SISTEMAS TRIANGULARES VECTORIALES
CON FILAS DEPENDIENTES Y ESTACIONARIAS

por

Jorge D. Samur

Tesis de grado presentada como requisito parcial
para optar al título de Philosophus Scientiarum en Matemáticas

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

IVIC

CENTRO DE ESTUDIOS AVANZADOS

Caracas

Abril 1981

La tesis de grado de Jorge D. Samur titulada "SISTEMAS TRIANGULARES VECTORIALES CON FILAS DEPENDIENTES Y ESTACIONARIAS" ha sido aprobada por el Jurado, quien no se hace responsable de su contenido, pero que la ha encontrado correcta en su calidad y en su forma de presentación en fe de lo cual firman,

ENRIQUE CABAÑA

U.S.B.

MISCHA COTLAR

U.C.V.

JOAQUIN ORTEGA

I.V.I.C.

ALEJANDRO DE ACOSTA

Director de la tesis de grado

I.V.I.C.

Centro de Estudios Avanzados, IVIC

Altos de Pipe, Abril 1981

RESUMEN DE LA TESIS DE GRADO PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE PHILOSOPHUS SCIENTIARUM EN MATEMATICAS

SISTEMAS TRIANGULARES VECTORIALES CON FILAS DEPENDIENTES Y ESTACIONARIAS

por

Jorge D. Samur

Centro de Estudios Avanzados

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

IVIC

Caracas, Abril de 1981

Alejandro de Acosta

Director de la tesis

Dado un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en un espacio de Banach cuyas filas son estacionarias y satisfacen ciertas condiciones de dependencia, se estudian condiciones necesarias y suficientes, expresadas en términos de los vectores individuales, para la convergencia débil de las leyes de las sumas de sus filas.

A mis padres

AGRADECIMIENTO

Mi profunda gratitud para Alejandro de Acosta por su enseñanza y apoyo durante largo tiempo, que incluye la dirección de esta tesis.

Agradezco a CORDIPLAN e IVIC el apoyo recibido durante la realización de este trabajo; a Natty Sosa, el esmero y rapidez con que mecanografió mis notas.

INDICE

Página

Introducción.

Existen estudios de la convergencia débil de las leyes de sumas de variables aleatorias en los cuales la hipótesis de independencia es reemplazada por propiedades menos restrictivas que se expresan a través de ciertos coeficientes de dependencia (ver, por ejemplo, las referencias [9], [5], [10], [12]).

Consideraremos aquí dos de estas nociones, la ϕ-dependencia y la ψ-dependencia ("ϕ-mixing" y "ψ-mixing" en idioma inglés), para sistemas triangulares de vectores aleatorios a valores en un espacio de Banach cuyas filas forman sucesiones finitas estacionarias (véanse las definiciones en la Sección 1).

Para dichos sistemas triangulares se estudiarán condiciones necesarias y suficientes de convergencia expresadas en términos de los vectores individuales y, en principio, sin condiciones de momentos. Con este objetivo, nos apartamos de los métodos usuales y seguimos el punto de vista y nos apoyamos en resultados del caso de sistemas triangulares con filas independientes a valores en un espacio de Banach tal como está desarrollado en [3]; el uso de dichos resultados se hace, como es habitual en el caso dependiente, a través de la idea de S. Bernstein de agrupar vectores aleatorios en bloques convenientes. Otro aspecto en el que se sigue a [3] es el de obtener primero condiciones necesarias de convergencia y luego deducir condiciones suficientes. El método utilizado conduce a resultados nuevos aun en la recta real.

Se considera primero el caso de sistemas triangulares ϕ-dependientes (Sección 3). En esta situación se estudia la convergencia a límites gaussianos; se obtienen condiciones necesarias de convergencia en un espacio de Banach separable y ciertas condiciones suficientes cuando el espacio es de Hilbert. De estas últimas se deduce un resultado (Corolario 3.12) que, esencialmente, es una generalización infinito-dimensional de un teorema de Ibragimov (Theorem 18.5.2 de [9]) para variables aleatorias reales; como aplicación, se calcula la distribución límite del estadístico de Cramêr-VonMises de un proceso estacionario ϕ-dependiente (Proposición 3.13), refinando, en esencia, en este aspecto un resultado de Billingsley que da la distribución límite del proceso empírico (Theorem 22.1 de [5]).

Por otra parte, se muestra cómo se obtiene con métodos de de Acosta ([2]) y a partir de uno de nuestros resultados iniciales un principio de invarianza en casi todo punto (Teorema 3.14) para convergencia a límites gaussianos; se deduce de él una generalización (Corolario 3.16) de un principio de invarianza en distribución de Eberlein (Theorem 3.1 de [6]). Se obtiene como consecuencia (Corolario 3.17) una versión para vectores aleatorios a valores en un espacio de Hilbert de un teorema de Billingsley (Theorem 20.1 de [5]).

Finalmente (Sección 4) nos ocupamos de la convergencia a límites infinitamente divisibles generales cuando el sistema triangular es ψ-dependiente (y siempre con filas estacionarias). Se dan condiciones necesarias de convergencia en un espacio de Banach separable y condiciones suficientes cuando el espacio es de dimensión finita, en términos de los vectores individuales. Parece difícil, para obtener tal tipo de condiciones, tratar la convergencia a límites infinitamente divisibles con hipótesis de dependencia menos restrictivas (en [12] se dan condiciones en términos de bloques para la convergencia a leyes infinitamente divisibles de sistemas triangulares ϕ-dependientes de variables aleatorias que satisfacen hipótesis distintas de las presentadas aquí).

La Sección 2 contiene desigualdades básicas para el trabajo.

1. Definiciones y notaciones.

Denotaremos con $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales mayores que cero; B designará siempre un espacio de Banach real separable y $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de Borel.

Dado un sistema triangular $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ de vectores aleatorios (definidos en cierto espacio de probabilidad (Ω,A,P)) a valores en B se define $M_{hk}^{(n)}=\sigma(X_{nj}:h\leq j\leq k)$ para $n\in\mathbb{N}$, $1\leq h\leq k\leq j_n$ (es la σ-álgebra generada por el conjunto de vectores aleatorios indicado). Análogamente, se definen para una sucesión $\{X_j:j\in\mathbb{N}\}$ las σ-álgebras M_{hk} si $1\leq h\leq k\leq\infty$ y también las σ-álgebras M_{hk} para $1\leq h\leq k\leq n$ cuando se tiene un conjunto finito $\{X_1,\ldots,X_n\}$ de vectores aleatorios a valores en B.

Para un sistema triangular $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ definido en (Ω,A,P) se define el coeficiente de dependencia

$$\phi(k)=\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ j_n>k}}\ \max_{1\leq h\leq j_n-k}\ \sup\left\{\left|\frac{P(E\cap F)}{P(E)}-P(F)\right| : E\in M_{1h}^{(n)}, F\in M_{h+k,j_n}^{(n)}, P(E)>0\right\}$$

$(k\in\mathbb{N})$; se tiene que $\phi(1)\leq 1$ y $\{\phi(k)\}$ es una sucesión no creciente. Se dice que $\{X_{nj}\}$ es <u>ϕ-dependiente</u> si $\phi(k)\downarrow 0$ (nótese que usamos la misma letra ϕ para denotar el coeficiente y al designar la propiedad). En forma análoga se definen el coeficiente ϕ de dependencia y la ϕ-dependencia de una sucesión $\{X_j:j\in\mathbb{N}\}$ y dado un conjunto finito $\{X_1,\ldots,X_n\}$ de vectores aleatorios consideraremos siempre los números $\phi(1),\ldots,\phi(n-1)$ definidos en forma similar; ellos cumplen $1\geq\phi(1)\geq\ldots\geq\phi(n-1)$ (por ejemplo, en este último caso se define $\phi(k)$, si $1\leq k\leq n-1$, omitiendo en la definición anterior el supremo sobre n y reemplazando en lo restante j_n por n y las σ-álgebras $M_{1h}^{(n)}$ y $M_{h+k,j_n}^{(n)}$ por M_{1h} y $M_{h+k,n}$ respectivamente).

Dado un sistema triangular $\{X_{nj}\}$ como el anterior se define el coeficiente de dependencia

$$\psi(k)=\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ j_n>k}}\ \max_{1\le h\le j_n-k}\ \sup\{|\frac{P(E\cap F)}{P(E)P(F)}-1|:E\in M_{1h}^{(n)},F\in M_{h+k,j_n}^{(n)},P(E)P(F)>0\}$$

$(k\in\mathbb{N})$; obsérvese que $\psi(1)\le+\infty$ y que $\{\psi(k)\}$ es una sucesión no creciente. Se dice que $\{X_{nj}\}$ es <u>ψ-dependiente</u> si $\psi(k)\downarrow 0$. También se definen estas nociones para sucesiones de vectores y el coeficiente ψ de dependencia para conjuntos finitos de vectores aleatorios. En cualquier caso, $\phi(k)\le\psi(k)$.

Consideraremos también, para un sistema triangular $\{X_{nj}\}$, el coeficiente

$$\psi^*=\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ j_n>1}}\ \max_{1\le h\le j_n-1}\ \sup\{\frac{P(E\cap F)}{P(E)P(F)}:E\in M_{1h}^{(n)},F\in M_{h+1,j_n}^{(n)},P(E)P(F)>0\}.$$

Se tiene $\psi^*\le 1+\psi(1)$; se lo define análogamente para sucesiones y conjuntos finitos de vectores aleatorios.

En [9] (véanse también [5] y [10]) pueden encontrarse ejemplos de sucesiones de variables aleatorias no independientes que satisfacen estas condiciones de dependencia; en particular, sucesiones ϕ-dependientes con $\phi(n)=0(\rho^n)$, siendo $0<\rho<1$, y sucesiones ψ-dependientes tales que $\psi(1)<\infty$ (luego $\psi^*<\infty$) y $\psi(n)=0(e^{-\lambda n^{1/2}})$ con $\lambda>0$.

Diremos que un conjunto finito $\{X_1,\dots,X_n\}$ de vectores aleatorios a valores en B es <u>estacionario</u> (<u>con sumas estacionarias</u>) si $L(X_1,\dots,X_h)=L(X_{k+1},\dots,X_{k+h})$ $(L(X_1+\dots+X_h)=L(X_{k+1}+\dots+X_{k+h})$, respectivamente) para $1\le h\le n$, $1\le k\le n-h$ (si Z es un vector aleatorio, $L(Z)$ designa su distribución).

Un sistema triangular $\{X_{nj}\}$ será llamado estacionario (con sumas estacionarias) si lo es cada una de sus filas. Definiciones similares para sucesiones de vectores aleatorios.

Dado un sistema triangular $\{X_{nj}\}$ con sumas estacionarias, si $\mu_n = L(X_{n1})$ llamamos $\mu_n^{(k)} = L(\sum_{j=1}^{k} X_{nj})$ para $k=1,\ldots,j_n$. Si μ es una probabilidad sobre B y $k\in\mathbb{N}$, μ^k denota la k-ésima potencia de convolución de μ.

Si X es un vector aleatorio a valores en B llamamos $\sigma(X)=E[\frac{\|X\|}{1+\|X\|}]$; ρ denota la distancia de Prohorov entre probabilidades sobre B.

Las nociones de probabilidad infinitamente divisible, medida gaussiana, medida de Lévy y medida de Poisson τ-centrada en espacios de Banach y sus propiedades básicas pueden encontrarse en [3] o [4]. Dada ν infinitamente divisible sobre B, $\{\nu^t : t\geq 0\}$ es el semigrupo de convolución débilmente continuo asociado.

Denotaremos la convergencia débil de medidas finitas con $\underset{w}{\rightarrow}$; $\underset{P}{\rightarrow}$ indicará convergencia en probabilidad de vectores aleatorios.

Dado $A\in\mathcal{B}$, I_A designa la función característica de A. Si X es un vector aleatorio a valores en B, se escribirá $X_\delta = XI_{[\|X\|\leq\delta]}$, $X^\delta = XI_{[\|X\|>\delta]}$ $(\delta>0)$ y, si $X_{n1},\ldots,X_{nj_n}$ son vectores aleatorios y $S_n = \sum_{j=1}^{j_n} X_{nj}$, escribiremos $S_{n,\delta} = \sum_{j=1}^{j_n} X_{nj\delta}$, $S_n^{(\delta)} = \sum_{j=1}^{j_n} X_{nj}^{\delta}$.

Si μ es una medida σ-finita sobre B, se define $C(\mu)=\{r>0 : \mu(\{x : \|x\|=r\})=0\}$; si $A\in\mathcal{B}$ la medida $\mu|A$ está definida por $(\mu|A)(E)=\mu(A\cap E)$ $(E\in\mathcal{B})$. La medida concentrada en $x\in B$ se designará con δ_x.

Usaremos la notación B' para indicar el espacio dual de B y $B_r=\{x\in B : \|x\|\leq r\}$ $(r>0)$.

2. Algunas desigualdades.

Comenzamos con una extensión del Lemma (3.5) de [6].

