V Reunión de Centros de Investigación Económica

UN PROCESO MARKOVIANO DE RESPUESTA A LA PLANIFICACION INDICATIVA

Oscar J. Sbarra Mitre

30 OCT 1969

UN PROCESO MARKOVIANO DE RESPUESTA A LA PLANIFICACION INDICATIVA

1.- Introducción

La planificación económica, tal como está encarada en los países democráticos, generalmente se instrumenta en una serie de normas obligatorias para el sector público y un conjunto de sugerencias, congruentes con ellas, destinadas a la actividad privada. La flexibilidad está dada en función del marco institucional que sirve de contexto al plan y que se supone inmodificable como estructura político-jurídica.

Desde los simples agregados de frenos y estímulos -a veces no sistematizados orgánicamente en un programa de acción-, hasta la planificación indicativa o la llamada "a doble sector", resultan elementos integrantes -con distintas gradaciones- del concepto enunciado.

Tales esquemas son reducibles, en su parte no obligatoria, a una gama secuencial de actos que implican la adopción de ciertas pautas de comportamiento por las unidades de producción -y, aunque menos fundamentalmente, también por las de consumo-, explicitadas en respuestas de aprobación o de rechazo a la conducta que se quiso lograr con el plan.

Esto presenta el problema como bastante análogo al del aprendizaje, en el sentido de que éste es "el proceso por el cual se origina o cambia una actividad, mediante la reacción a una situación dada...." (1). El proceso que el planificador pretende se cumpla, es aquel que marca una modificación en las conductas de las unidades económicas, para que se compatibilicen con los objetivos fijados en el plan.

En el presente trabajo trataremos de utilizar un conocido mode- //.

lo de aprendizaje, en forma de proceso estocástico markoviano, matemáticamente simple, para aplicarlo a la interpretación del comportamiento frente a la planificación. Asimismo, deduciremos un modelo algo más sencillo, con idéntico propósito, y, por último, especificaremos la noción de las expectativas frente al plan, así como algunas posibilidades econométricas.

2.- El modelo de aprendizaje

Suponiendo un número determinado de unidades económicas, cuyas decisiones son independientes entre sí, es posible computar una cierta proporción de respuestas afirmativas a las normas del plan (entendidas como acatamiento a las conductas indicadas en el mismo) sobre el total de respuestas, frecuencia que, tomada como probabilidad, denominaremos p_n si corresponde a la secuencia n del escalonamiento que liga a las acciones cuya respuesta se espera, siendo, lógicamente, $0 \leq p_n \leq 1$.

Siguiendo a Bush y Mosteller (2), basados en los estudios de Estes(3), asumimos la hipótesis de que p_{n+1} depende de p_n y es independiente de las respuestas anteriores a la n. Luego, el proceso es markoviano, y además lineal, agregando la circunstancia de que la relación entre p_{n+1} y p_n es de ese tipo.

Para ello se adopta la forma denominada "de pérdidas y ganancias" (4), o sea

$$p_{n+1} = p_n + a(1-p_n) - bp_n \qquad n=0,1,2,\ldots\ldots$$

puesto que $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$

///.

resulta proporcional al incremento y al decremento máximo posible que llevaría el valor de p_{n+1} a 0 ó 1, resultando a y b los factores de proporcionalidad.

La ecuación se convierte en

$$p_{n+1} = (1 - a - b)\ p_n + a$$

la que, haciendo $1-a-b = m$, responde a la forma lineal típica

$$p_{n+1} = m\ p_n + a$$

Es fácil comprender que $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, para que p_n y p_{n+1} estén también entre iguales límites, ya que

$$p_n = 0 \Longleftrightarrow p_{n+1} = a$$

$$p_n = 1 \Longleftrightarrow p_{n+1} = 1-b$$

Se desprende de la ecuación que a y b son parámetros representantivos de los alicientes o desalientos establecidos en el plan. Trabajaremos con el supuesto de que, existiendo un plan indicativo, se intenta influenciar las formas de comportamiento, a través de estímulos y/o castigos, por lo que desechamos el caso en que $a=b=0$.

Tenemos, pues, una ecuación en diferencias lineal de primer orden, del tipo $y_{n+1} = A\ y_n + B$, cuya solución es

$$y_n = A^n\ (y_o - y^*) + y \quad \Longleftrightarrow \quad A \neq 1$$

$$y_n = y_o + B\ n \qquad \Longleftrightarrow \quad A = 1$$

donde $y^* = \dfrac{B}{1 - A}$

////.

