Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales.
Universidad Nacional de La Plata

Trabajos Prácticos Matemática

Módulo 3 : Análisis matemático

Autores:
Pauletich, M. Fabiana; Lacambra, Emilio; Tripolí, María de las Mercedes; Bermudez Cichino, Andrea N.; Bertero, María Fernanda.

Índice general

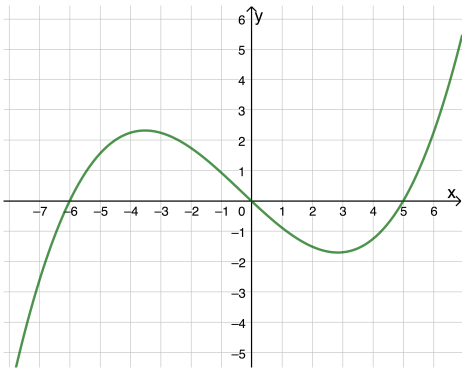
Práctica 8

Funciones.

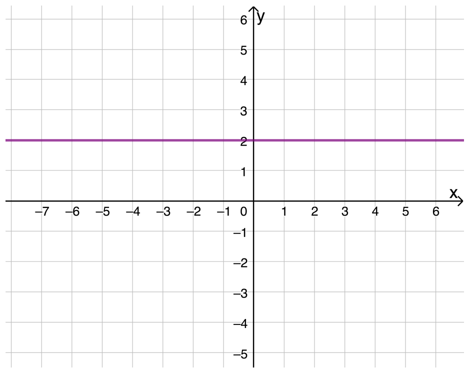
8.1. Funciones: definiciones básicas

1. Determinar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a la gráfica de una función con dominio en los reales.

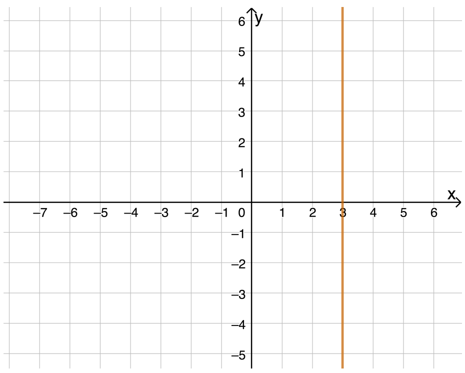
a)



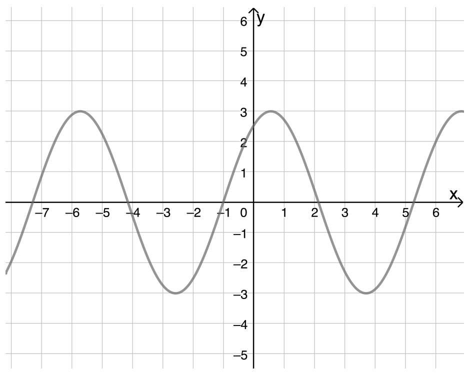
b)



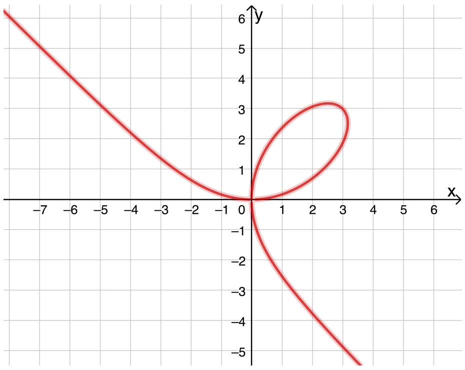
c)



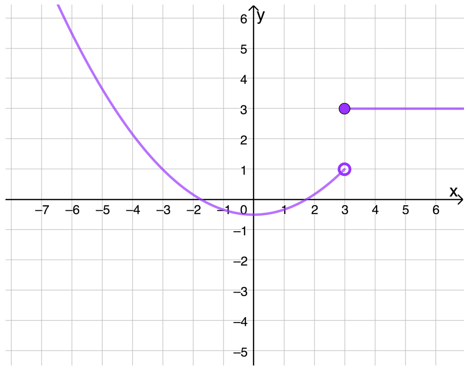
d)



e)

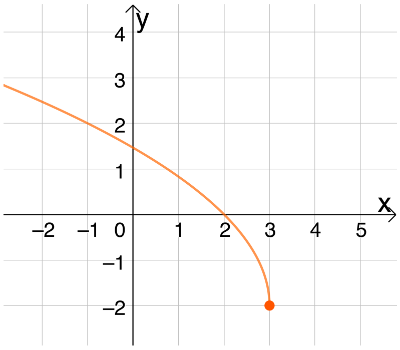


f)

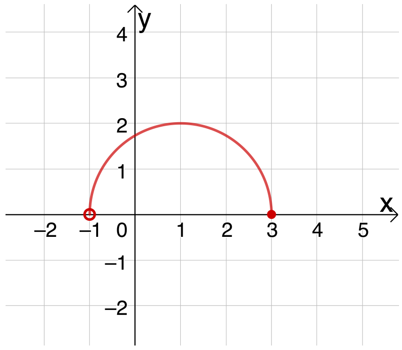


2. Dadas las siguientes gráficas de funciones, determinar el dominio e imagen.

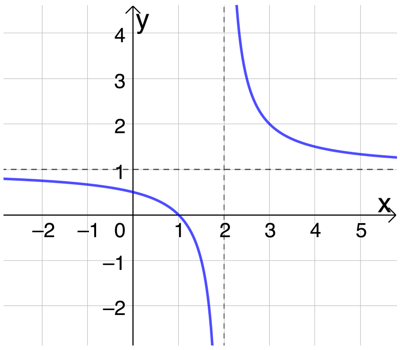
a)



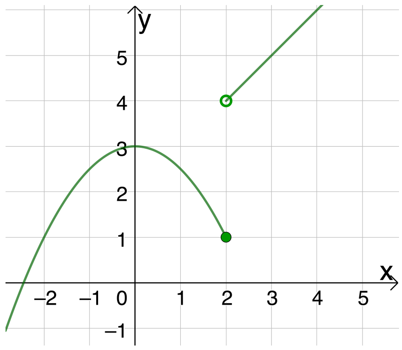
b)



c)

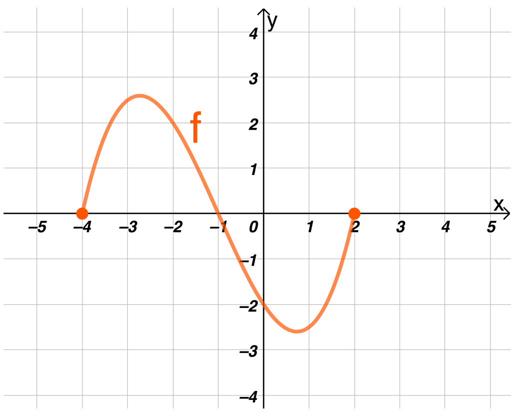


d)

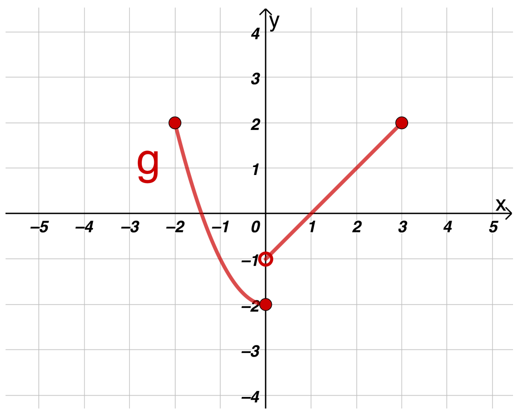


3. A partir de las gráficas de las funciones f y g, determinar:

a)



b)



a) El dominio y la imagen de cada una. Explicar cómo hacer para determinar la imagen.

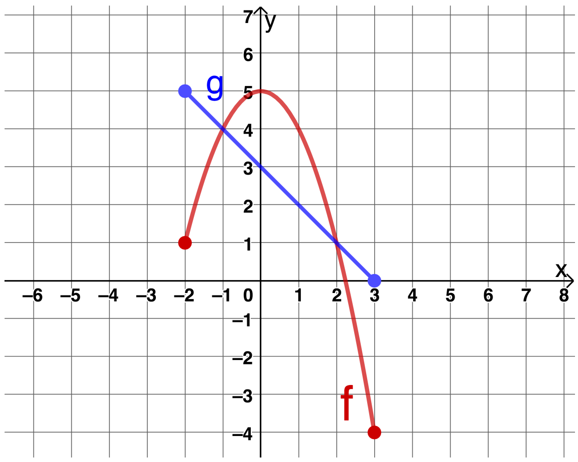
b) Los valores de $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$

c) Los valores de $g(-2)$, $g(0)$ y $g(2)$

d) ¿Para qué valores del x, $f(x) = 0$?

e) ¿Cuál es el valor máximo que toma $g(x)$? ¿Y el mínimo? Indicar el o los valores de x en lo que esto ocurre.

4. Dadas las gráficas de las funciones f y g



a) Determinar para cada una su dominio e imagen.

b) ¿Para qué valores de x, $f(x) = g(x)$?

c) ¿Es $g(0) > f(0)$?

d) Indicar para que valores de x, $f(x) < g(x)$

5. Graficar, para cada caso, una función f que verifique:

a) Su dominio es $[-3, 2]$ y su imagen es $[-1, 4]$

b) Su dominio en $[-3, 2]$, su imagen es $[-1, 4]$, $f(-3) = 4$ y $f(2) = -1$

c) Su dominio es $[-3, 2]$, su imagen es $[-1, 4]$, $f(-3) = 0, f(0) = 1$ y $f(2) = -1$

d) Su dominio es $[-3, 2]$ y su imagen es$\{1\}$

6. *a*) Si $f_1(x) = -\sqrt{1+x}$ calcular *i*) $f_1(-1)$ *ii*) $f_1(0)$

b) Si $f_2(x) = 3x$ calcular *i*) $f_2(-1)$ *ii*) $f_2(1+h)$

c) Si $f_3(x) = 4x^2 - 2$ calcular *i*) $f_3(-1)$ *ii*) $f_3(-x)$

7. Encontrar, si existen, los valores de x para los cuales se anulan cada una de las funciones del ejercicio anterior.

8. Dada $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y los puntos $P(-2, \frac{2}{3})$, $Q(7, \frac{7}{48})$ y $R(-1, 0)$, indicar cuáles de los puntos pertenecen a la gráfica de h.

9. Dadas las siguientes funciones:

   (I) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2x - 3}$ (II) $g(x) = 2\sqrt{3 - x} + 1$ (III) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

   a) Hallar el dominio de cada una de ellas.

   b) Para cada función determinar, si es posible, el valor de a de modo que $P(3, a)$ pertenezca a la gráfica de dicha función.

10. El área de la superficie S de una esfera en función de su radio r, está dada por la expresión $S(r) = 4\pi r^2$.

    a) ¿Cuál es el dominio de la función?

    b) Determinar $S(2)$ y $S(3)$.

    c) ¿Qué representan las respuestas del inciso anterior?

    d) Hallar los valores de r para los que $S(r) = 80$. Ayudarse con calculadora y redondear el resultado.

    e) ¿Qué representa la respuesta del inciso anterior?

11. En los casos siguientes encontrar una fórmula que represente una función y hallar su dominio.

    a) Un rectángulo tiene área 16 metros cuadrados, hallar el perímetro como función de uno de sus lados.

    b) Un veterinario necesita aislar cierta cantidad de vacas enfermas y dispone de 80 metros de alambre de púa para construir un corral de forma rectangular con dos hilos. Si utiliza como uno de los lados del corral un alambrado que ya existe, expresar la medida de uno de los lados del corral en función del otro lado.

    c) Para la misma situación que el inciso anterior, expresar el área del corral en función de uno de sus lados.