2.1 Proposición. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en $\mathbb{B}$. Sean $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k$ $(k\in\mathbb{N})$ números naturales tales que $1\le a_1\le b_1<a_2\le b_2<\ldots<a_k\le b_k\le n$ con $a_i-b_{i-1}\ge q\in\mathbb{N}$ $(i=2,\ldots,k)$. Entonces, definiendo

$$\xi_h=\sum_{a_h\le j\le b_h} X_j \qquad (h=1,\ldots,k),$$

se tiene para todo $A\in\mathcal{B}^k$

$$|\mathcal{L}(\xi_1,\ldots,\xi_k)(A)-\mathcal{L}(\xi_1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}(\xi_k)(A)|\le(k-1)\phi(q)$$

($\mathcal{B}^k$ es la σ-álgebra producto de $\mathcal{B}$ por sí misma k veces, $\otimes$ es la operación de producto de medidas).

Demostración. Hacemos la demostración por inducción sobre k.

El caso k=2 está contenido en el siguiente enunciado (es lo probado en [6] con $B_1=B_2$), que es el que demostraremos: dados vectores aleatorios η,ξ a valores en espacios de Banach B_1,B_2, respectivamente, y llamando

$$\tilde{\phi}=\sup\{|\frac{P(E\cap F)}{P(E)}-P(F)|:E\in\sigma(\eta),F\in\sigma(\xi),P(E)>0\}$$

se tiene

$$|\mathcal{L}(\eta,\xi)(A)-\mathcal{L}(\eta)\otimes\mathcal{L}(\xi)(A)|\le\tilde{\phi}$$

para todo $A\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ (siendo $\mathcal{B}_i$ la σ-álgebra de Borel de B_i).

Para probarlo, notemos que como la clase de los conjuntos $A\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ que satisfacen lo deseado es una clase monótona y el álgebra generada por los rectángulos medibles (que genera $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$) está formada por las uniones finitas de rectángulos disjuntos, basta probar que para estas uniones vale lo afirmado. Sea entonces $\bigcup_{i=1}^{r} (C_i \times D_i)$ una unión finita de rectángulos medibles disjuntos; se puede escribir

$\bigcup_{i=1}^{r} (C_i \times D_i) = \bigcup_{j=1}^{s} (\tilde{C}_j \times \tilde{D}_j)$ con $\tilde{C}_j \in \mathcal{B}_1$, $\tilde{D}_j \in \mathcal{B}_2$ y $\tilde{C}_i \cap \tilde{C}_j = \phi$ si $i \neq j$ (definiendo para $J \subset \{1,\ldots,r\}$ los conjuntos $\tilde{C}_J = (\bigcap_{j\in J} C_j) \cap (\bigcap_{j\notin J} C_j^c)$, $\tilde{D}_J = \bigcup_{j \in J} D_j$ se tiene lo deseado). Luego

$$|L(\eta,\xi)(\bigcup_{j=1}^{s} (\tilde{C}_j \times \tilde{D}_j)) - L(\eta)\otimes L(\xi)(\bigcup_{j=1}^{s} (\tilde{C}_j \times \tilde{D}_j))| $$

$$\leq \sum_{j=1}^{s} |P[\eta\in\tilde{C}_j, \xi\in\tilde{D}_j] - P[\eta\in\tilde{C}_j]\,P[\xi\in\tilde{D}_j]|$$

$$\leq \phi \sum_{j=1}^{s} P[\eta\in\tilde{C}_j]$$

$$\leq \phi .$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para k. Para k+1 consideremos el vector aleatorio $\eta=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ a valores en B^k. Sea $A\in\mathcal{B}^{k+1}$; se tiene

$$|L(\xi_1,\ldots,\xi_{k+1})(A)-L(\xi_1)\otimes\ldots\otimes L(\xi_{k+1})(A)|$$

$$\leq |L(\eta,\xi_{k+1})(A)-L(\eta)\otimes L(\xi_{k+1})(A)|$$

$$+|L(\eta)\otimes L(\xi_{k+1})(A)-L(\xi_1)\otimes\ldots\otimes L(\xi_{k+1})(A)|.$$

Por lo que acabamos de probar, el primer término es $\leq\phi(q)$; para acotar el segundo escribimos $A^y=\{x\in B^k:(x,y)\in A\}$ $(y\in B)$ y usamos la hipótesis inductiva:

$$|L(\xi_1,\ldots,\xi_k)\otimes L(\xi_{k+1})(A)-L(\xi_1)\otimes\ldots\otimes L(\xi_{k+1})(A)|$$

$$=|\int_B [L(\xi_1,\ldots,\xi_k)(A^y)-L(\xi_1)\otimes\ldots\otimes L(\xi_k)(A^y)]L(\xi_{k+1})(dy)|\leq(k-1)\phi(q).\square$$

La siguiente versión de la desigualdad de Ottaviani se prueba en forma análoga al Lemma 1.1.6 de [10]. A través de esta desigualdad se transmite a casi todos los resultados posteriores la hipótesis, ya conocida en la literatura, $\phi(1)<1$ (recordar que $\phi(1)\leq 1$ siempre). Es una condición sobre grupos contiguos de vectores aleatorios.

<u>2.2 Proposición.</u> Sea $\{X_1,\dots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B con $\phi(1)<1$; llamemos $S_k=\sum_{j=1}^{k} X_j$. Supongamos $\phi(1)<\alpha<1$ y sea $V\in\mathcal{B}$ convexo simétrico tal que

$$\max_{1\leq k\leq n-1} P[\sum_{j=k+1}^{n} X_j \notin \tfrac{1}{2}V]\leq 1-\alpha.$$

Entonces

$$P[S_k\notin V \text{ para algún } k=1,\dots,n]\leq \frac{1}{\alpha-\phi(1)}\, P[S_n \notin \tfrac{1}{2}V].$$

En la demostración del siguiente resultado nótese que, debido a la asimetría en la definición del coeficiente ϕ, se hace indispensable considerar el orden inverso al usual en este tipo de demostraciones; por ejemplo, al que se debe tomar en la demostración de la desigualdad anterior.

<u>2.3 Proposición.</u> Sea $\{X_1,\dots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B con $\phi(1)<1$; llamemos $S_k=\sum_{1}^{k} X_j$. Supongamos $\phi(1)<\alpha<1$ y sea $V\in\mathcal{B}$ convexo simétrico tal que

$$\max_{1\leq k\leq n-1} P[\sum_{j=k+1}^{n} X_j \notin \tfrac{1}{4}V]\leq 1-\alpha$$

y

$$P[S_n \notin \tfrac{1}{4}V]<(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1)).$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} P[X_j \notin V]\leq \frac{P[S_n \notin \tfrac{1}{4}V]}{(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1))-P[S_n \notin \tfrac{1}{4}V]}.$$

Demostración. Definamos $F_k=[X_{k+1}\epsilon V,\ldots,X_n\epsilon V]$ para $k=1,\ldots,n-1$ y $F_n=\Omega$; se tiene $F_k\epsilon M_{k+1,n}$ para $k<n$.

Luego

$$P[X_j\notin V \text{ para algún } j=1,\ldots,n]=\sum_{k=1}^{n} P([X_k\notin V]\cap F_k)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}(P(F_k)-\phi(1))\,P[X_k\notin V]$$

$$\geq (P[X_1\epsilon V,\ldots,X_n\epsilon V]-\phi(1))\sum_{j=1}^{n} P[X_j\notin V]$$

$$=(1-\phi(1)-P[X_j\notin V \text{ para algún } j])\sum_{j=1}^{n} P[X_j\notin V].$$

Basta observar ahora que, como $X_j=S_j-S_{j-1}$, aplicando la proposición anterior se tiene

$$P[X_j\notin V \text{ para algún } j]\leq P[S_k\notin \tfrac{1}{2}V \text{ para algún } k]$$

$$\leq \frac{1}{\alpha-\phi(1)}\,P[S_n\notin \tfrac{1}{4}V].\ \square$$

La siguiente desigualdad es una generalización al caso dependiente del Lemma 2, p. 383 de [7]. Su enunciado es el apropiado para nuestros propósitos y su demostración sigue la presentada en [7] (la incluimos por razones de completitud de la exposición).

2.4 Proposición. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B con $\phi(1)<1$; llamemos $S_k=\sum_1^k X_j$. Supongamos que $\|X_j\|\leq M$ c.s. y sean α tal que $\phi(1)<\alpha<1, t>0$ y $\ell\epsilon\mathbb{N}$. Entonces, si

$$\max_{1\leq k\leq n-1} P[\|\sum_{j=k+1}^{n} X_j\|>t/4]\leq 1-\alpha,$$

se tiene

$$P[\max_{1\leq k\leq n}\|S_k\|>\ell t+(\ell-1)M]\leq\left(\phi(1)+\frac{1}{\alpha-\phi(1)}P[\|S_n\|>t/4]\right)^{\ell-1}\frac{1}{\alpha-\phi(1)}P[\|S_n\|>t/2].$$

Demostración. Definimos para $\ell \in \mathbb{N}$

$$E^{(\ell)} = [\max_{1\le k\le n} \|S_k\| > \ell t + (\ell-1)M],$$

$$E_1^{(\ell)} = [\|S_1\| > \ell t + (\ell-1)M]$$

y

$$E_i^{(\ell)} = [\max_{1\le k\le i-1} \|S_k\| \le \ell t + (\ell-1)M, \|S_i\| > \ell t + (\ell-1)M]$$

si $i=2,\dots,n$.

Tomemos $\ell \ge 2$. Se verifica $E^{(\ell)} \subset E^{(\ell-1)} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^{(\ell-1)}$ (unión disjunta) y $E_i^{(\ell-1)} \cap E^{(\ell)} \subset E_i^{(\ell-1)} \cap [\max_{i<k\le n} \|S_k - S_i\| > t]$ $(i=1,\dots,n)$. Fijado i, para probar la última inclusión, supónganse ciertas las condiciones que definen $E_i^{(\ell-1)} \cap E^{(\ell)}$ y tómese k_0 tal que $\|S_{k_0}\| > \ell t + (\ell-1)M$; como $\max_{1\le k\le i-1} \|S_k\| \le (\ell-1)t + (\ell-2)M$ resulta $k_0 \ge i$ y además $\|S_{k_0} - S_i\|$ $= \|S_{k_0} - S_{i-1} - X_i\| > \ell t + (\ell-1)M - (\ell-1)t - (\ell-2)M - M = t$, lo cual asegura que $k_0 > i$.

Luego

$$P(E^{(\ell)}) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i^{(\ell-1)} \cap [\max_{i<k\le n} \|S_k - S_i\| > t])$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} (\phi(1) + P[\max_{i<k\le n} \|S_k - S_i\| > t]) P(E_i^{(\ell-1)})$$

$$\le (\phi(1) + \max_{1\le i\le n} P[\max_{i<k\le n} \|S_k - S_i\| > t]) P(E^{(\ell-1)})$$

$$\le (\phi(1) + P[\max_{1\le k\le n} \|S_k\| > t/2]) P(E^{(\ell-1)}).$$

De esta desigualdad, y aplicando la Proposición 2.2, se deduce

$$P(E^{(\ell)}) \le (\phi(1) + P[\max_{1\le k\le n} \|S_k\| > t/2])^{\ell-1} P(E^{(1)})$$

$$\le (\phi(1) + \frac{1}{\alpha - \phi(1)} P[\|S_n\| > t/4])^{\ell-1} \frac{1}{\alpha - \phi(1)} P[\|S_n\| > t/2]. \square$$

Concluímos esta sección citando dos desigualdades para momentos y enunciado otra, de fácil verificación. La primera está demostrada en [9] (Theorem 17.2.3); la segunda, en [12] (Lemma 3).

2.5 Proposición. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B. Sean $h,k\in\mathbb{N}$ con $1\leq h<h+k\leq n$ y ξ,η variables aleatorias reales medibles respecto de $\mathcal{M}_{1,h}$ y $\mathcal{M}_{h+k,n}$ respectivamente. Si

$$E|\xi|^p<\infty \quad y \quad E|\eta|^q<\infty$$

siendo $p,q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces

$$|E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)|\leq 2\phi^{1/p}(k)(E|\xi|^p)^{1/p}(E|\eta|^q)^{1/q}.$$

2.6 Proposición. Sean $\{X_1,\ldots,X_n\}$, h,k,ξ y η como en la proposición anterior pero sólo suponiendo que $E|\xi|<\infty$ y $E|\eta|<\infty$; entonces

$$|E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)|\leq\psi(k)E|\xi|E|\eta|.$$

2.7 Proposición. Sean $\{X_1,\ldots,X_n\},\xi,\eta$ y h como en la Proposición 2.6, con k=1. Entonces

$$|E(\xi\eta)|\leq\psi^*E|\xi|E|\eta|.$$

3. Caso ϕ-dependiente.

Dado un sistema triangular $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ de vectores aleatorios a valores en B llamamos $S_n=\sum_{j=1}^{j_n}X_{nj}$; supondremos siempre que $j_n\to\infty$.

En el siguiente resultado se usan ideas de la demostración de la Proposition (3.6) de [6] que a su vez está inspirada en el Lemma 1 de [11] (sin embargo, observemos que en [6], aparentemente, la hipótesis es innecesariamente restrictiva y la conclusión, con la generalidad enunciada, dudosa).

