Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales.
Universidad Nacional de La Plata

Trabajos Prácticos Matemática

Módulo 2 : Geometría
Año 2023

Autores:
Pauletich, M. Fabiana; Lacambra, Emilio; Tripolí, María de las Mercedes; Bermudez Cichino, Andrea N.; Bertero, María Fernanda.

Índice general

.

Práctica 4

Geometría

4.1. Introducción a las representaciones gráficas en ejes coordenados

1. Graficar los siguientes puntos en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ según corresponda:

   a) $P_1(-3)$

   b) $P_2(-3\,,0)$

   c) $P_3(-3\,,0\,,0)$

   d) $P_4(2\,,-1\,,2)$

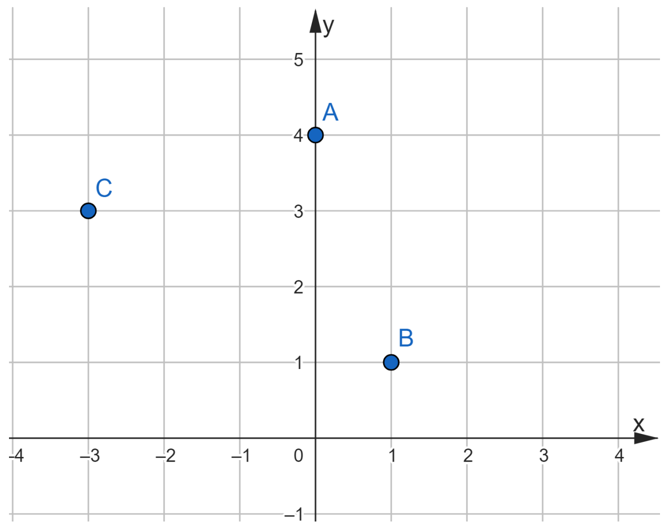
   e) $P_5\left(-\dfrac{7}{5}\,,1\right)$

   f) $P_6(2\,,0\,,-1)$

2. a) Interpretar qué representa (2,3) en $\mathbb{R}$ y graficar.

   b) Interpretar qué representa (2,3) en $\mathbb{R}^2$ y graficar.

3. Dado el gráfico

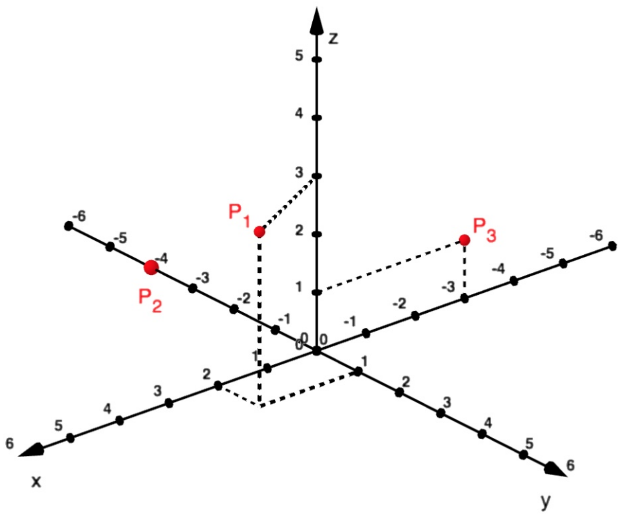


   a) Dar las coordenadas de los puntos A, B y C.

   b) Utilizando la definición de distancia entre puntos mostrar que dichos puntos son los vértices de un triángulo isósceles.

4. Hallar el o los valores de k de modo que la distancia entre el punto $P(k, 3)$ y el origen de coordenadas sea igual a 5. Verificar el resultado utilizando GeoGebra (Se puede usar la herramienta ***"Distancia o longitud"***).

5. Dado el gráfico:



a) Dar las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3

b) Calcular la distancia entre P_1 y P_2 y entre P_2 y P_3

c) Utilizar GeoGebra para verificar los resultados utilizando la herramienta ***"Distancia o longitud"***

4.2. Rectas en el plano

1. Dada la ecuación de la recta $y = -2x + \frac{1}{2}$ hallar analíticamente tres puntos que pertenezcan a ella. Verificar gráficamente.

2. Dadas las siguientes ecuaciones de rectas:

   (I) $L_1 : y + 1 = 0$ (II) $L_2 : y - 2x = 0$ (III) $L_3 : 2x - 4 = 0$

   a) Determinar analíticamente si los puntos $P_1(1, -1)$ y $P_2(2, 4)$ pertenecen a dichas rectas.

   b) Verificar gráficamente.

3. Responder utilizando GeoGebra:

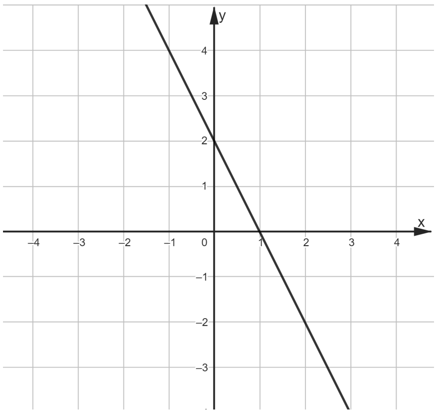
   a) Graficar el punto $(k, 1)$, mover el deslizador y analizar que ocurre con el punto. ¿Sobre qué recta se mueven los puntos que se generan para distintos valores de k?

   b) ¿Cuánto debe valer k para que el punto $(k, 1)$ pertenezca a la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$?

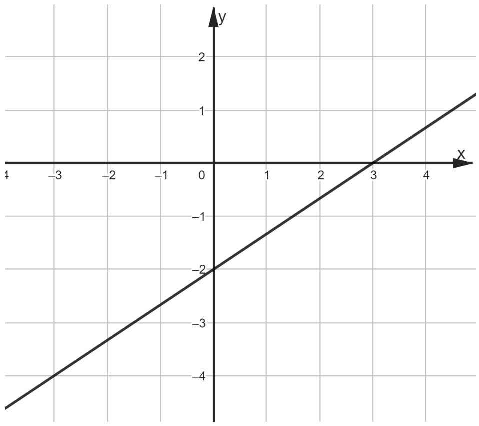
   c) Encontrar analíticamente el valor de k.

4. Dadas las gráficas de las siguientes rectas encontrar sus ecuaciones. Indicar para cada una cuánto valen la pendiente y la ordenada al origen.

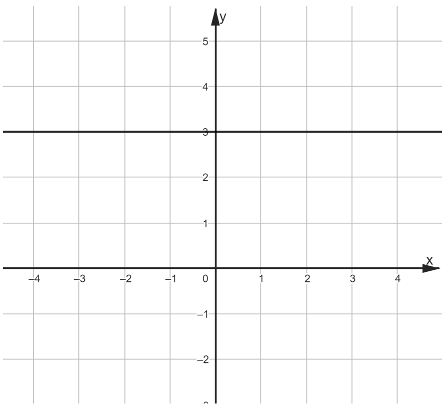
a)



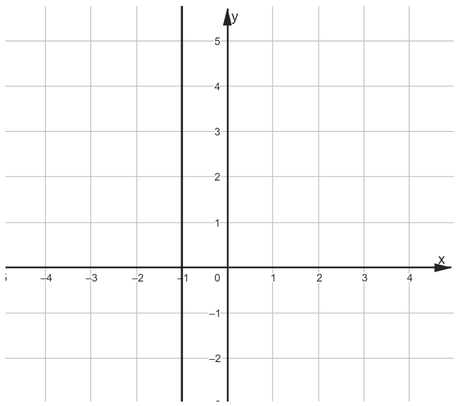
b)



c)



d)



5. a) Graficar la recta paralela al eje y que pase por $(-2, 1)$.
   b) Graficar la recta paralela al eje x que pase por $(-2, 1)$.
   c) Dar las ecuaciones de las rectas de los incisos anteriores.

6. Hallar la ecuación de la recta que pase por los puntos $(1, -2)$ y $(-2, 0)$. Luego graficar.

7. Graficar la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene pendiente igual a $m = -\frac{2}{5}$. Luego escribir su ecuación.

8. a) Dada la ecuación de la recta $L : x - y = 1$, hallar la ecuación de la recta L_1 que es paralela a L y pasa por (-2,-1).
   b) Graficar ambas rectas con GeoGebra.
   c) Interpretar el resultado obtenido en el inciso anterior, analizando la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas L y L_1.

9. a) Dada la ecuación de la recta $L : 2x - 3y = 3$, hallar la ecuación de la recta L_1 que es perpendicular a L y pasa por el origen de coordenadas.
   b) Plantear y resolver el sistema de ecuaciones formado por ambas rectas.
   c) Utilizando GeoGebra interpretar gráficamente el resultado del inciso anterior.

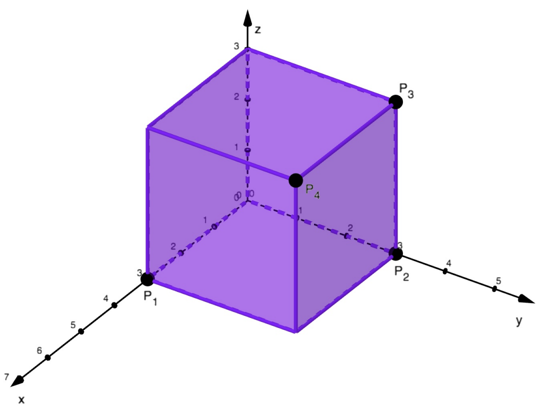
10. Dar las ecuaciones de los ejes coordenados.
11. Dada la ecuación de la recta $L : 2x - 3y = 3$,
    a) Escribir el sistema que le permite hallar la intersección de la recta L con el eje x. Resolver el sistema.
    b) Escribir el sistema que le permite hallar la intersección de la recta L con el eje y. Resolver el sistema.
    c) Interpretar gráficamente los resultados obtenidos.

4.3. Regiones en el plano

1. Representar gráficamente las siguientes regiones en el plano:
    a) $A = \{(x, y) : x < 2\}$
    b) $B = \{(x, y) : y \leq -2\}$
    c) $C = \{(x, y) : x \leq 1 \ \wedge \ y > -2\}$
    d) $D = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{3}x + 1 \ \wedge \ x \leq 1\right\}$
    e) $E = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{3}x + 1 \ \wedge \ x > 0\right\}$
    f) Utilizando GeoGebra: $F = \{(x, y) : y > x - 1 \ \wedge \ x - 2y \leq 0\}$
2. Describir con palabras cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior.

