned}$$

*Por otro lado, como*

$$(r_0, w_0, r_1) \in \hat{\mathcal{D}}_d \Leftrightarrow \tilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d^b}^{-1}((r_0, 0), w_0, r_1) \in \mathcal{D}_d \Leftrightarrow w_0 = (1 - b)(r_1^2 - r_0^2)/2$$

*los vínculos cinemáticos reducidos están determinados por*

$$\hat{\mathcal{D}}_d = \{(r_0, w_0, r_1) \in Q/G \times G \times Q/G : w_0 = (1 - b)(r_1^2 - r_0^2)/2\}.$$

Ahora evaluamos las ecuaciones de movimiento reducidas. Como en este sistema  $\mathcal{S} = \{0\}$ , se tiene que  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}} = \{0\}$  y la condición (6.11) se satisface trivialmente; es decir, no hay ecuaciones verticales.

Para hallar las ecuaciones horizontales evaluamos

$$D_1 \check{L}_d((r_k, h_k), w_k, r_{k+1}) = -m((r_{k+1} - r_k) + (w_k + b(r_{k+1}^2 - r_k^2)/2) br_k) dx_k|_{(r_k, h_k)}$$

$$D_3 \check{L}_d((r_{k-1}, h_{k-1}), w_{k-1}, r_k) = m((r_k - r_{k-1}) + (w_{k-1} + b(r_k^2 - r_{k-1}^2)/2) br_k) dr_k|_{(r_k, h_k)}.$$

Como vimos en el Ejemplo 6.2.1 la expresión del levantamiento horizontal es

$$h^{(r_k, h_k)}(\dot{r} \partial_r|_{r_k}) = \partial_x|_{(r_k, h_k)} + r_k \partial_y|_{(r_k, h_k)}$$

y, por el Ejemplo 6.3.1 las expresiones de las fuerzas reducidas son

$$\begin{aligned} \hat{F}_d^- (r_k, w_k, r_{k+1}) &= -m(1-b)(w_k + b(r_{k+1}^2 - r_k^2)/2) r_k dr_k|_{r_k} \\ \hat{F}_d^+ (r_{k-1}, w_{k-1}, r_k) &= m(1-b)(w_{k-1} + b(r_k^2 - r_{k-1}^2)/2) r_k dr_k|_{r_k}. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (6.8) tenemos que  $\phi = mU_k dr_k|_{r_k}$  para

$$\begin{aligned} U_k := & -((r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})) \\ & -r_k(w_k - w_{k-1} + b((r_{k+1}^2 - r_k^2) - (r_k^2 - r_{k-1}^2))/2). \end{aligned}$$

Entonces, como  $\hat{\mathcal{D}} = T(Q/G)$ , la condición (6.9) implica que  $U_k = 0$ , que es la ecuación horizontal del sistema reducido. Por lo tanto, la evolución reducida está



determinada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} U_k = 0 \\ w_k = (1 - b) (r_{k+1}^2 - r_k^2) / 2 \end{cases} \quad (6.13)$$

Usamos la segunda ecuación para eliminar la dependencia en  $w_k$  en la primera ecuación y obtenemos

$$((r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1})) + r_k ((r_{k+1}^2 - r_k^2) - (r_k^2 - r_{k-1}^2)) / 2 = 0 \quad (6.14)$$

que es una ecuación de grado 2 en  $r_{k+1}$ . Luego de hallar la evolución para la variable  $r_{k+1}$  se reemplaza en la expresión de  $w_k$  y se determina la evolución para esta variable.

**Observación 6.4.4** Notemos que el valor del parámetro  $b$  es el que determina que el sistema reducido construido en el Ejemplo 6.4.1 sea o no forzado. Además de hacer que el sistema reducido no sea forzado, el valor  $b = 1$  genera una dinámica muy sencilla para las variables  $w$ . Esta característica será estudiada en mayor detalle en la Sección 7.3 en donde consideraremos sistemas con simetrías de tipo Chaplygin.

Volviendo al contexto general, hemos visto que las condiciones (6.9) y (6.11) establecen las ecuaciones de movimiento del sistema reducido. Sin embargo, están escritas en términos de la curva  $q$  en  $Q$ . En la Sección 6.4.2 veremos que estas ecuaciones pueden ser definidas de manera intrínseca; es decir, en términos de objetos definidos sobre el espacio reducido.

### 6.4.2. Versión intrínseca de las ecuaciones reducidas

En esta sección presentamos la versión de las ecuaciones horizontal y vertical en términos de las variables del espacio reducido. Las ecuaciones serán expresadas como condiciones sobre morfismos de fibrados vectoriales sobre la variedad de segundo orden reducida  $Q_G^{(2)} := \tilde{G} \times Q/G \times_{Q/G} \tilde{G} \times Q/G$ , donde el producto fibrado es tomado sobre las aplicaciones  $p_2 : \tilde{G} \times Q/G \rightarrow Q/G$  y  $p^{Q/G} \circ p_1 : \tilde{G} \times Q/G \rightarrow Q/G$ .

Introducimos también un espacio con el que trabajaremos en lo que sigue,  $\check{Q}_G^{(2)} := Q \times G \times Q/G \times_{Q/G} \tilde{G} \times Q/G$ . El grupo  $G$  actúa sobre  $\check{Q}_G^{(2)}$  por la acción

$$l_g^{\check{Q}_G^{(2)}}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2) := (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1, v_1, r_2)$$

luego,  $\check{Q}_G^{(2)}/G = Q_G^{(2)}$ . Además, definimos las aplicaciones

$$F_1 : \check{Q}_G^{(2)} \rightarrow Q \text{ como } F_1(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2) := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$$

y  $F_2 : \check{Q}_G^{(2)} \rightarrow G$  como

$$F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2) := l_{\tau(\tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1), \tilde{q}_1)}^G(\tilde{w}_1) \text{ con } v_1 = \rho(\tilde{q}_1, \tilde{w}_1)$$

donde  $\tau : Q \times_{Q/G} Q \rightarrow G$  está dada por  $\tau(q, \bar{q}) := g$  si  $l_g^Q(\bar{q}) = q$ .

**Observación 6.4.5** *Notar que dado  $h \in G$ ,  $\tau(l_h^Q(q), \bar{q}) = L_h(\tau(q, \bar{q}))$  donde  $L_h$  denota la multiplicación a izquierda en  $G$ .*

Un simple cálculo muestra que  $F_1$  y  $F_2$  son  $G$ -equivariantes ya que  $\tilde{F}_1$  y  $\tau$  lo son.

#### Ecuaciones horizontales

Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \xleftarrow{\check{\phi}} & p_3^*(T(Q/G)) & T(Q/G) \\
\downarrow & & \swarrow & \downarrow \\
\check{Q}_G^{(2)} & & & Q/G \\
& \xrightarrow{p_3} & & 
\end{array}
\tag{6.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
\check{\phi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) := & \left( D_1 \check{L}_d(q_1, w_1, r_2) \circ h^{q_1} + D_3 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) \right. \\
& \left. + \hat{F}_d^-(v_1, r_2) + \hat{F}_d^+(\rho(q_0, w_0), r_1) \right) (\delta r_1)
\end{aligned}$$

para  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$  y  $w_1 := F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)$ . Consideramos la acción de  $G$  sobre  $p_3^*(T(Q/G))$  dada por

$$l_{p_3^*(T(Q/G))}^g(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1, v_1, r_2, \delta r_1)$$

y la acción de  $G$  sobre  $\mathbb{R}$  dada por la acción trivial.

**Lema 6.4.2** *La aplicación  $\check{\phi}$  es un morfismo  $G$ -equivariante de fibrados vectoriales.*

**Demostración.** De la definición de  $\check{\phi}$  se tiene que es un morfismo de fibrados vectoriales. Ahora veremos que es equivariante por la acción de  $G$ . Para esto, consideramos  $(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2) \in \check{Q}_G^{(2)}$  y tomamos  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$  y  $w_1 := F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)$ . Para hacer los cálculos más claros, renombramos los términos de  $\check{\phi}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\check{\phi}_1(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) &:= \left( D_1 \check{L}_d(q_1, w_1, r_2) \circ h^{q_1} + D_3 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) \right) (\delta r_1) \\
\check{\phi}_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) &:= \left( \hat{F}_d^-(v_1, r_2) + \hat{F}_d^+(\rho(q_0, w_0), r_1) \right) (\delta r_1)
\end{aligned}$$

de modo que  $\check{\phi} = \check{\phi}_1 + \check{\phi}_2$ .

Notamos que  $\check{\phi}_2$  resulta  $G$ -equivariante por esta definición. Entonces, estudiamos la  $G$ -equivariancia de  $\check{\phi}_1$

$$\begin{aligned} \check{\phi}_1 \left( l_g^{p_3^*(T(Q/G))} (q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) \right) &= \check{\phi}_1 (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1, v_1, r_2, \delta r_1) \\ &= D_1 \check{L}_d (\bar{q}_1, \bar{w}_1, r_2) \circ h^{\bar{q}_1} (\delta r_1) + D_3 \check{L}_d (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) (\delta r_1) \end{aligned}$$

donde  $\bar{q}_1 := \tilde{F}_1 (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) = l_g^Q (\tilde{F}_1 (q_0, w_0, r_1)) = l_g^Q (q_1)$  y  $\bar{w}_1 := F_2 (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1, v_1, r_2) = l_g^G (F_2 (q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)) = l_g^G (w_1)$ . Por lo tanto, usando la  $G$ -equivariancia del levantamiento horizontal, tenemos que

$$\begin{aligned} \check{\phi}_1 \left( l_g^{p_3^*(T(Q/G))} (q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) \right) &= \\ D_1 \check{L}_d (l_g^Q (q_1), l_g^G (w_1), r_2) \circ h^{l_g^Q (q_1)} (\delta r_1) + D_3 \check{L}_d (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) (\delta r_1) &= \\ D_1 \check{L}_d (l_g^Q (q_1), l_g^G (w_1), r_2) \circ l_g^{TQ} \circ h^{q_1} (\delta r_1) + D_3 \check{L}_d (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) (\delta r_1). & \end{aligned} \tag{6.16}$$

Además, por el Lema 6.1.1 se tiene que

$$D_1 \check{L}_d (l_g^Q (q_1), l_g^G (w_1), r_2) \circ l_g^{TQ} = D_1 \check{L}_d (q_1, w_1, r_2).$$

Dado que  $\check{L}_d (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) = \check{L}_d (q_0, w_0, r_1)$  entonces

$$D_3 \check{L}_d (l_g^Q (q_0), l_g^G (w_0), r_1) = D_3 \check{L}_d (q_0, w_0, r_1).$$

Así, reemplazando lo obtenido en (6.16) se tiene la  $G$ -equivariancia de  $\check{\phi}_1$

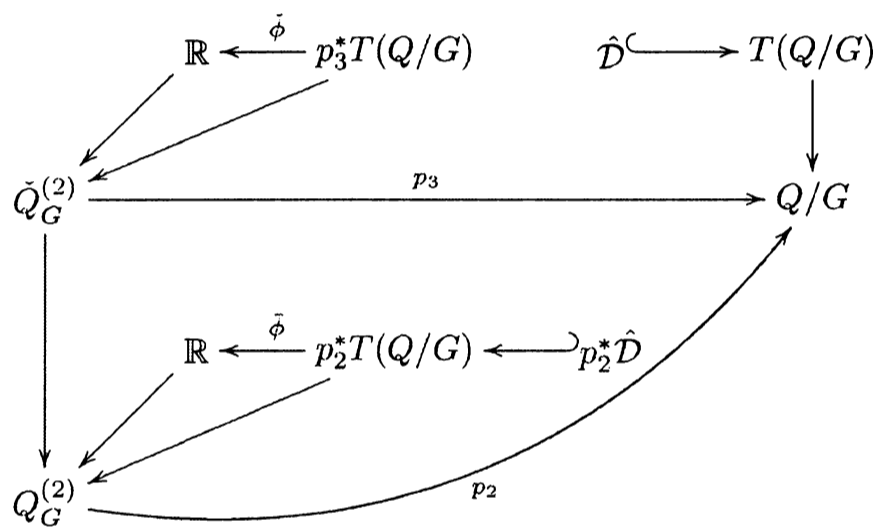
$$\check{\phi}_1 \left( l_g^{p_3^*(T(Q/G))} (q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) \right) = \check{\phi}_1 (q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1).$$

■

Por lo tanto, el Lema 6.4.2 establece que  $\check{\phi}$  define un morfismo de fibrados vectoriales  $\bar{\phi} : (p_3^*(T(Q/G))) / G \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerando la proyección  $p_2 : Q_G^{(2)} \rightarrow Q/G$  se tiene que  $(p_3^*(T(Q/G))) / G = p_2^*(T(Q/G))$  y, así,  $\bar{\phi} : p_2^*(T(Q/G)) \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto es,

$$\bar{\phi}(v_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1) = \check{\phi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \delta r_1).$$

El diagrama (6.15) se extiende al siguiente diagrama conmutativo donde  $\hat{D} \subset T(Q/G)$  es el subfibrado introducido en el Teorema 6.4.1.



**Proposición 6.4.1** *La condición (6.9) del Teorema 6.4.1 es equivalente a*

$$\bar{\phi}|_{p_2^*(\hat{D})} = 0. \quad (6.17)$$

**Demostración.** Es claro que para  $v_k$  y  $r_k$  definidas como en el Teorema 6.4.1 la expresión explícita de  $\bar{\phi}$  coincide con la de  $\phi$  definida en (6.8) y la condición de anulación (6.9) coincide con la condición (6.17). ■

### Ecuaciones verticales

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \xleftarrow{\check{\psi}} F_1^*(Q \times \mathfrak{g}) \xleftarrow{\hookrightarrow} F_1^*(\mathfrak{g}^D) & \xrightarrow{\quad} \mathfrak{g}^D \xrightarrow{\quad} Q \times \mathfrak{g} \\
& \searrow & \downarrow \\
& \check{Q}_G^{(2)} & \xrightarrow{F_1} Q \\
& & \downarrow \\
& & Q
\end{array} \tag{6.18}$$

donde

$$\check{\psi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) := (D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) w_0^{-1} - D_2 \check{L}_d(q_1, w_1, r_2) w_1^{-1})(\xi_1)$$

para  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$  y  $w_1 := F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)$ .

Notemos que  $F_1^*(Q \times \mathfrak{g}) = \check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}$  y que  $G$  actúa sobre este espacio por la acción  $l_g^{\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) := (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1, v_1, r_2, l_g^{TQ}(\xi_1))$ . Además,  $G$  actúa sobre  $\mathbb{R}$  de manera trivial. Tenemos entonces, el siguiente resultado.

**Lema 6.4.3** *La aplicación  $\check{\psi}$  es un morfismo de fibrados vectoriales  $G$ -equivariante.*

**Demostración.** De la definición de  $\check{\psi}$  se tiene que es un morfismo de fibrados vectoriales. Ahora veremos que es equivariante por la acción de  $G$ . Para esto, consideramos  $(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2) \in \check{Q}_G^{(2)}$  y tomamos  $q_1 := \tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)$  y  $w_1 := F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)$ .