En ella

$$A = 1 - a - b$$

$$B = a$$

$$p^{*} = \frac{B}{1 - A} = \frac{a}{a + b} \qquad (5)$$

por lo que

$$A \neq 1 \iff a + b \neq 0$$

$$A = 1 \iff a + b = 0$$

resultando

$$p_n = (1-a-b)^n \left(p_o - \frac{a}{a+b}\right) + \frac{a}{a+b} \iff A \neq 1$$

$$p_n = p_o \iff A = 1$$

Por ende, $A \in [-1, 1]$, aunque los extremos se asumen solo si $a=b=0$, caso, el segundo, que hemos eliminado por hipótesis.

Analicemos los distintos comportamientos de la sucesión $\{p_n\}$, cuando $n \to +\infty$:

I).- $A = -1$

Entonces, $a=b=1$; luego $p_n = (-1)^n (p_o - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$

por lo que $p_n = p_o \iff n$ es par

$p_n = 1-p_o \iff n$ es impar

la sucesión oscila entre esos dos valores, como "piso" y "techo".

II).- $A \in (-1, 0)$

Por tanto, $1 < a+b < 2$, y $p_n \to a/(a+b)$, en forma oscilante

/////.

amortiguada, dado que $(1-a-b)^n (p_o - \frac{a}{a+b}) \to 0$, por derecha e izquierda, alternadamente.

III).- $A = 0$

De hecho, $a+b = 1$, resultando $p_n = a$, constantemente, pues

$$(1-a-b)^n (p_o - \frac{a}{a+b}) = 0$$

y, además, $a/(a+b) = a$

o sea, p^* toma el valor particular a.

IV).- $A \in (0, 1)$

Entonces, $0 < a+b < 1$, y $p_n \to p^*$, puesto que

$$(1-a-b)^n (p_o - \frac{a}{a+b}) \to 0$$

y $\{p_n\}$ será monótona creciente o decreciente (siempre convergiendo a p^*), de acuerdo a que $p_o < p^*$ ó $p_o > p^*$.

V).- $A = 1$

Es el caso, eliminado, de $a=b=0$. En él se verifica

$$p_n = (1-a-b)^n (p_o - \frac{a}{a+b}) + \frac{a}{a+b} = p_o$$

Convendría agregar el análisis de dos casos particulares: $a=0$ y $b=0$.

Si $a=0$, $A=1-b$, y $B=0$, de donde la solución se reduce a

$$p_n = (1-b)^n \; p_o$$

//////.

La función resultante se conoce como curva de extinción, pues es monótonamente decreciente a partir de p_o (6), o sea $p_n \longrightarrow 0$.

Siendo $b=0$, $A=1-a$, y $B=a$, por lo que

$$p_n = (1-a)^n (p_o - 1) + 1$$

y, entonces, $P_n \longrightarrow 1$.

Como se ve, de existir solo frenos o estímulos, la probabilidad de respuesta positiva tiende a la nulidad o a la certeza.

Tratemos de resumir lo expuesto. Excepto en los casos I y V, vale decir cuando A asume sus valores extremos, $p_n \longrightarrow p^*$, en forma oscilante amortiguada, constante, creciente o decreciente. Así como hemos eliminado por hipótesis, la posibilidad $a=b=0$, también podríamos hacer lo mismo con $a=b=1$, pues tal situación implicaría la máxima cantidad, simultánea, de premios y castigos, lo que no resulta muy consistente. El comportamiento se torna, entonces, lógicamente oscilante.

Luego, en los casos que podemos denominar verosímiles, o sea $A \in (-1, 1)$, se observa que la probabilidad límite (7) de respuesta positiva es $a/(a+b)$, y, por tanto, la de respuesta negativa $1 - a/(a+b)$. De ahí se deduce lo siguiente

$$\frac{p_n}{1 - p_n} = \frac{a/(a+b)}{1 - \frac{a}{a+b}} = \frac{a/(a+b)}{b/(a+b)} = \frac{a}{b}$$

que se traduce en el lema:

la relación de las probabilidades de contestación afirmativa y negativa a las pautas de comportamiento pretendidas por el plan ///////.

indicativo, es igual a la de estímulos e impedimentos que contenga el mismo plan.

Cabe añadir que si sólo existen unos u otros, la probabilidad de respuesta afirmativa toma los valores 1 ó 0, tal como quedo demostrado en el estudio de los casos particulares a=0 y b=0.