3.1 Proposición. Sea $\{X_{nj}; 1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, ϕ-dependiente con sumas estacionarias. Supongamos que $X_{n1}\to 0$ en probabilidad y que $L(S_n) \underset{w}{\to} \nu$.

Entonces ν es infinitamente divisible y para cada $p\in\mathbb{N}$, llamando

$$I(n,p,k)=\{j\in\mathbb{N}: \frac{j_n k}{p} < j \leq \frac{j_n(k+1)}{p}\} \quad (k=0,1,\ldots,p-1),$$

se tiene

$$L(\sum_{j\in I(n,p,0)} X_{nj},\ldots,\sum_{j\in I(n,p,p-1)} X_{nj}) \underset{w}{\to} (\nu^{1/p})^{\otimes p}.$$

Demostración. Fijemos $p\in\mathbb{N}$. Escribamos $I(n,p,k)=[a_{nk},b_{nk}]$ (intervalo de números enteros) y observemos que el cardinal de este conjunto es $[\frac{j_n}{p}]$ ó $[\frac{j_n}{p}]+1$ ($[\cdot]$ es la parte entera de un número real).

Por hipótesis, $\sigma_n=\sigma(X_{n1})\to 0$ cuando $n\to\infty$. Tomemos una sucesión $\{d_n\}\subset\mathbb{N}$ tal que $d_n\to\infty$, $d_n\sigma_n\to 0$ y $d_n\leq [\frac{j_n}{p}]$ desde algún n en adelante (por ejemplo, puede tomarse $d_n=\min\{[\frac{j_n}{p}], [\sigma_n^{-1/2}]\}$). Definiendo $b'_{nk}=a_{nk}+[\frac{j_n}{p}]-d_n$ para $k=0,\ldots,p-1$, se tiene $a_{nk}\leq b'_{nk}\leq b_{nk}$, $d_n\leq a_{nk}-b'_{n,k-1}\leq d_n+1$ y $b'_{no}-a_{no}=\ldots=b'_{n,p-1}-a_{n,p-1}$; llamemos $\xi_{nk}=\sum_{a_{nk}\leq j\leq b'_{nk}} X_{nj}$ $(k=0,\ldots,p-1)$. Luego $L(\xi_{no})=\ldots=L(\xi_{n,p-1})$.

Como $\sigma(S_n-\sum_{k=0}^{p-1}\xi_{nk})\leq pd_n\sigma_n\to 0$ cuando $n\to\infty$, resulta que $L(\sum_{k=0}^{p-1}\xi_{nk}) \underset{w}{\to} \nu$. Por otra parte, de la Proposición 2.1 se deduce para todo $A\in\mathcal{B}^p$.

$$(3.1) \qquad |L(\xi_{no},\ldots,\xi_{n,p-1})(A)-L(\xi_{no})^{\otimes p}(A)|\leq(p-1)\phi(d_n)$$

y, en consecuencia, para cada $A\in\mathcal{B}$ se tiene

$$|L(\sum_0^{p-1}\xi_{nk})(A)-L(\xi_{no})^p(A)|\leq(p-1)\phi(d_n)$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$.

Por lo tanto, si llamamos $\lambda_n = L(\xi_{n0}), \lambda_n^p \underset{w}{\to} \nu$. Existe entonces $\{x_n\} \subset B$ tal que $\{\lambda_n * \delta_{x_n}\}$ es relativamente compacto y, en consecuencia, lo es $\{\lambda_n^p * \delta_{px_n}\}$; se deduce a continuación la compacidad relativa de $\{\delta_{px_n}\}$, $\{\delta_{x_n}\}$ y luego la de $\{\lambda_n\}$(en este párrafo se han usado dos propiedades básicas de la operación de convolución en relación con la compacidad débil de medidas). Sea λ un punto límite de $\{\lambda_n\}$; se cumple $\lambda^p = \nu$.

Como esto vale para todo $p \in \mathbb{N}$, ν es infinitamente divisible.

Fijado nuevamente $p \in \mathbb{N}$, con las notaciones anteriores, se tiene que $L(\xi_{n0}) \underset{w}{\to} \nu^{1/p}$ y como $\sigma(\sum_{j \in I(n,p,k)} X_{nj} - \xi_{nk}) \le d_n \sigma_n$, se obtiene la segunda afirmación del enunciado usando (3.1). □

Necesitaremos más adelante sucesiones de enteros con las propiedades que se enuncian a continuación.

<u>3.2 Lema</u>. Sean $\{j_n\} \subset \mathbb{N}$, $\{\sigma_n\} \subset [0,\infty)$ y $\{\phi(n)\} \subset [0,\infty)$ sucesiones tales que $j_n \to \infty$, $\sigma_n \to 0$, $\phi(n) \to 0$. Entonces existen sucesiones $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ contenidas en $\mathbb{N}$ tales que

$$\frac{j_n}{p_n+q_n} \to \infty,$$

$$\frac{j_n}{p_n+q_n} \cdot \phi(q_n) \to 0,$$

$$\frac{j_n}{p_n+q_n} \cdot q_n \sigma_n \to 0$$

y

$$\frac{q_n}{p_n} \to 0.$$

<u>Demostración</u>. Si se verifica la última condición, las restantes equivalen a

$$\frac{j_n}{p_n} = (1+\frac{q_n}{p_n})\frac{j_n}{p_n+q_n} \to \infty,$$

$$\frac{j_n}{p_n}\phi(q_n) = (1+\frac{q_n}{p_n})\frac{j_n}{p_n+q_n}\phi(q_n) \to 0$$

y

$$\frac{j_n}{p_n}q_n\sigma_n = (1+\frac{q_n}{p_n})\frac{j_n}{p_n+q_n}q_n\sigma_n \to 0.$$

Busquemos entonces $\{q_n\}\subset\mathbb{N}$ y $\{\beta(n)\}\subset(0,\infty)$ ($\beta(n)$ será aproximadamente p_n/j_n) tales que

$$\beta(n) \to 0,\ \frac{q_n}{j_n}\cdot\frac{1}{\beta(n)}\to 0,\ \frac{\phi(q_n)}{\beta(n)} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{q_n\sigma_n}{\beta(n)} \to 0.$$

Para ello, tomamos primero $\{q_n\}$ tal que

$$q_n \to \infty,\ q_n\sigma_n \to 0 \quad \text{y} \quad q_n/j_n \to 0;$$

por ejemplo, podemos definir $q_n=\min\{[\sigma_n^{-a}],\ [j_n^b]\}$ si $\sigma_n>0$ y $q_n=[j_n^b]$ si $\sigma_n=0$ ($[\cdot]$ es la parte entera de un número real), con $0<a<1$ y $0<b<1$. A continuación definimos

$$\beta(n) = \max\{(\frac{q_n}{j_n})^u,(\phi(q_n))^v,(q_n\sigma_n)^w\}$$

con u,v,w números reales en $(0,1)$; $\{\beta(n)\}$ tiene las propiedades deseadas.

Basta ahora definir $p_n=[j_n\beta(n)]+1$ y se satisfarán todas las condiciones del enunciado. □

Dado un sistema triangular $\{X_{nj}:1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias consideraremos la siguiente propiedad:

$$(*)\ \{\ell_n\}\subset\mathbb{N},\ \ell_n\le j_n,\ \ell_n/j_n \to 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_1^{\ell_n} X_{nj} \xrightarrow[P]{} 0.$$

Observación. Esta propiedad podría describirse como una infinitesimalidad reforzada.

El Th.2.1 de [2] muestra que (*) se cumple en el caso de un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con filas independientes y equidistribuídas cuyas sumas convergen débilmente.

Dicha condición es hipótesis de muchos de nuestros resultados pero desaparece en algunos al dar condiciones suficientes de convergencia que incluyen cierta rapidez del decrecimiento de alguno de los coeficientes de dependencia del sistema triangular (véanse el Teorema 3.10 y sus consecuencias).

Indiquemos dos situaciones en las cuales se cumple (*).

1) Sean $\{X_j : j\in\mathbb{N}\}$ una sucesión ϕ-dependiente estacionaria de vectores aleatorios a valores en B y $\{a(n)\}$ una sucesión de números reales que tiende a ∞ tales que $\{L(a(n)^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j)\}$ converge débilmente. Si llamamos $X_{nj}=a(n)^{-1}X_j$ $(j=1,\dots,n)$, el sistema tiangular $\{X_{nj} : 1\le j\le n, n\in\mathbb{N}\}$ satisface (*).

Para probarlo, tomemos entonces $\{\ell_n\}\subset\mathbb{N}$ tal que $\ell_n\le n$ y $\ell_n/n\to 0$. Dado $\varepsilon>0$ se tiene

$$P[\|\sum_{1}^{\ell_n} X_{nj}\|>\varepsilon]=P[\|a(\ell_n)^{-1}(X_1+\dots+X_{\ell_n})\|>\frac{a(n)}{a(\ell_n)}\varepsilon]$$

$$=L(S_{\ell_n})(B^c_{\frac{a(n)}{a(\ell_n)}\varepsilon}).$$

Luego la compacidad relativa de $\{L(S_n)\}$ implica que es suficiente probar que $\frac{a(n)}{a(\ell_n)}\to\infty$.

Podemos suponer que $\ell_n\to\infty$ (pues $a(n)\to\infty$). Aplicando el Teorema 2 de [13] se obtiene la expresión $a(n)=n^{1/\alpha}L(n)$ con $0<\alpha\le 2$ y L una función de variable real de variación lenta, integrable sobre todo intervalo finito (además, el límite de $\{L(S_n)\}$ es estable de índice α). Por el Teorema de Karamata, la función L es de la forma

$$L(x)=c(x)\exp\{\int_s^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\}$$

con $\lim_{x\to\infty} c(x)=c\neq 0$, $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x)=0$ y $s>0$. En consecuencia

$$\frac{a(n)}{a(\ell_n)} = \frac{c(n)}{c(\ell_n)}\left(\frac{n}{\ell_n}\right)^{1/\alpha}\exp\{\int_{\ell_n}^n \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\}$$

$$= \frac{c(n)}{c(\ell_n)}\exp\{\int_{\ell_n}^n \left(\frac{1}{\alpha}+\varepsilon(t)\right)\frac{dt}{t}\}.$$

Si n es suficientemente grande como para que $|\varepsilon(t)|\leq(2\alpha)^{-1}$ si $t\geq\ell_n$, se tiene

$$\int_{\ell_n}^n \left(\frac{1}{\alpha}+\varepsilon(t)\right)\frac{dt}{t} \geq \frac{1}{2\alpha}\log\left(\frac{n}{\ell_n}\right)$$

que tiende a ∞ con n; esto y la propiedad de la función c prueban lo afirmado.

2) Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente, $X_{n1} \xrightarrow[P]{} 0$ y tal que $L(X_{n1}+\ldots+X_{nk})$ es simétrica si $1\leq k\leq j_n$ y $n\in\mathbb{N}$. Entonces si $\{L(S_n)\}$ converge débilmente, $\{X_{nj}\}$ tiene la propiedad (*).

Esto es consecuencia de lo siguiente: sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente, $X_{n1} \xrightarrow[P]{} 0$ y tal que $\{L(S_n)\}$ converge débilmente; entonces, si $\{\ell_n\}\subset\mathbb{N}$, $\ell_n\leq j_n$ y $\ell_n/j_n\to 0$, existe $\{x_n\}\subset B$ tal que la sucésión $\{\mu_n^{(\ell_n)}*\delta_{x_n}\}$ es relativamente compacta y todos sus puntos límite son masas puntuales.

Para demostrarlo, llamemos ν al límite de $\{L(S_n)\}$ y tomemos una tal sucesión $\{\ell_n\}$. Fijemos $p\in\mathbb{N}$; por la Proposición 3.1 sabemos que $L(\sum_1^{[j_n/p]} X_{nj}) \xrightarrow[w]{} \nu^{1/p}$ cuando $n\to\infty$. Sean $\sigma_n=\sigma(X_{n1})$, $d_n=\min\{[\frac{j_n}{p}]-\ell_n,[\sigma_n^{-1/2}]\}$, $Y_n=\sum_1^{\ell_n} X_{nj}$, $Z_n=\sum_{\ell_n+d_n}^{[j_n/p]} X_{nj}$.

Se tiene

$$\sigma(\sum_1^{[j_n/p]} X_{nj}-(Y_n+Z_n))\le d_n\sigma_n\to 0$$

y, aplicando la Proposición 2.1,

$$|L(Y_n+Z_n)(A)-L(Y_n)*L(Z_n)(A)|\le\phi(d_n)\to 0$$

para todo $A\in\mathcal{B}$. Luego $\mu_n^{(\ell_n)}*L(Z_n)\xrightarrow[w]{}\nu^{1/p}$. Por un conocido resultado, se deduce que existe $\{x_n\}\subset B$ tal que $\{\mu_n^{(\ell_n)}*\delta_{x_n}\}$ es relativamente compacto. Además, si α es un punto límite de dicha sucesión, del argumento anterior se deduce que α^p es un factor de ν para todo $p\in\mathbb{N}$. Luego existe $\{y_p\}\subset B$ tal que $\{\alpha^p*\delta_{y_p}:p\in\mathbb{N}\}$ es relativamente compacto; esto implica que $\alpha=\delta_z$ para algún $z\in B$(ver [4], pág. 33).