Como  $\tilde{F}_1$  y  $F_2$  son  $G$ -equivariantes tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1(l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1) &= l_g^Q(\tilde{F}_1(q_0, w_0, r_1)) = l_g^Q(q_1) \text{ y} \\
F_2(l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1, v_1, r_2) &= l_g^G(F_2(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2)) = l_g^G(w_1).
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\check{\psi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) = D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1)(\xi_1 w_0) - D_2 \check{L}_d(q_1, w_1, r_2)(\xi_1 w_1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\check{\psi} \left( l_g^{\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) \right) &= \check{\psi} (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1, v_1, r_2, l_g^{TQ}(\xi_1)) \\
&= D_2 \check{L}_d (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1) (l_g^{TQ}(\xi_1) l_g^G(w_0)) \\
&\quad - D_2 \check{L}_d (l_g^Q(q_1), l_g^G(w_1), r_2) (l_g^{TQ}(\xi_1) l_g^G(w_1))).
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Recordando la notación de la Observación 5.2.7 tenemos que

$$l_g^{TQ}(\xi_1) l_g^G(w_0) = g \xi_1 g^{-1} g w_0 g^{-1} = g \xi_1 w_0 g^{-1} = dl_g^G(w_0)(\xi_1 w_0).$$

Reemplazando esto en (6.19) y usando la  $G$ -equivariancia de  $D_2 \check{L}_d$ , probada en el Lema 6.1.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\check{\psi} \left( l_g^{\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) \right) &= D_2 \check{L}_d (l_g^Q(q_0), l_g^G(w_0), r_1) dl_g^G(w_0)(\xi_1 w_0) \\
&\quad - D_2 \check{L}_d (l_g^Q(q_1), l_g^G(w_1), r_2) dl_g^G(w_1)(\xi_1 w_1)) \\
&= D_2 \check{L}_d (q_0, w_0, r_1) (\xi_1 w_0) \\
&\quad - D_2 \check{L}_d (q_1, w_1, r_2) (\xi_1 w_1).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\check{\psi} \left( l_g^{\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1) \right) = \check{\psi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1)$$

■

Por el Lema 6.4.3,  $\check{\psi}$  define un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $Q_G^{(2)}$ ,  $\bar{\psi} : (\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}) / G \rightarrow \mathbb{R}$ . Explícitamente, para cualquier  $(q_0, w_0) \in \rho^{-1}(v_0)$  y  $\xi_1 \in \mathfrak{g}$ ,

$$\bar{\psi}([(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1)]) = \check{\psi}(q_0, w_0, r_1, v_1, r_2, \xi_1). \tag{6.20}$$

Dado que  $F_1$  es  $G$ -equivariante y  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$  es  $G$ -invariante, resulta que  $F_1^*(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}) \subset \check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g}$  es  $G$ -invariante. Además,  $(F_1^*(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}))/G \subset (\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g})/G$  es un subfibrado vectorial.

En el siguiente diagrama conmutativo se muestra una parte del cociente de (6.18)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{\psi} & & \\
 & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
 \mathbb{R} & & (\check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g})/G & & (F_1^*(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}))/G \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & Q_G^{(2)} & & 
 \end{array}$$

**Proposición 6.4.2** *La condición (6.11) del Teorema 6.4.1 es equivalente a*

$$\bar{\psi}|_{(F_1^*(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}))/G} = 0. \quad (6.21)$$

**Demostración.** Es sencillo verificar que para  $v_k$  y  $r_k$  definidas como en el Teorema 6.4.1 la expresión explícita de  $\bar{\psi}$  coincide con la de  $\psi$  definida en (6.10) y la condición de anulación (6.11) coincide con la condición (6.21). ■

**Corolario 6.4.1** *Cualquiera de las cuatro condiciones equivalentes del Teorema 6.4.1 es equivalente a que  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  y que se cumplan las condiciones (6.17) y (6.21) para todo  $k$ .*

### 6.4.3. Ecuación vertical-Evolución del momento

En esta sección vamos a especializar el Lema 5.2.5 al lagrangiano  $\check{L}_d$  y vamos a extender el Teorema 5.2.1 mencionando una equivalencia adicional que involucra a la versión intrínseca de la ecuación vertical presentada en la Sección 6.4.2.



**Lema 6.4.4** Para  $\xi \in \mathfrak{g}$  y  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ , se tiene que

$$-D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) = (D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) w_0^{-1})(\xi) \quad (6.22)$$

donde  $(q_0, w_0, r_1) = \check{\Phi}_{\mathcal{A}_d}(q_0, q_1) = (q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), \pi(q_1))$ . En particular,  $J_d(q_0, q_1) = D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) w_0^{-1}$ .

**Demostración.** Por definición,

$$-D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) = -\frac{d}{dt} L_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), q_1 \right) \Big|_{t=0}.$$

Como  $L_d(q_0, q_1) = (\check{L}_d \circ \check{\Phi}_{\mathcal{A}_d})(q_0, q_1) = \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) = \check{L}_d(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), r_1)$  se tiene que

$$D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) = \frac{d}{dt} \check{L}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), \mathcal{A}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), q_1 \right), r_1 \right) \Big|_{t=0}.$$

Por la Proposición 5.2.2 y por la  $G$ -invariancia de  $\check{L}_d$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \check{L}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), \mathcal{A}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), q_1 \right), r_1 \right) = \\ & \check{L}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), \mathcal{A}_d(q_0, q_1) (\exp(t\xi))^{-1}, r_1 \right) = \\ & \check{L}_d \left( q_0, l_{(\exp(t\xi))^{-1}}^G(\mathcal{A}_d(q_0, q_1) (\exp(t\xi))^{-1}), r_1 \right) = \\ & \check{L}_d \left( q_0, (\exp(t\xi))^{-1} \mathcal{A}_d(q_0, q_1), r_1 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la notación introducida en la Observación 5.2.7 obtenemos

$$-D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) = -\frac{d}{dt} \check{L}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), \mathcal{A}_d \left( l_{\exp(t\xi)}^Q(q_0), q_1 \right), r_1 \right) \Big|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \left. \frac{d}{dt} \check{L}_d(q_0, (\exp(t\xi))^{-1} \mathcal{A}_d(q_0, q_1), r_1) \right|_{t=0} \\
&= D_2 \check{L}_d(q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1), r_1) (\xi \mathcal{A}_d(q_0, q_1)) \\
&= D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) (\xi w_0) = (D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) w_0^{-1}) (\xi).
\end{aligned}$$

En el caso particular en que  $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$  se tiene que  $J_d(q_0, q_1) = D_2 \check{L}_d(q_0, w_0, r_1) w_0^{-1}$ .

■

**Teorema 6.4.2** *En el contexto del Teorema 6.4.1, dada  $q$  una curva discreta en  $Q$ , sean  $r_k = \pi(q_k)$ ,  $w_k = \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})$  y  $v_k = \rho(q_k, w_k)$ . Luego, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $q$  satisface el principio variacional vertical. Es decir,  $dS_d(q) (\delta q^{\mathcal{S}}) = 0$  para toda variación  $\delta q^{\mathcal{S}}$  a extremos fijos tal que  $\delta q_k^{\mathcal{S}} \in S_{q_k}$  para todo  $k$ .
2. Para todas las secciones  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ ,

$$(J_d)_{\tilde{\xi}}(q_k, q_{k+1}) - (J_d)_{\tilde{\xi}}(q_{k-1}, q_k) = -D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) - \tilde{\xi}(q_{k-1}) \right)_Q(q_{k-1}). \quad (6.23)$$

3. La condición (6.21) se satisface.

**Demostración.** La equivalencia entre los puntos 1 y 2 ha sido demostrada en el Teorema 6.4.1, por esto basta con probar la equivalencia entre 2 y 3.

Dada  $\tilde{\xi} \in \Gamma(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ , de la demostración del Teorema 6.4.1 sabemos que la condición del punto 2 es equivalente a

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k) = D_1 L_d(q_{k-1}, q_k) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_{k-1}). \quad (6.24)$$

Ahora, usando (6.22) con  $\xi = \tilde{\xi}(q_k)$  tenemos

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right)_Q(q_k) = (D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k^{-1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right).$$

Cuando reemplazamos esta igualdad en (6.24) obtenemos

$$(D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k^{-1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right) = (D_2 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) w_{k-1}^{-1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right).$$

Es decir,

$$(D_2 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) w_{k-1}^{-1} - D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k^{-1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right) = 0$$

y recordando que, por (6.20),

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \left( \left[ \left( q_{k-1}, w_{k-1}, r_k, v_k, r_{k+1}, \tilde{\xi}(q_k) \right) \right] \right) = \\ (D_2 \check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, r_k) w_{k-1}^{-1} - D_2 \check{L}_d(q_k, w_k, r_{k+1}) w_k^{-1}) \left( \tilde{\xi}(q_k) \right) \end{aligned}$$

vemos que se satisface la condición (6.21). ■

## 6.5. Reconstrucción de la dinámica original

En la sección anterior presentamos un resultado de reducción que establece que dada una curva  $q. \in Q$  y su imagen  $(v., r.) \in \tilde{G} \times Q/G$  hay una correspondencia entre el hecho de que  $q.$  sea trayectoria del sistema original (es decir, que  $q.$  sea solución para la dinámica original) y que  $(v., r.)$  sea solución para la dinámica reducida. En esta sección estudiamos el problema de la reconstrucción; es decir, dada una curva  $(v., r.) \in \tilde{G} \times Q/G$  que es solución de la dinámica reducida (es decir, satisface los vínculos y las ecuaciones de movimiento), ¿es posible encontrar una trayectoria  $q.$

del sistema original que se proyecte a  $(v., r.)$ ?

Vamos a considerar la siguiente construcción. Dada una curva discreta  $(v., r.) \in \tilde{G} \times Q/G$  y  $q_k \in Q$ , para un  $k$  fijo, tal que  $\pi(q_k) = r_k = p^{Q/G}(v_k)$  si  $v_k = \rho(\tilde{q}_k, \tilde{w}_k)$  definimos

$$u_k := l_{\tau(q_k, \tilde{q}_k)}^G(\tilde{w}_k) \text{ y } q_{k+1} := \tilde{F}_1(q_k, u_k, r_{k+1}). \quad (6.25)$$

Esta construcción es independiente de los representantes de  $v_k$  elegidos ya que si  $v_k = \rho(l_g^{Q \times G}(\tilde{q}_k, \tilde{w}_k))$

$$l_{\tau(q_k, l_g^Q(\tilde{q}_k))}^G(l_g^G(\tilde{w}_k)) = l_{\tau(q_k, \tilde{q}_k)g^{-1}}^G(l_g^G(\tilde{w}_k)) = l_{\tau(q_k, \tilde{q}_k)}^G(\tilde{w}_k).$$

Además, dado  $q_0 \in Q$  tal que  $\pi(q_0) = r_0$ , aplicar la construcción (6.25) en forma iterativa define una única curva discreta  $q. \in Q$ , cuyas propiedades establecemos a continuación.

**Teorema 6.5.1** Sean  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$  y  $(v., r.) \in \tilde{G} \times Q/G$  tal que  $\pi(\bar{q}_0) = r_0$ ,  $\pi(\bar{q}_1) = r_1$  y  $v_0 = \rho(\bar{q}_0, \mathcal{A}_d(\bar{q}_0, \bar{q}_1))$ . Si  $(v., r.)$  satisface  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  y las condiciones (6.17) y (6.21) para todo  $k$ , entonces la curva discreta  $q.$  construida por (6.25) desde  $\bar{q}_0$  es una trayectoria del sistema en  $Q$  cuya imagen por  $\gamma$  es la curva  $(v., r.)$  y satisface  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_1 = \bar{q}_1$ .

**Demostración.** Por construcción de la curva  $q.$  tenemos que  $r_k = \pi(q_k)$  y  $v_k = \rho(q_k, \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}))$  ya que

$$\pi(q_k) = \pi\left(l_{w_{k-1}}\left(\overline{h_d^{q_{k-1}}}(r_k)\right)\right) = \pi\left(\overline{h_d^{q_{k-1}}}(r_k)\right) = r_k.$$

Además, teniendo en cuenta que  $\left(q_k, \overline{h_d^{q_k}}(r_{k+1})\right) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d}$ , tenemos

$$\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{A}_d\left(q_k, l_{u_k}^Q\left(\overline{h}_d^{q_k}(r_{k+1})\right)\right) = u_k \underbrace{\mathcal{A}_d\left(q_k, \overline{h}_d^{q_k}(r_{k+1})\right)}_{=e} = u_k$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \rho(q_k, \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})) &= \rho(q_k, u_k) = \rho\left(q_k, l_{\tau(q_k, \tilde{q}_k)}^G(\tilde{w}_k)\right) \\ &= \rho\left(l_{\tau(q_k, \tilde{q}_k)}^Q(q_k), (\tilde{w}_k)\right) \\ &= \rho\left(l_{\tau(\tilde{q}_k, q_k)}^Q(q_k), (\tilde{w}_k)\right) \\ &= \rho(\tilde{q}_k, \tilde{w}_k) = v_k. \end{aligned}$$

De este modo hemos probado que la imagen de la curva  $q$  por  $\gamma$  es la curva  $(v, r)$ , es decir,  $\gamma(q_k, q_{k+1}) = (v_k, r_{k+1})$  para todo  $k$ . En este sentido decimos que la curva  $q$  es un levantamiento de la curva  $(v, r)$ .

La curva levantada satisface la primer condición inicial porque, por construcción,  $r_0$  se levanta a  $q_0 = \bar{q}_0$ . Como  $v_0 = \rho(\bar{q}_0, \mathcal{A}_d(\bar{q}_0, \bar{q}_1))$ , tenemos que  $u_0 = \mathcal{A}_d(\bar{q}_0, \bar{q}_1) = \mathcal{A}_d(q_0, \bar{q}_1)$  entonces, por (6.25),  $r_1$  es levantado a

$$q_1 = \tilde{F}_1(q_0, u_0, r_1) = l_{u_0}^q\left(\overline{h}_d^{q_0}(r_1)\right) = l_{\mathcal{A}_d(q_0, \bar{q}_1)}\left(\overline{h}_d^{q_0}(r_1)\right).$$

Además, usando (5.7), vemos que  $\bar{q}_1 = l_{\mathcal{A}_d(q_0, \bar{q}_1)}\left(\overline{h}_d^{q_0}(r_1)\right)$  por lo tanto,  $q_1 = \bar{q}_1$ .

Ahora vamos a probar que  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$ . Dado que  $\mathcal{D}_d$  es  $G$ -invariante

$$\begin{aligned} (q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d &\Leftrightarrow \tilde{\pi}(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d/G \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{A}_d}(\tilde{\pi}(q_k, q_{k+1})) \in \Phi_{\mathcal{A}_d}(\mathcal{D}_d/G) \\ &\Leftrightarrow (v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d \end{aligned}$$

y, por hipótesis,  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  para todo  $k$ .

Lo único que queda por hacer es verificar que  $q$  es una trayectoria del sistema mecánico discreto. Por hipótesis,  $(v, r)$  satisface las condiciones (6.17) y (6.21). Luego, por el Corolario 6.4.1 valen las condiciones (6.9) y (6.11). Pero, como la relación que hay entre  $q$ ,  $v$ ,  $r$  y  $w$  es precisamente la establecida en el enunciado del Teorema 6.4.1 y hemos probado que el ítem 4 vale, entonces,  $q$  satisface el ítem 1 del Teorema 6.4.1, así  $q$  es una trayectoria del sistema sobre  $Q$ . ■

**Ejemplo 6.5.1** *El último paso para completar el análisis del sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  introducido en el Ejemplo 6.1.1 es considerar la reconstrucción de la evolución del sistema original dada una trayectoria  $(r, w)$  del sistema reducido correspondiente a alguna condición inicial  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$ .*

*De acuerdo al Teorema 6.5.1 usamos (6.25) para construir la trayectoria  $q$ . Recordemos que  $x_k = \pi(x_k, y_k) = r_k$ ; luego como  $v_k = (r_k, w_k) = \rho((r_k, 0), w_k)$  y  $\tau((x_k, y_k), (r_k, 0)) = y_k$ , tenemos que*

$$u_k = l_{y_k}^G(w_k) = w_k \text{ y}$$

$$q_{k+1} := (x_{k+1}, y_{k+1}) = l_{w_k}^Q \left( \overline{h_d^{(x_k, y_k)}}(r_{k+1}) \right) = (r_{k+1}, y_k + b(r_{k+1}^2 - x_k^2)/2 + w_k)$$

*que es la expresión de  $q$  en términos del dato  $(r, w)$ . Utilizando (6.13) podemos simplificar la expresión anterior y obtener*

$$(x_k, y_k) = (r_k, \bar{y}_0 + (r_k^2 - r_0^2)/2) \text{ para todo } k,$$

*donde  $r_0 = \bar{x}_0$  y  $r_1 = \bar{x}_1$ . Notar que la trayectoria resultante es independiente del parámetro  $b$  de la conexión discreta afín que se utilizó para hacer la reducción.*

# Capítulo 7

## Ecuaciones reducidas en casos particulares

En este capítulo presentamos la reducción estudiada en el capítulo anterior especializada a casos particulares en los que se obtienen resultados interesantes. En primer lugar consideramos el caso en que el espacio de configuraciones está dado por un fibrado trivial, este caso es de interés porque la mayoría de los ejemplos con los que se trabaja están dentro de este tipo de sistemas. En segundo lugar consideramos el caso de un sistema en el que el espacio de configuraciones está dado por el grupo de simetría. Luego, estudiamos sistemas con simetría de tipo Chaplygin, en los que no hay direcciones que satisfacen los vínculos que sean compatibles con la simetría. Por último presentamos el caso particular de sistemas con simetría de tipo horizontal, en los que las direcciones de los vínculos que son compatibles con la simetría están determinadas por el espacio vertical correspondiente a la acción de un subgrupo del grupo de simetría original.