8.2. Funciones algebraicas

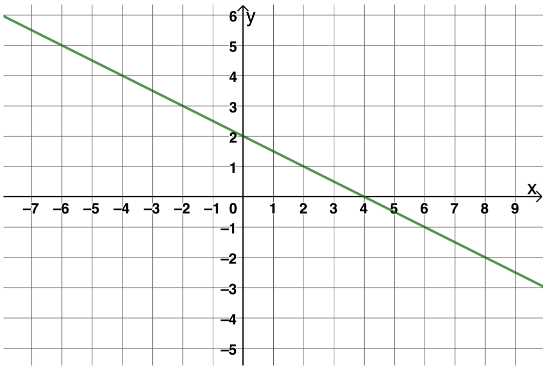
1. Hallar el dominio, graficar y determinar la imagen de las siguientes funciones lineales y cuadráticas.

   a) $f_1(x) = x + 2$ b) $f_2(x) = -\dfrac{2}{3}x - 3$

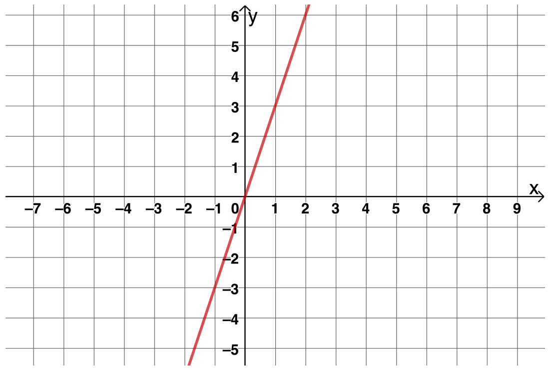
   c) $g_1(x) = 4 - x^2$ d) $g_2(x) = (x - 1)^2 - 2$

2. Dadas las siguientes gráficas de funciones, determinar la expresión de cada una.

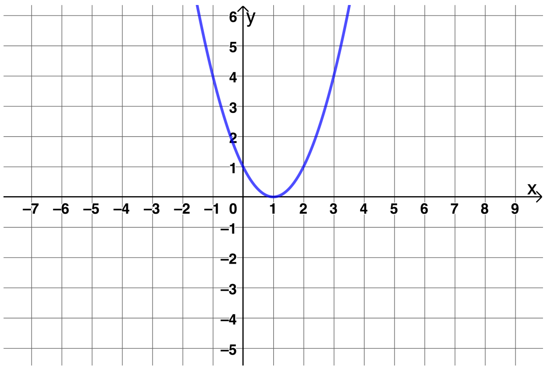
a)



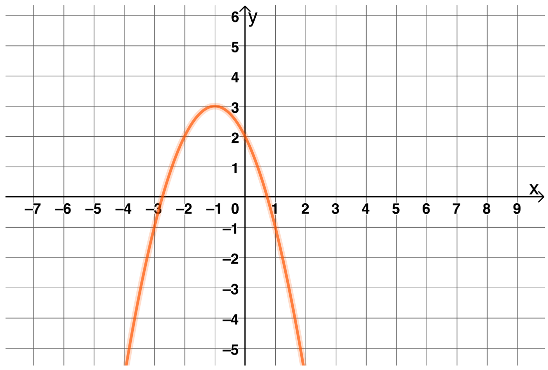
b)



c)



d)

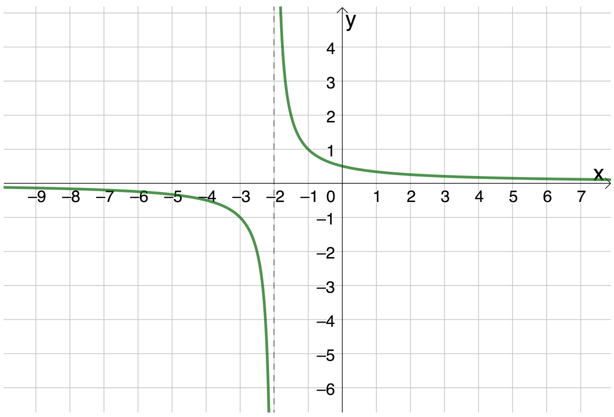


3. Hallar el dominio, graficar y determinar la imagen de las siguientes funciones.

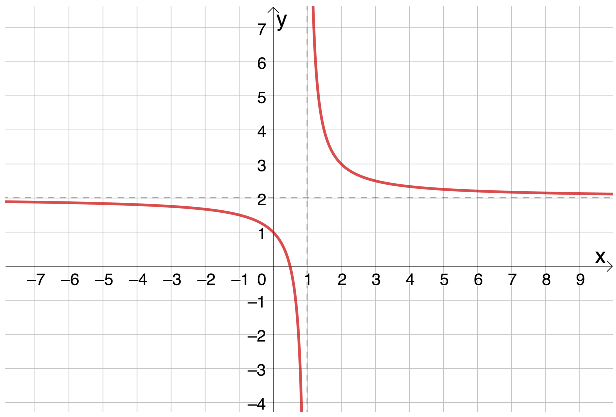
a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ b) $g(x) = -\sqrt{x+2}$

4. Si las siguientes gráficas de funciones son hipérbolas, determinar la expresión de cada una.

a)



b)



5. Dada la función $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

a) Graficar.

b) A partir del gráfico determinar el dominio y la imagen.

6. En un mismo sistema de ejes coordenados, representar las funciones y hallar sus dominios e imágenes.

   a) $f_1(x) = x^2$ b) $f_2(x) = -x^2$ c) $f_3(x) = x^2 + 1$ d) $f_4(x) = (x-3)^2$

   Explicar cómo se obtienen las gráficas de $f_2(x), f_3(x)$ y $f_4(x)$ a partir de la gráfica de $f_1(x)$

7. En un mismo sistema de ejes coordenados, representar las funciones y hallar sus dominios e imágenes.

   a) $g_1(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g_2(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ c) $g_3(x) = -\dfrac{2}{x}$ d) $g_4(x) = \dfrac{2}{x+2}$

   Explicar cómo se obtienen las gráficas de $g_2(x), g_3(x)$ y $g_4(x)$ a partir de la gráfica de $g_1(x)$

8. En un mismo sistema de ejes coordenados, representar las funciones y hallar sus dominios e imágenes.

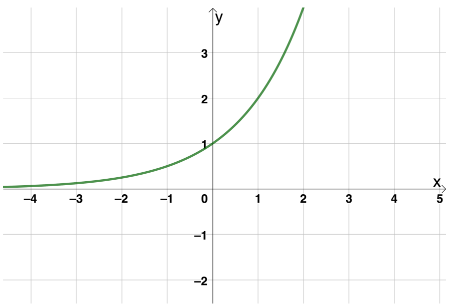
   a) $h_1(x) = \sqrt{x}$ b) $h_2(x) = \sqrt{x-2}$ c) $h_3(x) = \sqrt{x} - 2$

   Explicar cómo se obtienen las gráficas de $h_2(x)$ y $h_3(x)$ a partir de la gráfica de $h_1(x)$

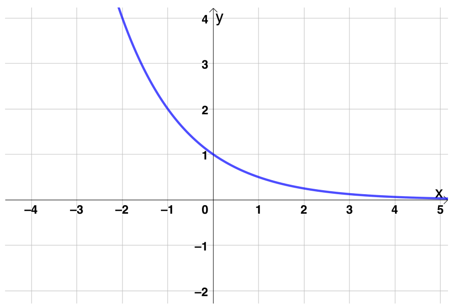
8.3. Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Dados los siguientes gráficos

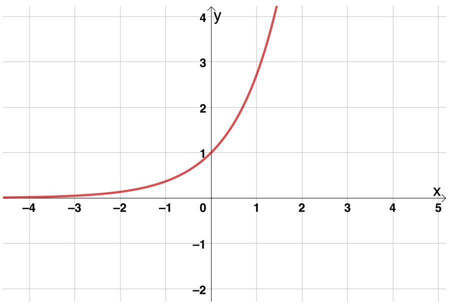
(I)



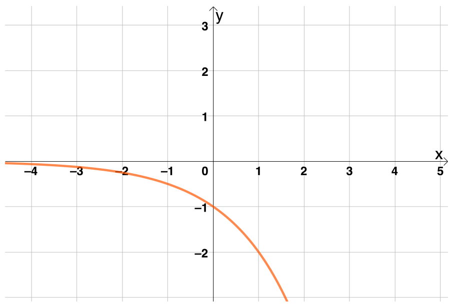
(II)



(III)



(IV)



Identificar las gráficas de las siguientes funciones y explicitar su elección.

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = -2^x$ c) $h(x) = (\frac{1}{2})^x$ d) $j(x) = 2^{-x}$

2. *a*) Dada la función $f(x) = e^{3x} - 2$, hallar el valor exacto de los valores de $f(0)$ y $f(1)$
   b) ¿Existe algún valor de x para el cual $f(x) = 0$?
   c) Graficar dicha función con GeoGebra y verificar.

3. Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

   a) $h(x) = e^{2x-1}$ b) $h_1(x) = 3\ ln(x + 2) - 1$

   c) $h_2(x) = 1 - ln(3x)$ d) $h_2(x) = \dfrac{ln(x)}{x - 1}$

   Graficarlas utilizando GeoGebra y determinar su imagen.

4. *a*) Dada la función $g(x) = ln(x) + 2$, hallar el valor exacto de los valores de $g(1)$ y $g(3)$
   b) ¿Existe algún valor de x para el cual $g(x) = 0$?
   c) Graficar dicha función con GeoGebra y verificar.

5. A partir de la gráfica de $f(x) = e^x$ graficar las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = 1 + e^x$ b) $f_2(x) = e^{x+1}$ c) $f_3(x) = -e^x$

   Determinar el dominio y la imagen.

6. A partir de la gráfica de $g(x) = ln(x)$ graficar las siguientes funciones:

   a) $g_1(x) = ln(x + 2)$ b) $g_2(x) = ln(x) + 2$ c) $g_3(x) = -ln(x)$

   Determinar el dominio y la imagen.

7. Dada la función $f(x) = 1 + ln(2 - x)$, hallar si es posible, usando la calculadora:

   a) $f(3)$ y $f(0)$
   b) Los valores de que x para los cuales $f(x) = 2$
   c) Los valores de que x para los cuales $f(x) = 1$

8. En un cultivo bacteriano, el número de bacterias en función del tiempo, medido en horas, es: $N(t) = N_0 e^{kt}$ donde N_0 es el número inicial de bacterias y k es una constante.

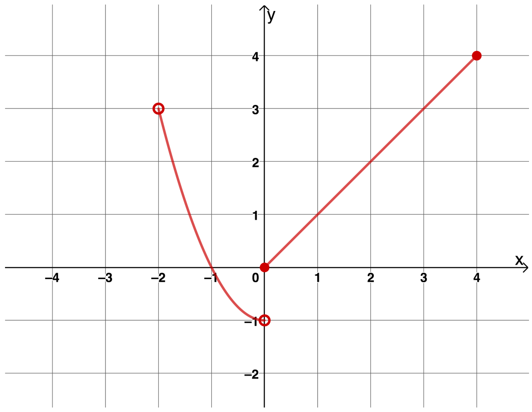
   a) Hallar N_0 y k si a la hora el número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_0$ y a las dos horas, el número de bacterias es 225.
   b) Graficar $N(t)$.