4.4. Ejercitación

1. Usando GeoGebra graficar la recta de ecuación $x + 2hy = -2$. Mover el deslizador y observar el comportamiento de dicha recta para los distintos valores de h. De todas las rectas que se generan encuentre la que pasa por el punto $(1, -1)$. ¿Cuánto vale la pendiente de dicha recta?
2. Dado el siguiente gráfico:



Calcular la distancia entre P_1 y P_3 y entre P_2 y P_4.

3. Hallar el valor de k de modo que la recta de ecuación $kx + y = 0$ sea paralela a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar su respuesta utilizando GeoGebra.

4. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación $2x+3y = -3$ que pasa por el punto $(-2, -1)$.

5. a) Hallar la ecuación de la recta paralela a $x = -1$ que pasa por el punto $P_1\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. Graficar.

   b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $x = -1$ que pasa por el punto $P_2\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. Graficar.

6. a) Dada la recta L de ecuación $-\frac{3}{5}x + 2y = -5$, hallar su intersección con los ejes coordenados. (Indicación: plantear para cada caso el sistema de ecuaciones apropiado).

   b) Graficar la recta y los puntos de intersección.

7. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$

   a) Resolverlo gráficamente.

   b) Resolverlo analíticamente. Comparar el resultado con el obtenido en el inciso anterior. Sacar conclusiones.

8. Graficar en cada caso qué representa en $\mathbb{R}$:

   a) $x = 2$ b) $x > 2$

9. Graficar en cada caso qué representa en $\mathbb{R}^2$:

   a) $x = 2$ b) $x > 2$

10. Representar gráficamente las siguientes regiones del plano:

    a) $A = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{3}x + 1 \ \wedge \ y \geq -1\right\}$

    b) $B = \left\{(x, y) : y > \frac{1}{3}x + 1\right\}$

    c) Utilizando GeoGebra: $C = \{(x, y) : x.y > 0\}$.

    d) ¿Cómo describiría con sus palabras y a través de ejemplos el conjunto graficado en el inciso c)?

4.5. Respuestas

La parte gráfica de los ejercicios la pueden verificar utilizando GeoGebra
`https://www.geogebra.org/`

Introducción a las representaciones gráficas en ejes coordenados

3. a) $A(0,4)$, $B(1,1)$ y $C(-3,3)$
   b) $d(A,B) = d(C,A) = \sqrt{10}$ y $d(C,B) = \sqrt{20}$
4. $k = 4$ o $k = -4$
5. a) $P_1(2,1,3)$, $P_2(0,-4,0)$ y $P_3(-3,0,1)$
   b) $d(P_1,P_2) = \sqrt{38}$ $d(P_2,P_3) = \sqrt{26}$

Rectas en el plano

2. P_1 pertenece a la gráfica de L_1 y P_2 pertenece a la gráfica de L_2 y L_3
3. $k = 3$
4. a) $y = -2x + 2$; $m = -2$; $b = 2$ b) $y = \frac{2}{3}x - 2$; $m = \frac{2}{3}$; $b = -2$
   c) $y = 3$; $m = 0$; $b = 3$ d) $x = -1$; $\nexists\, m$; $\nexists\, b$
5. a) $x = -2$ b) $y = 1$
6. $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}$ 7. $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{12}{5}$ 8. $y = x + 1$
9. a) $y = -\dfrac{3}{2}x$ b) $S = \left\{(-\dfrac{6}{13}, -\dfrac{9}{13})\right\}$
10. La ecuación del eje x es $y = 0$ y la del eje y es $x = 0$
11. a) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ $S = \left\{(\frac{3}{2}, 0)\right\}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$ $S = \{(0,-1)\}$

Ejercitación

1. $h = \frac{3}{2}$
2. $d(P_1,P_3) = \sqrt{27}$ $d(P_2,P_4) = \sqrt{18}$
3. $k = \frac{1}{2}$
4. $y = \dfrac{3}{2}x + 2$
5. a) $x = \dfrac{3}{2}$ b) $y = 4$
6. Los puntos de intersección con los ejes son: $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{25}{3}, 0\right)$
7. $S = \{(-2,-1)\}$

Práctica 5

Geometría: Cónicas

5.1. Circunferencia

1. Para cada ecuación de la circunferencia determinar su centro, su radio y graficar.

   a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $(x+1)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

2. Dados los siguientes puntos:

   (I) $P_1(-1,0)$ (II) $P_2(0,0)$ (III) $P_3(-1,-1)$

   a) Indicar en cada caso si el punto dado es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia de ecuación $x^2 + (y+2)^2 = 4$.

   b) Justificar analíticamente su respuesta.

   c) Verificar gráficamente utilizando GeoGebra.

3. *a*) Determinar gráficamente el o los valores de k para que el punto $(k,0)$ pertenezca a la circunferencia de ecuación $(x+1)^2 + y^2 = 16$

   b) Comprobar analíticamente el resultado hallado.

4. Determinar las ecuaciones de las circunferencias C, C_1 y C_2, cuyas gráficas son las siguientes:

5. *a*) Escribir la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,-3)$ y radio igual a 3.

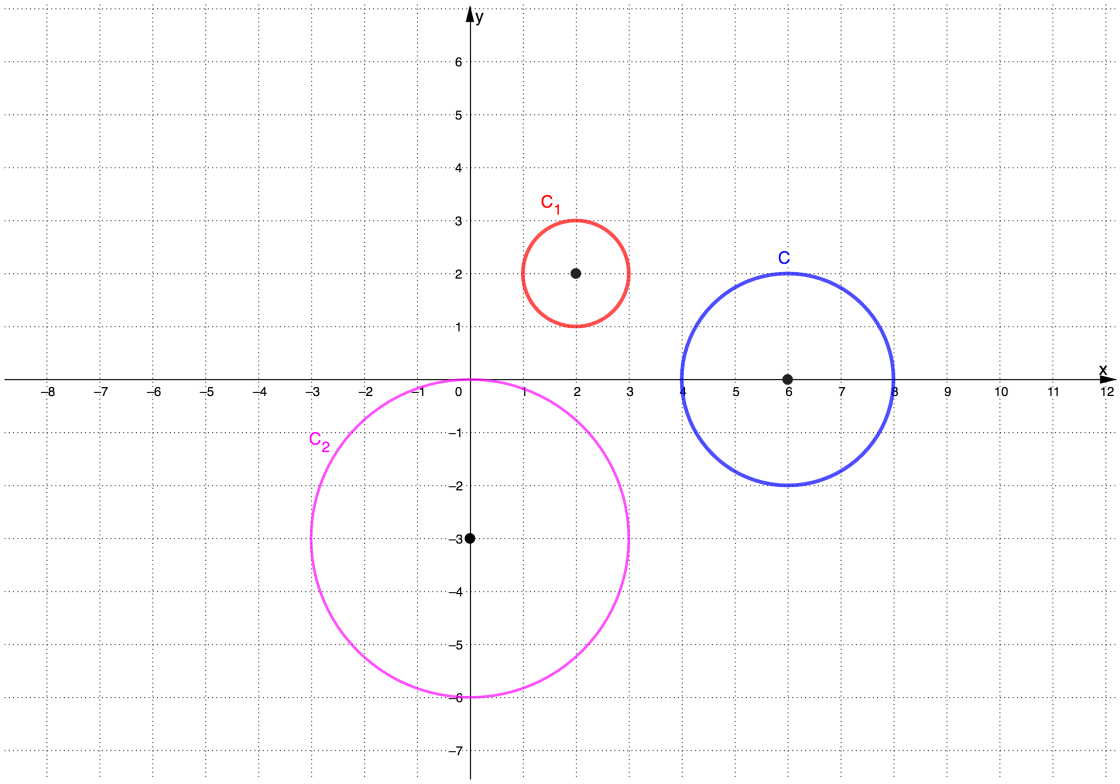
   b) Hallar el radio de la circunferencia que pasa por (-1,-1) y tiene centro en el punto (0,2). Escribir su ecuación.

   c) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ que pasa por el punto $(0,1)$.

   d) Graficar las circunferencias obtenidas en los incisos anteriores.

6. *a*) Hallar los puntos de intersección de la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 4$ con los ejes coordenados. (Indicación: plantear y resolver en cada caso el sistema de ecuaciones que le permite hallar la intersección).

   b) Interpretar gráficamente el o los resultados hallados.



7. *a*) Verificar utilizando GeoGebra que la recta de ecuación $y = -x + 2$ corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ en un solo punto.

   b) Plantear y resolver analíticamente el sistema que permite hallar dicha intersección.

8. Determinar la ecuación canónica y graficar las siguientes circunferencias:

   a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$

   b) $3x^2 + 3y^2 + 6x = 0$

5.2. Elipse

1. Para cada ecuación de la elipse: trazar su gráfica e indicar el valor del semieje mayor, del semieje menor y las coordenadas de los vértices y del centro:

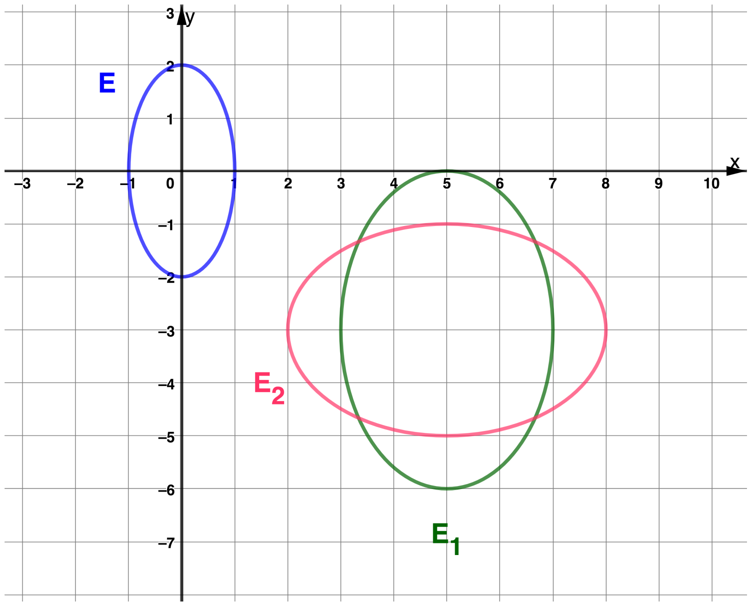
   a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

   b) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

   c) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,$

   d) $\dfrac{(x+1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

2. Determinar las ecuaciones de las elipses E, E_1 y E_2, cuyas gráficas son las siguientes:



3. Graficar una elipse que tenga su centro en $(2, -1)$, su eje mayor mida 6 y su eje menor 4. ¿Es única? Dar la ecuación de la o las elipses que cumplan dicha condición.
4. Graficar la elipse cuyos vértices son: $V_1(5, 2)$, $V_2(-1, 2)$, $V_3(2, 6)$ y $V_4(2, -2)$. Hallar su ecuación y verificar utilizando GeoGebra.
5. a) En un mismo sistema de ejes coordenados graficar la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y la recta de ecuación $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Determinar gráficamente si existe intersección entre ambas.
   b) Plantear y resolver analíticamente el sistema que permite hallar dicha intersección, si es que existe.
6. Determinar la ecuación canónica y graficar las siguientes elipses:

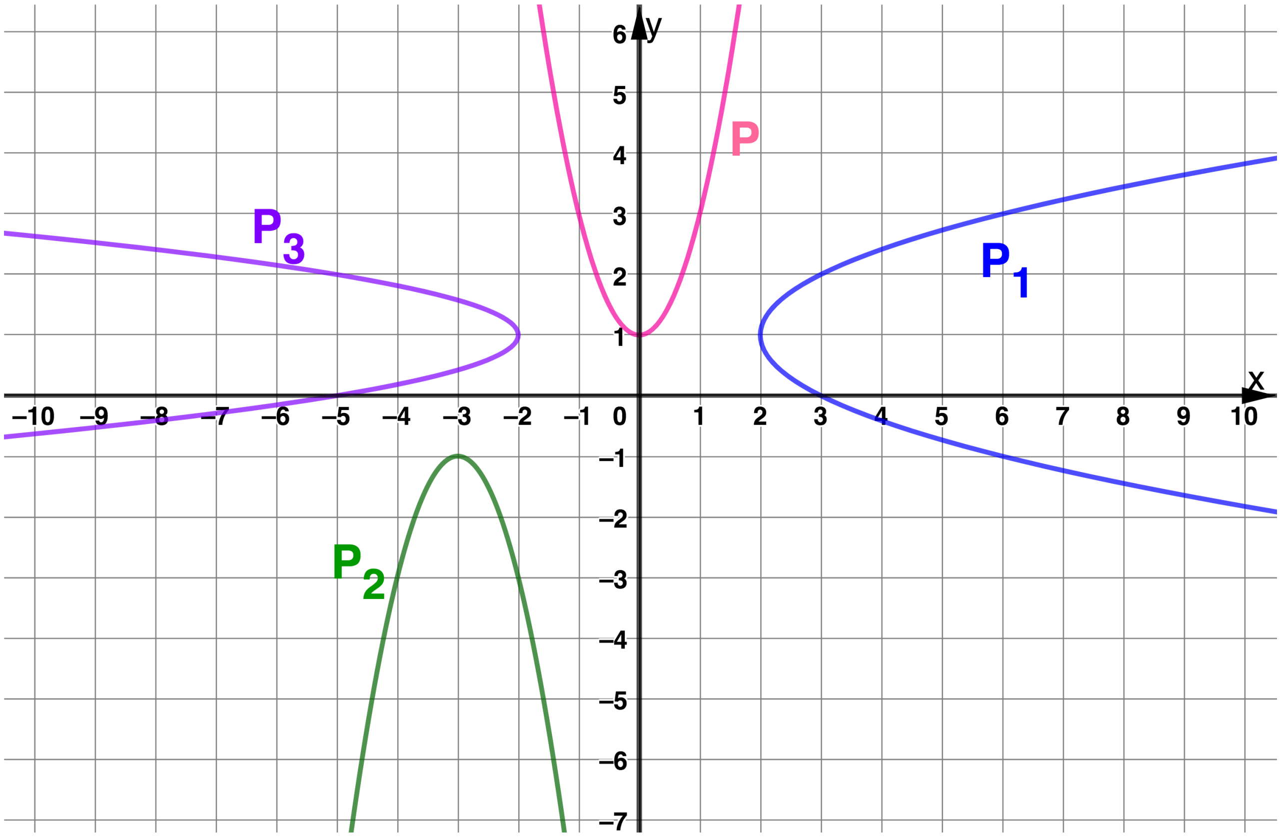
   a) $4x^2 + 25y^2 - 8x = 96$ b) $2x^2 + 7y^2 - 8x + 14y = 83$

5.3. Parábola

1. Determinar las ecuaciones de las parábolas P, P_1, P_2 y P_3, cuyas gráficas son las siguientes:
2. Determinar para cada una de las ecuaciones de las parábolas: las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría y graficar

   a) $y = 3x^2$ b) $-3y^2 = x$

   c) $-2(x-1)^2 = y + 4$ d) $\dfrac{1}{2}(y+1)^2 = x - 2$



3. a) Hallar la ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo al eje x que tenga vértice en $(1,-1)$ y que pase por el punto $(0,1)$.
   b) Hallar la ecuación de una parábola que tenga el mismo vértice y pase por el mismo punto que la parábola del inciso anterior pero que tenga eje de simetría paralelo al eje y.
   c) Graficar ambas parábolas utilizando GeoGebra.
4. Dados los siguientes sistemas para cada uno de ellos:

(I) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2x^2-y=1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} y-2x=4 \\ 2y^2-x=0 \end{cases}$

   a) Resolver el sistema. ¿Cuántas soluciones tiene? Indicarlas.
   b) Comprobar gráficamente la respuesta del inciso anterior.
5. Determinar la ecuación canónica y graficar las siguientes parábolas:

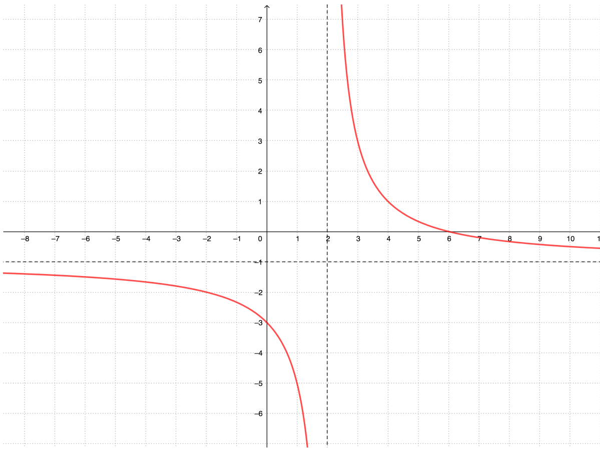
   a) $x^2-2x-y+1=0$ b) $2y^2-x+4y=-3$

6. Graficar en el plano el conjunto de puntos que verifiquen
   a) $A=\{(x,y):(x-1)^2=y+4 \;\wedge\; x>2\}$
   b) $B=\{(x,y):(y-1)^2=x \;\wedge\; x=1\}$
   c) $C=\{(x,y):y=x^2+3 \;\wedge\; y\leq 10\}$
   d) $D=\{(x,y):y=-x^2-1 \;\wedge\; x\geq 1\}$

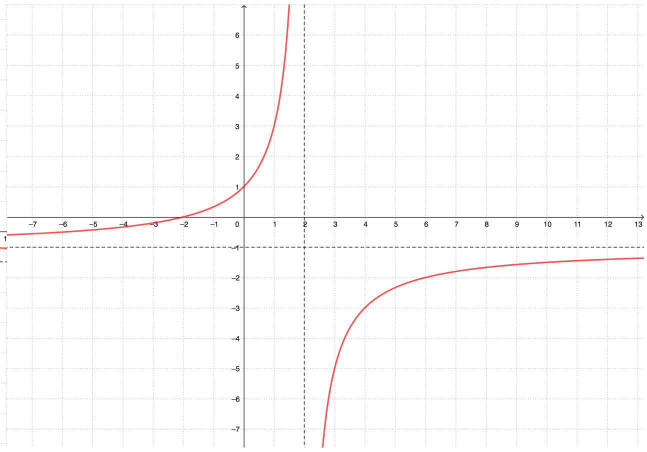
5.4. Hipérbola

1. Determinar las ecuaciones de las hipérbolas cuyos gráficos son los siguientes.

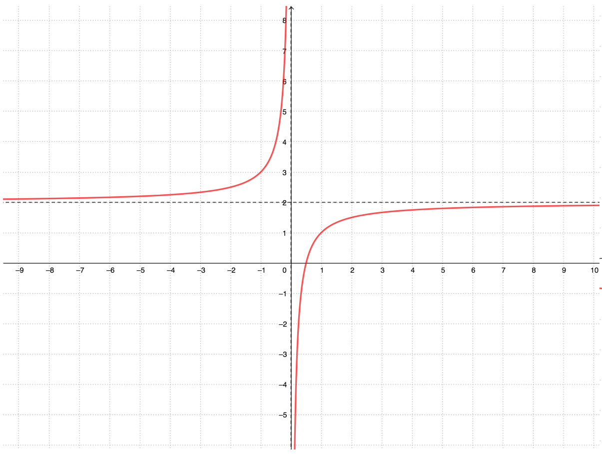
(I)



(II)



(III)



(IV)

2. Determinar para cada una de las siguientes ecuaciones de la hipérbola : las coordenadas del centro, las ecuaciones de sus asíntotas, las coordenadas de los vértices y graficar.

   a) $x.y = 4$
   b) $y = -\dfrac{1}{x}$
   c) $(y - 4)x = -1$
   d) $(y - 1)(x + 2) = 1$
   e) $y = \dfrac{1}{x - 2} + 2$
   f) $y + 2 = -\dfrac{4}{x + 1}$

3. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas tienen ecuaciones $x = 2$ e $y = -1$ y que pasa por el punto $(1, -3)$. Verificar el resultado obtenido utilizando GeoGebra.

4. Dada la hipérbola de ecuación $y.x = -1$ construir una recta de manera que:.

   a) La hipérbola y la recta se corten en un punto.
   b) La hipérbola y la recta no se corten.
   c) La hipérbola y la recta se corten en dos puntos.

Para cada caso plantear el sistema mixto correspondiente y resolverlo. Verificar su respuesta utilizando GeoGebra.