## 7.1. Fibrado trivial

En esta sección consideramos el caso en que  $Q := R \times G$ , para una variedad  $R$  y un grupo de Lie  $G$  que actúa sobre  $Q$  por la acción

$$l_g^Q(r, h) := (r, gh).$$

En este caso,  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es el fibrado trivial principal donde  $\pi$  coincide con  $p_1 : R \times G \rightarrow R$ . El objetivo es describir el sistema reducido y las ecuaciones de movimiento correspondientes.

Consideremos la aplicación  $\alpha : \tilde{G} \rightarrow R \times G$  dada por  $\alpha(\rho((r_0, h_0), w_0)) := (r_0, h_0^{-1}w_0h_0)$ , cuya inversa es  $\beta(r_0, \vartheta_0) := \rho((r_0, e), \vartheta_0)$ . Dado que ambas aplicaciones son diferenciables  $\alpha$  es un difeomorfismo.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Q \times G \times Q/G & \xrightarrow{\tilde{\alpha} \times id} & R \times G \times G \times R \\ \rho \times id \downarrow & & \downarrow \rho^t \times id \\ \tilde{G} \times Q/G & \xrightarrow{\alpha \times id} & R \times G \times R \end{array}$$

donde  $\rho^t(r_0, h_0, \vartheta_0) := (r_0, h_0^{-1}\vartheta_0h_0)$  y  $\tilde{\alpha}((r_0, h_0), \vartheta_0) := (r_0, h_0, \vartheta_0)$ . Notamos que  $\tilde{\alpha}$  tiene como inversa a la aplicación  $\tilde{\beta}(r_0, h_0, \vartheta_0) := ((r_0, h_0), \vartheta_0)$ .

Además, consideramos la sección  $s : \tilde{G} \rightarrow Q \times G$  dada por  $s(\rho((r_0, h_0), \vartheta_0)) := ((r_0, e), h_0^{-1}\vartheta_0h_0)$ .

En este contexto, utilizando (5.5) podemos escribir

$$\mathcal{A}_d((r_0, h_0), (r_1, h_1)) = h_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) h_0^{-1}$$



donde  $\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) := \mathcal{A}_d((r_0, e), (r_1, e))$ .

Usando  $\alpha$  la variedad de vínculos reducida es  $\hat{\mathcal{D}}_d^t := (\alpha \times id)(\hat{\mathcal{D}}_d)$ ; luego la condición de vínculo cinemático reducida es

$$\begin{aligned} (r_0, \vartheta_0, r_1) \in \hat{\mathcal{D}}_d^t &\Leftrightarrow (\beta(r_0, \vartheta_0), r_1) \in \hat{\mathcal{D}}_d \Leftrightarrow (\rho((r_0, e), \vartheta_0), r_1) \in \hat{\mathcal{D}}_d \\ &\Leftrightarrow \left( (r_0, e), \left( r_1, \vartheta_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \right) \right) \in \mathcal{D}_d. \end{aligned}$$

En el caso en que  $\mathcal{D}_d$  esté definida por un conjunto de ecuaciones  $\varphi_b(q_0, q_1) = 0$  para todo  $b$ , la condición de vínculo cinemático reducida se transforma en  $\varphi_b\left((r_0, e), \left(r_1, \vartheta_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1}\right)\right) = 0$  para todo  $b$ .

Además, se tienen los lagrangianos inducidos  $\check{L}_d^t := \check{L}_d \circ (\check{\beta} \times id)$  y  $\hat{L}_d^t := \hat{L}_d \circ (\beta \times id)$ ; es decir,

$$\begin{aligned} \hat{L}_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) &= \left( \hat{L}_d \circ (\beta \times id) \right) (r_0, \vartheta_0, r_1) \\ &= \hat{L}_d(\rho((r_0, e), \vartheta_0), r_1) = \check{L}_d((r_0, e), \vartheta_0, r_1). \end{aligned}$$

En primer lugar caracterizamos las variedades de segundo orden  $\check{Q}_G^{(2)}$  y  $Q_G^{(2)}$  necesarias para establecer las ecuaciones de movimiento según el Corolario 6.4.1. Es claro que

$$\check{Q}_G^{(2)} \simeq R \times G \times G \times R \times G \times R$$

con  $((r_0, h_0), w_0, r_1, \rho((r_1, h_1), w_1), r_2) \mapsto (r_0, h_0, w_0, r_1, h_1^{-1}w_1h_1, r_2)$  y

$$Q_G^{(2)} \simeq R \times G \times R \times G \times R$$

con  $(\rho((r_0, h_0), w_0), r_1, \rho((r_1, h_1), w_1), r_2) \mapsto (r_0, h_0^{-1}w_0h_0, r_1, h_1^{-1}w_1h_1, r_2)$ . Ahora tenemos que caracterizar los fibrados sobre  $Q_G^{(2)}$  sobre los cuales están definidos los morfismos  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\psi}$ . Para esto, notamos que la sección  $s$  establece un difeomorfismo

entre  $Q_G^{(2)} = \tilde{G} \times Q/G \times_{Q/G} \tilde{G} \times Q/G$  y su imagen; es decir,  $Q_G^{(2)}$  puede pensarse como  $R \times \{e\} \times G \times R \times G \times R$ . La ventaja de este punto de vista es que en lugar de tener que trabajar con fibrados cocientes tenemos que hacerlo con la restricción de fibrados sobre  $\check{Q}_G^{(2)}$  a la imagen de  $s$ .

Empezamos obteniendo las versiones trivializadas de las aplicaciones  $\tilde{F}_1$ ,  $F_1$  y  $F_2$ . En primer lugar, vemos que  $\tilde{F}_1^t$  está definida por

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1) &:= \tilde{F}_1((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1) = l_{\vartheta_0}^Q \left( \overline{h_d^{(r_0, h_0)}}(r_1) \right) \\ &= \left( r_1, \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde hemos considerado el elemento  $(r_1, e) \in \pi^{-1}(r_1)$  para realizar el levantamiento horizontal discreto correspondiente. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} F_1^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2) &:= F_1((r_0, h_0), \vartheta_0, \rho((r_1, e), \vartheta_1), r_2) \\ &= \left( r_1, \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \right). \end{aligned}$$

En segundo lugar, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \tau \left( \tilde{F}_1((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1), (r_1, e) \right) &= \tau \left( \left( r_1, \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \right), (r_1, e) \right) \\ &= \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \end{aligned}$$

la expresión para  $F_2^t$  es

$$\begin{aligned} F_2^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2) &:= F_2((r_0, h_0), \vartheta_0, \rho((r_1, e), \vartheta_1), r_2) \\ &= l_{\tau(\tilde{F}_1((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1), (r_1, e))}^G(\vartheta_1) \\ &= \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \vartheta_1 \left( \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \right)^{-1} \\ &= \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1} \vartheta_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) h_0^{-1} \vartheta_0^{-1}. \end{aligned}$$

**Observación 7.1.1** Cuando el grupo de simetría es abeliano los cálculos resultan más sencillos. Aun cuando  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es no trivial, existe un difeomorfismo  $\alpha : \tilde{G} \rightarrow Q/G \times G$  dado por  $\alpha(\rho(q, w)) = (\pi(q), w)$  y cuya inversa es  $\beta(r, g) := \rho(h^g(r), g)$  donde  $q \in \pi^{-1}(r)$ . Si además,  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es trivial este difeomorfismo coincide con el considerado al principio de esta sección.

### 7.1.1. Ecuaciones horizontales

Ahora describiremos el morfismo  $\bar{\phi} : Q_G^{(2)} \times p_2^*(TR) \rightarrow \mathbb{R}$  para el contexto que estamos estudiando en esta sección; es decir, describiremos este morfismo mediante la identificación de  $Q_G^{(2)}$  con la imagen de la sección  $s$  en  $\check{Q}_G^{(2)}$ . Sea  $\check{\phi}^t$  el pull-back de  $\bar{\phi}$  a  $R \times G \times G \times R \times G \times R$ . Explícitamente,

$$\begin{aligned} \check{\phi}^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \delta r_1) &:= \check{\phi}((r_0, h_0), \vartheta_0, \rho((r_1, e), \vartheta_1), r_2, \delta r_1) \\ &= (D_1 \check{L}_d((r_1, h_1), w_1, r_2) \circ h^{(r_1, h_1)} + D_3 \check{L}_d((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1) \\ &\quad + \left( \hat{F}_d^- \right)^t(r_1, \vartheta_1, r_2) + \left( \hat{F}_d^+ \right)^t(r_0, \vartheta_0, r_1)) (\delta r_1) \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde  $h_1 := \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1}$ ,  $w_1 := F_2^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2)$  y

$$\left( \hat{F}_d^\pm \right)^t(r_1, \vartheta_1, r_2) := \hat{F}_d^\pm(\rho((r_1, e), \vartheta_1), r_2).$$

De la Definición 6.3.1 se tiene que  $\hat{F}_d^t : p_1^*(TR) \oplus p_3^*(TR) \rightarrow \mathbb{R}$  es un morfismo de fibrados. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \hat{F}_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) (\delta r_0, \delta r_1) &:= \\ D_2 \check{L}_d((r_0, e), \vartheta_0, r_1) d\mathcal{A}_d((r_0, e), (r_1, h_1)) & (h^{(r_0, e)}(\delta r_0), h^{(r_1, h_1)}(\delta r_1)) \end{aligned}$$

donde  $h_1$  es como mencionamos anteriormente. Más aún, recordando que  $\mathcal{A}_d((r_0, h_0), (r_1, h_1)) = h_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) h_0^{-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_d((r_0, h_0), (r_1, h_1))(\delta r_0, \delta h_0, \delta r_1, \delta h_1) &:= h_1 D_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1)(\delta r_0) h_0^{-1} \\ &- h_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) h_0^{-1}(\delta h_0) h_0^{-1} + h_1 D_2 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1)(\delta r_1) h_0^{-1} + \delta h_1 \mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) h_0^{-1} \end{aligned}$$

y notamos que  $d\mathcal{A}_d$  se escribe en términos de  $\mathcal{A}_d^t$ .

Además, podemos escribir explícitamente el levantamiento horizontal. Para esto consideramos el fibrado vectorial  $\mathcal{W} \oplus \mathcal{H} \subset TQ$  como el gráfico de una aplicación de fibrados  $M : p_1^*(TR) \rightarrow p_2^*(TG)$  sobre  $Q = R \times G$ . Por lo tanto,

$$h^{(r,h)}(\delta r) := (\delta r, M(r, h)(\delta r)) \in T_{(r,h)}Q.$$

Finalmente, reemplazando lo obtenido en (7.2) tenemos la versión trivializada de  $\bar{\phi}$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^t(r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \delta r_1) &:= \check{\phi}^t(r_0, e, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \delta r_1) \\ &= \left( D_1 \hat{L}_d^t(r_1, \vartheta_1, r_2) + D_3 \hat{L}_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) \right. \\ &\quad \left. + D_2 \hat{L}_d^t(r_1, \vartheta_1, r_2) \circ (\vartheta_1 M(r_1, e) - M(r_1, e) \vartheta_1) \right. \\ &\quad \left. + \left( \hat{F}_d^- \right)^t(r_1, \vartheta_1, r_2) + \left( \hat{F}_d^+ \right)^t(r_0, \vartheta_0, r_1) \right) (\delta r_1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Por otro lado, tenemos que la representación de  $p_2^*(\hat{\mathcal{D}})$  sobre  $R \times G \times R \times G \times R$  es el fibrado vectorial  $\hat{\mathcal{D}}^t := p_3^*(\hat{\mathcal{D}})$ .

Por último, la condición (6.17) se convierte en

$$\bar{\phi}^t(r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \delta r_1) = 0 \tag{7.4}$$

para toda variación  $\delta r_1$  tal que  $h^{(r_1, e)}(\delta r_1) \in \mathcal{D}_{(r_1, e)}$ .

Alternativamente, si  $\langle \omega_1, \dots, \omega_K \rangle = \mathcal{D}^\circ$ , la condición (7.4) es

$$\bar{\phi}^t(r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \delta r_1) = \sum_{b=1}^K \lambda_b \omega_b(r_1, e)(\delta r_1, M(r_1, e)(\delta r_1))$$

para toda variación  $\delta r_1 \in T_{r_1}R$  y donde  $\lambda_b \in \mathbb{R}$  son escalares desconocidos.

### 7.1.2. Ecuaciones verticales

Ahora describiremos el morfismo  $\bar{\psi} : (Q_G^{(2)} \times \mathfrak{g})/G \rightarrow \mathbb{R}$  para el contexto que estamos estudiando en esta sección; es decir, describiremos este morfismo mediante la identificación de  $Q_G^{(2)}$  con la imagen de la sección  $s$  en  $\check{Q}_G^{(2)}$ . Sea  $\check{\psi}^t$  el pull-back de  $\bar{\psi}$  a  $R \times G \times G \times R \times G \times R$ . Explícitamente,

$$\begin{aligned} \check{\psi}^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) &:= \check{\psi}((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1, \rho((r_1, e), \vartheta_1), r_2, \xi_1) \\ &= (D_2 \check{L}_d((r_0, h_0), \vartheta_0, r_1) w_0^{-1} - D_2 \check{L}_d((r_1, h_1), w_1, r_2) w_1^{-1})(\xi_1) \end{aligned}$$

donde  $h_1 := \vartheta_0 h_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1}$  y  $w_1 := F_2^t(r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2)$ .

Como la versión trivializada de  $\bar{\psi}$  es  $\bar{\psi}^t := \check{\psi}^t \Big|_{R \times \{e\} \times G \times R \times G \times R}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^t(r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) &:= \check{\psi}^t(r_0, e, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) \\ &= (D_2 \check{L}_d((r_0, e), \vartheta_0, r_1) w_0^{-1} - D_2 \check{L}_d((r_1, h_1), w_1, r_2) w_1^{-1})(\xi_1) \quad (7.5) \\ &= \left( D_2 \hat{L}_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) w_0^{-1} - h_1 D_2 \hat{L}_d^t(r_1, \vartheta_1, r_2) \vartheta_1^{-1} h_1^{-1} \right) (\xi_1) \end{aligned}$$

donde  $h_1 := \vartheta_0 (\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1))^{-1}$  y  $w_1 := F_2^t(r_0, e, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2)$ .

Otro ingrediente que tenemos que considerar es el pull-back  $F_1^*(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ ; es decir

$(F_1^t)^* (\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})$ ,

$$\begin{aligned} (F_1^t)^* (\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}) &= \left\{ (r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) \in \check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g} : ((r_1, h_1), (0, \xi_1 h_1)) \in \mathcal{D}_{(r_1, h_1)} \right\} \\ &= \left\{ (r_0, h_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) \in \check{Q}_G^{(2)} \times \mathfrak{g} : ((r_1, e), (0, h_1^{-1} \xi_1 h_1)) \in \mathcal{D}_{(r_1, e)} \right\} \end{aligned}$$

donde  $h_1$  es como mencionamos anteriormente. Por lo tanto, la condición (6.21) se convierte en

$$\bar{\psi}^t (r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) = 0 \quad (7.6)$$

para todo  $\xi_1 \in \mathfrak{g}$  tal que  $(0, h_1^{-1} \xi_1 h_1) \in \mathfrak{g}_{(r_1, e)}^{\mathcal{D}}$ .

Alternativamente, si  $\langle \omega_1, \dots, \omega_K \rangle = \mathcal{D}^\circ$ , la condición (7.6) es

$$\bar{\psi}^t (r_0, \vartheta_0, r_1, \vartheta_1, r_2, \xi_1) = \sum_{b=1}^K \lambda_b \omega_b (r_1, e) (0, h_1^{-1} \xi_1 h_1) \quad (7.7)$$

para todo  $\xi_1 \in \mathfrak{g}$  donde  $h_1$  es como se definió anteriormente y  $\lambda_b \in \mathbb{R}$  son escalares desconocidos.