8.4. Funciones a trozos

1. Explicar por qué la siguiente expresión no corresponde a una función:

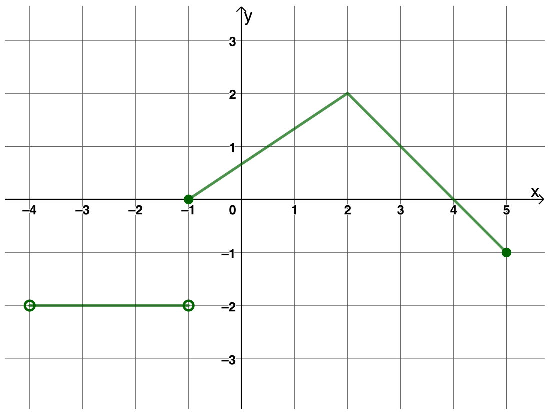
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & si \quad x < -1 \\ x^2 - 2x + 1 & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ ln(x - 1) & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. Se tiene la siguiente gráfica de una función f:



   a) Determinar dominio e imagen de f.
   b) Si existen, determinar $f(-1), f(0), f(2)$ y $f(4)$.
   c) Si existen, determinar los valores de x de manera que $f(x) = 1$. Lo mismo para $f(x) = 0$ y $f(x) = 5$.

3. Determinar una expresión para la función g definida a trozos cuya gráfica se muestra a continuación.



   Luego, decir cuál es su dominio e imagen.

4. Si $h(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x < 0 \\ -x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ indicar el dominio, graficar y determinar la imagen de la función.

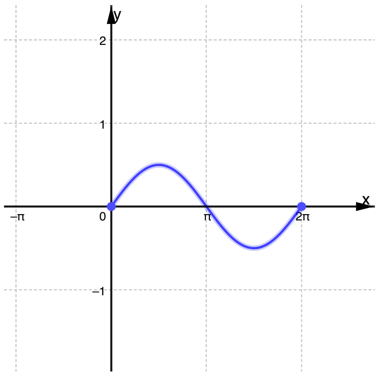
5. Sea $m(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & si \quad x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & si \quad -2 < x < 1 \\ ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

   a) Determinar el dominio de m.
   b) Si existen, calcular $m(-3), m(0), m(1)$ y $m(4)$.
   c) Si existen, los valores de x de manera que $m(x) = 0$. Lo mismo para $m(x) = -3$.

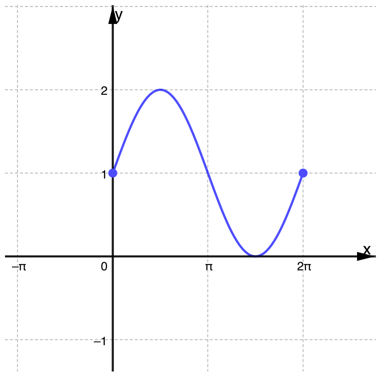
8.5. Funciones trigonométricas

1. Dadas las siguientes gráficas.

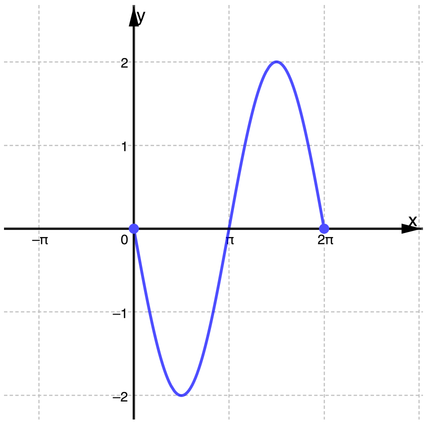
(I)



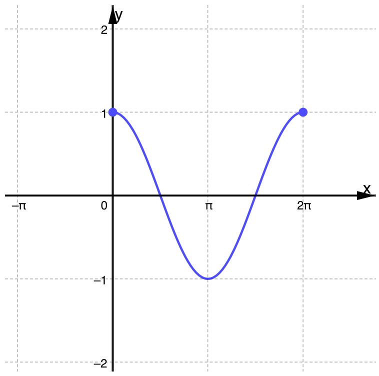
(II)



(III)



(IV)



¿Cuál podría ser la gráfica de $f(x) = a\ sen(x)$ con $a \neq 0$ en $[0, 2\pi]$? Explicar su elección.

2. Si $f(x) = 2\,\text{sen}(x) - 3$

   a) Determinar los valores que se piden a continuación: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(0)$, $f(\pi)$ y $f\left(\frac{9}{4}\pi\right)$.

   b) Hallar los valores de x tal que $f(x) = 0$ en $[0, 2\pi]$

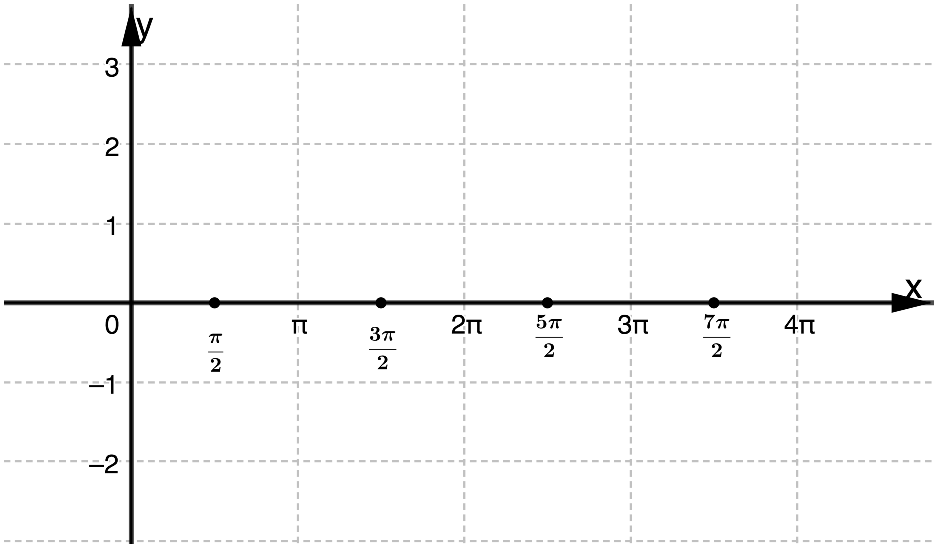
3. *a*) Representar gráficamente $f(x) = sen(x)$ para valores de $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

   b) Señalar en el gráfico todos los puntos para los que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   c) Escribir de forma exacta todos los valores de x para los cuales $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Graficar un período de cada una de las siguientes funciones en el sistema de coordenadas dado. Indicar cuál es la amplitud y el período de cada una.

   a) $h_1(x) = cos(x)$ b) $h_2(x) = cos(2x)$ c) $h_3(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$



5. En el mismo sistema de ejes coordenados graficar las funciones dadas y hallar sus dominios, imágenes, amplitudes y períodos.

   a) $h_1(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)$ b) $h_2(x) = -sen(x)$ c) $h_3(x) = sen(2x)$ d) $h_4(x) = -3\,sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$

6. Indicar para qué valores de x las funciones del ejercicio anterior intersectan los ejes.

7. *a*) Determinar el dominio y la imagen de las siguientes funciones

   (I) $f(x) = -3\ cos(2x) + 3$ (II) $g(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x)$

   (III) $h(x) = 2\cos(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}) - 1$ (IV) $j(x) = -sen\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$

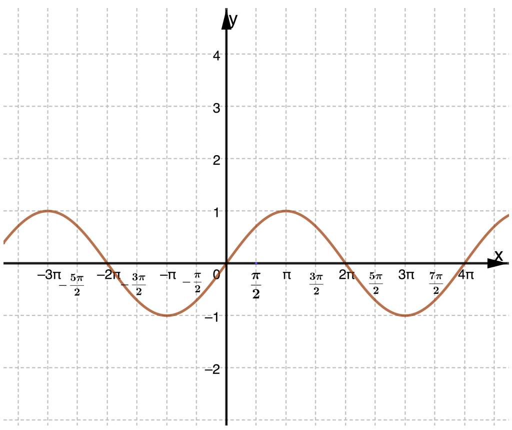
   b) Determinar la amplitud y el período de las funciones anteriores. Verificar usando GeoGebra.

8. Hallar el valor de n de manera que $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{n-1}{4}\right)$ pertenezca a la gráfica de $f(x) = cos(x)$

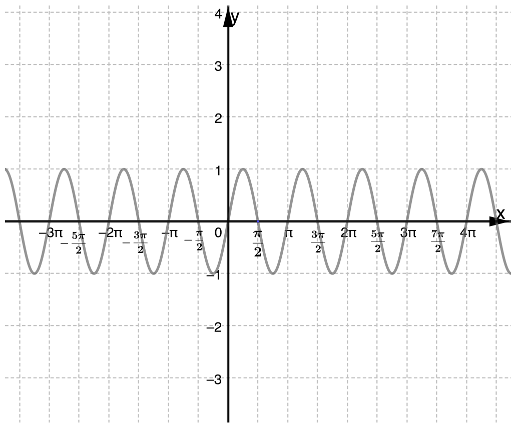
9. Dar una expresión de una función trigonométrica cuya imagen sea $[-1, 3]$ y el período 4π.

10. Dadas las siguientes gráficas de funciones trigonométricas

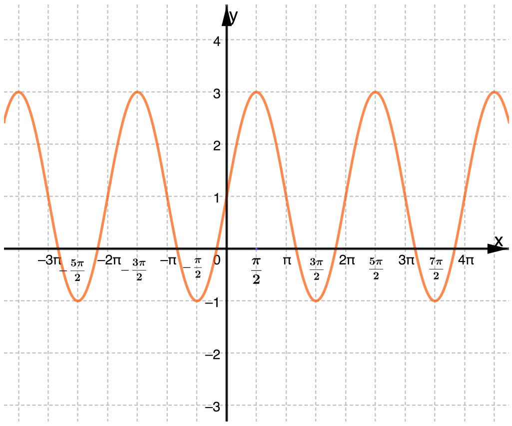
(I)



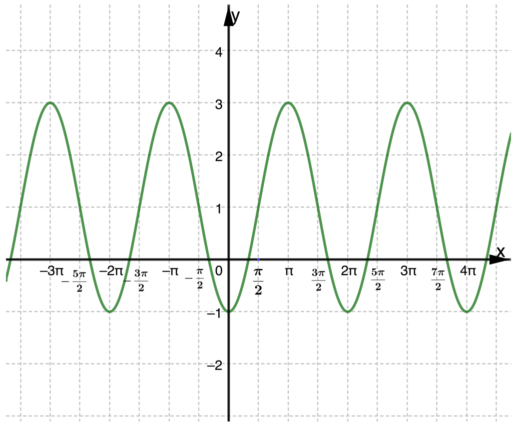
(II)



(III)



(IV)



Identificar las gráficas de las siguientes funciones y explicar su elección.

a) $f(x) = -2cos(x) + 1$

b) $g(x) = sen(\frac{x}{2})$

c) $h(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + 1$

d) $j(x) = sen(2x)$

11. Si $h(x) = \begin{cases} 2sen(x) & si \quad x < 0 \\ -(x-2)^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

   a) Indicar el dominio, graficar y determinar la imagen de la función.

   b) Determinar los valores que se piden a continuación: $h(-\pi)$, $h(0)$ y $h(\pi)$.

   c) Hallar los valores de x para los cuales $h(x) = 0$.

12. Dadas las siguientes funciones:

   (I) $f(x) = 2cos(x) - 1$ (II) $g(x) = -sen(\frac{x}{2}) + 1$ (III) $j(x) = cos(2x + \frac{\pi}{2})$

   a) Indicar el dominio, graficar y determinar la imagen.

   b) Indicar la amplitud y el período.