A continuación se prueba una versión para el caso ϕ-dependiente del Th. 2.1 de [2]. En su demostración, como en algunas posteriores, usamos el método de agrupar vectores aleatorios. La conclusión (2) será usada constantemente en combinación con algunas de las desigualdades de la Sección 2.

<u>3.3 Teorema.</u> Sea $\{X_{nj}:1\le j\le j_n,n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente y que satisface la condición (*). Supongamos que $L(S_n)\xrightarrow[w]{}\nu$.

(1) Dada $\{\ell_n\}\subset\mathbb{N}$, $\ell_n\le j_n$, $\ell_n/j_n\to t\in\mathbb{R}$

se tiene

$$\mu_n^{(\ell_n)} \underset{w}{\to} \nu^t.$$

(2) El conjunto $\{\mu_n^{(k)}: 1 \le k \le j_n, n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto y

$$\lim_n \max_{1 \le k \le j_n} \rho(\mu_n^{(k)}, \nu^{k/j_n}) = 0.$$

Demostración. Sean $\{\ell_n\}$ y t como en el enunciado de (1). Si t=0 ó 1 el resultado es consecuencia directa de las hipótesis; supongamos que $t \in (0,1)$.

Tomemos $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ con las propiedades del Lema 3.2 con respecto a $\{\sigma_n\}$ y $\{\phi(n)\}$ siendo $\sigma_n = \sigma(X_{n1})$ y llamemos

$$k_n' = \left[\frac{\ell_n}{p_n + q_n}\right], \quad k_n'' = \left[\frac{j_n - \ell_n}{p_n + q_n}\right]$$

([•] denota parte entera).

Definamos para $k=1,\ldots,k_n'$

$$\xi_{nk}' = \sum_{j=(k-1)(p_n+q_n)+1}^{(k-1)(p_n+q_n)+p_n} X_{nj}, \quad \eta_{nk}' = \sum_{j=(k-1)(p_n+q_n)+p_n+1}^{k(p_n+q_n)} X_{nj}$$

y

$$\eta_{n,k_n'+1}' = \sum_{j=k_n'(p_n+q_n)+1}^{\ell_n} X_{nj} \quad ;$$

para $k=1,\ldots,k_n''$ definamos

$$\xi_{nk}'' = \sum_{j=\ell_n+(k-1)(p_n+q_n)+1}^{\ell_n+(k-1)(p_n+q_n)+p_n} X_{nj}, \quad \eta_{nk}'' = \sum_{j=\ell_n+(k-1)(p_n+q_n)+p_n+1}^{\ell_n+k(p_n+q_n)} X_{nj}$$

y

$$\eta_{n,k_n''+1}'' = \sum_{j=\ell_n+k_n''(p_n+q_n)+1}^{j_n} X_{nj}$$

(obsérvese que $0 \le \ell_n - k_n'(p_n+q_n) < p_n+q_n$, $0 \le j_n - \ell_n - k_n''(p_n+q_n) < p_n+q_n$).

De las desigualdades

$$\frac{\ell_n}{j_n} - \frac{p_n+q_n}{j_n} < \frac{k'_n}{k'_n+k''_n} < \frac{\ell_n/j_n}{1-2\left(\frac{p_n+q_n}{j_n}\right)}$$

se deduce que $\frac{k'_n}{k'_n+k''_n} \to t\,(n\to\infty)$.

Por otra parte

$$\sigma\Big(S_n - \sum_1^{k'_n} \xi'_{nk} - \sum_1^{k''_n} \xi''_{nk}\Big)$$

$$\leq \sigma\Big(\sum_1^{k'_n} \eta'_{nk} + \sum_1^{k''_n} \eta''_{nk}\Big) + \sigma(\eta'_{n,k'_n+1}) + \sigma(\eta''_{n,k''_n+1})$$

$$\leq (k'_n + k''_n)q_n\sigma_n + \sigma(\eta'_{n,k'_n+1}) + \sigma(\eta''_{n,k''_n+1})$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$ pues

$$(k'_n + k''_n)q_n\sigma_n \leq \frac{j_n}{p_n+q_n}\, q_n\sigma_n,$$

la cantidad de variables que forman η'_{n,k'_n+1} es $<p_n+q_n$ y lo mismo para η''_{n,k''_n+1} (se aplica la propiedad (*)).

Luego $L\Big(\sum_1^{k'_n} \xi'_{nk} + \sum_1^{k''_n} \xi''_{nk}\Big) \xrightarrow[w]{} \nu$. Puesto que $L(\xi'_{nk})=L(\xi''_{nk})=\mu_n^{(p_n)}$,

como consecuencia de la Proposición 2.1 se tiene para todo $A\in\mathcal{B}$

$$\Big|L\Big(\sum_1^{k'_n} \xi'_{nk} + \sum_1^{k''_n} \xi''_{nk}\Big)(A) - (\mu_n^{(p_n)})^{k'_n+k''_n}(A)\Big|$$

$$\leq (k'_n + k''_n - 1)\phi(q_n)$$

$$\leq \frac{j_n}{p_n+q_n}\, \phi(q_n).$$

Por lo tanto

$$(\mu_n^{(p_n)})^{k'_n + k''_n} \underset{w}{\to} \nu$$

y una aplicación del Th. 2.1 de [2] muestra que se tiene

$$(\mu_n^{(p_n)})^{k'_n} \underset{w}{\to} \nu^t .$$

Con idénticos argumentos se prueba que

$$\sum_1^{\ell_n} X_{nj} - \sum_1^{k'_n} \xi'_{nk} \underset{P}{\to} 0$$

y

$$L(\sum_1^{k'_n} \xi'_{nk}) \underset{w}{\to} \nu^t ;$$

luego $\mu_n^{(\ell_n)} \underset{w}{\to} \nu^t$ y esto termina la demostración de (1).

Finalmente, (2) se deduce de (1) como en [2]. □

Ahora se presenta una versión para el caso ϕ-dependiente estacionario de un teorema de Le Cam (Th. 2.2 de [3]); se usará en la Sección 4.

<u>3.4 Teorema</u>. Sea $\{X_{nj} : 1 \le j \le j_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente con $\phi(1) < 1$ y que satisface la condición (*). Supongamos que $\{L(S_n)\}$ es relativamente compacto.

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ $\{j_n L(X_{n1}) | B_\varepsilon^c\}$ es relativamente compacto.

<u>Demostración</u>. Por un argumento basado en subsucesiones se puede suponer que $L(S_n) \underset{w}{\to} \nu$.

Basta probar:

(a) para todo $\varepsilon > 0$: $\sup_n j_n P[\| X_{n1} \| > \varepsilon] < \infty$

y

(b) para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

$$\sup_n j_n P[X_{n1} \in K_\varepsilon^c] \leq \varepsilon,$$

Para demostrar (a) fijemos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y llamemos $\eta=\min\{1-\alpha, \frac{1}{2}(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1)), \frac{\varepsilon}{4}\}$. Elijamos $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} \nu^t(B^c_{\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\eta}{2}}) < \eta/2,$$

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$\max_{1\leq k\leq j_n} \rho(\mu_n^{(k)}, \nu^{k/j_n}) < \eta/2$$

y $\{\ell_n\} \subset \mathbb{N}$ tal que $\ell_n/j_n \to t_0$, $\ell_n/j_n \leq t_0$ (las elecciones de t_0 y n_0 se justifican porque $\nu_t \underset{w}{\to} \delta_0$ cuando $t \to 0$ y por el Teorema 3.3).

Se tiene entonces, por la definición de ρ, para $n\geq n_o$ y $1\leq k\leq \ell_n$

$$\mu_n^{(k)}(B^c_{\varepsilon/4}) < \nu^{k/j_n}(B^c_{\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\eta}{2}}) + \frac{\eta}{2} < \eta\,;$$

por la Proposición 2.3 se obtiene, si $n\geq n_0$,

$$\ell_n P[\| X_{n1} \| > \varepsilon] \leq \frac{\eta}{(\alpha-\phi(1))\ (1-\phi(1))-\eta} \leq 1\,.$$

Eligiendo ahora $n_1 \geq n_0$ tal que $\frac{1}{2} t_0 \leq \frac{\ell_n}{j_n}$ si $n\geq n_1$ se tiene $j_n P[\|X_{n1}\|>\varepsilon] \leq \frac{2}{t_0}$ cuando $n\geq n_1$. Esto completa la prueba de (a).

Para demostrar (b), fijado α como antes y dado $0<\varepsilon<1$ tomamos un compacto convexo simétrico K_ε tal que

$$\sup_{\substack{1\leq k\leq j_n \\ n\in\mathbb{N}}} \mu_n^{(k)}((\tfrac{1}{4}K_\varepsilon)^c) \leq \min\,\{1-\alpha, \tfrac{\varepsilon}{2}(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1))\}$$

(posible por el Teorema 3.3). Luego la Proposición 2.3 implica que para todo n

$$j_n P[X_{n1} \in K_\varepsilon^c] \leq \varepsilon. \ \square$$

3.5 Proposición. Sea $\{X_{nj};1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y que satisface la condición (*). Si $\|X_{nj}\|\leq M$ c.s. y $\{L(S_n)\}$ es relativamente compacto entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\exp(\lambda\|S_n\|)<\infty$$

para algún $\lambda>0$.

Demostración. Por un argumento con subsucesiones se deduce de la compacidad relativa de $\{L(S_n)\}$ la de $\{\mu_n^{(k)}:1\leq k\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ usando (2) del Teorema 3.3.

Fijemos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y elijamos $t_0>0$ tal que

$$\sup_{\substack{1\leq k\leq j_n\\ n\in\mathbb{N}}} \mu_n^{(k)}(B^c_{t_0/4})\leq \min\{1-\alpha,(\alpha-\phi(1))^2\}.$$

Aplicando la Proposición 2.4 se tiene para $\ell\in\mathbb{N}$ y $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P[\|S_n\|>\ell(t_0+M)] &\leq P[\max_{1\leq k\leq n}\|S_k\|>\ell t_0+(\ell-1)M] \\ &\leq \left(\phi(1)+\frac{1}{\alpha-\phi(1)}P[\|S_n\|>t_0/4]\right)^{\ell} \\ &\leq \alpha^{\ell}. \end{aligned}$$

Llamemos $c=t_0+M$ y tomemos $\lambda>0$ tal que $\alpha e^{\lambda c}<1$. Se tiene entonces para todo n

$$\begin{aligned} E\exp(\lambda\|S_n\|) &= 1+\int_0^{\infty}\lambda e^{\lambda t}P[\|S_n\|>t]dt \\ &= 1+\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_{\ell c}^{(\ell+1)c}\lambda e^{\lambda t}P[\|S_n\|>t]\,dt \\ &\leq 1+\int_0^c\lambda e^{\lambda t}dt+\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{\ell c}^{(\ell+1)c}\lambda e^{\lambda t}\alpha^{\ell}dt \end{aligned}$$

$$\leq e^{\lambda c} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha^{\ell} e^{\lambda(\ell+1)c}$$

$$= e^{\lambda c}\{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\alpha e^{\lambda c})^{\ell}\} < \infty. \ \square$$

De ahora en adelante, dado un sistema triangular $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente y que satisface la condición (*) se considerarán sucesiones $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ con las propiedades del Lema 3.2 con respecto a $\{\sigma_n\}$ y $\{\phi(n)\}$ siendo $\sigma_n = \sigma(X_{n1})$; entonces llamaremos:

$$k_n = [\frac{j_n}{p_n+q_n}] \qquad ([\cdot] \text{ denota parte entera}),$$

$$P(n,k)=\{j\in\mathbb{N} : (k-1)(p_n+q_n)+1\leq j\leq (k-1)(p_n+q_n)+p_n\}$$

y

$$Q(n,k)=\{j\in\mathbb{N} : (k-1)(p_n+q_n)+p_n+1\leq j\leq k(p_n+q_n)\}$$

si $k=1,\ldots,k_n$,

$$Q(n,k_n+1)=\{j\in\mathbb{N}: k_n(p_n+q_n)+1\leq j\leq j_n\},$$

$$\xi_{nk} = \sum_{j\in P(n,k)} X_{nj}$$

si $k=1,\ldots,k_n$,

$$\eta_{nk} = \sum_{j\in Q(n,k)} X_{nj}$$

si $k=1,\ldots,k_n+1$. Esta partición en bloques será usada, siempre con este significado, en algunas demostraciones, la primera de las cuales es la del siguiente criterio de convergencia a un límite gaussiano.

<u>3.6 Teorema</u>. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores

aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y que satisface la condición (*). Supongamos que $L(S_n) \underset{w}{\to} \nu$.

Entonces ν es gaussiana sí y sólo si

$$j_n\, P[\|X_{n1}\| > \varepsilon] \to 0$$

para todo $\varepsilon>0$.

<u>Demostración</u>. <u>Necesidad</u>. Argumentando como en la demostración del Teorema 3.3(1) se obtiene que $L(\xi_{n1})^{k_n} \underset{w}{\to} \nu$ y por ser ν gaussiana resulta que $k_n P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon] \to 0$ para todo $\varepsilon>0$ (Cor. 2.11 de [3]).