### 7.1.3. Reconstrucción

Dadas condiciones iniciales sobre  $Q \times Q$ , el proceso de reconstrucción en el contexto de fibrado trivial es como sigue. Sean  $\bar{q}_0 = (\bar{r}_0, \bar{h}_0)$  y  $\bar{q}_1 = (\bar{r}_1, \bar{h}_1)$  con  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$ , y una curva discreta  $(r, \vartheta) \in R \times G$ . Sea  $(r, \vartheta)$  que satisface el vínculo  $\hat{\mathcal{D}}_d^t$ , las ecuaciones (7.4) y (7.6),  $r_0 = \bar{r}_0$ ,  $r_1 = \bar{r}_1$  y consideramos la condición inicial  $\vartheta_0 = \bar{h}_0^{-1} \bar{h}_1 \mathcal{A}_d^t (\bar{r}_0, \bar{r}_1)$  definida por la segunda componente de

$$\begin{aligned} \rho (\bar{q}_0, \mathcal{A}_d (\bar{q}_0, \bar{q}_1)) &= \rho^t (r_0, \bar{h}_0, \mathcal{A}_d (\bar{q}_0, \bar{q}_1)) = (r_0, \bar{h}_0^{-1} \mathcal{A}_d (\bar{q}_0, \bar{q}_1) \bar{h}_0) \\ &= (r_0, \bar{h}_0^{-1} \bar{h}_1 \mathcal{A}_d^t (\bar{r}_0, \bar{r}_1) \bar{h}_0^{-1} \bar{h}_0) = (r_0, \bar{h}_0^{-1} \bar{h}_1 \mathcal{A}_d^t (\bar{r}_0, \bar{r}_1)). \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 6.5.1, la curva  $q$  levantada desde  $\bar{q}_0$  usando (6.25) es una trayectoria del sistema mecánico discreto original sobre  $Q \times Q$  con  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_1 = \bar{q}_1$ . Si  $q_k = (r_k, h_k)$  usamos la fórmula de reconstrucción (6.25) y, recordando la expresión (7.1), obtenemos que

$$q_{k+1} = \tilde{F}_1^t(r_k, h_k, u_k, r_{k+1}) = \left( r_{k+1}, u_k h_k \left( \mathcal{A}_d^t(r_k, r_{k+1}) \right)^{-1} \right)$$

donde  $u_k = l_{\tau((r_k, h_k), (r_k, e))}^G(\vartheta_k) = l_{h_k}^G(\vartheta_k) = h_k \vartheta_k h_k^{-1}$ . Es decir,

$$q_{k+1} = \left( r_{k+1}, h_k \vartheta_k \left( \mathcal{A}_d^t(r_k, r_{k+1}) \right)^{-1} \right) \quad (7.8)$$

para todo  $k$ .

#### 7.1.4. Un ejemplo

En esta sección presentamos un ejemplo de reducción en el caso en que el espacio de configuraciones es un fibrado trivial.

El sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  que estudiamos es tal que  $Q := \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  con coordenadas  $(x, y, \theta, \phi)$ , donde consideramos que  $S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  e identificamos las operaciones en  $S^1$  con la adición en  $\mathbb{R}$ .

El lagrangiano discreto es

$$L_d(q_0, q_1) := \frac{m}{2} \left[ (q_1^x - q_0^x)^2 + (q_1^y - q_0^y)^2 \right] + \frac{I}{2} (q_1^\theta - q_0^\theta)^2 + \frac{J}{2} (q_1^\phi - q_0^\phi)^2$$

donde  $m$ ,  $I$  y  $J$  son constantes positivas. La distribución de vínculos variacionales está dada por

$$\mathcal{D}_q = \langle \partial_\phi, \partial_\theta + A \cos(q^\phi) \partial_x + A \sin(q^\phi) \partial_y \rangle = \langle \omega_1(q), \omega_2(q) \rangle^\circ \subset T_q Q$$

donde  $\omega_1(q) := dx - A \cos(q^\phi) d\theta$  y  $\omega_2(q) := dy - A \sin(q^\phi) d\theta$ , siendo  $A$  una constante positiva. Los vínculos discretos cinemáticos están dados por

$$\mathcal{D}_d(q_0) = \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : q_1^x - q_0^x = A(q_1^\theta - q_0^\theta) \cos\left(\frac{(q_0^\phi + q_1^\phi)}{2}\right) \text{ y} \\ q_1^y - q_0^y = A(q_1^\theta - q_0^\theta) \sin\left(\frac{(q_0^\phi + q_1^\phi)}{2}\right)\}.$$

Este sistema puede ser obtenido mediante la discretización de un sistema mecánico clásico dado por un disco vertical de radio  $A$ , masa  $m$ , con momentos de inercia  $I$  y  $J$ , que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. La reducción continua del disco vertical ha sido estudiada por Bloch, Krishnaprasad, Marsden y Murray en [4].

Consideramos el grupo de Lie  $G := \mathbb{R}^2 \times S^1$  actuando sobre  $Q$  por la acción

$$l_g^Q(q) := (q^x + g^x, q^y + g^y, q^\theta + g^\theta, q^\phi).$$

Su acción levantada correspondiente es  $l_g^{TQ}(q, v) := (l_g^Q(q), v)$ .

Este es un ejemplo en el que  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es el fibrado trivial  $p_2 : G \times S^1 \rightarrow S^1$  con grupo de estructura  $G$ , que es el grupo de simetría que estamos analizando.

Consideramos los subfibrados de  $TQ$ : el fibrado vertical  $\mathcal{V}_q^G = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_\theta \rangle$ , el fibrado intersección  $\mathcal{S}_q := \mathcal{D}_q \cap \mathcal{V}_q^G = \langle \partial_\theta + A \cos(q^\phi) \partial_x + A \sin(q^\phi) \partial_y \rangle$  y sus correspondientes complementos ortogonales  $\mathcal{H}_q := \langle \partial_\phi \rangle$ ,  $\mathcal{U}_q := \langle \partial_x, \partial_y \rangle$  y  $\mathcal{W}_q := \{0\}$ . De acuerdo a la definición 3.2.2 los fibrados anteriores inducen una conexión no holónoma  $\mathcal{A}$  cuyo espacio horizontal es  $\text{Hor}_{\mathcal{A}} := \mathcal{H}$ . El levantamiento horizontal correspondiente es  $h^q : T_r(Q/G) \rightarrow \mathcal{H}_q \subset T_q Q$ , dado por  $h^q(\dot{r}\partial_r) = \dot{r}\partial_\phi$  donde  $q \in \pi^{-1}(r)$ . Notamos que, en este caso, la aplicación  $M$  que describe el fibrado horizontal como un gráfico es idénticamente 0.

Para definir una conexión discreta afín en el fibrado trivial, consideramos la



aplicación suave  $\gamma : Q \rightarrow G$ ,  $\gamma(q) = e = (0, 0, 0)$ , y el espacio  $\Gamma$  resulta ser  $\Gamma = \{(q, l_{\gamma(q)}(q)) : q \in Q\} = \Delta(Q \times Q)$ .

Consideremos la subvariedad  $G$ -invariante  $\text{Hor} \subset Q \times Q$  dada por

$$\text{Hor} = \left\{ (q_0, q_1) \in Q \times Q : q_1^x = q_0^x, q_1^y = q_0^y \text{ y } q_1^\phi = q_0^\phi \right\}$$

y notamos que  $\Gamma \subset \text{Hor}$ . Para cada  $q = (q^g, q^r) \in Q$ ,  $\text{Hor}(q) := \text{Hor} \cap (\{q\} \times Q)$  y  $\text{Hor}^2(q^g, q^r) = \{(q^g, q^{r_1}) : q^{r_1} \in Q/G\}$  entonces  $\dim(\text{Hor}^2(q^g, q^r)) = \dim Q - \dim G$  y tenemos que  $T_{q_1}Q = T_{q_1} \left( \mathcal{V}_{(q_0^g, q_0^r)}^G \right) \oplus T_{q_1}(\text{Hor}^2(q_0^g, q_0^r))$ . Finalmente,  $\text{Hor}$  define una conexión discreta afín; más aún, dado que  $\Gamma = \Delta(Q \times Q)$ ,  $\text{Hor}$  define una conexión discreta.

La 1-forma de conexión discreta asociada a esta conexión está dada por  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = (q_1^x - q_0^x, q_1^y - q_0^y, q_1^\theta - q_0^\theta) \in G$ , lo que implica que  $\mathcal{A}_d^t(r_0, r_1) = e$  para todo  $r_0, r_1 \in S^1$ . El levantamiento horizontal discreto asociado a esta conexión discreta es  $h_d^{q_0}(r_1) = (q_0, (q_0^g, r_1)) = (q_0, (q_0^x, q_0^y, q_0^\theta, r_1))$ .

El espacio reducido es  $\tilde{G} \times Q/G \simeq S^1 \times G \times S^1$  y la variedad de segundo orden reducida es  $Q_G^{(2)} \simeq S^1 \times G \times S^1 \times G \times S^1$ . El lagrangiano reducido trivializado es

$$L_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) = \frac{m}{2} \left( (\vartheta_0^x)^2 + (\vartheta_0^y)^2 \right) + \frac{I}{2} (\vartheta_0^\theta)^2 + \frac{J}{2} (r_1 - r_0)^2.$$

Antes de describir las ecuaciones horizontal y vertical del sistema reducido, notamos que como la expresión de  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1)$  sólo depende de las componentes de  $q_0$  y  $q_1$  en el grupo, entonces  $d\mathcal{A}_d$  se anula sobre los vectores horizontales, lo que implica que la curvatura mixta se anula. Por lo tanto, no hay fuerzas discretas reducidas en este sistema.

De (7.3) se obtiene que

$$\bar{\phi}^t(r_{k-1}, \vartheta_{k-1}, r_k, \vartheta_k, r_{k+1}, \delta r_k) = (J((r_k - r_{k-1}) - (r_{k+1} - r_k)) dr|_{r_k})(\delta r_k)$$

y, como  $\mathcal{W}_q = \{0\}$  entonces  $\hat{\mathcal{D}}^t = TS^1$ , lo que implica que la ecuación horizontal es

$$(r_k - r_{k-1}) - (r_{k+1} - r_k) = 0. \quad (7.9)$$

De (7.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^t(r_{k-1}, \vartheta_{k-1}, r_k, \vartheta_k, r_{k+1}, \xi_k) = & (m(\vartheta_{k-1}^x - \vartheta_k^x) dx|_{e^x} + m(\vartheta_{k-1}^y - \vartheta_k^y) dy|_{e^y} \\ & m(\vartheta_{k-1}^\theta - \vartheta_k^\theta) d\theta|_{e^\theta})(\xi_k) \end{aligned}$$

donde  $e = (e^x, e^y, e^\theta)$  es el elemento neutro de  $G$ . Como el miembro derecho de (7.7) es  $\lambda_1(dx|_{e^x} - A \cos(r_k) d\theta|_{e^\theta}) + \lambda_2(dy|_{e^y} - A \sin(r_k) d\theta|_{e^\theta})$ , obtenemos las siguientes ecuaciones verticales

$$\begin{cases} m(\vartheta_{k-1}^x - \vartheta_k^x) = \lambda_1 \\ m(\vartheta_{k-1}^y - \vartheta_k^y) = \lambda_2 \\ m(\vartheta_{k-1}^\theta - \vartheta_k^\theta) = -\lambda_1 A \cos(r_k) - \lambda_2 A \sin(r_k) \end{cases}$$

Además, los vínculos cinemáticos reducidos están dados por

$$\begin{cases} \vartheta_k^x = A\vartheta_k^\theta \cos((r_k + r_{k+1})/2) \\ \vartheta_k^y = A\vartheta_k^\theta \sin((r_k + r_{k+1})/2) \end{cases}$$

Podemos obtener la dinámica reducida resolviendo las ecuaciones obtenidas. De

la ecuación horizontal (7.9) tenemos que

$$r_k = (r_1 - r_0) k + r_0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (7.10)$$

De las ecuaciones verticales obtenemos

$$I (\vartheta_{k-1}^\theta - \vartheta_k^\theta) = -m (\vartheta_{k-1}^x - \vartheta_k^x) A \cos(r_k) - m (\vartheta_{k-1}^y - \vartheta_k^y) A \sin(r_k).$$

Reemplazamos los vínculos cinemáticos reducidos en esta expresión y tenemos que

$$\vartheta_k^\theta = \frac{I + mA^2 \cos((r_k - r_{k-1})/2)}{I + mA^2 \cos((r_{k+1} - r_k)/2)} \vartheta_{k-1}^\theta.$$

Usando la ecuación (7.9) concluimos que  $\vartheta_k^\theta = \vartheta_0^\theta$  para todo  $k$ . Así,

$$\begin{aligned} \vartheta_k^x &= A \vartheta_0^\theta \cos\left((r_1 - r_0) k + \frac{r_0 + r_1}{2}\right) \\ \vartheta_k^y &= A \vartheta_0^\theta \sin\left((r_1 - r_0) k + \frac{r_0 + r_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Esta última expresión completa la descripción de la dinámica reducida.

Por último la reconstrucción de las trayectorias del sistema original en  $Q \times Q$  se hace como en la Sección 7.1.3. Por (7.8), la trayectoria reconstruida  $q$  es

$$q_{k+1} = \left( (q_{k+1}^x, q_{k+1}^y, q_{k+1}^\theta), q_{k+1}^\phi \right) = (\vartheta_k (q_k^x, q_k^y, q_k^\theta), r_{k+1}). \quad (7.11)$$

Entonces, tenemos que  $(q_{k+1}^x, q_{k+1}^y, q_{k+1}^\theta) = (q_0^x, q_0^y, q_0^\theta) \prod_{j=0}^k \vartheta_j$  o, en forma equivalente,

$$q_{k+1}^x = q_0^x + A (q_1^\theta - q_0^\theta) \cos\left(\left(q_1^\phi - q_0^\phi\right) / 2\right) \frac{\sin\left(\left(q_1^\phi - q_0^\phi\right) k + q_0^\phi\right) - \sin\left(q_0^\phi\right)}{\sin\left(q_1^\phi - q_0^\phi\right)}$$

$$q_{k+1}^y = q_0^y + A (q_1^\theta - q_0^\theta) \cos \left( \left( q_1^\phi - q_0^\phi \right) / 2 \right) \frac{\cos \left( q_0^\phi \right) - \cos \left( \left( q_1^\phi - q_0^\phi \right) k + q_0^\phi \right)}{\operatorname{sen} \left( q_1^\phi - q_0^\phi \right)}$$

$$q_{k+1}^\theta = (q_1^\theta - q_0^\theta) k + q_0^\theta.$$

Además, por (7.10) y (7.11), se tiene que

$$q_{k+1}^\phi = \left( q_1^\phi - q_0^\phi \right) (k + 1) + q_0^\phi.$$

## 7.2. Grupo de simetría como espacio de configuración

En esta sección analizamos el caso especial de reducción analizado por McLachlan y Perlmutter en [23]. Ellos consideran un sistema mecánico discreto con vínculos no holónomos definido sobre un grupo de Lie  $G$ , cuya multiplicación a izquierda es la acción que da la simetría del sistema. Sus resultados (Teorema 3 y Corolario 4) establecen que las trayectorias del sistema original se corresponden con las de un sistema dinámico definido sobre  $G$ . En la proposición que sigue se recuperan estos resultados como caso particular del Teorema 6.4.1.

**Proposición 7.2.1** *Sea  $G$  un grupo de Lie. Considerar el sistema  $(G, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  tal que la acción de multiplicación a izquierda de  $G$  da la simetría del sistema. Luego, existe una correspondencia entre las trayectorias  $q$ . de este sistema y las trayectorias  $u$ . del sistema dinámico sobre  $G$  definido por*

$$\begin{cases} -dl_d(u_k) u_k^{-1} + u_{k-1}^{-1} dl_d(u_{k-1}) = \sum_b \lambda_b \mu_b \\ u_k \in \mathcal{D}_d^e \end{cases}$$

para todo  $k$ , donde  $l_d(u) := L_d(e, u)$ ,  $\mathcal{D}_d^e := \{q \in G : (e, q) \in \mathcal{D}_d\}$  y  $\langle \mu_1, \dots, \mu_k \rangle^\circ = \mathcal{D}_e \subset \mathfrak{g}$ . La relación entre las trayectorias es la siguiente. Dada una trayectoria  $q$ , definimos  $u_k := q_k^{-1} q_{k+1}$  y, recíprocamente, dada una trayectoria  $u$ , definimos  $q$  en forma recursiva como  $q_{k+1} := q_k u_k$  para todo  $k$ .

**Demostración.** La demostración consiste en reformular los Teoremas 6.4.1 y 6.5.1 en el contexto actual.

Por conveniencia denotamos al espacio de configuración por  $Q$ , es decir,  $Q = G$  y denotaremos la acción  $l_g^Q = l_g$ . Para definir una conexión discreta afín sobre  $Q \rightarrow Q/G$  comenzamos notando que por (5.5) tenemos  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = q_1 \mathcal{A}_d(e, e) q_0^{-1}$ . Así, vemos que tomando  $\mathcal{A}_d(e, e) = e$  entonces  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = q_1 q_0^{-1}$  define una (única) conexión discreta sobre el fibrado.