Ejercitación

1. Si $g(x) = -cos(x + \pi)$

   a) Determinar los valores que se piden a continuación: $g(0)$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g(2\pi)$ y $g\left(\frac{8\pi}{4}\right)$.

   b) Hallar los valores de x tal que $g(x) = 0$ en $[0, 2\pi]$

2. En el mismo sistema de ejes coordenados graficar las funciones dadas y hallar sus dominios, imágenes, amplitudes y períodos.

   a) $g_1(x) = -2\cos(x)$

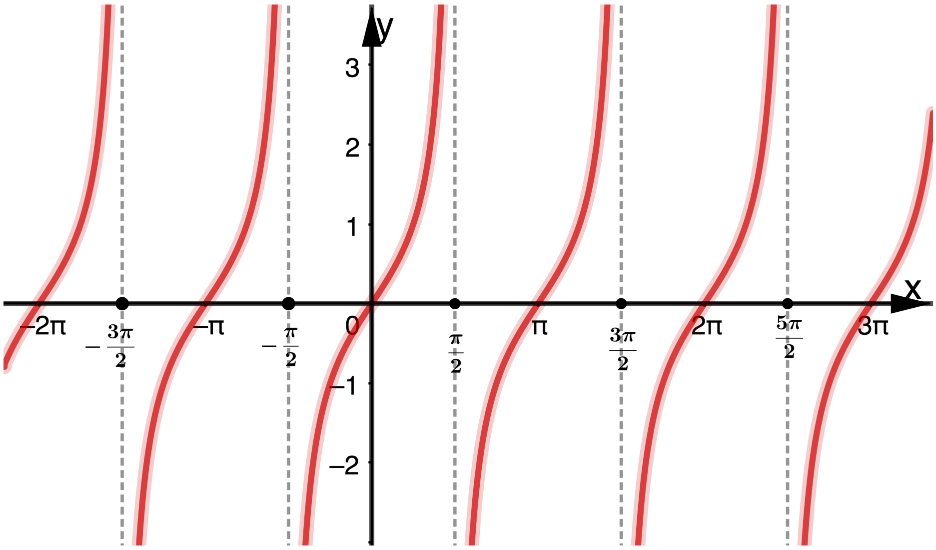
   b) $g_2(x) = \frac{1}{2}\,cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

3. *a*) Dar una expresión de una función trigonométrica cuyo período sea $\frac{\pi}{2}$ y la amplitud 4.

   b) Hallar el valor de m de manera que $\left(\frac{\pi}{6},\ m+1\right)$ pertenezca a la gráfica de $f(x) = sen(x)$

4. Dada $f(x) = -3\ cos(2x) + 3$ hallar los valores de x que intersecan al eje x.

5. Se define la función tangente como: $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, a continuación se muestra su gráfica.



   a) A partir de la gráfica indicar dominio, imagen y período.

   b) A partir de la definición, indicar el dominio.

6. Si $m(x) = \begin{cases} 2-x & si \quad x \leq -2\pi \\ cos(2x) & si \quad -2\pi < x < \pi \\ sen(x) & si \quad x \geq \pi \end{cases}$

   a) Indicar el dominio, graficar y determinar la imagen de la función.

   b) Determinar los valores que se piden a continuación: $m(-2\pi),\ m(0)$ y $m(2\pi)$.

   c) Hallar los valores de x para los cuales $m(x) = 0$.

8.6. Respuestas

Funciones.

1. Son gráficas de funciones los incisos $a), b), d)$ y $f)$

2.

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
Dominio	$(-\infty, 3]$	$(-1, 3]$	$\mathbf{R} - \{2\}$	$\mathbf{R}$
Imagen	$[-2, +\infty)$	$[0, 2]$	$\mathbf{R} - \{1\}$	$(-\infty, 3] \cup (4, +\infty)$

3. 1)

	$f(x)$	$g(x)$
Dominio	$[-4, 2]$	$[-2, 3]$
Imagen	$[-2{,}5\ ,\ 2{,}5]$	$[-2, 2]$

2) $f(-2) = 2 \qquad f(0) = -2 \qquad f(2) = 0$

3) $g(-2) = 2 \qquad g(0) = -2 \qquad g(2) = 1$

4) $x = -4, \quad x = -1, \quad x = 2$

5) El valor máximo es 2 y lo toma en $x = -2$ y $x = 3$.
El valor mínimo es -2 y lo toma en $x = 0$.

4. 1)

	$f(x)$	$g(x)$
Dominio	$[-2, 3]$	$[-2, 3]$
Imagen	$[-4, 5]$	$[0, 5]$

2) $x = -1$ y $x = 2$.

3) No.

4) $[-2, -1) \cup (2, 3]$

5.

	i)	*ii)*
a)	0	-1
b)	-3	$3(1 + h)$
c)	2	$4x^2$-2

6. $f_1(x)$ se anula en $x = -1$.
$f_2(x)$ se anula en $x = 0$.
$f_3(x)$ se anula en $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ y $x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

7. Q pertenece a h.

8. 1)

	$f(x)$	$g(x)$	$j(x)$
Dominio	$\mathbf{R} - \{-1, 3\}$	$(-\infty, 3]$	$[0, 1) \cup (1, +\infty)$

2)

	$f(x)$	$g(x)$	$j(x)$
valor de a	no se puede	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. a) $(0, +\infty)$ b) $s(2) = 16\pi,\quad s(3) = 36\pi$
c) Representan el área de la superficie esférica cuando $r = 2$ y $r = 3$.
d) y e) $r \approx 2,5$ y representa el radio de la esfera cuya superficie vale 80.

10. a) $P(l) = 2l + \frac{32}{l}$, l es un lado del rectángulo, $P(l)$ la expresión que da el perímetro en función del lado, $DomP = (0, +\infty)$.

b) y c) Si l_1 y l_2 son los lados del corral se verifica que $2l_1 + l_2 = 40$
Depende del lado que se tome, las respuestas pueden ser:

- $L_2(l_1) = 40 - 2l_1$ esta función da el valor del l_2 en función del l_1 y tiene $DomL_2 = (0, 20)$. La función $A_1(l_1) = l_1(40 - 2l_1)$ da el área en función de l_1 y el dominio es $DomA_1 = (0, 20)$
- $L_1(l_2) = 20 - \frac{l_2}{2}$ esta función da el valor del l_1 en función del l_2 y tiene $DomL_1 = (0, 40)$. La función $A_2(l_2) = l_2\left(20 - \frac{l_2}{2}\right)$ da el área en función de l_2 y el dominio es $DomA_1 = (0, 40)$

Funciones algebraicas

1.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Imagen	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, 4]$	$[-2, +\infty]$

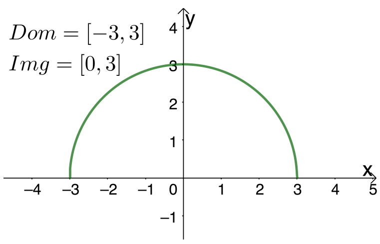
2.
a) $f_a(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ b) $f_b(x) = 2x$
c) $f_c(x) = (x - 1)^2$ d) $f_d(x) = -(x + 1)^2 + 3$

3.

	$f(x)$	$g(x)$
Dominio	$[1,+\infty)$	$[-2,+\infty)$
Imagen	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0]$

4. a) $f_a(x) = \dfrac{1}{x+2}$ b) $f_b(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$

5. La gráfica de la función es:



Funciones exponenciales y logarítmicas

1. El gráfico $I)$ se corresponde con la función $a)$
El gráfico $II)$ se corresponde con las funciones $c)$ y $d)$
El gráfico $III)$ no tiene correspondientes en las funciones dadas.
El gráfico $IV)$ se corresponde con la función $b)$

2. a) $f(0) = -1, \quad f(1) = e^3 - 2$ b) $x = \dfrac{ln(2)}{3}$

3.

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
Dominio	$\mathbf{R}$	$(-2,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)-\{1\}$

4. a) $g(1) = 2, \quad g(3) = ln(3) + 2$ b) $x = e^{-2}$

5. a) $f(3)$ no existe pues el Dominio de f es $(-\infty, 2)$, $f(0) \approx 1,69$.
b) $x = 2 - e$ c) $x = 1$

6. $K = ln(\frac{3}{2}), \quad N_0 = 100, \quad N(t) = 100e^{\frac{3}{2}t}$

Funciones a trozos

1. No es función pues en $x = 2$ la función toma dos valores.

2. 1) $Dom = [-2, 4]$ $\quad$ $Img = (-1, 4]$
   2) $f(-1) = 0$ $\quad$ $f(0) = 0$ $\quad$ $f(2) = 2$ $\quad$ $f(4) = 4$
   3) $f(x) = 1$ en $x = 1$ y $x \approx -1,5$
      $f(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 0$
      $f(x) = 5$ no hay valores de x para los cuales la función tome el valor 5.

3. $$g(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -4 < x < -1 \\ \frac{2}{3}(x+1) & si \quad -1 \leq x < 2 \\ -x+4 & si \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

   $Dom_f = (-4, 5]$ $\quad$ $Img_f = \{-2\} \cup [-1, 2]$

4. $Dom_h = \mathbf{R}$ $\quad$ $Img_h = (-\infty, 1)$

5. 1) $Dom_m = \mathbf{R} - \{0\}$
   2) $m(-3) = 0$ $\quad$ $m(1) = 0$ $\quad$ $m(4) = ln(4) \approx 1,39$ $m(0)$ no se calcula pues el 0 no está en el dominio de la función.
   3) $m(x) = 0$ en $x = -3$ y $x = 1$
      $m(x) = -3$ en $x = -2$ y $x = -\frac{1}{2}$

Funciones trigonométricas

1. Podrían ser el gráfico $I)$ con $a = \frac{1}{2}$ y el gráfico $III)$ con $a = -2$

2. 1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 3$ $\quad$ $f(0) = -3$ $\quad$ $f(\pi) = -3$ $\quad$ $f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 3$
   2) No hay valores de x para los cuales la función tome el valor 0.

3. h_1 y h_2 se hacen 0 para los valores de $x = \pi k$ con k número entero.
   h_3 se hacen 0 para los valores de $x = \frac{\pi}{2}k$ con k número entero.
   h_4 se hacen 0 para los valores de $x = 2\pi k$ con k número entero.

4.

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$
Dominio	**R**	**R**	**R**	**R**
Imagen	$[0,6]$	$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$	[-3,1]	$[-2,2]$
Período	π	2π	4π	$\frac{2}{3}\pi$
Amplitud	3	$\frac{1}{4}$	1	2

5. $n = 3$

6. $I)$ se corresponde con b, $II)$ con d, $III)$ con c y $IV)$ con a.

7. 1) $Dom = \mathbf{R}$ $\quad Img = (-\infty, 2]$
   2) $h(-\pi) = 0$ $\quad h(0) = -3$ $\quad h(\pi) = -(\pi - 2)^2+1$
   3) $x = k\pi$ siendo k un entero negativo distinto de cero y en $x = 3$

8.

	$f(x)$	$g(x)$	$j(x)$
Dominio	**R**	**R**	**R**
Imagen	$[-2,0]$	$[0,2]$	[-1,1]
Período	2π	4π	π
Amplitud	2	1	1

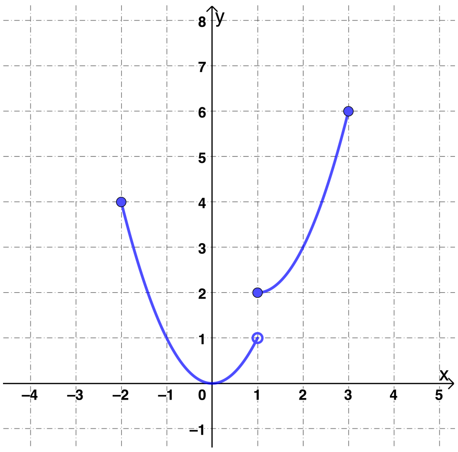
Práctica 9

Límites y Continuidad.