Esta conclusión nos permite obtener una formulación extremadamente simple de lo que es dable designar como expectativas con respecto al plan. En efecto, dichas expectativas se medirían por

$$E = \left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

siendo E negativa, nula o positiva, según sea a menor, igual o mayor que b. Por ejemplo, si a=b, entonces $p_n = 1 - p_n = 0,5$, es decir, la entropía es máxima debido a la indecisión que provoca en las unidades económicas la idéntica proporción de recompensas y castigos, y sus expectativas las suponemos nulas. En cambio, ellas serán positivas o negativas en la medida de la mayor o menor influencia de los estímulos en el total de las normas puestas en vigencia por el plan.

3.- Un modelo más simple

Naturalmente, el modelo presentado puede simplificarse más, suponiendo, vervigracia, que las normas del plan se interpretan como compensatorias, desalentadoras o neutras, siendo a y b los porcentajes (reducidos a tanto por uno) de las dos primeras clases sobre el total, por lo que, $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, al igual que en nuestro modelo, pero, por otra parte, $a+b \leq 1$, y, entonces, $A \in [0, 1)$, si no admitimos el hecho de a=b=0, en base a que no todas las pautas han de ser neutras.

///////.

En estos términos quedan válidos los casos III y IV, o sea, $A = 0$ y $0 < A < 1$, razón por la cual $\{p_n\} \to p^{*}$, resulta una sucesión constante, creciente o decreciente, y en todos los casos monótona.

De hecho, no cabe aseverar que esta versión sea superior a la primera, salvo por el menor número de alternativas y, quizás, la mejor congruencia de las condiciones paramétricas.

4.- La dimensión econométrica

El modelo presentado (o más bien ambos) acumula en su favor la posibilidad de la medición estadística. Esto no significa que semejante testaje no derive en serios inconvenientes, pero éstos, si bien difíciles, son superables.

Nuestra ecuación de partida

$$p_{n+1} = a + m\, p_n$$

donde $m = 1 - a - b$

permitiría identificar $\underline{a}$ y $\underline{m}$, lográndose, con ello, despejar $\underline{b}$.

La regresión entre p_{n+1} y p_n no es imposible, partiendo de una secuencia temporal de indicaciones contenidas en el plan, que se aspira sean cumplidas en ese orden por cada una de las unidades económicas. Es viable el supuesto markoviano en la circunstancia de que la probabilidad de cumplir una norma dependerá del resultado de la decisión tomada con respecto a la anterior (8). Tales pruebas pueden ser contingencias análogas que han de aceptarse periódicamente por las unidades económicas.

Si se sigue en el tiempo el comportamiento de un conjunto de ellas -o, en un tipo de "cross section", la conducta de unidades o gru-

///////.

pos de unidades frente a pautas diversas del mismo plan, que admitan distintos valores en una escala común-, que han de acatar o no la sucesión de normas fijadas, tomando las frecuencias relativas como estimadores de las probabilidades respectivas; es lícito establecer la regresión de p_{n+1} y p_n, e interpretar las probabilidades límites para el conjunto como indicador de las decisiones individuales de cada unidad económica en particular.

Instituto de Investigaciones Económicas
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Buenos Aires

Oscar J. Sbarra Mitre

NOTAS

(1) HILGARD,E.R., "Teorías del aprendizaje", Ed. Fondo de Cultura Económica, México 1961.

(2) BUSH,R.R, y MOSTELLER,F., "A mathematical model for simple learning", en Psychological Review, N° 58, 1951. Véase también "Stochastic models for learning", Ed. John Wiley, New York, 1955.

(3) ESTES,W.K., "Toward a statistical theory of learning", en Psychological Review, N° 57, 1950.

(4) GOLDBERG,S., "Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas", Ed. Marcombo, Barcelona, 1954.

(5) La y de la forma general la reemplazamos por la p de nuestra ecuación estocástica.

(6) El nombre es, en realidad, "curva de extinción experimental", y se debe a los famosos trabajos con ratones de laboratorio, que deben recorrer laberintos de diverso trazado para encontrar alimentos.

(7) El sistema se supone estable en probabilidad; es una"máquina" markoviana en lenguaje cibernético.

(8) Y de que ese resultado haya satisfecho o no las expectativas de la unidad económica que ha de decidir. Por supuesto que esa evaluación posee un elevado porcentaje de subjetividad.