Fijemos $\varepsilon>0$. Elijamos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y sea $\eta = \min\{1-\alpha, \frac{1}{2}(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1)), \frac{\varepsilon}{4}\}$; tomemos $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{0\le t\le t_0} \nu^t (B^c_{\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\eta}{2}}) < \eta/2,$$

y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$

$$\max_{1\le k\le j_n} \rho(\mu_n^{(k)}, \nu^{k/j_n}) < \eta/2$$

y $\frac{p_n}{j_n} \le t_0$.

Entonces si $n\ge n_0$ y $1\le k\le p_n$ tenemos

$$\mu_n^{(k)}(B^c_{\varepsilon/4}) \le \nu^{k/j_n}(B^c_{\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\eta}{2}}) + \frac{\eta}{2} < \eta$$

y la Proposición 2.3 da, llamando $c = \frac{2}{(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1))}$, la desigualdad

$$p_n P[\|X_{n1}\| > \varepsilon] \le \frac{P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4]}{(\alpha-\phi(1))(1-\phi(1)) - P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4]}$$

$$\le c\, P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4];$$

como $\frac{k_n p_n}{j_n} > \frac{1}{1+\frac{q_n}{p_n}} - \frac{p_n}{j_n}$, se tiene para n suficientemente grande

$$j_n P[\|X_{n1}\|>\varepsilon] \le 2\, k_n p_n\, P[\|X_{n1}\|> \varepsilon]$$

$$\le 2c\, k_n P[\|\xi_{n1}\|> \varepsilon/4]$$

Luego $\lim_n j_n\ P[\|X_{n1}\|> \varepsilon] = 0$.

<u>Suficiencia</u>. Podemos suponer $B=\mathbb{R}$ (en efecto: aceptemos el resultado en este caso y consideremos un sistema triangular $\{X_{nj}\}$ con las propiedades enunciadas. Dada una funcional $f\in B'$ el sistema triangular $\{f(X_{nj})\}$ es a valores reales, tiene sumas estacionarias - por la linealidad de f, es ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y cumple (*). Además, se tiene
$L(\sum_1^{j_n} f(X_{nj})) \underset{w}{\rightarrow} \nu\circ f^{-1}$ y para todo $\varepsilon>0$ $j_n P[|f(X_{n1})|> \varepsilon]\rightarrow 0$. Luego resultará que $\nu\circ f^{-1}$ es gaussiana. Como $f\in B'$ es arbitraria, se obtiene el resultado).

Llamemos μ a la medida de Lévy de ν. Consideremos primero un $M>0$ fijo y el sistema triangular $\{X_{njM}\}$. Definamos

$$\tilde{\xi}_{nk} = \sum_{j\in P(n,k)} X_{njM}$$

si $k=1,\dots,k_n$ y

$$\tilde{\eta}_{nk} = \sum_{j\in Q(n,k)} X_{njM}$$

si $k=1,\dots,k_n+1$. Como en la demostración del Teorema 3.3(1) se obtiene que $S_{nM}-\sum_1^{k_n} \tilde{\xi}_{nk} \rightarrow 0$ en probabilidad, pues $\sigma(X_{n1M})\le\sigma(X_{n1})$ y $\{X_{njM}\}$ tiene la propiedad (*) (escríbase $\sum_1^{\ell_n} X_{njM}=\sum_1^{\ell_n} X_{nj}-\sum_1^{\ell_n} X^M_{nj}$ y obsérvese que $P[|\sum_1^{\ell_n} X^M_{nj}|>0]\le\ell_n P[|X_{n1}|>M]$). Puesto que $S_n^{(M)}\rightarrow 0$ en probabilidad

$(P[|S_n^{(M)}|>\alpha]\leq j_n P[|X_{n1}|>M])$ también se tiene que $L(\tilde{\xi}_{n1})*\ldots*L(\tilde{\xi}_{nk_n})\to\nu$ débilmente y, además, para todo $\varepsilon>0$

$$\max_{1\leq k\leq k_n} P[|\tilde{\xi}_{nk}|>\varepsilon]\leq P[|\xi_{n1}|>\varepsilon]+p_n P[|X_{n1}|>M]$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$ (se usó que $L(\xi_{n1})^{k_n}\to\nu$ débilmente). Por el Teorema central del límite, parte recíproca, del caso independiente (Th. 2.10 de [3]) resulta que para todo $\tau\in C(\mu)$

$$\sum_{k=1}^{k_n} L(\tilde{\xi}_{nk})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c.$$

Probaremos ahora que para todo $\varepsilon>0$ $\mu(B_\varepsilon^c)=0$; esto demuestra que ν es gaussiana.

Fijemos $\varepsilon>0$. Consideremos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y un entero $\ell\geq 2$; llamemos $M=\frac{\varepsilon}{2(\ell-1)}$, $t=\frac{\varepsilon}{2\ell}$. A continuación elijamos $n_0=n_0(\varepsilon,\alpha,\ell)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1\leq k\leq k_n}\ \max_{i\in P(n,k)} P[|\sum_{\substack{j\in P(n,k)\\ j\leq i}} X_{njM}|>t/4]\leq 1-\alpha$$

si $n\geq n_0$ (esto es posible pues el miembro izquierdo es menor o igual que

$$\max_{1\leq i\leq p_n} P[|\sum_{j=1}^{i} X_{nj}|>t/4]+p_n P[|X_{n1}|>M],$$

$\frac{p_n}{j_n}\to 0$ y $\{X_{nj}\}$ tiene la propiedad (*)). Consideremos las variables $\tilde{\xi}_{nk}$ correspondientes a M definidas como antes; aplicando la Proposición 2.4 a las variables X_{njM} y llamando $a=(\alpha-\phi(1))^{-1}$, se tiene para $n\geq n_0$ y $1\leq k\leq k_n$

$$P[|\xi_{nk}|>\varepsilon]\leq p_n P[|X_{n1}|>M]+P[|\tilde{\xi}_{nk}|>\varepsilon]$$

$$\leq p_n P[|X_{n1}|>M]+(\phi(1)+aP[|\tilde{\xi}_{nk}|>t/4])^{\ell-1}aP[|\tilde{\xi}_{nk}|>t/2].$$

Luego, como $k_n L(\xi_{n1})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c$ para todo $\tau\in C(\mu)$ (por Th.2.10 de [3], ya que $L(\xi_{n1})^{k_n} \underset{w}{\to} \nu$), se tiene

$$\mu(B_\varepsilon^c)\leq \underline{\lim_n}\ k_n P[|\xi_{n1}|>\varepsilon]$$

$$\leq \overline{\lim_n}\ k_n p_n\ P[|X_{n1}|>M]$$

$$+(\phi(1)+a\ \overline{\lim_n}\ \max_{1\leq k\leq k_n} P[|\tilde{\xi}_{nk}|>t/4])^{\ell-1}a\,\overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{k_n} P[|\tilde{\xi}_{nk}|>t/2]$$

$$\leq\phi(1)^{\ell-1}a\ \mu((\mathring{B}_{t/2})^c)$$

en virtud de la hipótesis y los argumentos anteriores.

Hemos probado que para todo entero $\ell\geq 2$ se tiene

$$\mu(B_\varepsilon^c)\leq a\ \phi(1)^{\ell-1}\mu((\mathring{B}_{\varepsilon/4\ell})^c).$$

Dados $r>0$, $\ell\geq 2$ es

$$\mu(B_r\cap(\mathring{B}_{\varepsilon/4\ell})^c)\leq(\tfrac{4}{\varepsilon})^2\ \ell^2\int_{B_r} x^2\mu(dx)$$

y en consecuencia

$$\mu(B_\varepsilon^c)\leq a\ \{\phi(1)^{\ell-1}\ \ell^2(\tfrac{4}{\varepsilon})^2\int_{B_r} x^2\mu(dx)+\mu(B_r^c)\}.$$

Luego dado $r>0$, como $\int_{B_r} x^2\mu(dx)<\infty$ (por Th.1.4 de [3]), se tiene

$$\mu(B_\varepsilon^c)\leq a\ \{(\underline{\lim_\ell}\ \phi(1)^{\ell-1}\ell^2)(\tfrac{4}{\varepsilon})^2\int_{B_r} x^2\mu(dx)+\mu(B_r^c)\}$$

$$= a\mu(B_r^c)$$

ya que $\phi(1)<1$. Haciendo tender $r \to \infty$ se deduce que $\mu(B_\varepsilon^c) = 0$, pues $\mu(B_\varepsilon^c)<\infty$ (ver Th. 1.4 de [3]). □

Observación. Hagamos notar, en la demostración de la suficiencia de la condición anterior, el uso especial de la hipótesis $\phi(1)<1$, aparte del ya comentado.

Damos a continuación condiciones necesarias para la convergencia a un límite gaussiano.

Si γ es una medida gaussiana centrada sobre B, denotaremos con Φ_γ su covarianza.

3.7 Teorema. Sea $\{X_{nj}:1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, estacionario, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y que satisface la condición (*). Supongamos que $L(S_n) \underset{w}{\to} \delta_z * \gamma$ siendo $z\in B$ y γ una medida gaussiana centrada.

Entonces para todo $\delta>0$:

(a) $j_n P[\|X_{n1}\|>\delta] \to 0$,

(b) $\lim_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})=\Phi_\gamma(f,f)$ para cada $f\in B'$,

(c) $L(S_n-ES_{n,\delta}) \underset{w}{\to} \gamma$,

$S_n^{(\delta)} \underset{P}{\to} 0$,

$L(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}) \underset{w}{\to} \gamma$

y

$ES_{n,\delta} \to z$ en B.

Demostración. El Teorema 3.6 da la conclusión (a). Se deduce de ella que, para todo $\delta>0$, $S_n^{(\delta)} \underset{P}{\to} 0$ pues se tiene la desigualdad $P[\|S_n^{(\delta)}\|>0]\le j_n P[\|X_{n1}\|>\delta]$.

Fijemos $\delta>0$. Como $S_n=S_{n,\delta}+S_n^{(\delta)}$ se deduce que $L(S_{n,\delta}) \xrightarrow{w} \delta_z*\gamma$; pero el sistema triangular $\{X_{nj\delta}\}$ satisface las hipótesis de la Proposición 3.5 (para verificar (*), obsérvese que para todo $\varepsilon>0$

$$P[\| \sum_1^{\ell_n} X_{nj\delta}\| >\varepsilon]\leq P[\| \sum_1^{\ell_n} X_{nj}\| >\varepsilon]+\ell_n P[\| X_{n1}\|>\delta]).$$

Luego, por la integrabilidad que da dicho resultado, se tiene $\lim_n ES_{n,\delta}= \int x\, \delta_z*\gamma(dx) = z$ en B y $\lim_n Ef^2(S_{n,\delta}) = \int f^2\, d(\delta_z*\gamma) =$

$f^2(z) + \Phi_\gamma(f,f)$ para cada $f\in B'$. En consecuencia, $\{L(S_n-ES_{n,\delta})\}$ y $\{L(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})\}$ convergen débilmente a γ y $Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}) = Ef^2(S_{n,\delta}) - f^2(ES_{n,\delta})$ converge a $\Phi_\gamma(f,f)$ para cada $f\in B'$. □

Si $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ es un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, $\delta>0$ y $f\in B'$, llamaremos

$$V_n(\delta,f)=j_n Ef^2(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})+2j_n \sum_{j=1}^{j_n-1} E[f(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})f(X_{n,j+1,\delta}-EX_{n,j+1,\delta})].$$

<u>3.8 Corolario</u>. Sea $\{X_{nj}\}$ satisfaciendo todas las hipótesis del Teorema 3.7. Si $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)<\infty$ y existe $\delta>0$ tal que para todo $f\in B'$

$$C_{\delta,f}= \sup_n j_n Ef^2(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta}) <\infty$$

entonces

(b') $\lim_n V_n(\delta,f) = \Phi_\gamma(f,f)$ para cada $f\in B'$.

<u>Demostración</u>. Fijados δ y f como en el enunciado, llamemos $Y_{nj}=f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})$. Se tiene la igualdad elemental (ver, por ejemplo, [10], pág. 24)

$$Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}) = E(\sum_1^{j_n} Y_{nj})^2$$

$$= j_n EY_{n1}^2 + 2 \sum_{j=1}^{j_n-1} (j_n-j)EY_{n1}Y_{n,j+1}$$

$$= V_n(\delta,f) - 2\sum_{j=1}^{j_n-1} jEY_{n1}Y_{n,j+1}.$$

Luego, por el Teorema 3.7, basta probar que

$$\lim_n \sum_1^{j_n-1} j\ EY_{n1}Y_{n,j+1} = 0$$

Como $EY_{n1}=0$, de la Proposición 2.5 se obtiene

$$\left|\sum_1^{j_n-1} jEY_{n1}Y_{n,j+1}\right| \le 2\sum_1^{j_n-1} j\phi^{1/2}(j)EY_{n1}^2$$

$$\le 2\left(\frac{1}{j_n}\sum_1^{j_n-1} j\phi^{1/2}(j)\right) C_{\delta,f}$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$ pues $j\phi^{1/2}(j)$ tiende a cero ($\{\phi(j)\}$ es no creciente). □

Observación. Sea $\{X_{nj}\}$ como en el Teorema 3.7. Si $\sum_1^{\infty}\phi^{1/2}(j)<1/4$ entonces $C_{\delta,f}$ (definido como en el corolario) es finito para cada $\delta>0$ y $f\in B'$; en particular, vale (b').