El Teorema 6.4.1 le asigna al sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  un sistema dinámico sobre  $\tilde{G} \times Q/G$ . En este contexto,  $Q/G = \{\pi(e)\}$  y  $\tilde{G} \simeq G$  como fibrados sobre un punto donde el isomorfismo  $\aleph : \tilde{G} \rightarrow G$  está dado por

$$\aleph(\rho(q_0, w_0)) := u_0 := l_{q_0^{-1}}^G(w_0) = q_0^{-1} w_0 q_0.$$

Así, considerando  $\aleph_2 = \aleph \circ p_1$  tenemos que  $\tilde{G} \times Q/G \simeq G$ . De modo que copiando la estructura de  $\tilde{G} \times Q/G$  a  $G$  usando  $\aleph_2$  se obtiene un sistema dinámico sobre  $G$  cuyas trayectorias están dadas por  $u_k := \aleph_2(\rho(q_k, w_k), \pi(e)) = q_k^{-1} w_k q_k$ .

Ahora traducimos las condiciones que imponen los vínculos dinámicos reducidos  $\hat{\mathcal{D}}_d$  en términos de las trayectorias  $u$ . Recordando que la variable en  $Q/G$  es  $\pi(e)$ , los vínculos establecen que

$$(\rho(q_0, w_0), \pi(e)) = (\rho(e, q_0^{-1} w_0 q_0), \pi(e)) \in \hat{\mathcal{D}}_d \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \left( e, l_{q_0^{-1}w_0q_0}^Q \left( \overline{h}_d^e(\pi(e)) \right) \right) &= \left( e, l_{q_0^{-1}w_0q_0}^Q(e) \right) = (e, q_0^{-1}w_0q_0) \in \mathcal{D}_d \Leftrightarrow \\ &(e, q_0^{-1}w_0q_0) \in \mathcal{D}_d^e \Leftrightarrow u_0 = \aleph_2(\rho(q_0, w_0), \pi(e)) \in \mathcal{D}_d^e. \end{aligned}$$

A continuación relacionamos las ecuaciones de movimiento del sistema sobre  $\tilde{G} \times Q/G$  con ecuaciones sobre  $G$ . En este caso, como  $\mathcal{V}_{q_0}^G = T_{q_0}Q$ , es decir, el espacio vertical no tiene ningún complemento en el espacio tangente, entonces  $\mathcal{S}_{q_0} = \mathcal{V}_{q_0}^G \cap \mathcal{D}_{q_0} = \mathcal{D}_{q_0}$ . Aplicando la descomposición (3.2) tenemos que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} = \{0\}$ . Por lo tanto las condiciones (6.9) resultan triviales y, de este modo, la dinámica en  $G$  está controlada por las condiciones verticales (6.11).

Veamos cómo se reformulan las condiciones verticales en este contexto. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} \check{L}_d(q_0, w_0, \pi(e)) &= L_d\left(q_0, l_{w_0}\left(\overline{h}_d^{q_0}(\pi(e))\right)\right) \\ &= L_d(q_0, l_{w_0}(q_0)) = L_d\left(e, l_{q_0^{-1}}(l_{w_0}(q_0))\right) \\ &= L_d(e, q_0^{-1}w_0q_0) = l_d(q_0^{-1}w_0q_0) = l_d(u_0). \end{aligned}$$

Además, para  $\xi_k \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} &(D_2\check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, \pi(e)) w_{k-1}^{-1} - D_2\check{L}_d(q_k, w_k, \pi(e)) w_k^{-1})(\xi_k) \\ &= D_2\check{L}_d(q_{k-1}, w_{k-1}, \pi(e))(\xi_k w_{k-1}) - D_2\check{L}_d(q_k, w_k, \pi(e))(\xi_k w_k) \\ &= dl_d(q_{k-1}^{-1}w_{k-1}q_{k-1}) dl_{q_{k-1}^{-1}}^G(w_{k-1})(\xi_k w_{k-1}) - dl_d(q_k^{-1}w_kq_k) dl_{q_k^{-1}}^G(w_k)(\xi_k w_k) \\ &= dl_d(q_{k-1}^{-1}w_{k-1}q_{k-1})(q_{k-1}^{-1}\xi_k w_{k-1}q_{k-1}) - dl_d(q_k^{-1}w_kq_k)(q_k^{-1}\xi_k w_kq_k) \\ &= (q_{k-1}dl_d(q_{k-1}^{-1}w_{k-1}q_{k-1})q_{k-1}^{-1}w_{k-1}^{-1})(\xi_k) - (q_kdl_d(q_k^{-1}w_kq_k)q_k^{-1}w_k^{-1})(\xi_k) \\ &= (q_kq_{k-1}^{-1}w_{k-1}^{-1}q_{k-1}dl_d(q_{k-1}^{-1}w_{k-1}q_{k-1})q_k^{-1})(\xi_k) \\ &\quad - (q_kdl_d(q_k^{-1}w_kq_k)q_k^{-1}w_k^{-1}q_kq_k^{-1})(\xi_k). \end{aligned}$$

La condición (6.11) establece que  $\psi(\xi_k) = 0$  para todo  $\xi_k \in \mathfrak{g}_{q_k}^{\mathcal{D}}$ . Por lo tanto, el sistema reducido satisface

$$0 = (q_k q_{k-1}^{-1} w_{k-1}^{-1} q_{k-1} dl_d (q_{k-1}^{-1} w_{k-1} q_{k-1}) q_k^{-1}) (\xi_k) \\ - (q_k dl_d (q_k^{-1} w_k q_k) q_k^{-1} w_k^{-1} q_k q_k^{-1}) (\xi_k)$$

o, en forma equivalente,

$$(q_{k-1}^{-1} w_{k-1}^{-1} q_{k-1} dl_d (q_{k-1}^{-1} w_{k-1} q_{k-1})) - (dl_d (q_k^{-1} w_k q_k) q_k^{-1} w_k^{-1} q_k) (q_k^{-1} \xi_k q_k) = 0.$$

Luego, teniendo en cuenta la  $G$ -equivariancia de  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$

$$(q_{k-1}^{-1} w_{k-1}^{-1} q_{k-1} dl_d (q_{k-1}^{-1} w_{k-1} q_{k-1})) - (dl_d (q_k^{-1} w_k q_k) q_k^{-1} w_k^{-1} q_k) (\zeta_k) = 0$$

para todo  $\zeta_k \in \mathfrak{g}_e^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_e$ . Luego, recordando que  $u_k = q_k^{-1} w_k q_k$  esta última expresión es equivalente a

$$-dl_d(u_k) u_k^{-1} + u_{k-1}^{-1} dl_d(u_{k-1}) = \sum_b \lambda_b \mu_b$$

donde  $\langle \mu_1, \dots, \mu_k \rangle^\circ = \mathcal{D}_e$ .

La correspondencia entre las trayectorias  $q$ . y  $u$ . se sigue de lo que acabamos de mostrar y del Teorema 6.5.1. ■

### 7.3. Simetría de tipo Chaplygin

En esta sección consideramos el caso en el que el sistema original es un sistema mecánico discreto con simetría de tipo Chaplygin y especializamos los Teoremas 6.4.1 y 6.5.1 a este caso particular. En este caso vamos más allá del resultado de equivalencia entre el sistema mecánico discreto en  $Q$  y un sistema dinámico en

$\tilde{G} \times Q/G$  para obtener una equivalencia entre sistemas mecánicos discretos en  $Q$  y en  $Q/G$ .

La reducción de sistemas mecánicos discretos con simetría de tipo Chaplygin ya ha sido estudiada por Cortés y Martínez en [12] y en esta sección vemos que con nuestro enfoque puede recuperarse el resultado que obtienen ellos (Teorema 5.5 en [12]).

**Definición 7.3.1** *Un grupo de simetría  $G$  de un sistema mecánico discreto no holónomo  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  es un grupo de simetría de tipo Chaplygin si satisface las siguientes condiciones.*

1.  $TQ = \mathcal{V}^G \oplus \mathcal{D}$  y
2.  $\mathcal{D}_d$  define una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  sobre el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ .

Notamos que la condición  $TQ = \mathcal{V}^G \oplus \mathcal{D}$  es equivalente a que la descomposición (3.2) es de la forma

$$TQ = \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{W}} \oplus \underbrace{\mathcal{D}}_{=\mathcal{H}} \oplus \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{S}} \oplus \underbrace{\mathcal{V}^G}_{=\mathcal{U}}. \quad (7.12)$$

Del mismo modo que en el caso general, esta descomposición define una conexión  $\mathcal{A}$  sobre  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , cuyo espacio horizontal es  $\mathcal{H} = \mathcal{D}$ . Notamos, también, que la condición 2 de la Definición 7.3.1 requiere que, para cada  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  exista un único  $g \in G$  tal que  $(q_0, l_{g^{-1}}^Q(q_1)) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d} = \mathcal{D}_d$ .

**Ejemplo 7.3.1** *El grupo  $G := \mathbb{R}$  es una simetría de tipo Chaplygin del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  definido en el Ejemplo 6.1.1. La primera condición vale por la descomposición de  $TQ$  que aparece en el Ejemplo 6.2.1 y la segunda corresponde a tomar la conexión discreta  $\mathcal{A}_d^b$  considerada en el Ejemplo 5.2.1 con  $b = 1$ .*



### 7.3.1. Una inclusión

Consideremos la aplicación  $\mathcal{Y} : Q/G \times Q/G \rightarrow \tilde{G} \times Q/G$  definida por

$$\mathcal{Y}(r_0, r_1) := (\rho(q_0, e), r_1)$$

donde  $q_0 \in \pi^{-1}(r_0)$ .

**Lema 7.3.1** *La aplicación  $\mathcal{Y}$  está bien definida. Más aún, si  $s$  es una sección local de  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , entonces  $\mathcal{Y}(r_0, r_1) = (\rho(s(r_0), e), r_1)$ .*

**Demostración.** Como  $\rho$  es  $G$ -invariante,  $\mathcal{Y}$  no depende de la elección de  $q_0 \in \pi^{-1}(r_0)$  por lo tanto  $\mathcal{Y}$  está bien definida.

Dada una sección local  $s$  de  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ , podemos tomar  $q_0 = s(r_0) \in \pi^{-1}(r_0)$  y se obtiene la fórmula explícita que aparece en el enunciado.

En particular, esta fórmula también muestra que  $\mathcal{Y}$  es una aplicación suave. ■

Usando  $\mathcal{Y}$  llevaremos la estructura que ya conocemos en  $\tilde{G} \times Q/G$  a  $Q/G \times Q/G$ . Más precisamente, definimos el sistema mecánico discreto (forzado y sin vínculos)  $(Q/G, \check{L}_d, \check{F}_d)$  donde  $\check{L}_d := \mathcal{Y}^*(\hat{L}_d) = \hat{L}_d \circ \mathcal{Y}$  y la fuerza discreta  $\check{F}_d := \mathcal{Y}^*(\hat{F}_d) = \hat{F}_d \circ \mathcal{Y}$ . También definimos  $\check{D} := \hat{D}$  como un subfibrado de  $T(Q/G)$  y notamos que en el caso de simetrías de tipo Chaplygin  $\check{D} = T(Q/G)$ , por (7.12).

**Lema 7.3.2** *Si  $A$  es una conexión en el fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  y  $q_0 \in \pi^{-1}(r_0)$ , entonces*

$$d\check{L}_d(r_0, r_1)(\delta r_0, \delta r_1) = D_1\check{L}_d(q_0, e, r_1)(h^{q_0}(\delta r_0)) + D_3\check{L}_d(q_0, e, r_1)(\delta r_1).$$

**Demostración.** Si  $s$  es una sección local del fibrado con  $q_0 = s(r_0)$  se tiene que

$$\check{L}_d(r_0, r_1) = \hat{L}_d(\rho(s(r_0), e), r_1) = \check{L}_d(s(r_0), e, r_1)$$

y su diferencial está dado por

$$\begin{aligned} d\check{L}_d(r_0, r_1)(\delta r_0, \delta r_1) &= d\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(ds(r_0)(\delta r_0), 0, \delta r_1) \\ &= D_1\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(ds(r_0)(\delta r_0)) + D_3\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(\delta r_1). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Además, como  $\pi \circ s = id_{Q/G}$ , tenemos que

$$\delta r_0 = d(\pi \circ s)(\delta r_0) = d\pi(s(r_0))ds(r_0)(\delta r_0) = d\pi(s(r_0))\text{hor}_{\mathcal{A}}(ds(r_0)(\delta r_0)).$$

Luego, por definición de levantamiento horizontal obtenemos que  $\text{hor}_{\mathcal{A}}(ds(r_0)(\delta r_0)) = h^{s(r_0)}(\delta r_0)$ .

Como  $\check{L}_d$  es  $G$ -invariante,  $D_1\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)$  se anula sobre los vectores verticales y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_1\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(ds(r_0)(\delta r_0)) &= D_1\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(\text{hor}_{\mathcal{A}}(ds(r_0)(\delta r_0))) \\ &= D_1\check{L}_d(s(r_0), e, r_1)(h^{s(r_0)}(\delta r_0)). \end{aligned}$$

Al reemplazar esto en (7.13) obtenemos la igualdad del enunciado. ■

**Lema 7.3.3** *Sea  $(v, r.)$  una curva discreta en  $\tilde{G} \times Q/G$  tal que  $v_k = \rho(q_k, e)$  para algún  $q_k \in Q$  y para todo  $k$ . Luego,*

$$d\hat{S}_d(v, r.)(\delta v, \delta r.) = d\check{S}_d(r.)(\delta r.) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k)$$

para toda variación  $\delta r.$  a extremos fijos y

$$\delta v_k = d\rho(q_k, e)(h^{q_k}(\delta r_k), d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1})(h^{q_k}(\delta r_k), h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1})))$$

para todo  $k$ .

**Demostración.** Usando la forma de  $\delta v$  por definición tenemos que

$$\begin{aligned} d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( D_1 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) (h^{q_k}(\delta r_k)) \right. \\ &\quad + D_2 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) (d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) (h^{q_k}(\delta r_k), h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1}))) \\ &\quad \left. + D_3 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) (\delta r_{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Por el Lema 7.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( d\check{L}_d(r_k, r_{k+1}) (\delta r_k, \delta r_{k+1}) \right. \\ &\quad \left. + D_2 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) (d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) (h^{q_k}(\delta r_k), h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1}))) \right) \\ &= d\check{S}_d(r.) (\delta r.) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} D_2 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) (d\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) (h^{q_k}(\delta r_k), h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1}))). \end{aligned}$$

Ahora, usando la descomposición  $d\mathcal{A}_d = D_1\mathcal{A}_d + D_2\mathcal{A}_d$  obtenemos

$$\begin{aligned} d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) &= d\check{S}_d(r.) (\delta r.) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} \left( D_2 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) D_1\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) (h^{q_k}(\delta r_k)) \right. \\ &\quad \left. + D_2 \check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) D_2\mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) (h^{q_{k+1}}(\delta r_{k+1})) \right). \end{aligned}$$

Por último, reordenando los términos que aparecen en la sumatoria, tomando variaciones a extremos fijos y recordando que

$$\check{F}_d(r_k, r_{k+1}) = F_d(\rho(q_k, e), r_{k+1}) = F_d(v_k, r_{k+1})$$

vemos que

$$d\hat{S}_d(v., r.) (\delta v., \delta r.) = d\check{S}_d(r.) (\delta r.) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k).$$

■

**Lema 7.3.4** *Sea  $(v., r.)$  una curva discreta en  $\tilde{G} \times Q/G$  tal que  $v_k = \rho(q_k, e)$  para algún  $q_k \in Q$  y para todo  $k$ . Luego,  $(v., r.)$  satisface la condición (6.17) si y sólo si*

$$D_1\check{L}_d(r_k, r_{k+1}) + D_2\check{L}_d(r_{k-1}, r_k) + \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \in \left( \check{D}_{r_k} \right)^\circ \quad (7.14)$$

para todo  $k$ .