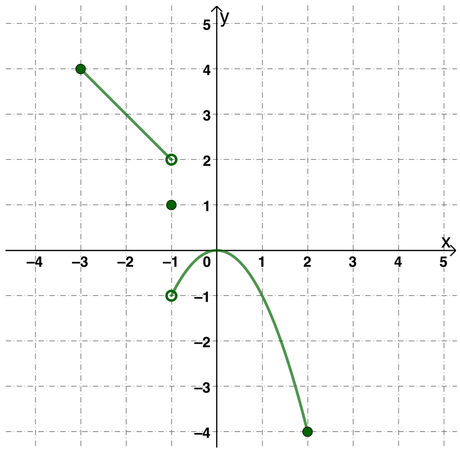
9.1. Límites

1. Se muestran las gráficas de funciones f, g y h.

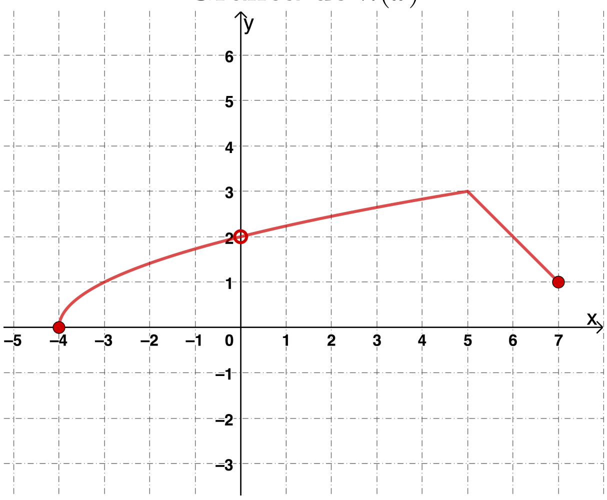
Gráfica de $f(x)$



Gráfica de $g(x)$



Gráfica de $h(x)$



Determinar,si existen, los límites que se piden. Tanto si existen o no, explicar por qué.

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ f) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ g) $\lim_{x\to 1} g(x)$ h) $\lim_{x\to 0} g(x)$

i) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ j) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ k) $\lim_{x\to 0} h(x)$ l) $\lim_{x\to 5} h(x)$

2. Utilizar las gráficas del punto anterior para determinar los siguientes límites si existen, explicitando el procedimiento realizado. En caso de no existir, explicar por qué.

a) $\lim_{x\to -1}(f(x)+g(x)+h(x))$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$ c) $\lim_{x\to 5} \sqrt{h(x)+6}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ e) $\lim_{x\to 0} h(x)g(x)$

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} h(x) = 5$, determinar,si existen, el valor de los siguientes límites explicitando el procedimiento realizado. En caso de no existir, explicar por qué.

a) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$ b) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ c) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x)-g(x)}$ d) $\lim_{x\to a} f^2(x)$

4. Bosquejar la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones: su dominio sea el intervalo $[-2,4]$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, $f(0) = -1$ y $f(2) = 0$.

5. Dada la función $g(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x<1 \\ x+1 & si \quad 1<x<2 \\ 5-x^2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

   a) Determinar,si existen, los límites que se piden explicitando el procedimiento realizado. En caso de no existir, explicar por qué.

   (I) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (II) $\lim_{x\to 2} g(x)$

   b) Graficar la función.

6. Calcular los siguientes límites explicitando el procedimiento realizado.

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+4}{x+5}$ b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{cos(x)}$ e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xsen(x)}{cos(x)}$

7. Calcular, si existen, los siguientes límites. Justificar.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{2}{(x-1)^4}$ b) $\lim_{x \to 5} \frac{-1}{x^2-25}$ c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$

8. Determinar las asíntotas verticales de las siguientes funciones, si es que tienen. Justificar.

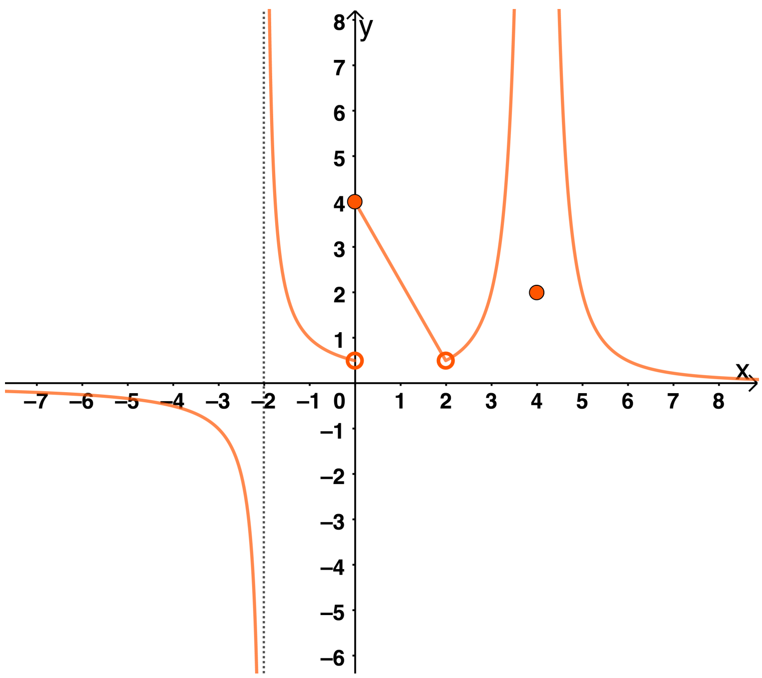
a) $f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-4}$ b) $h(x) = \frac{ln(x)}{x+3}$ c) $g(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

9. Calcular los siguientes límites. Justificar.

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+8}$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4+3}{1+x^2}$ c) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-4x+1}{x^2+1}$

10. Alguna de las funciones del ejercicio anterior, ¿tiene asíntota horizontal? En caso que tenga, decir cuál es la función, cuál es la asíntota horizontal y explicar por qué lo es.

11. Dada la siguiente gráfica de una función f, determinar lo que se pide:



a) Dominio e imagen de f.

b) Dominio de continuidad de f.

c) Todos los valores de x para los cuales el límite no existe y explicar por qué no existe.

d) Asíntotas verticales, si hay. Justificar.

e) Asíntotas horizontales, si hay. Justificar.

9.2. Continuidad

1. La función f del ejercicio 1 de Límites es discontinua en $x = 1$, la función g es discontinua en $x = -1$ y la función h es discontinua en $x = 0$. Explicar por qué eso sucede en cada caso.

2. Dar la expresión de una función h que sea discontinua en $x = 2$, $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$ exista, $f(-2)$ exista, sea discontinua en $x = 0$. Explicar por qué eso sucede en cada caso.

3. Bosquejar la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones: su dominio sea $[-2, 2]$, $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$, sea discontinua en -1 y 1, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

4. Decidir si las siguientes funciones son discontinuas en $x = 1$.

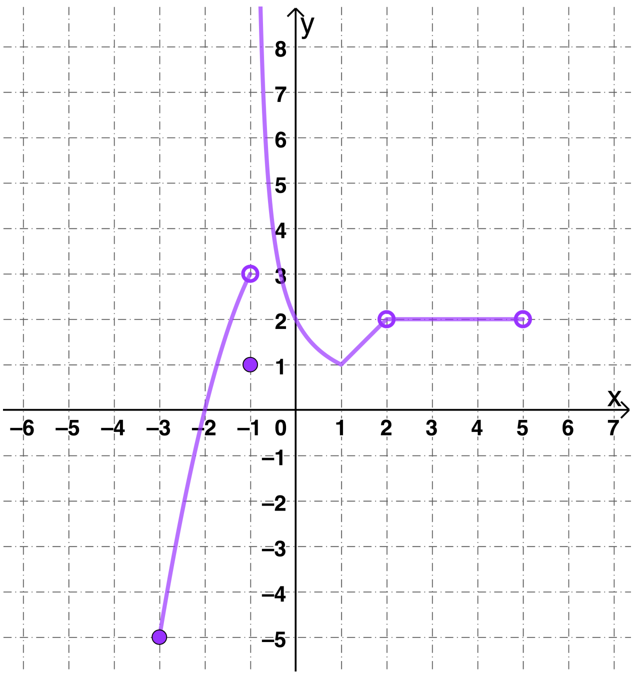
a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ -\dfrac{2}{7} & si \quad x = 1 \end{cases}$

b) $j(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \\ x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x + 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & si \quad x \neq 1 \\ -3 & si \quad x = 1 \end{cases}$

5. Se muestra la gráfica de la función h:



Teniendo en cuenta la gráfica anterior, decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En todos los casos, justificar lo que afirma

a) La función h es continua en el intervalo $(-2,5)$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 2$.

c) La función h no tiene una asíntota vertical en $x=-1$.

d) La función h es continua en el intervalo $(-1,2]$.

e) $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)$ no existe.

f) $h(-1) = 3$

6. Bosquejar la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones: su dominio sean todos los números reales, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $f(-3) = 2, f(0) = 0\, f(2) = 1$, es discontinua en $x=0$, tiene una asíntota vertical en $x=3$ y una asíntota horizontal que es la recta $y=5$.

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todo su dominio y graficarlas.

a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $j(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & si \quad x \leq 2 \\ 2-x & si \quad -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad x > 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x < 2 \\ 2x+1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

9.3. Respuestas

Límites

1.

a) 1	b) 2	c) no existe	d) 3
e) -1	f) -1	g) -1	h) 0
i) 2	j) 2	k) 2	l) 3

2. Los límites de *a*) y *b*) no existen, *c*) vale 3 *d*) no existe *e*) vale 0.

3. *a*) $-\dfrac{1}{3}$ *b*) no existe *c*) $-\dfrac{6}{5}$ *d*) 9.

4. Los límites *I*) y *II*) no existen.

5. *a)* $\frac{6}{7}$ *b)* 2 *c)* -2 *d)* 1 *e)* 0.

6. *a)* no existe *b)* no existe *c)* -4.

7. $f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x = -2$, $h(x)$ y $g(x)$ no tienen asíntotas verticales.

8. *a)* 0 *b)* ∞ *c)* 2

9. La función del inciso *a)* $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+8}$ tiene asíntota en $y = 0$

   La función del inciso *c)* $\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+1}$ tiene asíntota en $y = 2$

10. 1) Dominio $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$ Imagen $\mathbf{R} - \{0\}$.
    2) Dominio de continuidad $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.
    3) El límite no existe en $x = -2, x = 0$ y $x = 4$
    4) Tiene asíntotas verticales en $x = -2$.
    5) Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Continuidad

4. Las cuatro funciones dadas son discontinuas en $x = 1$

5. *a)* F *b)* V *c)* V *d)* F *d)* V *e)* F

Práctica 10

Derivada de una función. Aplicaciones

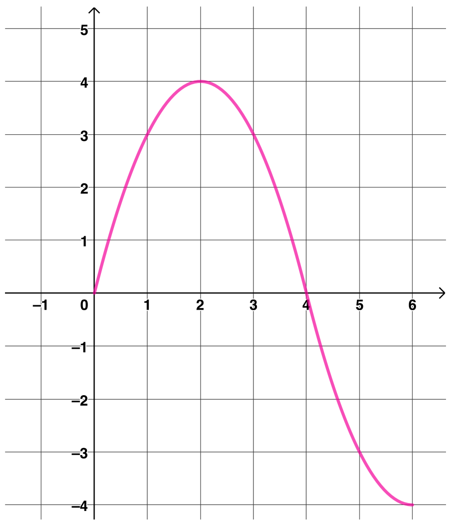
10.1. Derivadas.