En efecto: fijando δ y f y llamando nuevamente $Y_{nj}=f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})$ se tiene

$$Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}) = j_nEY_{n1}^2 + 2\sum_{j=1}^{j_n-1}(j_n-j)EY_{n1}Y_{n,j+1}$$

$$\ge j_nEY_{n1}^2 - 4\sum_1^{j_n-1}(j_n-j)\phi^{1/2}(j)EY_{n1}^2$$

$$\ge \{1-4\sum_1^{\infty}\phi^{1/2}(j)\}j_nEY_{n1}^2;$$

basta observar ahora que $\sup_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})<\infty$.

En los próximos resultados, daremos condiciones suficientes para la convergencia a un límite gaussiano. En ellos, B será un espacio de Hilbert separable; cuando estemos en este caso, denotaremos con $q_k(k\in\mathbb{N})$ la distancia al subespacio generado por $\{e_1,\dots,e_k\}$ siendo $\{e_i:i\in\mathbb{N}\}$ una base ortonormal de B, si éste es de dimensión infinita; si es de dimensión finita, tendremos una base ortonormal $\{e_1,\dots,e_m\}$ y será $q_m\equiv 0$.

<u>3.9 Teorema</u>. Supongamos que B es un espacio de Hilbert. Sea $\{X_{nj}:1\le j\le j_n,n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, estacionario, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ tal que:

(1) $\{X_{nj}\}$ satisface (*),

(2) para todo $\varepsilon>0$, $j_n P[\|X_{n1}\|>\varepsilon]\to 0$,

(3) para cierto $\delta>0$ existe

$$\tilde{\Phi}(f) = \lim_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})$$

para cada $f\in B'$,

(4) existe $\alpha>0$ tal que $\{ES_{n,\alpha}\}$ es relativamente compacto en B,

(5) existen $\beta>0$ y $p>0$ tales que

$$\lim_k \sup_n Eq_k^p(S_{n,\beta}-ES_{n,\beta}) = 0.$$

Entonces existe una medida gaussiana centrada γ con covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)$ $(f\in B')$ tal que

$$\mathcal{L}(S_n-ES_{n,\tau}) \underset{w}{\to} \gamma$$

para todo $\tau>0$.

<u>Observación</u>. Se tiene una versión de este teorema para un espacio de Banach, interpretando en (5) las q_k como las distancias en B a los subespacios de alguna sucesión de subespacios de dimensión finita. Además, en (3) puede suponerse la existencia del límite sólo para f en un subconjunto secuencialmente w*-denso de B' (ver la demostración del teorema y el

Th. 2,3 de [11]; esto último se aplica también a los corolarios de este resultado.

Si B es de dimensión finita, la hipótesis (5) es superflua y se obtiene, omitiéndola, un resultado para espacios de Banach de dimensión finita; una observación similar es válida para los dos resultados que siguen a este teorema.

Demostración del Teorema 3.9. Observemos ante todo que (2) permite suponer que $\delta=\alpha=\beta$ en las restantes hipótesis. En efecto: con respecto a (4) basta observar que, si $0<\alpha'<\alpha''$, $\|ES^{(\alpha')}_{n,\alpha''}\| \leq \alpha'' j_n P[\|X_{n1}\|>\alpha']$ y en relación con (3) hagamos notar que si $0<\delta'<\delta''$ y $f\in B'$ se tienen las desigualdades:

$$|Ef^2(S_{n,\delta''}-ES_{n,\delta''})-Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})|$$

$$\leq Ef^2(S^{(\delta')}_{n,\delta''}-ES^{(\delta')}_{n,\delta''})+2(Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'}))^{1/2}(Ef^2(S^{(\delta')}_{n,\delta''}-ES^{(\delta')}_{n,\delta''}))^{1/2},$$

$$Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})\leq 2\{Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})+Ef^2(S^{(\delta)}_{n,\delta'}-ES^{(\delta)}_{n,\delta'})\}$$

si $0<\delta<\delta'$,

$$Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})\leq 2\{Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})+Ef^2(S^{(\delta')}_{n,\delta}-ES^{(\delta')}_{n,\delta})\}$$

si $0<\delta'<\delta$; pero, por ejemplo,

$$Ef^2(S^{(\delta')}_{n,\delta''}-ES^{(\delta')}_{n,\delta''})\leq Ef^2(S^{(\delta')}_{n,\delta''})$$

y de (2) se deduce que $S^{(\delta')}_{n,\delta''}\to 0$ en probabilidad y que $\{X^{\delta'}_{nj\delta''}\}$ satisface las hipótesis de la Proposición 3.5.

Dado $f\in B'$, por (3) se tiene que $C_f=\sup_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})<\infty$ y por Chebychev

$$P[|f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})|>t]\leq t^{-2}C_f$$

para todo $t>0$, lo cual muestra que $\{L(f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}))\}$ es relativamente compacto. Por (5) y Chebychev se tiene

$$\lim_{k} \sup_{n} P[q_k(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})>s] = 0$$

para todo $s>0$. Luego mediante el Th. 2.3 de [1] se deduce que $\{L(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})\}$ es relativamente compacto.

Por (4) resulta $\{L(S_{n,\delta})\}$ relativamente compacto y como, por (2), $S_n^{(\delta)} \to 0$ en probabilidad se concluye que $\{L(S_n)\}$ es relativamente compacto.

Consideremos una subsucesión $\{L(S_{n'})\}$ que converge débilmente. Por el Teorema 3.6, su límite es de la forma $\delta_z * \gamma$ siendo $z \in B$ y γ una medida gaussiana centrada. El Teorema 3.7 implica que γ tiene covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)$ $(f \in B')$, en virtud de (3), y que $z=\lim_{n'} ES_{n',\tau}$ para cualquier $\tau>0$.

La existencia de una tal sucesión $\{n'\}$ implica que existe la medida gaussiana γ deseada.

Para terminar la demostración, observemos que, dado $\tau>0$, $\{L(S_n-ES_{n,\tau})\}$ es relativamente compacto (lo es $\{ES_{n,\tau}\}$ en B) y que entonces es suficiente probar que todas sus subsucesiones convergentes tienen a γ como límite. Pero dada una tal subsucesión $\{L(S_{n'}-ES_{n',\tau})\}$ basta tomar una subsucesión $\{n''\}$ de $\{n'\}$ tal que $\{L(S_{n''})\}$ converge y aplicar lo anterior. □

Con ciertas hipótesis, que incluyen una condición sobre el decrecimiento de $\{\phi(n)\}$ a cero, se puede dar otra expresión para la covarianza del límite y a la vez eliminar las hipótesis (1) y (4) del resultado anterior:

<u>3.10 Teorema</u>. Supongamos que B es un espacio de Hilbert. Sea $\{X_{nj}: 1 \le j \le j_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, estacionario, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)<\infty$ tal que:

(1) para todo $\varepsilon>0$, $j_n P[\|X_{n1}\|>\varepsilon] \to 0$,

(2) existe $\delta>0$ tal que para todo $f \in B'$

$$C_{\delta,f}=\sup_n j_n\, Ef^2(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})<\infty$$

y existe

$$\tilde{\Phi}(f)=\lim_n V_n(\delta,f),$$

(3) existe $\beta>0$ tal que

$$\lim_k \sup_n j_n\, E_{q_k^2}(X_{n1\beta}-EX_{n1\beta})=0.$$

Entonces existe una medida gaussiana centrada γ con covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)\,(f\in B')$ tal que

$$L(S_n-ES_{n,\tau})\xrightarrow{w}\gamma$$

para todo $\tau>0$.

Demostración. Podemos suponer $\delta=\beta$, pues si $0<\delta<\beta$ se tienen las desigualdades

$$E_{q_k^2}(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})\le 2\{E_{q_k^2}(X_{n1\beta}-EX_{n1\beta})+E_{q_k^2}(X^\delta_{n1\beta}-EX^\delta_{n1\beta})\},$$

$$j_nE_{q_k^2}(X^\delta_{n1\beta}-EX^\delta_{n1\beta})\le j_nE\|X^\delta_{n1\beta}-EX^\delta_{n1\beta}\|^2\le 4\beta^2 j_nP[\|X_{n1}\|>\delta]$$

y acotaciones análogas cuando $0<\beta<\delta$.

Llamemos $Y_{nj}=X_{nj\delta}-EX_{nj\delta}$, $T_n=\sum_1^{j_n}Y_{nj}$ y veamos que $\{Y_{nj}\}$ verifica las hipótesis del Teorema 3.9.

Como $\|EX_{n1\delta}\|\le\eta+\delta P[\|X_{n1}\|>\eta]$ para todo $\eta>0$, de (1) se deduce que $EX_{n1\delta}\to 0$ en B y en consecuencia, para cada $\varepsilon>0$ y n suficientemente grande, $j_nP[\|Y_{n1}\|>\varepsilon]\le j_nP[\|X_{n1}\|>\varepsilon/2]$. Esto prueba (2) del teorema anterior.

Además, se tiene $Y_{nj,2\delta}=Y_{nj}$ de donde $ET_{n,2\delta}=ET_n=0$ lo cual prueba (4) de 3.9; para verificar (3) escribamos para cada $f\in B'$

$$|Ef^2(T_{n,2\delta}-ET_{n,2\delta})-V_n(\delta,f)|=|Ef^2(T_n)-V_n(\delta,f)|$$

$$=|2\sum_1^{j_n-1} j\, E[f(Y_{n1})f(Y_{n,j+1})]|$$

$$\leq 4\left(\frac{1}{j_n}\sum_{1}^{j_n-1} j\phi^{1/2}(j)\right)C_{\delta,f}$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$ por nuestras hipótesis.

Probaremos ahora (5) del Teorema 3.9 con $p=2$; si $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ se tiene, llamando $U_{nji}=\langle Y_{nj}, e_i\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno de B):

$$E_{q_k^2}(T_{n,2\delta}-ET_{n,2\delta})=E\left[\sum_{i=k+1}^{\infty}\langle T_n, e_i\rangle^2\right]$$

$$=\sum_{i=k+1}^{\infty} E\left(\sum_{1}^{j_n} U_{nji}\right)^2$$

$$=\sum_{i=k+1}^{\infty}\left\{j_n\, EU_{n1i}^2+2\sum_{1}^{j_n-1}(j_n-j)E[U_{n1i}U_{n,j+1,i}]\right\}$$

$$\leq\sum_{i=k+1}^{\infty}\left\{j_n\, EU_{n1i}^2+4\sum_{1}^{j_n-1}(j_n-j)\phi^{1/2}(j)\, EU_{n1i}^2\right\}$$

$$\leq\left(1+4\sum_{1}^{\infty}\phi^{1/2}(j)\right) j_n\sum_{i=k+1}^{\infty} E\langle Y_{n1}, e_i\rangle^2$$

$$=\left(1+4\sum_{1}^{\infty}\phi^{1/2}(j)\right) j_n\, E_{q_k^2}(Y_{n1})$$

y basta aplicar nuestra hipótesis (3).

Verifiquemos ahora que $\{Y_{nj}\}$ tiene la propiedad (*). Sea $\{\ell_n\}\subset\mathbb{N}$ tal que $\ell_n\leq j_n$ y $\ell_n/j_n\to 0$; como antes, se obtiene

$$E_{q_k^2}\left(\sum_{1}^{\ell_n} Y_{nj}\right)\leq\left(1+4\sum_{1}^{\infty}\phi^{1/2}(j)\right)\ell_n E_{q_k^2}(Y_{n1})$$

y para todo $f\in B'$

$$Ef^2\left(\sum_{1}^{\ell_n} Y_{nj}\right)=\ell_n Ef^2(Y_{n1})+2\sum_{1}^{\ell_n-1}(\ell_n-j)E[f(Y_{n1})f(Y_{n,j+1})]$$

$$\leq\frac{\ell_n}{j_n}\left(1+4\sum_{1}^{\infty}\phi^{1/2}(j)\right)C_{\delta,f}.$$

Por una doble aplicación de Chebychev y el Th. 2.3 de [1], se deduce de nuestras hipótesis que $\sum_{1}^{\ell_n} Y_{nj} \to 0$ en probabilidad.

Aplicando el Teorema 3.9 a $\{Y_{nj}\}$ (con $\tau=2\delta$) se obtiene que $L(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}) \underset{w}{\to} \gamma$, siendo γ gaussiana centrada con covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)\,(f\in B')$. Luego $L(S_n-ES_{n,\tau}) \underset{w}{\to} \gamma$ para cualquier $\tau>0$ pues, en virtud de (1), $S_n^{(\delta)} \to 0$ en probabilidad y $ES_{n,\beta}^{(\alpha)} \to 0$ en B si $0<\alpha<\beta$. □

<u>3.11 Coroloario.</u> Supongamos que B es un espacio de Hilbert. Sea $\{X_{nj}: 1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, estacionario, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y $\sum_{1}^{\infty}\phi^{1/2}(j)<\infty$ tal que:

(1) $E\|X_{n1}\|^2<\infty$, $EX_{n1}=0$,

(2) para todo $\varepsilon>0$, $\lim_n j_n E[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\|>\varepsilon]}]=0$,

(3) para todo $f\in B'$

$$C_f=\sup_n j_n Ef^2(X_{n1})<\infty$$

y existe $\tilde{\Phi}(f)=\lim_n\{j_n Ef^2(X_{n1})+2\,j_n \sum_{1}^{j_n-1} E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]\}$,

(4) $\lim_k \sup_n j_n E\, q_k^2(X_{n1}) = 0.$

Entonces existe una medida gaussiana centrada γ con covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)\,(f\in B')$ tal que

$$L(S_n) \underset{w}{\to} \gamma.$$

<u>Demostración:</u> Se verifica la hipótesis (1) del Teorema 3.10 pues

$$j_n P[\|X_{n1}\|>\varepsilon] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\, j_n E[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\|>\varepsilon]}]$$

para todo $\varepsilon>0$.