5. Graficar en el plano el conjunto de puntos que verifiquen:
   a) $A = \{(x,y) : (x-1)y = -4 \ \wedge \ x \geq 2\}$
   b) $B = \left\{(x,y) : y = \dfrac{4}{x-1} + 2 \ \wedge \ x < 2\right\}$
   c) $C = \{(x,y) : (y-1)x = 1 \ \wedge \ x \leq -1\}$

5.5. Ejercitación

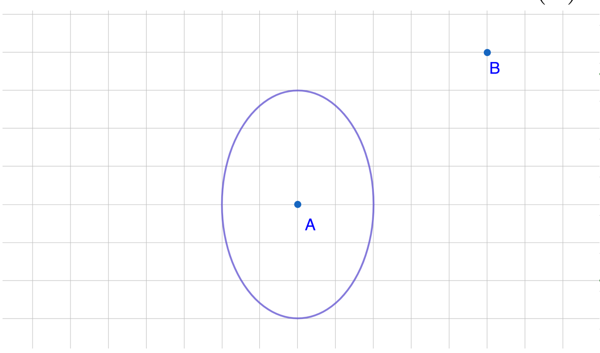
1. Dadas las siguientes ecuaciones determinar de que cónica se trata, dar sus elementos principales y graficar:
   a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$
   b) $x^2 + 2x + y = 2$
   c) $x(y+2) = 4$
   d) $x^2 + 9y^2 - 18y = 0$
   e) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y = 23$
   f) $xy + 4 = 0$
   g) $y^2 - 2x + 4y = 2$
   h) $y = \dfrac{-1}{x-2} + 3$

2. a) Mostrar que $P(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$ es un punto de intersección entre la recta de ecuación $12x - 4y = -17$ y la parábola de ecuación $y = 3x^2 + 6x + 5$.
   b) Encontrar gráficamente la intersección entre la recta y la parábola del inciso anterior utilizando GeoGebra. (Indicación: utilizar la herramienta intersección).

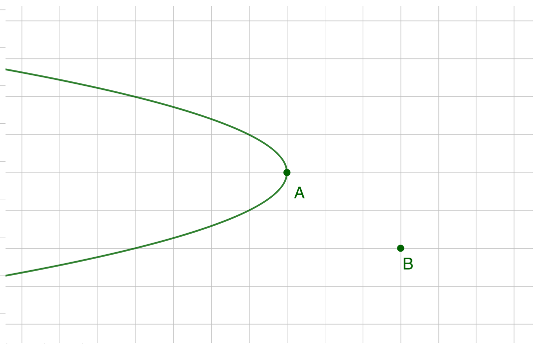
3. Hallar el radio de una circunferencia concéntrica a $x^2 + y^2 - 6y = 0$ que pase por el punto $(-1, 2)$. Escribir su ecuación canónica.

4. Para cada uno de los siguientes gráficos, escribir la ecuación de la cónica correspondiente si:
   a) El origen de coordenadas es el punto A.
   b) El origen de coordenadas es el punto B.

(I)



(II)



5. Dados los siguientes conjuntos de puntos del plano

   (I) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

   (II) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}$

   (III) $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge x^2 + y^2 > 1\}$

   (IV) $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4 \ \wedge \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1\right\}$

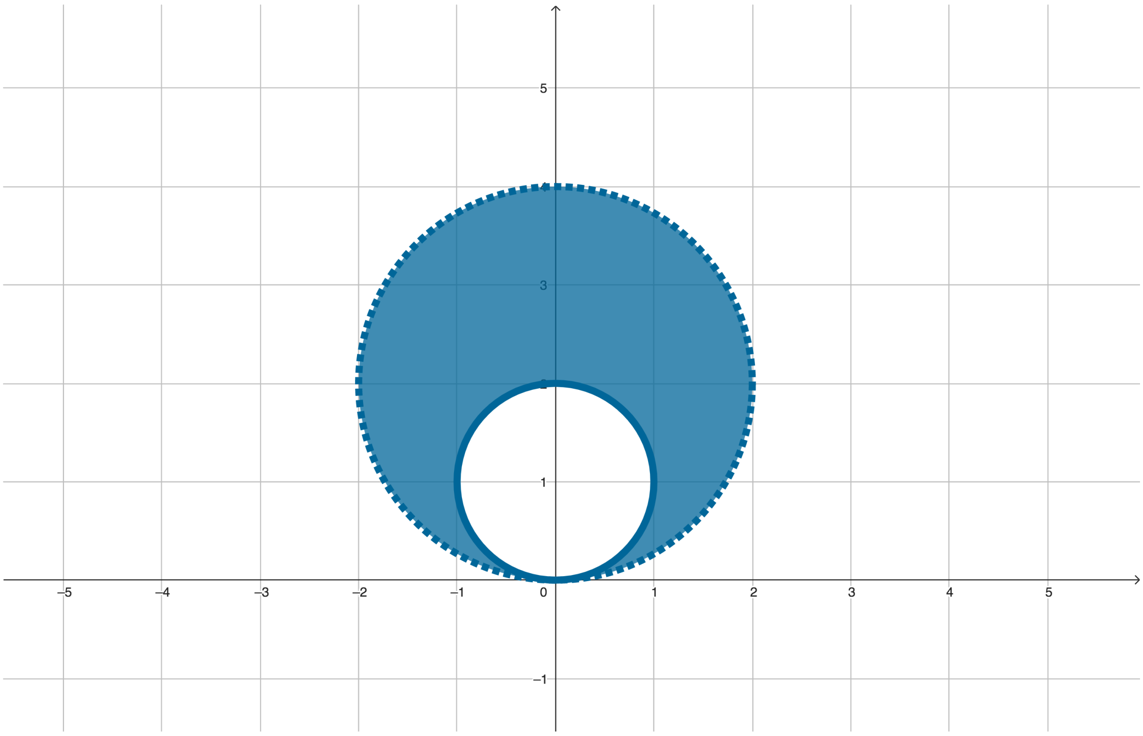
   (V) $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4 \ \wedge y \geq 0\}$

   a) Visualizar en GeoGebra cada uno de ellos.
   b) Graficar en la hoja y describir con palabras cada uno de los conjuntos anteriores.

6. Dada la la cónica $x^2 + 2x - 3 = y$.
   a) Indicar de que cónica se trata y dar sus elementos principales.
   b) Hallar analíticamente la intersección de dicha cónica con los ejes coordenados. Graficar

7. Dadas las siguientes cónicas $x^2 - 3y - 18 = 0$ y $x^2 + y^2 + 6y = 0$
   a) Indicar de que cónica se trata y dar sus elementos principales.
   b) Determinar gráficamente si existe intersección entre ellas.
   c) Si existe, determinar la intersección analíticamente.

8. Expresar por medio de desigualdades el siguiente conjunto del plano.



9. Utilizando GeoGebra responder:
   Dada la recta de ecuación $y = -x + b$ para que valores de b la recta corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ en :

   a) Dos puntos b) Un punto c) No se cortan

5.6. Respuestas

Circunferencia

1. a) $C(0,0), r=3$ b) $C(-1,0), r=\frac{1}{2}$ c) $C(1,-2), r=4$

2. (I) P_1 es exterior a la circunferencia
   (II) P_2 pertenece a la circunferencia
   (III) P_3 es interior a la circunferencia

3. Los valores de k son 3 y -5
4. $C:(x-6)^2+y^2=4$; $C_1:(x-2)^2+(y-2)^2=1$; $C_2:x^2+(y+3)^2=9$
5. a) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$
   b) $r=\sqrt{10}$; $x^2+(y-2)^2=10$
   c) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
6. Los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes coordenados son: $(0,\sqrt{3})$; $(0,-\sqrt{3})$; $(3,0)$ y $(-1,0)$
7. El punto de es $(1,1)$
8. a) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ b) $(x+1)^2+y^2=1$

Elipse

1. a) Semieje mayor$=3$ Semieje menor$=2$ Vértices $(3,0);(-3,0);(0,2),(0,-2)$ Centro$(0,0)$
   b) Semieje mayor$=3$ Semieje menor$=2$ Vértices $(4,0);(-2,0);(1,2),(1,-2)$ Centro$(1,0)$
   c) Semieje mayor$=3$ Semieje menor$=2$ Vértices $(3,0);(-1,0);(1,-3),(1,3)$ Centro$(1,0)$
   d) Semieje mayor$=4$ Semieje menor$=2$ Vértices $(3,2);(-5,2);(-1,4),(-1,0)$ Centro$(-1,2)$

2. $E:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ $E_1:\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ $E_2:\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$
3. Hay dos elipses que cumplen esa condición $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$ y $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$
4. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$
5. Los puntos de intersección son: $(2,0)$ y $(0,3)$
6. a) $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{49}+\dfrac{(y+1)^2}{14}=1$

Parábola

1. - P: $2x^2 = y - 1$
   - P_1: $(y-1)^2 = x - 2$
   - P_2: $-2(x+2)^2 = y + 1$
   - P_2: $-3(y-1)^2 = x + 2$

2. a) Vértice $(0,0)$; ecuación del eje de simetría $x = 0$

   b) Vértice $(0,0)$; ecuación del eje de simetría $y = 0$

   c) Vértices $(1,-4)$; ecuación del eje de simetría $x = 1$

   d) Vértices $(2,-1)$; ecuación del eje de simetría $y = -1$

3. a) $-\frac{1}{4}(y+1)^2 = x - 1$

   b) $2(x-1)^2 = y + 1$

4. (I) El sistema tiene dos soluciones $(1,1)$ y $(-1,1)$

   (II) El sistema no tiene solución.

5. a) $(x-1)^2 = y$ b) $2(y+1)^2 = x - 1$

Hipérbola

1. (I) $(x-2)(y+1) = 4$ (II) $(x-2)(y+1) = -4$

   (III) $x(y-2) = -1$ (IV) $xy = 9$

2. a) $C(0,0)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = 0$, $y = 0$; Vértices: $V_1(2,2), V_2(-2,-2)$

   b) $C(0,0)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = 0$, $y = 0$; Vértices: $V_1(1,-1), V_2(-1,1)$

   c) $C(0,4)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = 0$, $y = 4$; Vértices: $V_1(-1,5), V_2(1,3)$

   d) $C(-2,1)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = -2$, $y = 1$; Vértices: $V_1(-1,2), V_2(-3,0)$

   e) $C(2,2)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = 2$, $y = 2$; Vértices: $V_1(3,3), V_2(1,1)$

   f) $C(-1,-2)$; Ecuaciones de las asíntotas $x = -1$, $y = -2$; Vértices: $V_1(1,-4), V_2(-3,0)$

3. $(x-2)(y+1) = 2$

Ejercitación

1. a) Circunferencia $(x-2)^2+(y+3)^2=16$
   b) Parábola $-(x+1)^2=y-3$
   c) Hipérbola
   d) Elipse $\frac{x^2}{9}+(y-1)^2=1$
   e) Elipse $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$
   f) Hipérbola $xy=-4$
   g) Parábola $\frac{1}{2}(y+2)^2=x+3$
   h) Hipérbola $(x-2)(y-3)=-1$

2.