1. Determinar las derivadas que se indican, usando la definición:

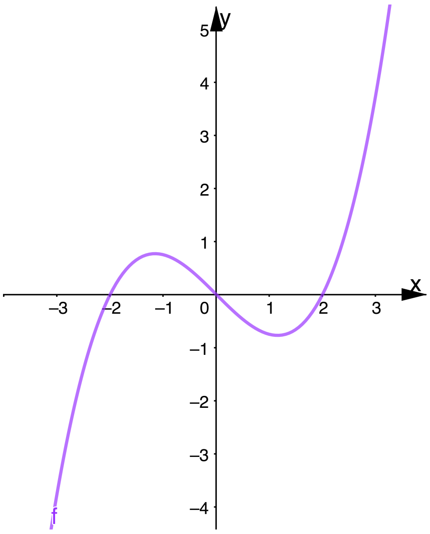
   a) $f'(2)$, si $f(x) = 2x^2 + 3$

   b) $f'(-2)$, si $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

2. Dada la gráfica de f, estimar el valor de f' en cada caso: $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$.



3. Dada la gráfica de la función g



y los siguientes números:

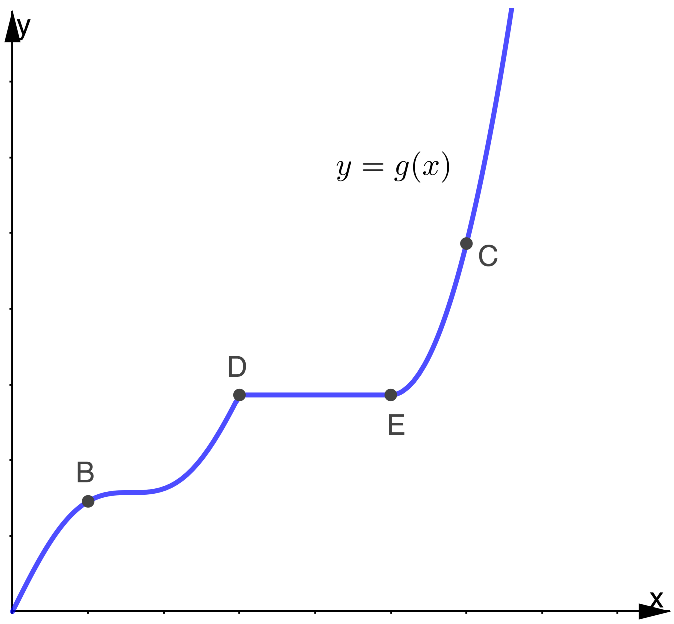
$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2)$$

A partir de la gráfica de g reordenarlos en orden creciente y explicar su razonamiento.

4. La gráfica muestra la posición de un automóvil. De acuerdo a la gráfica, responder y explicar su respuesta.

   a) ¿El automóvil viajó más rápido en B o en C?

   b) ¿Qué sucedió entre D y E?



5. Dada $f(x) = \sqrt{3x}$

   a) Encontrar $f'(x)$ usando la definición.

   b) Determinar la aproximación lineal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

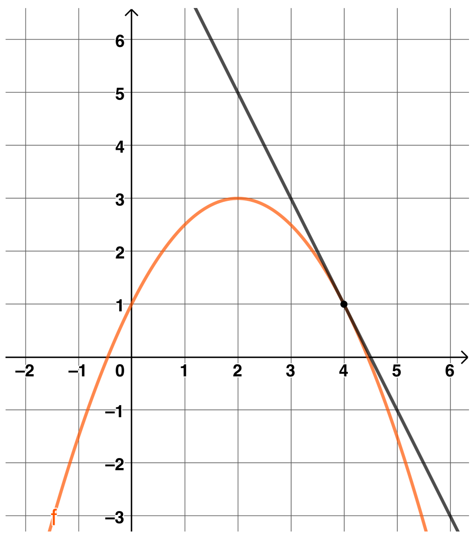
   c) Graficar f y la aproximación lineal hallada.

6. Los siguientes son cocientes de Newton, ¿de qué función y en qué punto?

   a) $\dfrac{3(4+h)^2 - 3(4)^2}{h}$

   b) $\dfrac{(2+h)^2 - 4}{h}$

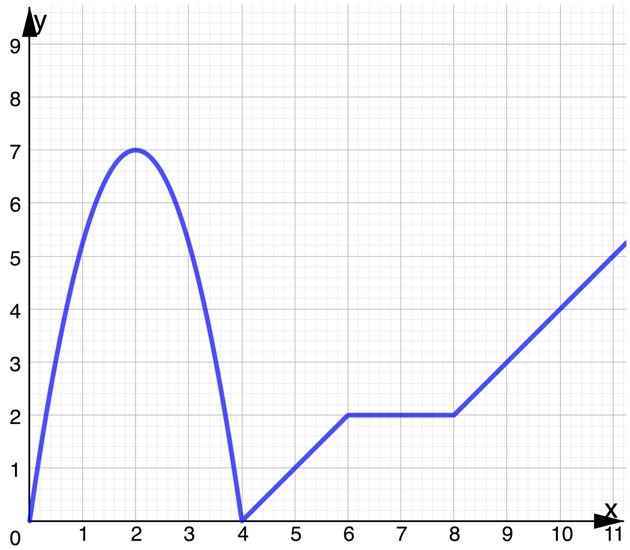
7. Se graficó una función f y su recta tangente en el punto $x = 4$. Determinar el valor de $f'(4)$.



8. La recta tangente a la gráfica de la función $l(x)$ en el punto $P(5, 2)$ pasa también por el punto $Q(9, 0)$. Determine los valores de $l(5)$ y $l'(5)$.

9. Encontrar los puntos de la gráfica de $y = 1 - x^2$ donde la recta tangente tenga pendiente 1. ¿En algún punto es la recta tangente horizontal?

10. Dada la siguiente gráfica:



¿Hay algún valor de x para la cuál la función no es derivable? Justificar.

11. Aplicando las reglas de derivación hallar las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$

b) $j(x) = (2x-5)(3x^4+5x+2)$

c) $i(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$

d) $k(x) = \frac{1}{5}x^3 + x\ ln(x)$

12. Se conocen los siguientes valores: $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ y $g'(3) = 5$. A partir de ellos calcular:

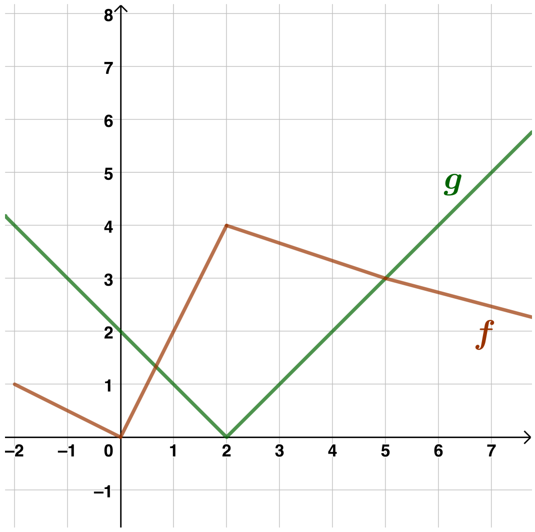
a) $(f+g)'(3)$

b) $(f.g)'(3)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3)$

d) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(3)$

13. Sean f y g funciones cuyas gráficas se muestran.



Si $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ determinar los valores de: $u'(1)$ y $v'(5)$.

14. Hallar la recta tangente en $x = 0$ de $f(x) = sen(x)$. Indicar el punto de tangencia y graficar.

15. ¿Por qué no es posible realizar la composición $f \circ g$, si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -x^2 - 3$?

16. Siendo $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x^2$ hallen $g \circ f$ y $f \circ g$ y determinar el dominio de ambas funciones compuestas.

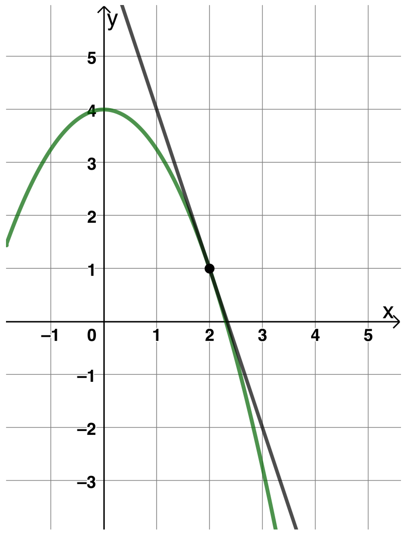
17. De acuerdo a la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

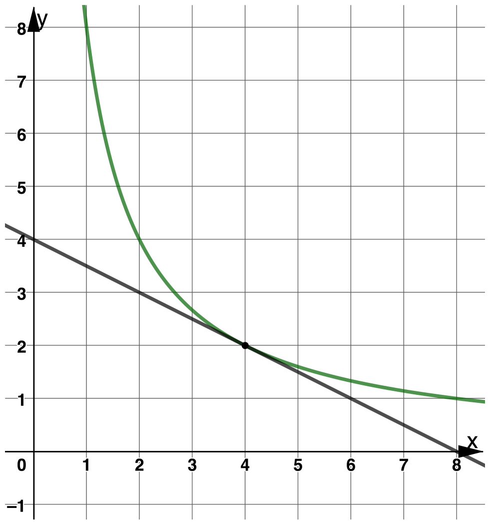
a) Hallar $h'(1)$ si $h(x) = (f \circ g)(x)$

b) Hallar $H'(1)$ si $H(x) = (g \circ f)(x)$

18. Se muestran la gráfica de la función f y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $(2, 1)$, y la gráfica de la función g y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $(4, 2)$.



Gráfica de $f(x)$



Gráfica de $g(x)$

a) ¿Cuánto valen $f'(2)$ y $g'(4)$?

b) Determinar los valores de: $(f \circ g)(4)$ y $(f \circ g)'(4)$

c) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f \circ g$ por el punto $x = 4$

19. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f_1(x) = (\frac{1}{3}x^2 + 1)^2$

b) $f_2(x) = sen(3x - 2)$

c) $f_3(x) = e^{x^2}$

d) $g_1(x) = ln(4 - x^2)$

20. Hallar la segunda derivada de: $h(x) = (x^2 + 2)^3$

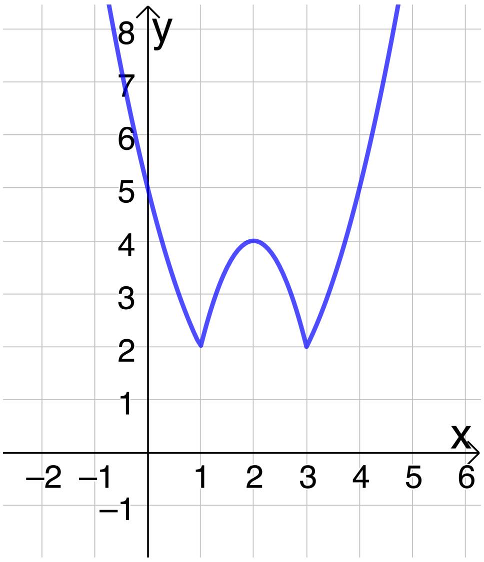
10.2. Aplicaciones de la derivada.

1. Una partícula se mueve de modo que en el instante t, la posición medida en metros está dada por $s(t) = 3sen(2t + \pi)$, donde t está medido en segundos. Teniendo en cuenta que la partícula se mueve en el intervalo de tiempo $[0, \pi]$ ¿en qué instante la velocidad es igual a 0?, ¿en qué instante la aceleración es igual a 0?

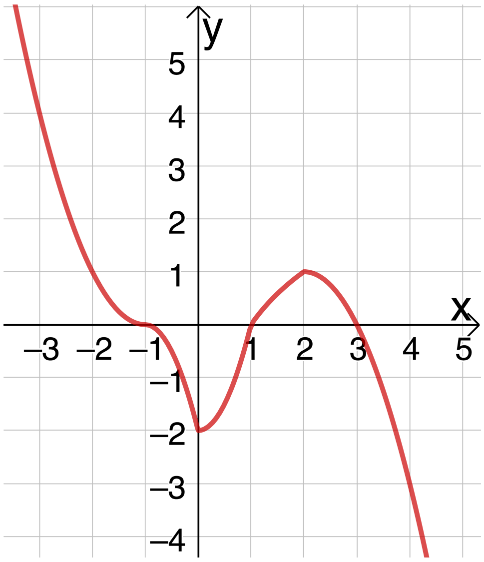
2. La posición de un objeto, medida en km, en función del tiempo, medido en minutos, es $p(t) = t^2 + 2t + 3$. Indicar la velocidad y la aceleración de dicho objeto en cada instante.