**Demostración.** Reemplazando  $v_k = \rho(q_k, e)$ , podemos reescribir la expresión para  $\bar{\phi}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(v_{k-1}, r_k, v_k, r_{k+1}, \delta r_k) &= \check{\phi}(q_{k-1}, e, r_k, v_k, r_{k+1}, \delta r_k) \\ &= (D_1\check{L}_d(q_k, e, r_{k+1}) \circ h^{q_k} + D_3\check{L}_d(q_{k-1}, e, r_k) \\ &\quad + \hat{F}_d^-(\rho(q_k, e), r_{k+1}) + \hat{F}_d^+(\rho(q_{k-1}, e), r_k)) (\delta r_k). \end{aligned}$$

De la demostración del Lema 7.3.3 y recordando que

$$\check{F}_d(r_0, r_1) = \left( \hat{F}_d \circ \mathcal{Y} \right) (r_0, r_1) = \hat{F}_d(\rho(q_0, e), r_1)$$

para algún  $q_0 \in \pi^{-1}(r_0)$  se obtiene que

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(v_{k-1}, r_k, v_k, r_{k+1}, \delta r_k) &= \left( D_1\check{L}_d(r_k, r_{k+1}) + D_2\check{L}_d(r_{k-1}, r_k) \right. \\ &\quad \left. + \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k). \end{aligned}$$

Luego, como  $\check{\mathcal{D}} := \hat{\mathcal{D}}$  la condición (6.17) es equivalente a

$$D_1 \check{L}_d(r_k, r_{k+1}) + D_2 \check{L}_d(r_{k-1}, r_k) + \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \Big|_{p_2^*(\check{\mathcal{D}})} = 0$$

que, por la Proposición 6.4.1, equivale a la expresión que aparece en el enunciado.

■

### 7.3.2. Dinámica reducida

**Teorema 7.3.1** *Sea  $G$  grupo de simetría de tipo Chaplygin del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ ,  $q$  una curva discreta en  $Q$ , y  $r_k = \pi(q_k)$  la curva correspondiente en  $Q/G$ . Si  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$ , los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $q$  satisface el principio variacional  $dS_d(q)(\delta q) = 0$  para toda variación a extremos fijos  $\delta q$  tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ .
2.  $q$  satisface las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.10) para todo  $k$ .
3.  $r$  satisface el principio variacional

$$d\check{S}_d(r)(\delta r) = - \sum_{k=1}^{N-1} \left( \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k)$$

para toda variación a extremos fijos  $\delta r$  con  $\delta r_k \in T_{r_k}(Q/G)$  y donde

$$\check{S}_d(r) := \sum_{k=0}^N \check{L}_d(r_k, r_{k+1}).$$

4.  $r$ . *satisface las ecuaciones*

$$D_1 \check{L}_d(r_k, r_{k+1}) + D_2 \check{L}_d(r_{k-1}, r_k) = -\check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) - \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k)$$

para todo  $k$ .

**Demostración.** Como  $S = \{0\}$ , por el Teorema 6.4.1, vemos que cada uno de los ítems 1 y 2 de este teorema es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:

- (a) Ítem 3 en el Teorema 6.4.1 vale para variaciones horizontales, ya que  $\xi_k = 0$  para todo  $k$ .
- (b) Para todo  $k$ ,  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  y vale la condición (6.9).

Como  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d} = \mathcal{D}_d$ ,  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  si y sólo si  $w_k = \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) = e$ . Luego,

$$(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d \Leftrightarrow (\rho(q_k, e), r_{k+1}) \in \Phi_{\mathcal{A}_d}(\mathcal{D}_d/G) \Leftrightarrow \left(q_k, \overline{h}_d^{q_k}(r_{k+1})\right) \in \mathcal{D}_d$$

y, por definición de  $\mathcal{A}_d$ , esta última condición vale siempre.

Notemos, además, que en este caso  $\hat{\mathcal{D}}_d = \tilde{G} \times Q/G$ . De hecho, supongamos que  $(v_k, r_{k+1}) \in \tilde{G} \times Q/G$  con  $v_k = (\rho(q_k, w_k), r_{k+1})$  para algún  $(q_k, w_k) \in Q \times G$ , luego

$$(v_k, r_{k+1}) = (\rho(q_k, w_k), r_{k+1}) = \left(\rho\left(l_{w_k}^Q(q_k), e\right), r_{k+1}\right) = \Phi_{\mathcal{A}_d}(\tilde{\pi}(\tilde{q}_k, q_{k+1}))$$

donde  $(\tilde{q}_k, q_{k+1}) = \left(l_{w_k}^Q(q_k), \overline{h}_d^{\tilde{q}_k}(r_{k+1})\right) \in \text{Hor}_{\mathcal{A}_d} = \mathcal{D}_d$ . Es decir,  $(v_k, r_{k+1}) \in \Phi_{\mathcal{A}_d}(\mathcal{D}_d/G)$ . Por lo tanto, podemos no considerar los vínculos que aparecen en los ítems (a) y (b).

Por el Lema 7.3.3 el principio variacional que aparece en (a) es equivalente al que aparece en el ítem 3 del enunciado. De manera similar, como  $\check{\mathcal{D}} = T(Q/G)$ , el

Lema 7.3.4 y la Proposición 6.4.1 muestran que (b) es equivalente a las ecuaciones que aparecen en el ítem 4 del enunciado. ■

**Observación 7.3.1** *Notar que de la reducción de un sistema mecánico discreto con simetría de tipo Chaplygin se obtiene un sistema mecánico discreto sin vínculos pero con fuerzas dadas por  $\check{F}_d^\pm$  en el teorema anterior. Un análisis similar ha sido tratado en el contexto de grupoides en [17].*

**Ejemplo 7.3.2** *Como ya hemos mencionado  $G = \mathbb{R}$  es una simetría de tipo Chaplygin para el sistema mecánico discreto introducido en el Ejemplo 6.1.1. Notamos que la construcción descrita en esta sección corresponde a desarrollar la reducción usando la conexión discreta  $\mathcal{A}_d^1$  del Ejemplo 5.2.1.*

*Por el Teorema 7.3.1 el sistema mecánico discreto sin vínculos asociado al sistema reducido es*

$$\check{Q} := Q/G = \mathbb{R}$$

$$\check{L}_d(r_0, r_1) = \frac{m}{2} \left( (r_1 - r_0)^2 + (r_1^2 - r_0^2)^2 / 4 \right)$$

*y no hay fuerzas ya que, por el Ejemplo 6.2.1, la curvatura mixta se anula en el caso  $b = 1$ . Por último, la ecuación de Euler-Lagrange discreta que determina la evolución del sistema  $(\check{Q}, \check{L}_d)$  es*

$$(r_{k+1} - r_k) - (r_k - r_{k-1}) + r_k \left( (r_{k+1}^2 - r_k^2) - (r_k^2 - r_{k-1}^2) \right) / 2 = 0 \quad (7.15)$$

*que, precisamente, es (6.14).*

### 7.3.3. Reconstrucción

Por último, adaptamos el Teorema 6.5.1 y presentamos la reconstrucción en el contexto actual.

**Teorema 7.3.2** *Sea  $G$  un grupo de simetría de tipo Chaplygin del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ . Dados  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$  y  $r$  una trayectoria discreta del sistema mecánico discreto forzado  $(Q/G, \check{L}_d, \check{\mathcal{D}}, \check{\mathcal{D}}_d, \check{F}_d)$  tal que  $\pi(\bar{q}_0) = r_0$  y  $\pi(\bar{q}_1) = r_1$ , se define inductivamente la curva discreta  $q$  en  $Q$  de la siguiente manera  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_{k+1} = \overline{h_d^{q_k}}(r_{k+1})$  para todo  $k$ . Luego,  $q$  es una trayectoria del sistema mecánico discreto original con  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_1 = \bar{q}_1$ .*

**Demostración.** La trayectoria  $r$  define una curva discreta  $(v_k, r_{k+1}) = \mathcal{Y}(r_k, r_{k+1})$  en  $\tilde{G} \times Q/G$ . Además, por el Lema 7.3.3, ambas curvas satisfacen simultáneamente los correspondientes principios variacionales; por lo tanto, la curva  $(v_k, r_{k+1})$  en  $\tilde{G} \times Q/G$  también es una trayectoria del sistema en  $\tilde{G} \times Q/G$ .

Como  $\bar{q}_0 \in \pi^{-1}(r_0)$ ,  $v_0 = \rho(\bar{q}_0, e) = \rho(\bar{q}_0, \mathcal{A}_d(\bar{q}_0, \bar{q}_1))$ ; en general,  $v_k = \rho(\tilde{q}_k, e)$  para algún  $\tilde{q}_k \in \pi^{-1}(r_k)$ .

Luego, como  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$ , por el Teorema 6.5.1, existe una trayectoria  $q$  en  $Q$  tal que  $\pi(q_k) = r_k$  para todo  $k$  y  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_1 = \bar{q}_1$ . Además,  $q_{k+1}$  satisface la fórmula del enunciado porque  $q_{k+1}$  satisface (6.25) con  $u_k = e$  para todo  $k$ . ■

**Ejemplo 7.3.3** *Ahora usamos el Teorema 7.3.2 para reconstruir las trayectorias del sistema reducido en el Ejemplo 7.3.2. Aplicando la fórmula recursiva que aparece en dicho resultado y recordando la expresión para el levantamiento horizontal discreto del Ejemplo 5.2.1, tenemos que*

$$q_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}) = \overline{h_d^{q_k}}(r_{k+1}) = (r_{k+1}, y_k + (r_{k+1}^2 - r_k^2)/2).$$



Esto es,  $(x_k, y_k) = (r_k, y_0 + (r_k^2 - r_0^2)/2)$  que coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo 6.5.1.

## 7.4. Simetrías horizontales

En esta sección especializamos el Teorema 6.4.1 al caso en el que el sistema original presenta simetrías horizontales, es decir simetrías que son compatibles con las direcciones de los vínculos. Del mismo modo que en el caso Chaplygin, en este caso vamos más allá del resultado de equivalencia entre el sistema mecánico en  $Q$  y un sistema dinámico en  $\tilde{G} \times Q/G$  para obtener una equivalencia entre el sistema mecánico discreto original en  $Q$  y otro sistema mecánico discreto en  $Q/G$ .

**Definición 7.4.1** Sea  $M$  un grupo de simetría del sistema mecánico discreto no holónomo  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ . Un subgrupo cerrado  $G$  de  $M$  es un **subgrupo de simetría horizontal** para  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  si

$$\mathcal{V}_q^M \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{V}_q^G \text{ para todo } q \in Q \quad (7.16)$$

donde  $\mathcal{V}_q^M$  es el espacio vertical asociado a la acción de  $M$  sobre  $Q$ .

A partir de ahora obviamos el grupo  $M$  y consideramos la acción de  $G$  sobre el sistema. En este contexto presentamos la adaptación del Teorema 6.4.1. Por la condición (7.16) tenemos que  $\mathcal{V}^G = \mathcal{S}$  y la descomposición (3.2) resulta

$$TQ = W \oplus \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{S}}_{=\mathcal{D}} \oplus \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{U}}$$

para cualesquiera subfibrados complementarios  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{D}$  y  $W$  de  $\mathcal{D}$  en  $TQ$ . Fijando una descomposición tal definimos una conexión  $\mathcal{A}$  sobre el fibrado principal

$\pi : Q \rightarrow Q/G$  cuyo espacio horizontal sea  $\text{Hor}_{\mathcal{A}} = \mathcal{H}$ .

En el contexto de esta sección el momento no holónimo discreto  $J_d$  definido en (5.8) tiene algunas propiedades especiales que son estudiadas a continuación.

**Lema 7.4.1** *Si  $G$  es un subgrupo de simetría horizontal para el sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  entonces, valen las siguientes afirmaciones.*

1.  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}} = Q \times \mathfrak{g}$  y  $(\mathfrak{g}^{\mathcal{D}})^* \simeq Q \times \mathfrak{g}^*$ .
2. *La composición del momento no holónimo  $J_d$  definido en (5.8) con la proyección sobre la segunda variable define una aplicación momento  $J_d : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Explícitamente, para  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,*

$$J_d(q_0, q_1) \xi := -D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0).$$

3. *Cualquiera de las condiciones equivalentes del Teorema 6.4.2 es equivalente a la condición de que  $J_d$  es constante sobre la trayectoria  $q$ . (para el principio variacional vertical).*

**Demostración.** El ítem 1 es una consecuencia directa de que  $\mathcal{V}^G \subset \mathcal{D}$ . El ítem 2 se deduce de aplicar el ítem 1.

Para probar la afirmación del ítem 3 vamos a mostrar que (6.23) es equivalente a que  $J_d$  sea constante sobre la trayectoria  $q$ .

Dada  $q$  una curva discreta en  $Q$ , suponemos que la ecuación (6.23) vale sobre  $q$  para toda sección  $\tilde{\xi}$ . Luego, como cualquier  $\xi \in \mathfrak{g}$  define una sección constante, al evaluar (6.23) sobre dicha sección tenemos que

$$(J_d(q_k, q_{k+1}) - J_d(q_{k-1}, q_k)) \xi = 0.$$

Por lo tanto, como  $\xi \in \mathfrak{g}$  es arbitrario,  $J_d$  es una cantidad conservada sobre la trayectoria  $q$ .

Recíprocamente, supongamos que  $J_d$  es una cantidad conservada sobre la trayectoria  $q$ . Entonces

$$J_d(q_k, q_{k+1}) \xi = J_d(q_{k-1}, q_k) \xi$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ , es decir para toda sección constante de  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$ . Por lo tanto, tenemos que la ecuación (6.23) vale para secciones constantes de  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$ . Ahora, dados  $\xi \in \mathfrak{g}$  y  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , consideramos la sección  $(f\xi)(q) = f(q)\xi \in \mathfrak{g}$  y tenemos que, por hipótesis

$$J_d(q_k, q_{k+1})(f\xi) = J_d(q_{k-1}, q_k)(f\xi).$$

Y, así tenemos que la ecuación (6.23) vale para secciones de la forma  $f\xi$  donde  $f$  es una función a valores reales. Pero, como  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$  es un fibrado vectorial, cada sección es una combinación lineal de secciones constantes con coeficientes variables, entonces concluimos que la ecuación (6.23) vale para todas las secciones de  $\mathfrak{g}^{\mathcal{D}}$ . ■

A continuación construimos una conexión discreta afín adaptada al contexto de simetrías horizontales. Luego, usamos dicha conexión para especializar el Teorema 6.4.1 a este caso.

### 7.4.1. Conexión discreta afín para simetrías horizontales

Recordamos dos resultados ya conocidos.

**Lema 7.4.2** Si  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $g \in G$  y  $q \in Q$  entonces  $\xi_Q(l_g^Q(q)) = l_g^{TQ}((\text{Ad}_{g^{-1}}\xi)_Q(q))$ .

**Demostración.** Evaluando tenemos

$$\xi_Q(l_g^Q(q)) = \left. \frac{d}{dt} l_{\exp(t\xi)}^Q(l_g^Q(q)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} l_g^Q(l_{g^{-1}\exp(t\xi)g}^Q(q)) \right|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} l_g^Q \left( l_{\exp(\text{Ad}_{g^{-1}}(t\xi))}^Q(q) \right) \Big|_{t=0} \\
&= dl_g^Q \left( \frac{d}{dt} l_{\exp(\text{Ad}_{g^{-1}}(t\xi))}^Q(q) \Big|_{t=0} \right) \\
&= dl_g^Q (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_Q(q) = l_g^{TQ} \left( (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_Q(q) \right).
\end{aligned}$$

■

**Lema 7.4.3** Si  $g \in G$  y  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  entonces

$$J_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(J_d(q_0, q_1)).$$

**Demostración.** Sean  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $g \in G$  y  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$ , luego por el Lema 7.4.2 vemos que

$$\begin{aligned}
J_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) \xi &= -D_1 L_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) \xi_Q(l_g^Q(q_0)) \\
&= -D_1 L_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) l_g^{TQ} \left( (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_Q(q) \right).
\end{aligned}$$

Además, por ser  $L_d$   $G$ -invariante tenemos que

$$D_1 L_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) l_g^{TQ} = D_1 L_d(q_0, q_1).$$

Luego, al reemplazar en la última expresión se obtiene que

$$\begin{aligned}
J_d(l_g^{Q \times Q}(q_0, q_1)) \xi &= -D_1 L_d(q_0, q_1) (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_Q(q) \\
&= J_d(q_0, q_1) (\text{Ad}_{g^{-1}} \xi) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(J_d(q_0, q_1)).
\end{aligned}$$

■

**Definición 7.4.2** Sea  $G$  un grupo de simetría del sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ . Se dice que  $L_d$  es  $G$ -regular en  $(q_0, q_1) \in Q \times Q$  si la restricción de la forma bilineal

$D_2D_1L_d(q_0, q_1) : T_{q_0}Q \times T_{q_1}Q \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathcal{V}_{q_0}^G \times \mathcal{V}_{q_1}^G$  es no degenerada.