Fijemos ahora cualquier $\delta>0$. Con la notación de (2) del teorema anterior, se tiene para todo $f\in B'$ $C_{\delta,f}\le C_f$ y se deduce la validez de la primera condición de dicha hipótesis. Para probar la segunda, debemos ver que $\lim_n V_n(\delta,f)=\tilde{\Phi}(f)$ para todo $f\in B'$, siendo $\tilde{\Phi}$ como en nuestra hipótesis (3). Fijemos un tal f; se tiene, usando que $Ef(X_{n1})=0$.

$$j_n Ef^2(X_{n1})-j_n Ef^2(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})$$

$$=j_n(Ef^2(X_{n1})-Ef^2(X_{n1\delta}))+j_n(Ef(X_{n1\delta}))^2$$

$$=j_n Ef^2(X_{n1}^{\delta})+j_n(Ef(X_{n1}^{\delta}))^2$$

$$\leq 2\|f\|^2 j_n E[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\|>\delta]}]$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$, y además

$$j_n\sum_{1}^{j_n-1} E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]-j_n\sum_{1}^{j_n-1} E[f(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})f(X_{n,j+1,\delta}-EX_{n,j+1,\delta})]$$

$$=j_n\sum_{1}^{j_n-1}(E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]-E[f(X_{n1\delta})f(X_{n,j+1,\delta})])$$

$$+j_n(j_n-1)(Ef(X_{n1\delta}))^2$$

$$=a_n+b_n.$$

Debemos ver que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen ambas a cero. Como $Ef(X_{n1})=0$ se tiene

$$b_n\leq(j_n Ef(X_{n1\delta}))^2=(j_n Ef(X_{n1}^{\delta}))^2$$

$$\leq\left(\frac{\|f\|}{\delta}j_n E[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\|>\delta]}]\right)^2$$

que tiende a cero por nuestra hipótesis (2). Para acotar a_n escribamos (momentáneamente usaremos la notación $E[ZI_{[Z\in A]}]=E[Z;Z\in A]$)

$$|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]-E[f(X_{n1\delta})f(X_{n,j+1,\delta})]|$$

$$=|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]-E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1});\|X_{n1}\|\le\delta,\|X_{n,j+1}\|\le\delta]|$$

$$=|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1});\|X_{n1}\|>\delta\ \hat{o}\ \|X_{n,j+1}\|>\delta]|$$

$$\le|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})];\|X_{n1}\|>\delta,\|X_{n,j+1}\|\le\delta]|$$

$$+|E[f(X_{n1})\,f(X_{n,j+1});\|X_{n1}\|>\delta,\|X_{n,j+1}\|>\delta]|$$

$$+|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1});\|X_{n1}\|\le\delta,\|X_{n,j+1}\|>\delta]|$$

$$\le 6\|f\|\,\phi^{1/2}(j)(E[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^{1/2}(Ef^2(X_{n1}))^{1/2}$$

$$+\frac{3\|f\|^2}{\delta^2}(E[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^2$$

pues, por ejemplo, se tiene $(Ef(X_{n1})=0)$:

$$|E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1});\|X_{n1}\|>\delta,\|X_{n,j+1}\|\le\delta]|$$

$$\le 2\phi^{1/2}(j)(E[f^2(X_{n1});\|X_{n1}\|>\delta])^{1/2}(Ef^2(X_{n1}))^{1/2}$$

$$+|E[f(X_{n1});\|X_{n1}\|>\delta]|\,.\,|E[f(X_{n1});\|X_{n1}\|\le\delta]|$$

$$\le 2\|f\|\,\phi^{1/2}(j)(E[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^{1/2}(Ef^2(X_{n1}))^{1/2}$$

$$+(\frac{\|f\|}{\delta}E[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^2$$

y las otras dos acotaciones son análogas; luego

$$a_n\le 6\|f\|\,j_n\sum_{1}^{j_n-1}\phi^{1/2}(j)(E[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^{1/2}(Ef^2(X_{n1}))^{1/2}$$

$$+\frac{3\|f\|^2}{\delta^2}(j_nE[\|X_{n1}\|^2;\|X_{n1}\|>\delta])^2$$

$$\leq 6\|f\| \left(\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)\right)\left(j_n E[\|X_{n1}\|^2; \|X_{n1}\| > \delta]\right)^{1/2} c_f^{1/2}$$

$$+ \frac{3\|f\|^2}{\delta^2} \left(j_n E[\|X_{n1}\|^2 ; \|X_{n1}\| > \delta]\right)^2$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$ debido a nuestras hipótesis (2) y (3).

Hemos probado que vale (2) del Teorema 3.10. Verifiquemos (3) de dicho resultado; si $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ ($<.,.>$ es el producto interno de B):

$$Eq_k^2(X_{n1\delta} - EX_{n1\delta}) = E[\sum_{i=k+1}^\infty <X_{n1\delta} - EX_{n1\delta}, e_i>^2]$$

$$= \sum_{i=k+1}^\infty \{E<X_{n1\delta}, e_i>^2 - <EX_{n1\delta}, e_i>^2\}$$

$$= Eq_k^2(X_{n1\delta}) - q_k^2(EX_{n1\delta})$$

$$\leq Eq_k^2(X_{n1})$$

y basta entonces aplicar la condición (4) de nuestro enunciado.

Se deduce entonces del Teorema 3.10 que $L(S_n - ES_{n,\tau}) \underset{w}{\to} \gamma$ para cualquier $\tau > 0$, siendo γ una medida gaussiana centrada con covarianza $\Phi_\gamma(f,f) = \tilde{\Phi}(f)$ ($f \in B'$); pero para un tal τ

$$\| ES_{n,\tau} \| = \| j_n EX_{n1}^\tau \| \leq \frac{1}{\tau} j_n E[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\| > \tau]}]$$

que tiende a cero. Esto completa la demostración. □

<u>3.12 Corolario</u>. Supongamos que B es un espacio de Hilbert. Sea $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$ una sucesión estacionaria de vectores aleatorios a valores en B, ϕ-dependiente con $\phi(1) < 1$ y $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j) < \infty$. Supongamos que $E\|X_1\|^2 < \infty$ y $EX_1 = 0$.

Entonces converge para cada $f \in B'$ la suma

$$\tilde{\Phi}(f) = Ef^2(X_1) + 2\sum_{j=1}^\infty E[f(X_1) f(X_{j+1})]$$

y define la covarianza de una medida gaussiana centrada γ que satisface

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \underset{w}{\to} \gamma.$$

Demostración. Para cada $f\in B'$ converge la serie que define $\tilde{\Phi}(f)$ pues $|E[f(X_1)f(X_{j+1})]|\le 2\phi^{1/2}(j)Ef^2(X_1)$ por la Proposición 2.5.

Definiendo $X_{nj}=n^{-1/2}X_j$ para $j=1,\ldots,n, n\in\mathbb{N}$, se tienen las igualdades

$$nE[\|X_{n1}\|^2 I_{[\|X_{n1}\|>\varepsilon]}]=E[\|X_1\|^2 I_{[\|X_1\|>\varepsilon\sqrt{n}]}]$$

($\varepsilon>0$),

$$nEf^2(X_{n1})=Ef^2(X_1)$$

y

$$nEf^2(X_{n1})+2n\sum_{1}^{n-1} E[f(X_{n1})f(X_{n,j+1})]$$

$$=Ef^2(X_1)+2\sum_{1}^{n-1} E[f(X_1)f(X_{j+1})]$$

($f\in B'$) y

$$n\,Eq_k^2(X_{n1})=Eq_k^2(X_1).$$

Se deduce entonces de nuestras hipótesis que $\{X_{nj}\}$ satisface todas las condiciones del Corolario 3.11 y de él se obtiene la conclusión deseada. □

Como aplicación del resultado anterior, se puede usar un argumento de [4] (pág. 180) para calcular la distribución límite del estdístico de Cramér-von Mises de ciertas sucesiones estacionarias ϕ-dependientes de variables aleatorias. Observemos que en el Th.22.1 de [5] se da la distribución límite del proceso empírico de tales sucesiones sin la restricción $\phi(1)<1$ pero con la hipótesis $\sum_1^{\infty} j^2\phi^{1/2}(j)<\infty$.

3.13 Proposición. Sea $\{X_j : j\in\mathbb{N}\}$ una sucesión estacionaria de variables aleatorias reales, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y $\sum_1^{\infty}\phi^{1/2}(j)<\infty$. Supongamos que X_1 tiene función de distribución continua F; llamemos F_n a la n-ésima función de distribución empírica de $\{X_j\}$.

Entonces

$$L(n\int_{-\infty}^{+\infty}(F_n(x)-F(x))^2 dF(x)) \underset{w}{\to} L(\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^2)$$

siendo $\{\eta_k : k\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias reales gaussianas con $E\eta_k=0$ y

$$E\eta_h\eta_k = \frac{2}{hk\pi^2}\{\frac{1}{2}\delta_{nk} + \sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi F(X_1) \cdot \cos k\pi F(X_{j+1})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi F(X_{j+1}) \cdot \cos k\pi F(X_1)]\}$$

donde $\delta_{hk}=1$ si $h=k$, $=0$ si $h\neq k$.

<u>Demostración</u>: Llamemos $X_j'=F(X_j)$. Entonces $\{X_j'\}$ es estacionaria, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\sum_1^{\infty}\phi^{1/2}(j)<\infty$ y además $L(X_1')$ es la distribución uniforme en $[0,1]$.

Sea G_n la n-ésima función de distribución empírica de $\{X_j'\}$; se tiene $L(n\int_{-\infty}^{+\infty}(F_n(x)-F(x))^2 dF(x))=L(n\int_0^1(G_n(x)-x)^2dx)$.

Tomemos en $L^2[0,1]$ la base ortonormal $\{u_k : k\in\mathbb{N}\}$ siendo $u_k(x)=\sqrt{2}$ sen $k\pi x$. Se tiene para cada n y cada ω

$$\int_0^1 (G_n(\omega,x)-x)u_k(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\cos k\pi X_j'(\omega)$$

y por lo tanto

$$n\int_0^1 (G_n(\omega,x)-x)^2dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\cos k\pi X_j'(\omega))^2.$$

Fijemos ahora un espacio de Hilbert separable B con una base ortonormal $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ y definamos para cada $j\in\mathbb{N}$

$$Z_j = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{k\pi}(\cos k\pi X_j')\, e_k.$$

Entonces $\{Z_j : j\in\mathbb{N}\}$ satisface las hipótesis del Corolario 3.12 y se deduce que $\{L(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Z_j)\}$ converge débilmente a la medida gaussiana centrada γ cuya covarianza es

$$\Phi_\gamma(f,g)=E[f(Z_1)g(Z_1)]+\sum_{j=1}^{\infty}E[f(Z_1)g(Z_{j+1})]$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}E[f(Z_{j+1})g(Z_1)]$$

$(f,g\in B')$. Identificando funcionales con vectores de B, se tiene para $h,k\in\mathbb{N}$:

$$\Phi_\gamma(e_h,e_k) = \frac{2}{hk\pi^2}\{E[\cos h\pi X_1'\cdot\cos k\pi X_1'] + \sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi X_1'\cdot\cos k\pi X_{j+1}']$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi X_{j+1}'\cdot\cos k\pi X_1']\}$$

$$= \frac{2}{hk\pi^2}\{\frac{1}{2}\delta_{hk}+\sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi F(X_1)\cdot\cos k\pi F(X_{j+1})]$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} E[\cos h\pi F(X_{j+1})\cdot\cos k\pi F(X_1)]\}.$$

Tomemos finalmente una sucesión de variables aleatorias gaussianas $\{\eta_k : k\in\mathbb{N}\}$ con $E\eta_k=0$ y $E\eta_h\eta_k=\Phi_\gamma(e_h,e_k)$. Entonces $\gamma=L(\sum_1^{\infty}\eta_k e_k)$ y $L(n\int_0^1(G_n(x)-x)^2dx)=L(\frac{1}{n}\|\sum_{j=1}^{n}Z_j\|^2)\underset{w}{\to}L(\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^2)$, lo cual completa la demostración. □

Observación. El Corolario 3.12 fue probado en el caso $B=\mathbb{R}$ y sin la restricción $\phi(1)<1$ por Ibragimov (Th. 18.5.2 de [9]), con métodos diferentes. Indiquemos que apoyándose en su resultado se puede probar el Corolario 3.12 sin suponer $\phi(1)<1$, a través del Th. 2.3 de [1]; para ello observemos que

$$\lim_k \sup_n P[q_k(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n X_j)>s]=0$$

para todo $\varepsilon>0$, pues se puede probar que

$$Eq_k^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n X_j\right) \leq \left(1+4\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)\right)Eq_k^2(X_1)$$

y además se tiene para cada $f\in B'$ que $\{L(f(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n X_j))\}=\{L(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n f(X_j))\}$ converge débilmente en $\mathbb{R}$ a la distribución normal con media cero y varianza $Ef^2(X_1)+2\sum_1^\infty E[f(X_1)f(X_{j+1})]$, por el teorema de Ibragimov.