3. De acuerdo a las gráficas de las siguientes funciones, determinar los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

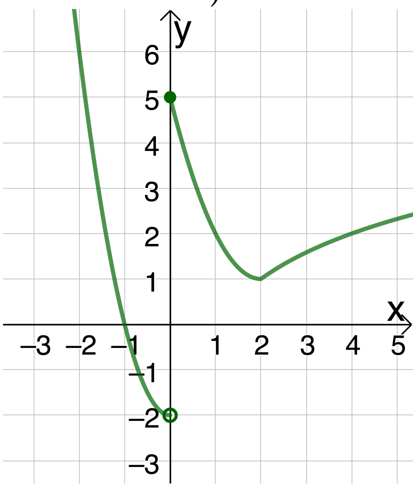
a)


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2 −1 1 2 3 4 5 6

b)

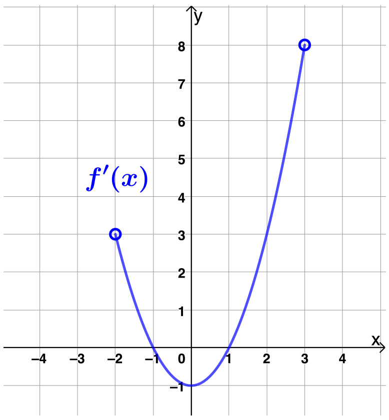

y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3 −2 −1 1 2 3 4 5

c)

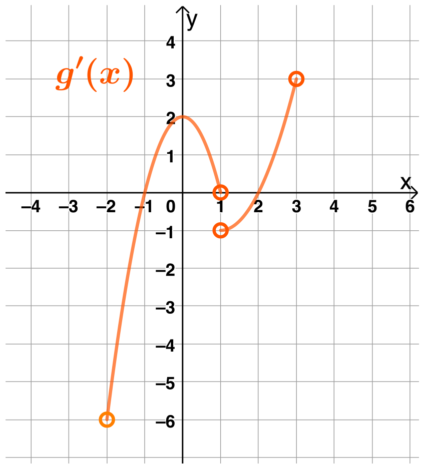

y
x
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−3 −2 −1 1 2 3 4 5

4. Las siguientes gráficas corresponden a las derivadas de las funciones continuas f y g en el intervalo $(-2, 3)$.

Gráfica de $f'(x)$



Gráfica de $g'(x)$



Para cada caso responder:

a) ¿En qué intervalos las funciones f y g son crecientes o decrecientes?

b) ¿En qué valores de x las funciones f y g tienen un máximo local o un mínimo local?

c) Realizar esquemáticamente un gráfico de f teniendo en cuenta que $f(0) = 1$.

5. Dibujar la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones que se enumeran a continuación:

- $f(0) = 3,\ f(3) = 0,\ f(6) = 4$
- $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 3)$, $f'(x) > 0$ en el intervalo $(3, 6)$

6. Esbozar la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones que se enumeran a continuación:

- $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$
- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$

7. Dadas las funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = x^3 + x$ d) $j(x) = x^2 ln(2x)$

a) Determinar los puntos críticos.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

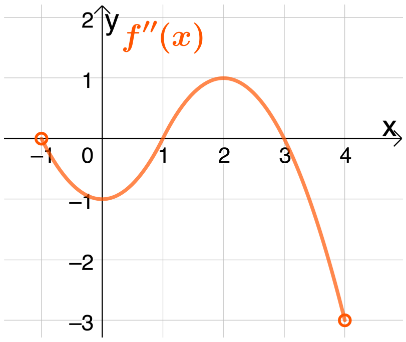
c) Indicar los valores máximos y mínimos locales, si es que existen.

8. Si $f'(x) = (x-1)^2(x-3)^5(x^2+1)$ es la derivada de f, determinar los valores de x en los cuales la función tiene máximos y mínimos locales, si existen.

9. Dada la función $g(x) = x^4 + 2x$, indicar si en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

10. Considerando las funciones del **ejercicio 3**, determinar los intervalos donde sus gráficas son cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo

11. La gráfica siguiente corresponde a la segunda derivada de la función continua f en el intervalo $(-1, 4)$.



  a) ¿En qué intervalos la gráfica de la función f es cóncava hacia arriba y en cuáles es cóncava hacia abajo?
  b) ¿En qué valores de x la función f tiene un punto de inflexión?
  c) Realizar esquemáticamente un gráfico de f teniendo en cuenta que $f(1) = 2$.

12. Utilizando la gráfica de la función $g'(x)$ del **ejercicio 4**.

  a) ¿En qué intervalos la gráfica de la función g es cóncava hacia arriba y en cuáles es cóncava hacia abajo?
  b) ¿En qué valores de x la función g tiene un punto de inflexión?

13. Dibujar la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones que se enumeran a continuación:

  - $f(0) = 3,\ f(3) = 0,\ f(6) = 4$
  - $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 3)$, $f'(x) > 0$ en el intervalo $(3, 6)$
  - $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, 5)$ y $f''(x) < 0$ en el intervalo $(5, 6)$

14. Esbozar la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones que se enumeran a continuación

  - $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$
  - $f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
  - $f''(x) > 0$ si $1 < x < 3$ y $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

15. Para cada una de las funciones del **ejercicio 7**, determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

16. Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$

  a) Indicar el dominio de f.

b) Hallar, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Indicar, si corresponde, los máximos y mínimos locales de la función f.

d) Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

e) Con los datos obtenidos, dibujar la gráfica de f e indicar su imagen.

10.3. Respuestas

Derivada de una función.

1. 1) $f'(2) = 8$
   2) $f'(-2) = -2$

2. $f'(1) \approx 1 \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(3) \approx -2$

3. $0 = g'(0) < g'(-2) < g'(2)$

4. 1) En C.
   2) Permaneció en la misma posición.

5. 1) $f'(x) = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$
   2) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

6. 1) De $f(x) = 3x^2$ en $x = 4$
   2) De $f(x) = x^2$ en $x = 2$

7. $f'(4) = -2$.

8. $l(5) = 2 \qquad l'(5) = -\dfrac{1}{2}$

9. La recta tangente tiene pendiente igual a 1 en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

   La recta tangente tiene pendiente nula en $(0, 1)$.

10. La función no es derivable en: $x = 4,\ x = 6$ y $x = 8$.

11. a) $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
    b) $j'(x) = 2\ (3x^4 + 5x + 2) + (2x - 5)\ (12x^3 + 5)$
    c) $i'(x) = -\dfrac{6}{(2x-4)^2}$
    d) $k'(x) = \frac{3}{5}x^2 + ln(x) + 1$

12. a) $(f+g)'(3) = -1$ b) $(f.g)'(3) = 8$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3) = -8$ d) $\left(\dfrac{f}{f-g}\right)'(3) = 8$

13. $u'(1) = 0$ y $v'(5) = 4$.

14. La recta tangente en $x = 0$ de $f(x) = sen(x)$ es la recta $y = x$ y el punto de tangencia es $(0, 0)$.

15. Los valores de $g(x)$ están en el conjunto $(-\infty, -3]$, ninguno de esos valores pertenecen al dominio de $f(x)$ que es $[0, +\infty)$.

16. El dominio de $(g \circ f)$ es $[1, +\infty)$ y el de $(f \circ g)$ es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

17. $h'(1) = 30$ y $H'(1) = 36$

18. 1) $f'(2) = -3$ y $g'(4) = -\dfrac{1}{2}$

2) $(f \circ g)(4) = 1$ y $(f \circ g)'(4) = \dfrac{3}{2}$

3) La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{3}{2}x - 5$

19. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

a) $f_1'(x) = 2(\frac{1}{3}x^2 + 1) \cdot \dfrac{2}{3}x$ b) $f_2'(x) = cos(3x-2) \cdot 3$

c) $f_3'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$ d) $g_1'(x) = -\dfrac{2x}{4-x^2}$

20. $h''(x) = 6\ (x^2+2)^2 + 24x^2(x^2+2)$

Aplicaciones de la derivada.

1. La velocidad vale cero en $t = \dfrac{1}{4}\pi$ y $t = \dfrac{3}{4}\pi$.
   La aceleración vale cero en $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \pi$.

2. La velocidad es $v(t) = 2t + 2$ y la aceleración $a(t) = 2$.

3. 1) Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 1)$ y $(2, 3)$
   Intervalos de crecimiento: $(1, 2)$ y $(3, +\infty)$
   Tiene un máximo local en $x = 2$ que vale 4
   Tiene dos mínimos locales en $x = 1$ y $x = 3$ que valen 2.

2) Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$
Intervalo de crecimiento: $(0, 2)$
Tiene un máximo local en $x = 2$ que vale 1.
Tiene un mínimo local en $x = 0$ que vale -2.

3) Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$
Intervalo de crecimiento: $(2, +\infty)$
Tiene un máximo local en $x = 0$ que vale 5
Tiene dos mínimos locales en $x = 2$ que vale 1.

4. $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, -1)$ y en el $(1, 3)$; decreciente en el intervalo $(-1, 1)$; tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.

   $g(x)$ es creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y en el $(2, 3)$; decreciente en el intervalo $(-2, -1)$ y en el $(1, 2)$; tiene un máximo local en $x = 1$ y dos mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$.

5. 1) $f(x)$:
   - Dominio=$\mathbf{R}$
   - Puntos críticos: $x = 0$, $x = -1\, x = 1$
   - Intervalos de crecimiento: $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$
   - Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
   - Máximo local: 0 en $x = 0$
   - Mínimo local: -1 en $x = -1$ y $x = 1$

   2) $g(x)$:
   - Dominio=$\mathbf{R} - \{0\}$
   - Puntos críticos: $x = -1,$ y $x = 1$
   - Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$
   - Intervalos de decrecimiento: $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
   - Máximo local: -2 en $x = -1$
   - Mínimo local: 2 en $x = 1$

   3) $h(x)$:
   - Dominio=$\mathbf{R}$
   - Puntos críticos: $x = 0$
   - Intervalo de crecimiento: $(-\infty, +\infty)$
   - Intervalos de decrecimiento: no tiene
   - Máximo local: no tiene
   - Mínimo local: no tiene

   4) $j(x)$:
   - Dominio=$(0, +\infty)$

- Puntos críticos: $x = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \approx 0,303$
- Intervalos de crecimiento: $(\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}, +\infty)$
- Intervalos de decrecimiento: $(0, \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2})$
- Máximo local: no tiene
- Mínimo local: $-\dfrac{1}{2e}$ en $x = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$

6. Tiene un mínimo local en $x = 3$.

7. $g"(x) = 0$ en $x = 0$.
   $g"(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$
   $g"(x) > 0$ en $(0, +\infty,)$
   Por lo tanto en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

8. 1) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1)$ y $(3, +\infty)$
   Intervalos de concavidad hacia abajo: $(1, 3)$

   2) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
   Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$

   3) Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$
   Intervalo de concavidad hacia abajo: $(2, +\infty)$

9.
   - Intervalo de concavidad hacia arriba: $(1, 3)$
   - Intervalos de concavidad hacia abajo: $(-1, 1)$ y $(3, +\infty)$
   - Tiene puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$

10.
   - Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-2, 0)$ y $(1, 3)$
   - Intervalo de concavidad hacia abajo: $(0, 1)$
   - Tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 1$

11. 1) $f(x)$:
   - Intervalos de concavidad hacia arriba: $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}})$ y $(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty)$
   - Intervalo de concavidad hacia abajo: $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
   - Puntos de inflexión: $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

   2) $g(x)$:
   - Intervalo de concavidad hacia arriba: $(0, +\infty)$

- Intervalo de concavidad hacia abajo:$(-\infty, 0)$
- Puntos de inflexión no tiene.