Para estudiar la relación entre la regularidad de un lagrangiano discreto y los valores regulares del momento discreto comenzamos recordando el siguiente hecho.

**Lema 7.4.4** *Sea  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  un fibrado principal y  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \mathfrak{g}$  un subconjunto linealmente independiente. Luego, para  $q \in Q$ ,  $\{(\eta_1)_Q(q), \dots, (\eta_k)_Q(q)\} \subset T_qQ$  es un subconjunto linealmente independiente. Además, si el primer conjunto es una base entonces el segundo es una base también.*

**Demostración.** Primero veamos que el resultado es válido para el fibrado producto  $\pi : U \times G \rightarrow U$  con la acción de  $G$  dada por la multiplicación a izquierda en  $G$ .

Dados  $\eta \in \mathfrak{g}$  y  $(u, g) \in U \times G$

$$\begin{aligned} \eta_Q(u, g) &= \left. \frac{d}{dt} \left( l_{\exp(t\eta)}^{U \times G}(u, g) \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (u, L_{\exp(t\eta)}(g)) \right|_{t=0} \\ &= \left( 0, \left. \frac{d}{dt} L_g L_{g^{-1} \exp(t\eta)}(g) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left( 0, \left. \frac{d}{dt} L_g L_{g^{-1} \exp(t\eta)g}(e) \right|_{t=0} \right) \\ &= (0, dL_g(e)(\text{Ad}_{g^{-1}} \eta)) \in \{0\} \times T_gG \subset T_{(u,g)}(U \times G). \end{aligned}$$

Luego, si  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \mathfrak{g}$  es un subconjunto linealmente independiente como  $\text{Ad}_{g^{-1}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es isomorfismo entonces  $\{\text{Ad}_{g^{-1}} \eta_1, \dots, \text{Ad}_{g^{-1}} \eta_k\}$  también es un subconjunto linealmente independiente. Además,  $dL_g : \mathfrak{g} \rightarrow T_gG$  también es un isomorfismo y, por lo tanto,  $\{(\eta_1)_Q(u, g), \dots, (\eta_k)_Q(u, g)\}$  es un subconjunto linealmente independiente de  $T_{(u,g)}(U \times G)$ . Análogamente, vemos que si el primer subconjunto es una base el segundo también lo será.

En el caso general, consideramos un abierto  $U$  que trivialice a  $Q$ ; es decir, para cada  $q \in Q$  existe un entorno  $V_q$  de  $q$  en  $Q$  tal que  $V_q = U_q \times G$ . Luego, dado

$\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \mathfrak{g}$  un subconjunto linealmente independiente, por lo hecho anteriormente tenemos que para cada  $q \in Q$ ,  $\{(\eta_1)_Q(q), \dots, (\eta_k)_Q(q)\}$  es un subconjunto linealmente independiente de  $T_q(U_q \times G) \subset T_qQ$ . ■

**Proposición 7.4.1** *Sea  $G$  un grupo de simetría horizontal del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  donde el lagrangiano discreto  $L_d$  es regular y  $J_d : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$  es un momento no holónomo discreto. Dado  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  se tiene que,*

- $\mu$  es un valor regular de  $J_d$  y, por lo tanto,  $\mathcal{J}_\mu := J_d^{-1}(\mu)$  es una subvariedad de  $Q \times Q$ .
- si  $q_0 \in Q$  y  $J_d^{q_0} : Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$  es la aplicación dada por  $J_d^{q_0}(q_1) := J_d(q_0, q_1)$  entonces  $\mu$  es un valor regular de  $J_d^{q_0}$  y, por lo tanto,  $(J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$  es una subvariedad de  $Q$  que, si no es vacía, tiene dimensión  $\dim Q - \dim G$ .

**Demostración.** En primer lugar vamos a probar que para todo  $(q_0, q_1) \in \mathcal{J}_\mu$  la aplicación

$$dJ_d(q_0, q_1) : T_{(q_0, q_1)}(Q \times Q) \rightarrow T_\mu \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$$

es suryectiva. Para esto, consideramos una base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $\mathfrak{g}$  y  $\{e_1^*, \dots, e_r^*\}$  su base dual. Entonces, podemos escribir

$$J_d(q_0, q_1) = \sum_{j=1}^r \phi_j(q_0, q_1) e_j^*$$

donde  $\phi_j(q_0, q_1) = J_d(q_0, q_1) e_j = -D_1 L_d(q_0, q_1)(e_j)_Q(q_0)$ . Ahora, tomando su diferencial se tiene

$$\begin{aligned} dJ_d(q_0, q_1)(X_0, X_1) &= \sum_{j=1}^r d\phi_j(q_0, q_1)(X_0, X_1) e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^r (D_1 \phi_j(q_0, q_1)(X_0) + D_2 \phi_j(q_0, q_1)(X_1)) e_j^*. \end{aligned}$$

Por el Lema 7.4.4 tenemos que los  $(e_j)_Q(q_0)$  son linealmente independientes en  $T_{q_0}Q$ , entonces dado  $\psi = \sum_{j=1}^r a_j e_j^* \in \mathfrak{g}^*$ , existen  $\sigma \in T_{q_0}^*Q$  tales que  $\sigma \left( (e_j)_Q(q_0) \right) = a_j$  para todo  $j$ . Además, como  $D_2 D_1 L_d(q_0, q_1)$  es no degenerado, existe un vector  $X_1 \in T_{q_1}Q$  tal que

$$\sigma(\cdot) = -D_2 D_1 L_d(q_0, q_1)(\cdot, X_1).$$

Por lo tanto,  $X_1 \in T_{q_1}Q$  es tal que

$$D_2 \phi_j(q_0, q_1) X_1 = -D_2 D_1 L_d(q_0, q_1) \left( (e_j)_Q(q_0), X_1 \right) = a_j$$

para todo  $j$ . Luego,

$$dJ_d(q_0, q_1)(0, X_1) = \sum_{j=1}^r D_2 \phi_j(q_0, q_1)(X_1) e_j^* = \sum_{j=1}^r a_j e_j^* = \psi,$$

lo que muestra que  $\mu$  es un valor regular de  $J_d$  y, por lo tanto,  $\mathcal{J}_\mu$  es una subvariedad de  $Q \times Q$ .

Del cálculo anterior vemos que, para  $\psi \in \mathfrak{g}^*$

$$dJ_d^{q_0}(q_1)(X_1) = D_2 J_d(q_0, q_1)(X_1) = \psi,$$

y así  $\mu$  también es un valor regular de  $J_d^{q_0}$  lo que implica que  $(J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$  es una subvariedad de  $Q$ . La dimensión de la misma puede ser calculada notando que, siendo  $\mu$  un valor regular de  $J_d^{q_0}$ , si  $q_1 \in (J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$

$$\begin{aligned} \dim \left( (J_d^{q_0})^{-1}(\mu) \right) &= \dim(\ker(dJ_d^{q_0}(q_1))) = \dim T_{q_1}Q - \dim(\text{Im}(dJ_d^{q_0}(q_1))) \\ &= \dim Q - \dim G. \end{aligned}$$

■

**Proposición 7.4.2** Sea  $G$  un grupo de simetría horizontal del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  donde el lagrangiano discreto  $L_d$  es regular y  $G$ -regular. Entonces, para todo  $q_0 \in Q$  y  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ , si  $q_1 \in l_G^Q(\{q_0\}) \cap (J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$  se tiene que  $T_{q_1}Q = T_{q_1}\left(l_G^Q(\{q_0\})\right) \oplus T_{q_1}\left((J_d^{q_0})^{-1}(\mu)\right)$ .

**Demostración.** Supondremos que  $(J_d^{q_0})^{-1}(\mu) \neq \emptyset$ , ya que en caso contrario el resultado es válido.

Como  $\dim\left((J_d^{q_0})^{-1}(\mu)\right) = \dim Q - \dim G$ , basta verificar que para cada  $q_1 \in l_G^Q(\{q_0\}) \cap (J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$ , se cumple que  $T_{q_1}\left(l_G^Q(\{q_0\})\right) \cap T_{q_1}\left((J_d^{q_0})^{-1}(\mu)\right) = \{0\}$ .

Sean  $q_1 \in l_G^Q(\{q_0\}) \cap (J_d^{q_0})^{-1}(\mu)$  y  $X_1 \in T_{q_1}\left(l_G^Q(\{q_0\})\right) \cap T_{q_1}\left((J_d^{q_0})^{-1}(\mu)\right)$ .

Entonces, usando los cálculos de la demostración anterior, tenemos

$$0 = dJ_d^{q_0}(q_1)(X_1) = \sum_{j=1}^r -D_2 D_1 L_d(q_0, q_1)\left((e_j)_Q(q_0), X_1\right) e_j^*$$

y, por lo tanto,  $D_2 D_1 L_d(q_0, q_1)\left((e_j)_Q(q_0), X_1\right) = 0$  para todo  $j$ .

Dado que  $\left\{(e_1)_Q(q_0), \dots, (e_r)_Q(q_0)\right\}$  es una base de  $\mathcal{V}_{q_0}^G$  entonces  $D_2 D_1 L_d(q_0, q_1)(v, X_1) = 0$  para todo  $v \in \mathcal{V}_{q_0}^G$ ; luego como  $L_d$  es  $G$ -regular se tiene que  $X_1 = 0$ . ■

**Definición 7.4.3** Sea  $G$  un grupo de simetría horizontal del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  donde el lagrangiano discreto  $L_d$  es regular y  $G$ -regular. Dado  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  decimos que  $G$  es un grupo de **simetrías  $\mu$ -buenas** si para cada  $q \in Q$  existe un único  $g \in G$  tal que  $J_d^q(l_g^Q(q)) = \mu$ . En este caso, definimos  $\gamma : Q \rightarrow G$  por  $\gamma(q) = g$ .

**Proposición 7.4.3** Sea  $G$  un grupo de simetrías  $\mu$ -buenas del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  para algún  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Si  $\mu$  satisface que  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo



$g \in G$ , entonces  $\mathcal{J}_\mu$  define una conexión discreta afín en  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  con función de nivel  $\gamma$  dada por la  $\mu$ -bondad del grupo  $G$ .

**Demostración.** Por la Proposición 7.4.1  $\mathcal{J}_\mu$  es subvariedad de  $Q \times Q$  y por el Lema 7.4.3 es  $G$ -equivariante. Por otro lado, por definición de  $\gamma$ , tenemos que  $J_d(q, l_g^Q(q)) = \mu$  lo que implica que  $\Gamma \subset \mathcal{J}_\mu$ .

Por último, por la Proposición 7.4.1,  $\mathcal{J}_\mu(q) \subset Q$  es una subvariedad y, usando la Proposición 7.4.2, concluimos que  $\mathcal{J}_\mu$  define una conexión discreta afín. ■

**Observación 7.4.1** *En el contexto de la Proposición 7.4.3, la condición  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo  $g \in G$  puede ser evitada considerando el grupo de simetría (probablemente más pequeño)  $G_\mu := \{g \in G : \text{Ad}_g^* \mu = \mu\}$  en lugar de  $G$ . De hecho,  $G_\mu$  es un grupo de Lie y es grupo de simetría para  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ . Como  $G$  satisface (7.16),  $\mathcal{V}_q^G \subset \mathcal{D}_q$  para todo  $q$ , entonces  $\mathcal{V}_q^{G_\mu} \subset \mathcal{D}_q$  para todo  $q$ . Por lo tanto la condición (7.16) vale si reemplazamos a  $G$  y a  $M$  por  $G_\mu$  y se pueden aplicar los argumentos de reducción en este contexto. Esta observación se aplica al resto de los enunciados de esta sección.*

## 7.4.2. Dinámica reducida

En esta sección suponemos que  $G$  es un grupo de simetrías  $\mu$ -buenas del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  para algún  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  y donde  $L_d$  es regular y  $G$ -regular. En la sección previa hemos visto que si  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  es tal que  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo  $g \in G$ , podemos definir una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  tal que  $\text{Hor}_{\mathcal{A}_d} = \mathcal{J}_\mu$ . A continuación, usamos esta conexión discreta para especializar el Teorema 6.4.1 al contexto de simetrías horizontales.

De la misma manera en la que se planteó el estudio de los sistemas de tipo Chaplygin en la Sección 7.3, en esta sección usamos la aplicación  $\mathcal{Y}$  para definir un sistema mecánico discreto forzado sobre  $Q/G$  con lagrangiano discreto  $\check{L}_d(r_0, r_1) :=$

$\mathcal{Y}^* \left( \hat{L}_d \right) (r_0, r_1) = \left( \hat{L}_d \circ \mathcal{Y} \right) (r_0, r_1)$ , vínculos variacionales  $\check{\mathcal{D}} = d\pi(\mathcal{D})$ , vínculos cinemáticos  $\check{\mathcal{D}}_d := \mathcal{Y}^{-1} \left( \hat{\mathcal{D}}_d \right)$  y fuerzas discretas  $\check{F}_d := \mathcal{Y}^* \left( \hat{F}_d \right) = \hat{F}_d \circ \mathcal{Y}$ .

**Teorema 7.4.1** *Sea  $G$  un grupo de simetrías  $\mu$ -buenas del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  para algún  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Se supone que  $\mu$  satisface que  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo  $g \in G$ . Sean  $q$ . una curva discreta en  $Q$  y  $r_k := \pi(q_k)$  la curva discreta correspondiente en  $Q/G$ . Luego, si  $J_d(q_k, q_{k+1}) = \mu$  para todo  $k$  entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{D}_d$  para todo  $k$  y  $q$ . satisface el principio variacional  $dS_d(q)(\delta q) = 0$  para toda variación a extremos fijos  $\delta q$ . tal que  $\delta q_k \in \mathcal{D}_{q_k}$  para todo  $k$ .
2.  $q$ . satisface las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.10) para todo  $k$ .
3.  $r$ . satisface el principio variacional

$$d\check{S}_d(r)(\delta r) = - \sum_{k=1}^{N-1} \left( \check{F}_d^-(r_k, r_{k+1}) + \check{F}_d^+(r_{k-1}, r_k) \right) (\delta r_k)$$

para toda variación a extremos fijos  $\delta r$ . con  $\delta r_k \in \check{\mathcal{D}}_{r_k}$  para todo  $k$ . Además,  $(r_k, r_{k+1}) \in \check{\mathcal{D}}_d$  para todo  $k$ .

4.  $r$ . satisface (7.14). Además,  $(r_k, r_{k+1}) \in \check{\mathcal{D}}_d$  para todo  $k$ .

**Demostración.** Dado que  $J_d$  es una cantidad conservada sobre  $q$ . entonces se satisface la ecuación (6.23) y, por el Teorema 6.4.2, se satisfacen las ecuaciones verticales del Teorema 6.4.1. Ahora veamos qué podemos decir de las ecuaciones horizontales que aparecen en dicho teorema.

Por el Teorema 6.4.1, los ítems 1 y 2 son equivalentes a cualquiera de las siguientes condiciones:

(a) El ítem 3 en el Teorema 6.4.1 vale para variaciones horizontales.

(b) Para todo  $k$ ,  $(v_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  y vale la condición (6.9).

Como  $J_d$  se conserva y la conexión discreta afín que consideramos tiene a la preimagen de los valores constantes del momento como espacio horizontal, notamos que  $w_k = \mathcal{A}_d(q_k, q_{k+1}) = e$ . Entonces,  $v_k = (\rho(q_k, e), r_{k+1}) = \mathcal{Y}(r_k, r_{k+1}) \in \hat{\mathcal{D}}_d$  si y sólo si  $(r_k, r_{k+1}) \in \mathcal{Y}^{-1}(\hat{\mathcal{D}}_d) = \check{\mathcal{D}}_d$ . De este modo las condiciones de vínculo discreto reducido que aparecen en los ítems (a) y (b) son equivalentes a los que aparecen en 3 y 4 del enunciado.

Por el Lema 7.3.3 el principio variacional que aparece en (a) es equivalente al principio variacional que aparece en 3.

De manera similar, por el Lema 7.3.4 las ecuaciones que aparecen en (b) son equivalentes a las que aparecen en 4. ■

### 7.4.3. Reconstrucción

El siguiente resultado es la especialización del Teorema 6.5.1 al contexto de sistemas mecánicos discretos con simetrías horizontales.