3. $r=\sqrt{2}$; $\qquad x^2+(y-3)^2=2$

4. (I) El origen en A $\quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $\qquad$ El origen en B $\quad \dfrac{(x+5)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$
   (II) El origen en A $\quad -y^2=x$ $\qquad$ El origen en B $\quad -(y-2)^2=x+3$

5.

6. a) Parábola $(x+1)^2=y+4$, $V(-1,-4)$, ecuación del eje de simetría $x=-1$
   b) Puntos de intersección con los ejes $(0,-1)$, $\quad (1,0) \quad$ y $(-3,0)$

7. Las cónicas son la parábola de ecuación $\frac{1}{3}x^2=y+6$ y la circunferencia de ecuación $x^2+(y+3)^2=9$. Tienen intersección en $(3,-3)$ y $(-3,-3)$

8. $\{(x,y): x^2+(y-2)^2<4 \ \wedge x^2+(y-1)^2\geq 1\}$

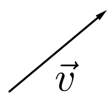
9. a) $b\in(-2,2)$ $\qquad$ b) $b=2$ o $b=-2$ $\qquad$ c) $b\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Práctica 6

Geometría: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

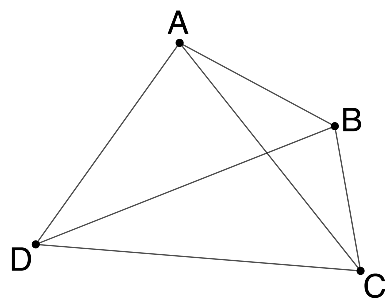
6.1. Vectores en $\mathbb{R}^2$

1. Copiar el vector $\vec{v}$ y usarlo para graficar los vectores que se indican:



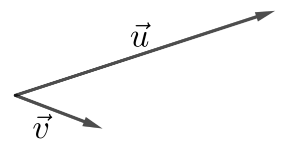
   a) Un vector con igual dirección y sentido que $\vec{v}$ de módulo mayor.
   b) Un vector con igual dirección y sentido que $\vec{v}$ de módulo menor.
   c) Un vector con igual dirección y módulo que $\vec{v}$ con sentido distinto.
   d) Un vector con igual dirección que $\vec{v}$ con sentido distinto y de módulo mayor.
   e) Un vector con distinta dirección que $\vec{v}$ con módulo igual.

2. A partir de la siguiente figura, realizar las operaciones indicadas de manera gráfica y expresar el resultado como un solo vector.



   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ - $\overrightarrow{BC}$

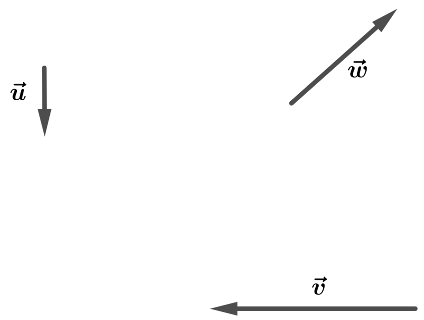
3. Dado el siguiente gráfico:



Copiar los vectores de la figura y utilizarlos para graficar los siguientes vectores:

(I) $\vec{u} + \vec{v}$ (II) $\vec{u}$ - $\vec{v}$ (III) $-\frac{1}{2}\vec{u}$ (IV) $\vec{u}$ - $3\vec{v}$

4. Dado el gráfico:



a) Graficar un vector $\vec{r}$ de modo que $\vec{u} + \vec{r} = \vec{v}$

b) Graficar un vector $\vec{s}$ de modo que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{s}$

5. Dado el vector $\vec{v} = \langle 1, 2 \rangle$

a) Representar en un mismo gráfico los siguientes vectores:

(I) $\vec{v}$ (II) $2\vec{v}$ (III) $-\vec{v}$ (IV) $-\dfrac{1}{2}\vec{v}$

b) Comparar la dirección, el sentido y el módulo de cada vector con la dirección, el sentido y el módulo del vector $\vec{v}$.

c) Dar las componentes de cada uno.

6. Graficar el vector $\vec{u} = \langle -2, 4 \rangle$ considerando:

a) el origen en $P(1, 1)$

b) el extremo en $Q(-2, -3)$

7. Dados los puntos $P(-1,3)$, $Q(7,b)$ y el vector $\vec{w} = \langle a, -2\rangle$ hallar los valores de a y b de modo que se verifique que $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$

8. Hallar el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ de los ejercicios 6 y 7. Escribirlos en su descomposición canónica.

9. Dados los puntos $P(-1,2)$ y $Q(2,-3)$ y los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$

   a) Graficar cada vector.
   b) Calcular las componentes de cada vector.
   c) Escribirlos en su descomposición canónica.
   d) Calcular para cada vector el módulo y el ángulo que forma con el eje x positivo.

10. Dados los vectores:

$$\vec{r} = \langle -2, 4\rangle \qquad \vec{s} = \langle -2, -4\rangle \qquad \vec{u} = \langle -1, 2\rangle \qquad \vec{v} = \langle 3, 6\rangle \qquad \vec{w} = \langle 2, -4\rangle$$

   a) Graficar en un mismo plano cada vector y a partir del gráfico responder:

      (I) ¿Cuáles de los vectores tienen igual módulo?
      (II) ¿Cuáles de los vectores tienen igual dirección?
      (III) Para los vectores que tienen igual dirección: ¿cuáles tienen el mismo sentido y cuáles sentidos opuestos?

   b) Comprobar sus respuestas anteriores calculando, para cada vector, el módulo y el ángulo que forma con el eje positivo de las x.

11. Indicar cuáles de los siguientes vectores son unitarios:

   a) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ b) $\vec{v} = \vec{i}$ c) $\vec{w} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

12. Dado el vector $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j}$ encontrar un vector que cumpla la condición pedida, graficarlo y justificar su elección analíticamente.

   a) Sea colineal.
   b) Tenga igual dirección y sentido contrario.
   c) Sea colineal y de igual módulo.
   d) Tenga igual dirección y sea unitario.
   e) Tenga igual dirección y módulo igual a 3.
   f) Sea colineal, tenga igual sentido y módulo igual a 3.
   g) Tenga igual dirección, distinto sentido y módulo igual a 3.

13. ¿Cuáles incisos del ejercicio anterior admiten más de una solución? Explique su respuesta.

14. En cada caso hallar las componentes de un vector que verifique que:

   a) Forma un ángulo de 30° con el eje positivo de las x y tiene módulo igual a 2. Graficar.

b) Forma un ángulo de $-150°$ con el eje positivo de las x y tiene módulo igual a $\sqrt{3}$. Graficar.

c) Forma un ángulo de $90°$con el eje positivo de las x y tiene módulo igual a 2

15. Dados los siguientes vectores, resolver las operaciones pedidas.

$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{v} = \langle -1, 0 \rangle$

$\vec{w}$ con módulo igual a $\sqrt{2}$ y que forma un ángulo de $225°$ con el eje x positivo.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{w} - \vec{v}$ c) $2\vec{u} - \vec{v}$

d) $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$ e) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

16. Dadas las fuerzas $\vec{F_1}$ de $20N$ en la dirección del eje x positivo y $\vec{F_2}$ de $12N$ que forma un ángulo de $45°$ con el eje positivo de las y y se encuentra en el segundo cuadrante:

a) Calcular la fuerza resultante $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$. Expresarla mediante su módulo y el ángulo que forma con el eje x positivo

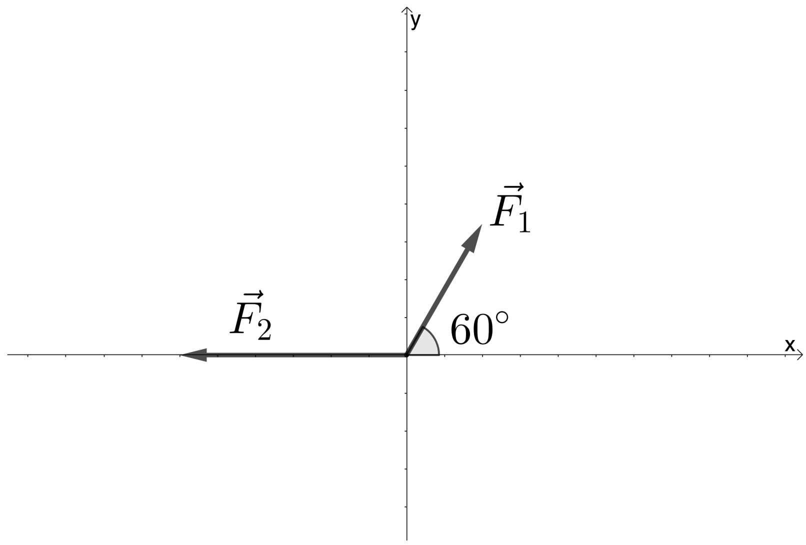
b) Realizar un gráfico aproximado de la situación.

17. Idem al ejercicio anterior si:

$\vec{F_1}$ forma un ángulo de $60°$ con el eje positivo de las x y $|\vec{F_1}| = 20N$

$\vec{F_2}$ forma un ángulo de $300°$ con el eje positivo de las x y tiene el mismo módulo que $\vec{F_1}$

18. En el gráfico los vectores $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ representan fuerzas. Encontrar la magnitud (módulo) de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo, si se sabe que $|\vec{F_1}| = 200N$ y $|\vec{F_2}| = 300N$



6.2. Vectores en $\mathbb{R}^3$

1. Dado el vector $\vec{w} = \langle -1, 3, 2\rangle$
   a) Escribir dicho vector en su descomposición canónica
   b) Calcular su módulo.
   c) Hallar un vector que tenga igual dirección que $\vec{w}$ y que sea unitario. Justificar
   d) Hallar un vector que tenga igual dirección y sentido que $\vec{w}$ con módulo igual a 3. Justificar.
   e) Graficar el vector $\vec{w}$ y los vectores obtenidos utilizando GeoGebra

2. Sean los puntos $P(0, 3, 4)$ y $Q(1, 1, 1)$
   a) Escribir al vector $\overrightarrow{PQ}$ en su descomposición canónica
   b) Calcular su módulo.
   c) Graficar al vector $\overrightarrow{PQ}$ utilizando GeoGebra

3. Dados los puntos $P(b, 1, c)$, $Q(a, c, b)$ y el vector $\vec{w} = \langle 2, b, 2a\rangle$ hallar los valores de a, b y c de modo que se verifique que $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$

4. Sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y las siguientes operaciones entre ellos:

   a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ c) $|\vec{u}|(\vec{v} \cdot \vec{w})$
   d) $|\vec{u}| \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ e) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ f) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

   ¿Cuáles de las operaciones carecen de sentido? Justificar. Para las demás indicar si el resultado es un vector o un escalar.