3) $h(x)$:
   - Intervalo de concavidad hacia arriba: $(0, +\infty)$
   - Intervalo de concavidad hacia abajo:$(-\infty, 0)$
   - Punto de inflexión en $x = 0$
4) $j(x)$:
   - Intervalo de concavidad hacia arriba: $\left(\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}, +\infty\right)$
   - Intervalo de concavidad hacia abajo:$\left(0\,,\ \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}\right)$
   - Punto de inflexión en $x = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$

12.
1) Dominio $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$
2) Tienen asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.
3) Intervalos de crecimiento $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$
   Intervalos de decrecimiento $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$
   En $x = 0$ tiene un mínimo local y vale 0.
4) Intervalo de concavidad hacia arriba $(-2, 2)$
   Intervalo de concavidad hacia abajo $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$
   No tiene puntos de inflexión.
5) Imagen $\mathbf{R} - \{0\}$

Práctica 11

Integración

11.1. Integración

1. *a*) Un móvil se mueve con una velocidad constante v. Encontrar una expresión general de la posición $p(t)$.

   b) Si la velocidad del móvil del inciso anterior es de $v = 20\, km/h$, hallar la posición del móvil $p(t)$ si la posición inicial es $10\, km$.

2. *a*) Un móvil se mueve con una aceleración constante a. Encontrar una expresión general para la velocidad $v(t)$ y la posición $p(t)$.

   b) Si la aceleración del móvil del inciso anterior es de $a = 10\, m/s^2$, hallar la posición del móvil $p(t)$ si la velocidad inicial es de $3\, m/s$ y la posición inicial es $1\, m$.

3. Sea una partícula que se mueve a lo largo de una recta con función velocidad que responde a la expresión $v(t) = 2sen(t)$, con t medido en minutos. Si la posición inicial es 0 en metros. Encontrar la posición de la partícula a los 15 minutos.

4. Determinar, en cada caso, $f(x)$ sabiendo que $F(x)$ es una de su primitiva:

   a) $F(x) = x^3 + 3$

   b) $F(x) = x^3 - \dfrac{1}{5}$

   c) $F(x) = x^3 + 3x$

   d) $F(x) = x^3 + 3x - 1$

5. Determinar, en cada caso, $g(x)$ sabiendo que:

   a) $g'(x) = sen(x) + x$ y $g(0) = 2$.

   b) $g'(x) = \dfrac{3}{x}$ y $g(1) = 4$.

6. La tasa de crecimiento de la población de cierta bacteria en su período inicial responde a la función $v(t) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{t^2}}$ donde t está medido en segundos. Encontrar la función $P(t)$ que da la población, si $P(0) = 10$.

7. Una población de bacterias es de 4000 en el tiempo $t = 0$ y su velocidad de crecimiento a las t horas es $1000\, e^t$ bacterias por hora ¿Cuál es la población después de una hora?

8. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x^5\,dx$ b) $\int \sqrt[4]{x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

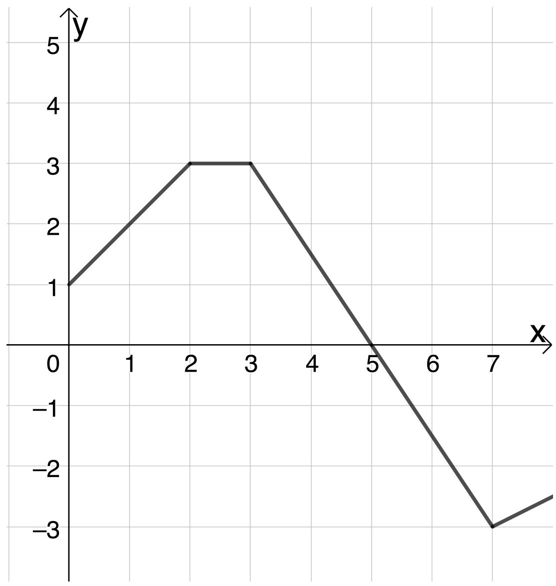
d) $\int -4\,x\,dx$ e) $\int 3\,dx$ f) $\int -\frac{2}{x}\,dx$

g) $\int cos(x)\,dx$ h) $\int 3sen(x)\,dx$ i) $\int -cos(x)\,dx$

j) $\int (-4\,x+2)\;dx$ k) $\int \big(3\,x^5 - sen(x)\big)\;dx$ l) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x^3}\,dx$

m) $\int -4\,(x-1)^2\,dx$ n) $\int 3\,e^x dx$ ñ) $\int \frac{3\,(x^2-1)^2}{x^3}\,dx$

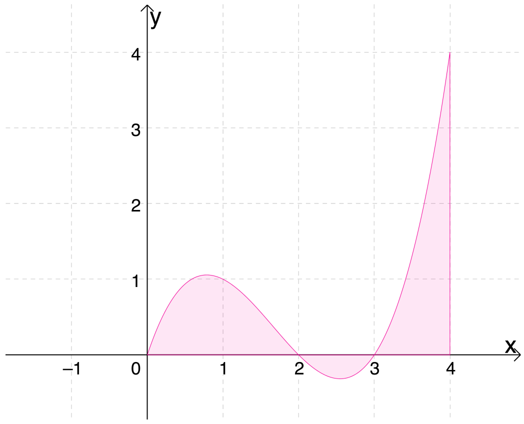
9. Determinar cada integral interpretándola en términos de áreas, si f es la mostrada en la figura.



a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$ c) $\int_5^7 f(x)\,dx$

d) $\int_0^7 f(x)\,dx$ e) $\int_3^7 f(x)\,dx$

10. Determinar el valor del área sombreada, si la gráfica de la curva corresponde a la función $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{5}{2}x^2 + 3x$



11. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2+1\right)\, dx$ b) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} (sen(x) - cos(x))\, dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 4\, e^x\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x}\, dx$ e) $\displaystyle\int_2^4 \left(\sqrt{x}+4x^3\right)\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^\pi (cos(x) + 3x - 1)\, dx$

12. Se sabe que $\displaystyle\int_1^3 g(x)\, dx = 5$ y que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx = -4$, calcular:

a) $\displaystyle\int_1^3 (2\, g(x) + \sqrt{x})\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^3 (g(x) + f(x))\, dx$ c) $\displaystyle\int_1^3 (2\, f(x) + sen(x))\, dx$

13. Sea $g(x)$ una función continua en todos los reales, escribir como una sola integral de la forma $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ la expresión siguiente:

$$\int_{-2}^2 g(x)\, dx + \int_2^5 g(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} g(x)\, dx$$

14. Si $\displaystyle\int_1^5 h(x)\, dx = 12$ y $\displaystyle\int_4^5 h(x)\, dx = 4$ encuentre $\displaystyle\int_1^4 h(x)\, dx$

15. Dada la gráfica de la función $f(x)$

¿Entre qué valores se encuentra $\int_1^3 f(x)\,dx$?

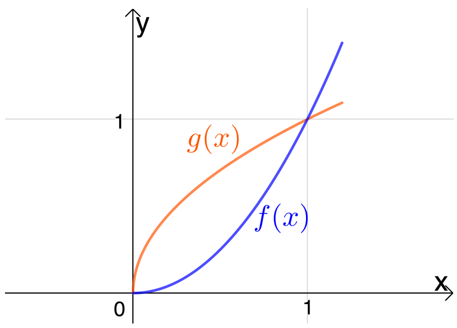
16. *a*) Calcular el valor de las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi} sen(x)\,dx \qquad \int_0^{2\pi} sen(x)\,dx \qquad \int_0^{3\pi} sen(x)\,dx$$

b) Realizar la interpretación gráfica de cada una de las integrales anteriores. Comparar.

c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^{k\pi} sen(x)\,dx$ con k natural?

17. Dado el siguiente gráfico:

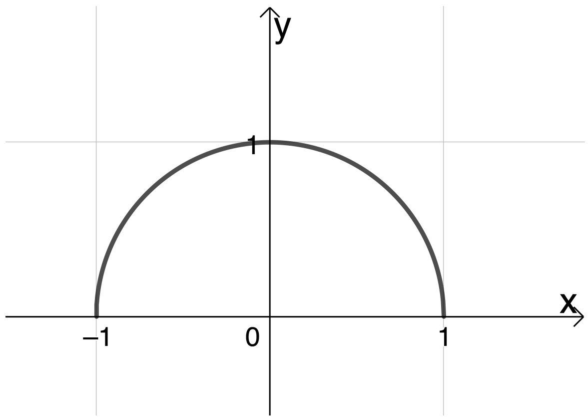


Indicar si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas y justificar su elección.

a) $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$

18. Dada la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



Indicar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$

11.2. Respuestas

1. *a)* $p(t) = v.t + C$ *b)* $p(t) = 20.t + 10$ con t en horas y p en km.

2. *a)* $v(t) = a.t + C_1$ $p(t) = \dfrac{a.t^2}{2} + C_1.t + C_2$
   b) $p(t) = 5.t^2 + 3t + 1$ con t en segundos y p en metros.

3. La posición de la partícula a los 15 minutos es de $-2cos(15) + 2 \approx 3,52$ metros.

4. a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = 3x^2 + 3$ d) $f(x) = 3x^2 + 3$

5. *a)* $g(x) = -cos(x) + \dfrac{x^2}{2} + 3$

   b) $g(x) = 3\,ln|x| + 4$ o $g(x) = \begin{cases} 3\,ln(x) + 4 & si \quad x > 0 \\ 3\,ln(-x) + 4 & si \quad x < 0 \end{cases}$

6. $P(t) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{t} + 10$

7. La población después de una hora es de $1000\,e + 3000 \approx 5718$ bacterias.

8. a) $\dfrac{x^6}{6} + C$ b) $\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$ c) $-\dfrac{1}{2x^2} + C$

d) $-2x^2 + C$ e) $3x + C$ f) $-2\,ln|x| + C$

g) $sen(x) + C$ h) $-3cos(x) + C$ i) $-sen(x) + C$

j) $-2x^2 + 2x + C$ k) $\dfrac{x^6}{2} + cos(x) + C$ l) $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3\sqrt{x^3}} + C$

m) $-\dfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + C$ n) $3e^x + C$ ñ) $\dfrac{3}{2}x^2 - 6ln|x| - \dfrac{3}{2x^2} + C$

9. *a)* 4 *b)* 10 *c)* -3 *d)* 7 *e)* 0.

10. El área es de $\dfrac{95}{8}u^2$

11. *a)* 10 *b)* -2 *c)* $4e - \dfrac{4}{e}$ *d)* $3\ln(2)$ *e)* $\dfrac{736}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ *f)* $\dfrac{3\pi^2}{2} - \pi$

12. *a)* $\dfrac{28}{3} + 2\sqrt{3}$ *b)* 1 *c)* $-8 - cos(3) + cos(1)$

13. $\displaystyle\int_{-1}^{5} g(x)\,dx$

14. $\displaystyle\int_{1}^{4} h(x)\,dx = 8$

15. $4 \leq \displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx \leq 10$

16. *a)* a) $\displaystyle\int_0^{\pi} sen(x)\,dx = 2$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = 0$ $\displaystyle\int_0^{3\pi} sen(x)\,dx = 2$

    b)

    c) $\displaystyle\int_0^{k\pi} sen(x)\,dx = \begin{cases} 2 & si \quad k \text{ es impar} \\ 0 & si \quad k \text{ es par} \end{cases}$

17. *a)* F *b)* V

18. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi.$

Bibliografía

Stewart, J., (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* Séptima edición Cengage Learning Editores, SA.