**Teorema 7.4.2** Sean  $G$  un grupo de simetría horizontal del sistema mecánico discreto  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$ ,  $(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathcal{D}_d$  y  $\mu = J_d(\bar{q}_0, \bar{q}_1) \in \mathfrak{g}^*$ . Supongamos que  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo  $g \in G$ .

Sea  $r$  una trayectoria discreta de  $(Q/G, \check{L}_d, \check{\mathcal{D}}, \check{\mathcal{D}}_d, \check{F}_d)$  tal que  $\pi(\bar{q}_0) = r_0$  y  $\pi(\bar{q}_1) = r_1$ . Se define inductivamente la curva discreta  $q$  en  $Q$  de la siguiente manera  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_{k+1} = \overline{h_d^{q_k}}(r_{k+1})$  para todo  $k$ . Luego,  $q$  es una trayectoria del sistema mecánico discreto original con  $q_0 = \bar{q}_0$  y  $q_1 = \bar{q}_1$ .

**Demostración.** La demostración es la misma que la del Teorema 7.3.2 teniendo en cuenta que en este caso la conexión discreta es tal que su espacio horizontal discreto asociado es  $\mathcal{J}_\mu$ . ■

#### 7.4.4. Un ejemplo

En esta sección aplicamos el análisis desarrollado en las secciones previas a un sistema mecánico discreto que presenta simetrías horizontales. El sistema es una discretización de la partícula no holónoma libre considerada por Cortés en [11]. El sistema  $(Q, L_d, \mathcal{D}, \mathcal{D}_d)$  está dado por  $Q := \mathbb{R}^3$ , el lagrangiano discreto

$$L_d(q_0, q_1) := \frac{m}{2} \left( (q_1^x - q_0^x)^2 + (q_1^y - q_0^y)^2 + (q_1^z - q_0^z)^2 \right),$$

donde  $q := (q^x, q^y, q^z)$ , los vínculos variacionales

$$\mathcal{D}_q := \{ \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{z}\partial_z \in T_q Q : \dot{y} = q^x \dot{x} \} = \left\langle \partial_x|_q + q^x \partial_y|_q, \partial_z|_q \right\rangle$$

y los vínculos cinemáticos

$$\mathcal{D}_d := \{ (q_0, q_1) \in Q \times Q : q_1^y - q_0^y = ((q_1^x)^2 - (q_0^x)^2) / 2 \}.$$

El grupo  $M := \mathbb{R}^2$  actúa sobre  $Q$  por  $l_g^Q(q) := (q^x, q^y + g^y, q^z + g^z)$  donde  $g := (g^y, g^z) \in M$ . La acción levantada correspondiente es  $l_g^{TQ}(q, v) := (l_g^Q(q), v)$  y vemos que  $\mathcal{D}_q$  es  $G$ -invariante por  $l_g^{TQ}$ . Además,  $L_d$  y  $\mathcal{D}_d$  son  $G$ -invariantes por la acción diagonal  $l_g^{Q \times Q}$ .

El espacio vertical para la acción de  $G$  sobre  $Q$  es  $\mathcal{V}_q^M = \left\langle \partial_y|_q, \partial_z|_q \right\rangle \subset T_q Q$  y

así

$$S_q := \mathcal{V}_q^M \cap \mathcal{D}_q = \langle \partial_z|_q \rangle.$$

Por lo tanto, el subgrupo cerrado  $G := \{0\} \times \mathbb{R} \subset M$  satisface que  $\mathcal{V}_q^M \cap \mathcal{D}_q = S_q = \mathcal{V}_q^G$  para todo  $q \in Q$ . Así,  $G$  es un (sub)grupo de simetría horizontal para el sistema. Denotamos al álgebra de Lie de  $M$  como  $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^2$  y tenemos que  $\mathfrak{g} = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 = \mathfrak{m}$ .

Notamos que  $L_d$  es regular y  $G$ -regular. Además, por ser  $G$  abeliano tenemos que  $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$  para todo  $g \in G$  y  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ .

Ahora veamos cuál es la expresión del momento no holónomo discreto

$$\begin{aligned} J_d(q_0, q_1) \xi &= -D_1 L_d(q_0, q_1) \xi_Q(q_0) \\ &= m((q_1^x - q_0^x) dx + (q_1^y - q_0^y) dy + (q_1^z - q_0^z) dz) \left( (\xi^z \partial_z)|_{q_0} \right) \\ &= m(q_1^z - q_0^z) \xi^z|_{q_0}. \end{aligned}$$

Si denotamos  $1^* \in \mathfrak{g}^*$  a la base dual de  $(0, 1) \in \mathfrak{g}$  el momento discreto puede expresarse  $J_d(q_0, q_1) = m(q_1^z - q_0^z) 1^*$ . Luego, dado  $q \in Q$  y  $\mu = \mu^z 1^*$  vemos que  $J_d^q(l_g^Q(q)) = \mu$  tiene solución única ya que

$$\mu = J_d(q, l_g^Q(q))$$

$$\mu^z 1^* = m((q^z + g^z) - q^z) 1^* = m g^z 1^*$$

y el único valor de  $g$  que satisface esta condición es  $g = \left(0, \frac{\mu^z}{m}\right) \in G$ . De este modo,  $G$  es un grupo de simetrías  $\mu$ -buenas.

Ahora aplicamos el Teorema 7.4.1 para identificar el sistema reducido con un sistema mecánico discreto forzado sobre  $Q/G \simeq \mathbb{R}^2$ .

Como en las secciones anteriores, usamos una conexión discreta afín  $\mathcal{A}_d$  cuyo

espacio horizontal discreto es, para un  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  fijo,

$$\mathcal{J}_\mu := \{(q_0, q_1) \in Q \times Q : m(q_1^z - q_0^z) = \mu^z\}.$$

De la Definición 7.4.3 y de la Proposición 7.4.3 tenemos que  $\gamma(q) := \left(0, \frac{\mu^z}{m}\right)$  es función de nivel para  $\mathcal{A}_d$ , entonces la 1-forma de conexión discreta para esta conexión es  $\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = \left(0, q_1^z - q_0^z - \frac{\mu^z}{m}\right) \in G$ . Y el levantamiento horizontal discreto asociado a  $\mathcal{A}_d$  es  $\overline{h}_d^q(r) = \left(r', r'', q_0^z + \frac{\mu^z}{m}\right)$ .

A continuación damos la descripción del sistema reducido sobre  $\tilde{G} \times Q/G$ . Como  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  es un fibrado trivial con grupo de estructura  $G$ , aplicamos la identificación entre  $\tilde{G}$  y  $Q/G \times G$  introducida en la Sección 7.1. El sistema que obtuvimos está definido por

$$\begin{aligned} \tilde{G} \times Q/G &\simeq Q/G \times G \times Q/G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ \hat{L}_d^t(r_0, \vartheta_0, r_1) &= \frac{m}{2} \left( (r_1' - r_0')^2 + (r_1'' - r_0'')^2 + \left( \frac{\mu^z}{m} + \vartheta_0 \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\hat{D}_r^t = \langle \partial_{r'}|_r + r' \partial_{r''}|_r \rangle \subset T_r(Q/G)$$

$$\hat{D}_d^t = \{(r_0, \vartheta_0, r_1) \in Q/G \times G \times Q/G : r_1'' - r_0'' = ((r_1')^2 - (r_0')^2)/2\}.$$

Para continuar con esta descripción vamos a evaluar las fuerzas discretas reducidas  $\hat{F}_d$ . Para esto consideramos una descomposición

$$T_q Q = \underbrace{\langle \partial_y|_q \rangle}_{=\mathcal{W}_q} \oplus \underbrace{\langle \partial_x|_q + q^x \partial_y|_q \rangle}_{=\mathcal{H}_q} \oplus \underbrace{\langle \partial_z|_q \rangle}_{=\mathcal{S}_q} \oplus \underbrace{\{0\}}_{=\mathcal{U}_q}$$

que determina la conexión no holónoma  $\mathcal{A}$ . En particular, notamos que como  $d\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = \left(0, dz|_{q_1} - dz|_{q_0}\right)$  y  $\text{hor}_{\mathcal{A}}(\delta q) \in \mathcal{H}_q = \langle \partial_x|_q + q^x \partial_y|_q \rangle$  entonces la

curvatura mixta  $\mathcal{B}_m$  se anula y el sistema reducido resulta no tener fuerzas.

Consideramos la inclusión  $\mathcal{Y}(r_0, r_1) := (r_0, e, r_1)$  y tenemos que el sistema mecánico reducido es  $(\check{Q}, \check{L}_d, \check{\mathcal{D}}, \check{\mathcal{D}}_d)$  donde  $\check{Q} = Q/G$  y

$$\begin{aligned} \check{L}_d(r_0, r_1) &= \frac{m}{2} \left( (r'_1 - r'_0)^2 + (r''_1 - r''_0)^2 + \left( \frac{\mu^z}{m} \right)^2 \right) \\ \check{\mathcal{D}}_r &= \langle \partial_{r'}|_r + r' \partial_{r''}|_r \rangle \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\check{\mathcal{D}}_d = \{ (r_0, r_1) \in Q/G \times Q/G : r''_1 - r''_0 = ((r'_1)^2 - (r'_0)^2) / 2 \}.$$

Las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert discretas (4.10) para este sistema mecánico discreto son

$$\begin{cases} -(r'_{k+1} - r'_k) + (r'_k - r'_{k-1}) = \lambda_k r'_k \\ -(r''_{k+1} - r''_k) + (r''_k - r''_{k-1}) = -\lambda_k \\ r''_{k+1} - r''_k = \left( (r'_{k+1})^2 - (r'_k)^2 \right) / 2 \end{cases}$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene la trayectoria solución,  $r.$ , del sistema reducido. La trayectoria correspondiente al sistema original,  $q.$ , se obtiene recursivamente al aplicar el Teorema 7.4.2; dado un  $q_k$ , se define

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= (q_{k+1}^x, q_{k+1}^y, q_{k+1}^z) = \overline{h_d^{q_k}}(r_{k+1}) = \left( r'_{k+1}, r''_{k+1}, \frac{\mu^z}{m} + q_k^z \right) \\ &= (r'_{k+1}, r''_{k+1}, q_1^z - q_0^z + q_k^z) \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$(q_{k+1}^x, q_{k+1}^y, q_{k+1}^z) = (r'_{k+1}, r''_{k+1}, k(q_1^z - q_0^z) + q_0^z).$$

Notamos que el sistema (7.17) tiene un grupo de simetría residual. El grupo  $M/G \simeq \mathbb{R}$  actúa sobre  $Q/G$  por la acción inducida de  $l^Q$  sobre  $Q/G$ . Este sistema

con este grupo de simetría es precisamente el que hemos estudiado en la Sección 7.3. Usando los resultados obtenidos en dicha sección se obtienen las trayectorias del sistema original

$$(q_k^x, q_k^y, q_k^z) = (r_k, (r_k^2 - r_0^2) / 2 + y_0, k(q_1^z - q_0^z) + q_0^z)$$

donde  $r_k$  está determinada por (7.15) con  $r_0 = q_0^x$  y  $r_1 = q_1^x$ .

**Observación 7.4.2** *La presencia de esta segunda reducción por el grupo  $M/G$  es un ejemplo de reducción en etapas para sistemas mecánicos discretos.*



# Capítulo 8

## Conclusiones y trabajo futuro

En síntesis, los aportes de esta tesis son los siguientes.

- La extensión del concepto de conexión discreta a la noción de conexión discreta afín.
- Una noción de curvatura mixta.
- La formulación lagrangiana de la reducción de sistemas mecánicos discretos no holónomos en presencia de una simetría dada por un grupo de Lie.

Esta formulación fue especializada de distintas maneras para recuperar varios resultados conocidos - la reducción de sistemas cuyo espacio de configuraciones es el mismo grupo de simetría y de sistemas con simetría de tipo Chaplygin - como casos especiales de nuestra construcción. Además se aplicó la reducción a casos no contemplados hasta el momento como la reducción de sistemas con simetrías horizontales o la reducción del disco vertical (con grupo de simetrías que no es de tipo Chaplygin).

- Una manera para reconstruir la trayectoria del sistema original a partir de la trayectoria del sistema reducido.

- La equivalencia entre la evolución del momento no holónomo discreto y la ecuación vertical en términos de las variables reducidas.

Entre los problemas que consideramos interesantes como para abordar en el futuro mencionamos:

- El estudio detallado de los errores para los integradores de sistemas mecánicos discretos no holónomos.
- El estudio de la reducción en etapas de sistemas mecánicos discretos. Esto sería estudiar la contraparte discreta del trabajo de Cendra, Marsden y Ratiu [9].
- Profundizar el estudio de la curvatura mixta para entender su significado geométrico.
- Profundizar el estudio de las conexiones discretas (afines) tratando de introducir una noción de holonomía y usar esta noción para el estudio de posibles fases geométricas en sistemas mecánicos discretos con simetrías.
- Posible extensión de estas técnicas de reducción al contexto de estructuras de Dirac discretas.
- Aclarar la relación existente entre el mecanismo de reducción propuesto y la reducción general de grupoides (con alguna estructura adicional análoga a la conexión discreta).

# Bibliografía

- [1] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978, Second edition, revised and enlarged, with the assistance of T. Ratiu and R. Cushman.
- [2] V. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **16** (1966), 319-361.
- [3] P. Balseiro and J. Solomin. *On generalized non-holonomic systems*. Lett. Math. Phys. **84** (2008), 15-30.
- [4] A. Bloch, P. Krishnaprasad, J. Marsden and R. Murray. *Nonholonomic mechanical systems with symmetry*. Arch. Rational Mech. Anal. **136** (1996), no. 1, 21-99.
- [5] A. Bobenko and B. Suris. *Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products*. Lett. Math. Phys. **49** (1999), no. 1, 79-93.
- [6] J. Cadzow. *Discrete calculus of variations*. Internat. J. Control. **11** (1970), 393-407.

- [7] H. Cendra and V. Díaz. *The Lagrange-D'Alembert-Poincaré equations and integrability for the rolling disk*. Regular and chaotic dynamics. Vol. 11 (2006), no. 1, 67-81.
- [8] H. Cendra, S. Ferraro and S. Grillo. *Lagrangian reduction of generalized nonholonomic systems*. J. Geom. Phys. **58** (2008), no. 10, 1271-1290.
- [9] H. Cendra, J. Marsden, T. Ratiu. *Lagrangian reduction by stages*. Mem. Amer. Math. Soc. **152** (2001), no. 722, 108 pp.
- [10] H. Cendra, J. Marsden, T. Ratiu. *Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems*. Mathematics unlimited-2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, pp. 221-273.
- [11] J. Cortés Monforte. *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1793, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [12] J. Cortés and S. Martínez. *Nonholonomic integrators*. Nonlinearity, **14** (2001), no. 5, 1365-1392.
- [13] Ge Zhong and J. Marsden. *Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators*. Physics letters A. (1988) Vol. 133, no. 3, 134-139.
- [14] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [15] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner. *Geometric numerical integration*. Second edition. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [16] C. Hwang and L. Fan. *A discrete version of Pontryagin's maximum principle*. Oper. Res. **15** (1967), 139-146.

- [17] D. Iglesias, D. Martín de Diego and E. Martínez. *Discrete nonholonomic Lagrangian systems on Lie groupoids*. J. Nonlinear Sci. **18** (2008), no. 3, 221-276.
- [18] S. Jalnapurkar, M. Leok, J. Marsden and M. West. *Discrete Routh reduction*. J. Phys. A. **39** (2006), no. 19, 5521-5544.
- [19] B. Jordan and E. Polak. *Theory of a class of discrete optimal control systems*. J. Electron. Control **17** (1964), 697-711.
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Vol. 1, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996, Reprint of the 1963 original, A Wiley Interscience Publication.
- [21] M. Leok, J. Marsden and A. Weinstein. *A discrete theory of connections on principal bundles*. arXiv:math.DG/0508338, 2005.
- [22] J. Marsden and T. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*. Texts in Applied Mathematics, 17, Springer-Verlag, 1994; Second Edition, 1999.
- [23] R. McLachlan and M. Perlmutter. *Integrators for nonholonomic mechanical systems*. J. Nonlinear Sci. **16** (2006), no. 4, 283-328.
- [24] J. Marsden and M. West. *Discrete mechanics and variational integrators*. Acta numérica **10** (2001), 357-514.
- [25] S. Smale. *Topology and Mechanics*. Inv. Math. (1970), **10**, 305-311; **11**, 45-64.
- [26] J. Wendlant and J. Marsden. *Mechanical integrators derived from a discrete variational principle*. Physica D **106** (1997) 223-246.