5. Realizar las operaciones posibles del ejercicio anterior si:

   $\vec{u} = \langle -1, 0, 3\rangle$ $\vec{v} = \langle 5, -3, 2\rangle$ $\vec{w} = \langle 0, 1, -1\rangle$

6. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ determinar el ángulo entre ellos. ¿Cuáles son ortogonales entre sí?

   $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{s} = -3\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{u} = 2\vec{k}$

7. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ determinar cuáles de ellos tienen igual dirección.

   $\vec{r} = \langle 6, 8, 4\rangle$ $\vec{s} = \langle 3, -4, 2\rangle$ $\vec{u} = \langle -6, 8, -4\rangle$ $\vec{v} = \langle \frac{3}{2}, -2, 1\rangle$

   Entre los vectores que tienen igual dirección ¿Cuáles tienen igual sentido?

8. Representar en un mismo gráfico los vectores:
   a) $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{s} = 3\vec{k}$, $\vec{r} \times \vec{s}$ y $\vec{s} \times \vec{r}$
   b) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = -2\vec{j}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$

9. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y las siguientes operaciones entre ellos:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$ c) $|\vec{u}|(\vec{v} + \vec{w})$

d) $|\vec{u}| \times (\vec{v} + \vec{w})$ e) $(\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{w}$ f) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + (\vec{w} \times \vec{w}))$

¿Cuáles de las operaciones carecen de sentido? Justificar. Para las demás indicar si el resultado es un vector o un escalar.

10. Realizar las operaciones posibles del ejercicio anterior si:

$\vec{u} = \langle -4, 3, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$ $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$

11. Dados los vectores $\vec{v} = \langle 1, 3t, -2 \rangle$ y $\vec{w} = \langle -2, -12, 2t \rangle$ hallar, en cada caso, el valor de t de modo que:

a) Sean ortogonales entre sí.

b) Sean colineales.

c) El producto vectorial entre ellos sea igual a $8\vec{j} - 24\vec{k}$

12. Dado los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{k}$

a) Hallar un vector $\vec{w}$ ortogonal con $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Hallar dos vectores unitarios que sean ortogonales con $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) Hallar dos vectores de módulo 3 que sean ortogonales con $\vec{u}$ y $\vec{v}$

13. *a*) Hallar los valores de t de modo que los vectores $\vec{r} = t\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{s} = \langle t^2 + 1, t, 0 \rangle$ sean ortogonales entre sí.

b) Graficar las soluciones halladas utilizando GeoGebra

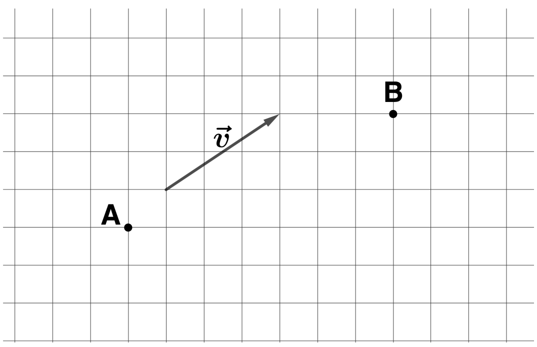
14. Dado el vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

a) Calcular $\vec{u}.\vec{u}$

b) Calcular $\vec{u} \times \vec{u}$

6.3. Ejercitación

1. Dado el siguiente gráfico.



a) Dar las coordenadas del punto inicial y el punto final del vector $\vec{v}$ y también sus componentes si el origen de coordenadas está en A.

b) Idem a) si el origen está en B

2. Dado los vectores $\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 3\vec{k}$ calcular las las operaciones que se indican

   a) $\dfrac{1}{3}\vec{v} - \vec{u}$ b) $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{u}$ c) $2\vec{u} \times \dfrac{1}{3}\vec{v}$

3. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$

   $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ $\vec{s} = \langle 0, -3, 0\rangle$ $\vec{u} = \langle -2, 1, -1\rangle$ $\vec{v} = 2\vec{i}$

   y las siguientes operaciones entre ellos

   a) $(\vec{r} \times \vec{v}) + 2\vec{s}$ b) $(\vec{r}\ .\ \vec{u}) \times \vec{v}$

   c) $(\vec{r} \times \vec{s}) \cdot \vec{u}$ d) $\vec{u} \times \vec{r} + \vec{v} \times \vec{s}$

   ¿Cuáles de las operaciones carecen de sentido? Justificar. Para las demás indicar si el resultado es un vector o un escalar y luego calcularlo.

4. Dado el vector $\vec{v} = \left\langle t, \dfrac{3}{5} \right\rangle$ hallar el valor de t de modo que $\vec{v}$ sea unitario.

5. Hallar un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ de modo que $\vec{v} - 4\vec{i} = 2\vec{j}$ y expresarlo mediante su módulo y el ángulo que forma con el eje x positivo.

6. *a*) Hallar las componentes de un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ de modo que sea ortogonal al vector $\vec{w} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ y tenga módulo 5.

   b) Se sabe que un vector $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ verifica que es ortogonal con $\langle 1, 1\rangle$ y que el producto escalar de $\vec{w}$ con el vector $\langle 4, 3\rangle$ es igual a -2. Hallar $\vec{w}$ y expresarlo mediante su módulo y el ángulo que forma con el eje x positivo.

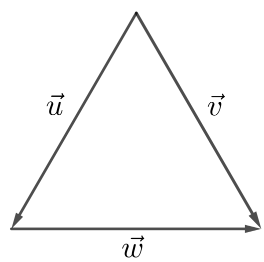
7. Para cada uno de los vectores dados hallar dos vectores ortogonales y dos vectores colineales a dichos vectores

   a) $\vec{v} = \langle -1, 3\rangle$ b) $\vec{w} = \langle 2, 4, 1\rangle$

8. Hallar las componentes de un vector del plano que tiene módulo 2 y forma un ángulo de 120° con el eje positivo de las x ¿A qué cuadrante pertenece el vector?

9. Dado el vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Hallar un vector $\vec{v}$ colineal con $\vec{u}$ de modo que se verifique que $\vec{u}.\vec{v} = 2$

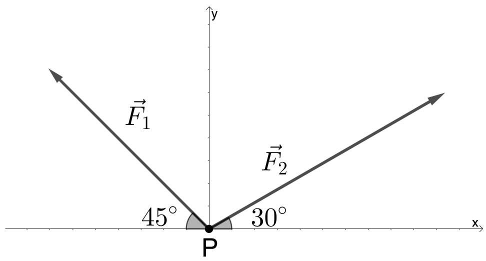
10. Dado el gráfico:



Si se sabe que $\vec{u}$ es unitario y que los vectores forman un triángulo equilátero hallar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

11. Dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ de $10N$ y $12N$ actúan sobre un objeto que se encuentra en un punto P, como muestra la figura. Hallar la fuerza resultante $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, expresada mediante su módulo y el ángulo que forma con el eje positivo de las x.



12. Dados $\vec{r} = \langle t, 8\rangle$ y $\vec{s} = \langle t, -2\rangle$ con t escalar, hallar t tal $\vec{r}$ y $\vec{s}$ sean ortogonales. Graficar los dos vectores.

13. Dado el vector $\vec{u} = \langle -1, \sqrt{2}, 1\rangle$ hallar

    a) Un vector $\vec{r}$ con igual dirección y distinto sentido que $\vec{r}$ de módulo igual a 8

    b) Hallar el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{r}$

14. Dado el vector $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

    a) Muestre que $\vec{u} \times \vec{u}$ es igual al vector nulo.

    b) Muestre que $\vec{u}\ .\vec{u}$ es igual al módulo de $\vec{u}$ elevado al cuadrado

6.4. Respuestas

Vectores en $\mathbb{R}^2$

		componentes	módulo	ángulo con la horizontal
	$\vec{v}$	$\langle 1, 2\rangle$	$\sqrt{5}$	$\approx 63^\circ\, 26'$
5.	$2\vec{v}$	$\langle 2, 4\rangle$	$2\sqrt{5}$	$\approx 63^\circ\, 26'$
	$-\vec{v}$	$\langle -1, -2\rangle$	$\sqrt{5}$	$\approx 243^\circ\, 26'$
	$-\frac{1}{2}\vec{v}$	$\langle -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$\approx 243^\circ\, 26'$

7. $a = 8$ y $b = 1$

8. $|\vec{u}| = \sqrt{20}$, $|\vec{w}| = \sqrt{68}$, $\vec{u} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{w} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$

		componentes	descomposición canónica	módulo	ángulo con la horizontal
9.	$\overrightarrow{PQ}$	$\langle 3, -5\rangle$	$3\vec{i} - 5\vec{j}$	$\sqrt{34}$	$\approx 300^\circ, 96$
	$\overrightarrow{QP}$	$\langle -3, 5\rangle$	$-3\vec{i} + 5\vec{j}$	$\sqrt{34}$	$\approx 120^\circ, 96$

10. (I) $\vec{r}, \vec{s}$ y $\vec{w}$
    (II) $\vec{r}, \vec{u}$ y $\vec{w}$ tienen igual dirección
    $\vec{s}$ y $\vec{v}$ tienen igual dirección
    (III) $\vec{r}, \vec{u}$ tienen igual sentido
    $\vec{r}, \vec{u}$ tienen distinto sentido con $\vec{w}$
    $\vec{s}$ y $\vec{v}$ tienen sentido distinto

11. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son unitarios

12. *a*) Cualquier vector de la forma $\langle t, 3t\rangle$, con t número real.
    b) Cualquier vector de la forma $\langle t, 3t\rangle$, con t número real negativo.
    c) Pueden ser $\langle -1, -3\rangle$ o $\langle 1, 3\rangle$
    d) Pueden ser $\left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right\rangle$ o $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right\rangle$
    e) Pueden ser $\left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{9}{\sqrt{10}} \right\rangle$ o $\left\langle -\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{\sqrt{10}} \right\rangle$
    f) $\left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{9}{\sqrt{10}} \right\rangle$
    g) $\left\langle -\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{9}{\sqrt{10}} \right\rangle$

14. a) $\langle \sqrt{3}, 1\rangle$ b) $\langle -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$ c) $\langle 0, 2\rangle$

15. a) $\langle 0, 2\rangle$ b) $\langle 0, -1\rangle$ c) $\langle 3, 4\rangle$
    d) $\langle \frac{5}{2}, \frac{9}{2}\rangle$ e) $\langle 1, 3\rangle$

16. $|\vec{R}| \approx 14,30N$; el ángulo con el eje x positivo es aproximadamente $36°, 38$

17. $\vec{R} = \langle 20, 0\rangle$; $|\vec{R}| = 20N$; el ángulo con el eje x positivo es $0°$

18. $|\vec{R}| = \sqrt{70000}N \approx 264,57N$; el ángulo con el eje x positivo es aproximadamente $139°, 10$

Vectores en $\mathbb{R}^3$

1. a) $\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; b) $|\vec{w}| = \sqrt{14}$
   c) $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right\rangle$ o $\left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right\rangle$ d) $\left\langle -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}} \right\rangle$

2. $\overrightarrow{PQ} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14}$

3. $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$

4. Las operaciones que carecen de sentido son *a*); *d*) y *e*)

5. *b*) $\langle 0, 1, -1\rangle$; *c*) $-5\sqrt{10}$; *f*) -2

6. El ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{s}$ es aproximadamente $148,° 05$
   El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{s}$ es aproximadamente $71,° 5$
   El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{r}$ es $90,°$
   Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{u}$ son ortogonales entre sí.

7. Los vectores $\vec{s}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y $\vec{s}$ y $\vec{v}$ son de igual sentido.
9. Carecen de sentido las operaciones $b)$ y $d)$
10. $a)\ -8$, $c)\ 10\,\vec{j}$, $e)\ -4\,\vec{i}-4\,\vec{j}-10\,\vec{k}$, $f)\,2$
11. $a)\,t=-\frac{1}{20}$; $b)\,t=2$; $b)\,t=-2$
12. $a)$ El vector $\vec{w}$ será cualquier vector colineal con: $\langle 3,-2,-3\rangle$
    $b)$ $\left\langle \frac{3}{\sqrt{22}},-\frac{2}{\sqrt{22}},-\frac{3}{\sqrt{22}}\right\rangle$ o $\left\langle -\frac{3}{\sqrt{22}},\frac{2}{\sqrt{22}},\frac{3}{\sqrt{22}}\right\rangle$
    $c)$ $\left\langle \frac{9}{\sqrt{22}},-\frac{6}{\sqrt{22}},-\frac{9}{\sqrt{22}}\right\rangle$ o $\left\langle -\frac{9}{\sqrt{22}},\frac{6}{\sqrt{22}},\frac{9}{\sqrt{22}}\right\rangle$
13. t puede tomar los valores $0, 2$ o -2.
14. $a)\,29$; $b)\,\langle 0,0,0\rangle$

Ejercitación

1. a) $O(1,1)$, $P(4,3)$, $\overrightarrow{OP}=\vec{v}=\langle 3,2\rangle$
   b) $O(-6,-2)$, $P(-3,0)$, $\overrightarrow{OP}=\vec{v}=\langle 3,2\rangle$
2. a) $-2\vec{j}$ b) 8 c) $4\vec{i}$
3. Carece de sentido la operación $b)$
   $a)\,\langle 0,0,-2\rangle$ $c)\,-15$ $d)\ \langle 4,5,-9\rangle$
4. t puede tomar los valores $\frac{4}{5}$ o $-\frac{4}{5}$
5. $\vec{v}=4\vec{i}+2\vec{j}$ tiene módulo $\sqrt{20}$ y forma un ángulo de aproximadamente $26°,57$
6. $a)$ Hay dos vectores que cumplen la condición $\langle 4,3\rangle$ y $\langle -4,-3\rangle$
   $b)$ El vector $\vec{w}$ tiene módulo $\sqrt{8}$ y el ángulo que forma con el eje x es de $135°$
7. $a)$ Los vectores ortogonales son los vectores de la forma $\langle a,b\rangle$ con $-a+3b=0$.
   Los vectores colineales son de la forma $\langle -t,3t\rangle$ con t un número real.
   $b)$ Los vectores ortogonales son los vectores $\langle a,b,c\rangle$ tal que $2a+4b+c=0$ por ejemplo:$\langle 1,1,-6\rangle$. Los vectores colineales son de la forma $\langle 2t,4t,t\rangle$ con t un número real.
8. $\langle -1,\sqrt{3}\rangle$
9. $\vec{v}=\frac{2}{29}\vec{u}$
10. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$
11. $|\vec{F}|\approx 13,48N$ y el ángulo que forma con el eje positivo de las x es aproximadamente $75°,47$
12. $t=2$ o $t=-2$
13. $a)$ $\langle 4,-4\sqrt{2},4\rangle$
    $b)$ $120°$

Práctica 7

Geometría: Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

- Todas las respuestas deben estar cuidadosamente justificadas.
- Se recomienda verificar gráficamente las soluciones halladas con GeoGebra dado que al estar trabajando en $\mathbb{R}^3$ se pueden visualizar mejor los resultados obtenidos.

7.1. Rectas

1. Dada la recta L cuyas ecuaciones paramétricas son $L: \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, decidir si los puntos $P_1(0, -2, 1)$ y $P_2(2, 0, -2)$ pertenecen L.

2. Dar dos puntos que pertenezcan a la recta de ecuación $\langle x,\ y,\ z\rangle = t\langle 5,\ 0,\ 2\rangle + \langle 3,\ 1,\ 6\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$.

3. Dada la recta de ecuación $L: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, dar las componentes de dos vectores que tengan la misma dirección que la recta.

4. Escribir la ecuación vectorial de la recta que tiene como vector director a $\vec{v} = \langle 3,\ 2,\ 4\rangle$ y que pasa por el punto $P(2, 3, 5)$.

5. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, -3, 0)$ y $P_2(2, 4, 1)$

6. Escribir la ecuación de la recta que pase por el punto $P(1, 4, 0)$ y sea paralela al eje z.

7. Dar las ecuaciones paramétricas para cada uno de los ejes coordenados cartesianos de $\mathbb{R}^3$.

8. Dada la recta L_1 de ecuaciones paramétricas $L_1: \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = -2t \\ z = t - 2 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y la recta L_2 que pasa por el punto $(2, 0, -2)$ y tiene vector director a $\vec{v} = \langle 1,\ 1,\ -1\rangle$, decidir si L_1 y L_2 son paralelas, coincidentes, perpendiculares, se cortan y/o son alabeadas. Si corresponde hallar la intersección.

9. Dada la recta L_1 que pasa por el punto $P_1(1, -2, 0)$ y tiene vector director a $\vec{v_1} = \langle 1,\ 1,\ 2\rangle$ y la recta L_2 que pasa por el punto $P_2(-2, -1, 2)$ y tiene vector director a $\vec{v_2} = \langle 2,\ 1,\ 2\rangle$ decidir si L_1 y L_2 son paralelas, coincidentes, perpendiculares, se cortan y/o son alabeadas. Si corresponde hallar la intersección.

10. Dada la recta L_1 de ecuaciones paramétricas $L_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y la recta L_2 que pasa por el punto $P(1, 3, -2)$ y es paralela al eje x, decidir si L_1 y L_2 son paralelas, coincidentes, perpendiculares, se cortan y/o son alabeadas. Si corresponde hallar la intersección.

11. Dada la recta L de ecuación $\langle x,\ y,\ z\rangle = t\langle 1,\ 2,\ -1\rangle + \langle 1,\ 1,\ 1\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$, dar la ecuación de otra recta paralela a L y que pase por el origen de coordenadas.

12. Dada la recta L_1 que pasa por los puntos $P_1(-3, 1, 7)$ y $P_2(-2, -1, 4)$, dar la ecuación de otra recta que no sea perpendicular a L_1 y que la corte.

7.2. Planos

1. Decidir si los puntos $P_1(1, -2, 4)$ y $P_2(2, 1, 2)$ pertenecen al plano de ecuación $5x + 8y - 10z = -2$.

2. Dar dos puntos que pertenezcan al plano de ecuación: $\langle 1,\ 1,\ 3\rangle \cdot \langle x,\ y - 1,\ z - 2\rangle = 0$.

3. Dado el plano de ecuación $2x - y + 4z = 8$, dar las componentes de dos vectores ortogonales al plano.

4. Dar la ecuación cartesiana del plano que tiene vector normal $\vec{n} = \langle 3,\ 2,\ 4\rangle$ y pasa por el punto $P(2, 3, 4)$.

5. Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1, -1, 8)$, $P_2(4, 2, 11)$ y $P_3(0, -3, 5)$.

6. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ ¿Qué representan en $\mathbb{R}^3$ cada una de las ecuaciones? ¿Y la solución?

7. Decidir si el plano π_1 de ecuación $2x + y - 8 = 0$ y el plano π_2 que pasa por el punto $P(1, 3, 8)$ y tiene vector normal $\vec{n} = \langle -1,\ 2,\ -1\rangle$, son paralelos, coincidentes, perpendiculares o ninguna de las opciones anteriores. Si corresponde hallar la intersección.

8. Decidir si el plano π_1 de ecuación $x - 3y + 6z = 3$ y el plano π_2 de ecuación $x + 3y - z = 3$ son paralelos, coincidentes, perpendiculares o ninguna de las opciones anteriores. Si corresponde hallar la intersección.

9. Dar la ecuación de un plano que sea perpendicular al plano de ecuación $-(x - 1) + 2(y + 1) - (z - 2) = 0$.

10. Dar la ecuación del plano que pase por el punto $P(1, 5, 6)$ y es paralelo al plano que pasa por los puntos $P_1(1, 3, 4)$, $P_2(-1, 1, 5)$ y $P_3(6, 2, 3)$.

7.3. Rectas y Planos

1. Dado el plano π_1 de ecuación $-2x + 2y - 3z = 7$ y la recta L_1 que pasa por los puntos $P_1(4, 5, 2)$ y $P_2(3, 6, \frac{1}{2})$, decidir si la recta es paralela al plano, está sobre el plano, es perpendicular al plano o ninguna de las anteriores. Si corresponde hallar la intersección.

2. Dado el plano π_2 de ecuación $x - 3y + 4z - 2 = 0$ y la recta L_2 de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -2t - 1 \\ z = -3t - 2 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, decidir si la recta es paralela al plano, está sobre el plano, es perpendicular al plano o ninguna de las anteriores. Si corresponde hallar la intersección.

3. Dado el plano π_3 de ecuación $x - 3y + 7z - 2 = 0$ y la recta L_3 cuyo vector director es $\vec{v} = \langle 2,\ 3,\ 1\rangle$ y pasa por el punto $P_3(2, 0, 0)$, decidir si la recta es paralela al plano, está sobre el plano, es perpendicular al plano o ninguna de las anteriores. Si corresponde hallar la intersección.

4. Determinar la ecuación del plano que contiene a las siguientes rectas
$$L_1 : \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x = 2s + 1 \\ y = s + 1 \\ z = 2s - 2 \end{cases} \text{ con } s \in \mathbb{R}$$

5. *a*) Determinar las ecuaciones de los planos coordenados.
   b) Dar dos puntos pertenecientes a cada uno de ellos.

6. Determinar la ecuación del plano que contiene a las siguientes rectas
$$L_3 : \begin{cases} x = -5t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_4 : \begin{cases} x = -5s + 1 \\ y = s + 1 \\ z = -s - 2 \end{cases} \text{ con } s \in \mathbb{R}$$

7. Determinar un plano paralelo a la recta de ecuación $\langle x,\ y,\ z\rangle = t\langle 2,\ -1,\ 4\rangle + \langle 0,\ 5,\ 1\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$.

8. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ es paralela al plano de ecuación $2x + 2y + 2z = 4$ y perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3t + 1 \\ z = 6t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

7.4. Ejercitación

1. a) Interpretar qué representa $x = 2$ en $\mathbb{R}$ y graficar.
   b) Interpretar qué representa $x = 2$ en $\mathbb{R}^2$ y graficar.
   c) Interpretar qué representa $x = 2$ en $\mathbb{R}^3$ y graficar.

2. Dada la recta de ecuación $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3t + 1 \\ z = 6t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, hallar, si existen, los puntos de intersección con los planos coordenados.

3. Dado el plano de ecuación $-x+2y+3z=6$, hallar, si existen, los puntos de intersección con los ejes coordenados.

4. Idem el ejercicio anterior si el plano tiene ecuación $x-2y=4$.

5. Dados los siguientes planos:

   a) π_1: $3x+6y-3z=3$
   b) π_2: $\langle 4,\,-12,\,8\rangle\cdot\langle x-1,\,y,\,z-\frac{1}{8}\rangle=0$
   c) π_3: corta a los ejes coordenados en $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,-2)$
   d) π_4: $z=x+2y-2$

   ¿Cuáles son paralelos? ¿Algunos de ellos son coincidentes? Justificar.

6. Dadas las siguientes rectas:

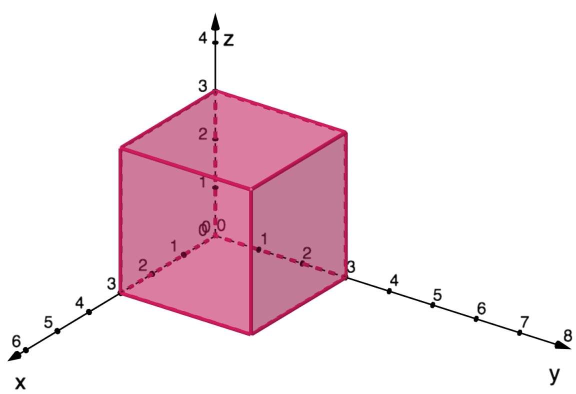
   a) $L_1:\begin{cases} x=1+6t \\ y=-1-3t \quad \text{con } t\in\mathbb{R} \\ z=12t+5 \end{cases}$
   b) L_2: $\langle x,\,y,\,z\rangle=t\langle -4,\,2,\,-8\rangle+\langle 3,\,1,\,5\rangle,$ con $t\in\mathbb{R}$
   c) L_3: Pasa por los puntos $(-1,0,1)$ y $(3,-2,9)$

   ¿Cuáles son paralelas? ¿Algunas de ellas son coincidentes? Justificar.

7. Mostrar que el plano $z=1$ es paralelo a la recta de ecuación $L:\begin{cases} x=2 \\ y=3t \\ z=0 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$. Verificar mediante un gráfico.

8. Mostrar que el plano $z=1$ es perpendicular a la recta de ecuación $L:\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$. Hallar la intersección entre dicho plano y la recta. Verificar mediante un gráfico.

9. Dado el siguiente gráfico:



a) Dar las ecuaciones de los planos que contienen a las caras del cubo.

b) Dar las ecuaciones paramétricas de las rectas que contienen a las aristas del cubo y que no están en los planos coordenados.

10. Teniendo en cuenta el gráfico del cubo del ejercicio 9, indicar en el mismo la arista del cubo que está contenida sobra la recta de ecuación $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

A continuación:

a) Marcar en el gráfico una arista paralela a ella y dar las ecuaciones paramétricas de la recta que la contiene. Justificar que las rectas que contienen a dichas aristas son paralelas entre sí.

b) Marcar en el gráfico una arista perpendicular a ella y dar las ecuaciones paramétricas de las recta que la contiene. Justificar que las rectas que contienen a dichas aristas son perpendiculares entre sí.

c) Marcar en el gráfico una cara del cubo paralelo a la arista dada y dar la ecuación del plano que lo contiene. Justificar que el plano que contiene a la cara y la recta que contiene a la arista son paralelos.

d) Marcar en el gráfico una cara del cubo perpendicular a la arista dada y dar la ecuación del plano que lo contiene. Justificar que el plano y la recta que contiene a dicha arista son perpendiculares.

11. Dada la recta L_1 que pasa por el punto $P_1(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $\pi : ax + 2y + 3z + 6 = 0$ y la recta L_2 que pasa por los puntos $P_2(1, 0, 0)$ y $P_3(-1, -3, -4)$, calcular el valor de a de modo que L_1 y L_2 se corten.

12. Dados los planos cuyas ecuaciónes son $mx + 2y - 3x = 1$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$ hallar el valor de m de modo que los planos sean:

a) Paralelos. b) Perpendiculares.

7.5. Respuestas

Rectas

1. P_2 pertenece a L_1 y P_1 no.

4. $\langle x,\, y,\, z\rangle = \langle 3,\, 2,\, 4\rangle t + \langle 2,\, 3,\, 5\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$

5. $L : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 7t - 3 \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ o $L : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 7t + 4 \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$

6. La ecuación paramétrica de la recta es $L : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

La ecuación vectorial de la recta es $L : \langle x,\, y,\, z\rangle = \langle 0,\, 0,\, 1\rangle t + \langle 1,\, 4,\, 0\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$

7. eje x : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ eje y : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

   eje z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

8. L_1 y L_2 son rectas alabeadas no perpendiculares.

9. L_1 y L_2 se cortan en el punto $P(6, 3, 10)$, cuando $t = 5$ y $s = 4$ y no son perpendiculares.

10. L_1 y L_2 se cortan en el punto $P(1, 3, -2)$ y son perpendiculares.

11. $\langle x,\, y,\, z\rangle = t\langle 1,\, 2,\, -1\rangle$ con $t \in \mathbb{R}$

Planos

1. El punto P_2 pertenece al plano y el P_1 no.

4. $3x + 2y + 4z = 28$

5. $x - 2y + z = 11$

6. Cada ecuación del sistema corresponde a la ecuación de un plano y la solución a una recta del espacio.

   Solución del sistema: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \\ z = -2 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

7. Los planos son perpendiculares y se cortan en una recta cuyas ecuaciones paramétricas se pueden escribir $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 8 \\ z = -5t + 19 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

8. π_1 y π_2 no son paralelos ni coincidentes ni perpendiculares. Los planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones paramétricas se pueden escribir $\begin{cases} x = -15t + 3 \\ y = 7t \\ z = 6t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

9. $x + y + 4z = 30$

Rectas y Planos

1. La recta y el plano son perpendiculares y se cortan en el punto $(\frac{70}{17}, -\frac{83}{17}, -\frac{31}{17})$

2. La recta y el plano no son paralelos ni la recta está sobre el plano. Se cortan en el punto $(1, 1, 1)$.

3. La recta está sobre el plano.

4. Las rectas se cortan por lo tanto existe un plano que las contiene cuya ecuación es: $4x - 8y = -4$.

5. a)
   - Ecuación del plano $xy:\ z = 0$
   - Ecuación del plano $yz:\ x = 0$
   - Ecuación del plano $xz:\ y = 0$

   b)
   - Puntos del plano xy: $(a, b, 0)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
   - Puntos del plano yz: $(0, a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$
   - Puntos del plano xz: $(a, 0, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

6. Las rectas no se cortan, no existe un plano que las contenga.

7. $x + 2y = 0$

8. $\begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Ejercitación

2.
   - Intersección con el plano $xy:\ (1, 1, 0)$
   - Intersección con el plano $yz:\ (0, 2, -2)$
   - Intersección con el plano $xz:\ (2, 0, 2)$

3.
   - Intersección con el eje $x:\ (-6, 0, 0)$
   - Intersección con el eje $y:\ (0, 3, 0)$
   - Intersección con el eje $z:\ (0, 0, 2)$

4.
   - Intersección con el eje $x:\ (4, 0, 0)$
   - Intersección con el eje $y:\ (0, -2, 0)$
   - No tiene intersección con el eje z

5. Los planos π_1, π_3 y π_4 son paralelos y π_3 y π_4 son coincidentes.

6. Las tres rectas son paralelas entre sí y son coincidentes L_1 y L_3.

8. La intersección entre el plano y la recta es el punto $(2, 3, 1)$

9. a) Las caras están sobre los planos de ecuación: $x = 3$, $x = 0$, $y = 3$, $y = 0$, $z = 3$, y $z = 0$

   b) Las aristas estás sobre las rectas de ecuación:
   $L_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, $L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ y $L_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

11. $a = 1$

12. a) $m = -1$ b) $m = 13$

Bibliografía

Gonzalez, C. & Caraballo, H. (2022). *Temas de Matemática. Matemática Básica para Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal. Primera Parte 2022.*

Stewart, J., (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* Séptima edición Cengage Learning Editores, SA.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2010). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* Cengage Learning Editores, SA.