En consecuencia, se puede eliminar la hipótesis $\phi(1)<1$ en la Proposición 3,13.

A continuación probaremos un principio de invarianza en casi todo punto. Su demostración consiste en adaptar parte de la prueba del Th. 3.1 de [2] para deducir de la Proposición 3.1 un principio de invarianza en probabilidad; de él se deduce luego el resultado deseado mediante un argumento de de Acosta para el caso independiente. Incluímos la demostración por razones de completitud de la exposición.

La observación, en el caso independiente, de que del principio de invarianza en probabilidad de [2] (Th. 3.1) se deduce un principio de invarianza en casi todo punto se debe a H. Dehling y W. Philipp.

<u>3.14 Teorema</u>. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ tal que:

(1) $X_{n1} \underset{p}{\to} 0$ y

(**) para todo $\varepsilon>0$, existe $a>0$ tal que

$$\overline{\lim_n} \max_{1\leq k\leq [aj_n]} P\left[\left\|\sum_{j=1}^k X_{nj}\right\| > \varepsilon\right] < 1-\phi(1),$$

(2) $L(S_n) \underset{w}{\to} \gamma$, siendo γ una medida gaussiana.

Entonces existen un espacio de probabilidad y dos sistemas triangulares $\{X'_{nj}: 1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ y $\{Y_{nj}: 1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ tales que

(a) $L(X'_{n1},\dots,X'_{nj_n}) = L(X_{n1},\dots,X_{nj_n})$ para cada $n\in\mathbb{N}$,

(b) $Y_{n1},\dots,Y_{nj_n}$ son independientes idénticamente distribuídos con $L(Y_{n1})=\gamma^{1/j_n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$,

(c) $\max\limits_{1\le k\le j_n} \| S'_{nk}-T_{nk}\| \to 0$ c.s. cuando $n\to\infty$, siendo $S'_{nk}=\sum\limits_{1}^{k} X'_{nj}$, $T_{nk}=\sum\limits_{1}^{k} Y_{nj}$.

Demostración. (I) Veamos que basta probar el resultado con $\underset{P}{\to}$ en lugar de $\to$ c.s. en la conclusión (c).

Sean entonces $\{X'_{nj}\},\{Y_{nj}\}$ dos sistemas triangulares que cumplen (a),(b) y

$$\max_{1\le k\le j_n} \| S'_{nk}-T_{nk}\| \underset{P}{\to} 0 \quad (n\to\infty).$$

Llamemos $\beta_n=L(\max\limits_{1\le k\le j_n} \| S'_{nk}-T_{nk}\|)$; se tiene $\beta_n \underset{w}{\to} \delta_0$ y, por un resultado de Skorokhod ([14]), existe una sucesión $\{\eta_n\}$ de variables aleatorias reales tales que $L(\eta_n)=\beta_n$ y $\eta_n \to 0$ c.s.

Tomemos $S=\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} (B^{j_n}\times B^{j_n})$; $p_n: S\to B^{j_n}\times B^{j_n}$, $q_n:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ las proyecciones canónicas (q_n sobre el n-ésimo factor de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $\phi_n: B^{j_n}\times B^{j_n}\to\mathbb{R}$ mediante

$$\phi_n((x_1,\dots,x_{j_n}),(y_1,\dots,y_{j_n}))= \max_{1\le k\le j_n} \left\| \sum_1^k x_j - \sum_1^k y_j\right\|.$$

Consideremos la probabilidad $\lambda=L(\{\eta_n; n\in\mathbb{N}\})$ sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=L((X'_{n1},\dots,X'_{nj_n}),(Y_{n1},\dots,Y_{nj_n}))$ sobre $B^{j_n}\times B^{j_n}$. Se tiene $\alpha_n\circ\phi_n^{-1}=\beta_n=\lambda\circ q_n^{-1}$ para cada n.

Aplicando el Th. A.1 de [2] se obtiene una probabilidad α sobre S tal que $\alpha\circ p_n^{-1}=\alpha_n$ para cada n y $\alpha\circ((\phi_n\circ p_n)_{n\in\mathbb{N}})^{-1}=\lambda$. Tomemos $\Omega=S, P=\alpha$, X''_{nj} como la j-ésima coordenada de la proyección canónica de Ω sobre el primer factor de $B^{j_n}\times B^{j_n}$, Y'_{nj} como la j-ésima coordenada de la proyección canónica de Ω sobre el segundo factor de $B^{j_n}\times B^{j_n}$.

Entonces $\{X''_{nj}\}$ y $\{Y'_{nj}\}$ satisfacen lo deseado pues

$$L((X''_{n1},\dots,X''_{nj_n}),(Y'_{n1},\dots,Y'_{nj_n})) = \alpha_n$$

y

$$L(\{\max_{1\le k\le j_n} \| S''_{nk}-T'_{nk}\| : n\in\mathbb{N}\}) = \lambda,$$

siendo $S''_{nk}=\sum_1^k X''_{nj},\ T'_{nk}=\sum_1^k Y'_{nj}$.

(II) Probemos ahora el resultado con $\xrightarrow{p}$ en lugar de $\rightarrow$ c.s en (c), conclusión que llamaremos (c').

Dado $p\in\mathbb{N}$ consideraremos el espacio producto B^p dotado de la norma $\|x\|_1=\sum_{j=0}^{p-1}\|x_j\|$ si $x=(x_0,x_1,\dots,x_{p-1})\in B^p$ y denotaremos ρ_p la distancia de Prohorov entre probabilidades sobre B^p. Usamos la notación I(n,p,k) de la Proposición 3.1 y llamamos c(n,p,k)=card(I(n,p,k)); recordar que $c(n,p,k)=[\frac{j_n}{p}]$ ó $[\frac{j_n}{p}]+1$.

Para cada $p\in\mathbb{N}$ elegimos $n_p\in\mathbb{N}$ tal que $n_p\uparrow\infty$ cuando $p\to\infty$ y tal que $n\ge n_p$ implique:

$$\rho_p(L(\sum_{j\in I(n,p,0)} X_{nj},\dots,\sum_{j\in I(n,p,p-1)} X_{nj}),(\gamma^{1/p})^{\otimes p})<1/p^2, \tag{3.2}$$

$$\rho_p(\bigotimes_{k=0}^{p-1}\gamma^{\frac{1}{j_n}c(n,p,k)},(\gamma^{1/p})^{\otimes p})<1/p^2, \tag{3.3}$$

$$\max_{0\le k\le p-1}\rho(L(\sum_{j\in I(n,p,k)} X_{nj}),\gamma^{1/p})<1/p^2. \tag{3.4}$$

La posibilidad de esta elección se justifica por la Proposición 3.1.

Fijemos $p\in\mathbb{N}$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que $n_p\le n<n_{p+1}$. Por (3.2),(3.3) y un teorema de Strassen ([15]) existe una probabilidad $\lambda_{n,p}$ sobre $B^p \times B^p$ tal que, llamando π_1 y π_2 a las proyecciones canónicas sobre ambos factores,

$$\lambda_{n,p}(\{(x,y)\in B^p \times B^p : \|x-y\|_1 > 2/p^2\}) < 2/p^2,$$

$$\lambda_{n,p}\circ \pi_1^{-1} = L\Big(\sum_{j\in I(n,p,0)} X_{nj},\dots,\sum_{j\in I(n,p,p-1)} X_{nj}\Big)$$

y

$$\lambda_{n,p}\circ \pi_2^{-1} = \bigotimes_{k=0}^{p-1} \gamma\,\frac{c(n,p,k)}{j_n} \quad .$$

Llamemos $\alpha_n = L(X_{n1},\dots,X_{nj_n})$, $\beta_n = (\gamma^{1/j_n})^{\otimes j_n}$ (probabilidades sobre B^{j_n}) y definamos $\phi_{n,p}: B^{j_n} \to B^p$ mediante $\phi_{n,p}(y_1,\dots,y_{j_n}) =$
$\Big(\sum_{j\in I(n,p,0)} y_j,\dots,\sum_{j\in I(n,p,p-1)} y_j\Big)$.

Se tiene $\alpha_n\circ \phi_{n,p}^{-1} = \lambda_{n,p}\circ\pi_1^{-1}$ y $\beta_n\circ\phi_{n,p}^{-1} = \lambda_{n,p}\circ\pi_2^{-1}$.

Por el Th. A.1 de [2] existen un espacio de probabilidad (Ω_n,A_n,P_n) y vectores aleatorios

$$X'_n = (X'_{n1},\dots,X'_{nj_n}):\Omega_n \to B^{j_n},$$

$$Y_n = (Y_{n1},\dots,Y_{nj_n}):\Omega_n \to B^{j_n}$$

con $L(X'_n)=\alpha_n=L(X_{n1},\dots,X_{nj_n})$, $L(Y_n)=\beta_n=(\gamma^{1/j_n})^{\otimes j_n}$ y $L(\phi_{n,p}(X'_n),\phi_{n,p}(Y_n)) = \lambda_{n,p}$. Se pueden considerar los sistemas triangulares $\{X'_{nj}\}$, $\{Y_{nj}\}$ definidos sobre el espacio producto de los (Ω_n,A_n,P_n); por construcción, ellos satisfacen (a) y (b) del enunciado.

La demostración de (c') es análoga al paso V de la prueba del Th. 3.1 de [2]. Observemos primero que si $\varepsilon>0$ y $n_q\le n<n_{q+1}$ se tiene, llamando

$$A_{n\hat{i}}=\sum_{k=0}^{\hat{i}}\ \sum_{j\in I(n,q,k)} X'_{nj},\quad B_{n\hat{i}}=\sum_{k=0}^{\hat{i}}\ \sum_{j\in I(n,q,k)} Y_{nj}$$

$(0\leq \hat{i}\leq q-1)$, la desîgualdad

$$(3.5)\qquad P[\max_{1\leq k\leq j_n} \| S'_{nk}-T_{nk}\|>\varepsilon]$$

$$\leq P[\max_{0\leq \hat{i}\leq q-1} \| A_{n\hat{i}}-B_{n\hat{i}}\| >\varepsilon/3]$$

$$+P[\max_{0\leq k\leq q-1}\ \max_{d\leq \sum_{\ell=0}^{k} c(n,q,\ell)} \| \sum_{\substack{j\in I(n,q,k)\\ j\leq d}} X'_{nj}\| >\varepsilon/3]$$

$$+P[\max_{0\leq k\leq q-1}\ \max_{d\leq \sum_{\ell=0}^{k} c(n,q,\ell)} \| \sum_{\substack{j\in I(n,q,k)\\ j\leq d}} Y_{nj}\| >\varepsilon/3]$$

$$=a_n+b_n+c_n.$$

Tomemos $\varepsilon>0$ y $\eta>0$. Por (**) existen α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y dos enteros $p_0\geq 1$, $n_0\geq 1$ tales que

$$\max_{1\leq k\leq [\frac{j_n}{p_0}]+1} P[\| \sum_{1}^{k} X'_{nj} \|>\varepsilon/6]\leq 1-\alpha$$

si $n\geq n_0$ y además $\frac{1}{p_0^2}<\varepsilon/12$, $2/p_0^2<\eta/3$. Elijamos a continuación un entero $p_1\geq p_0, p_1\geq 2$ tal que

$$\sup_{0<t\leq 2/p_1} \frac{1}{t}\, \gamma^t(B^c_{\varepsilon/12})<\min\{\frac{1}{2},(\alpha-\phi(1))\frac{\eta}{6}\}$$

(posîble pues γ es gaussîana),

$$\frac{1}{p_1}(\alpha-\phi(1))^{-1}<\eta/6\ ,$$

$n_{p_1}\geq n_0$ y $j_n\geq p_1$ cuando $n\geq n_{p_1}$.

Probemos ahora que si $n\geq n_{p_1}$ entonces la probabilidad del miembro izquierdo de (3.5) es $<\eta$. Sea $n\geq n_{p_1}$; existe un entero $q\geq p_1$ tal que $n_q\leq n<n_{q+1}$. Debemos acotar a_n, b_n y c_n; se tiene

$$a_n \le P[\sum_{k=0}^{q-1} \| \sum_{j\in I(n,q,k)} X'_{nj} - \sum_{j\in I(n,q,k)} Y_{nj} \| > \varepsilon/3]$$

$$\le P[\sum_{k=0}^{q-1} \| \sum_{j\in I(n,q,k)} X'_{nj} - \sum_{j\in I(n,q,k)} Y_{nj} \| > 2/q^2]$$

$$= \lambda_{n,q}(\{(x,y)\in B^q x B^q : \| x-y \|_1 > 2/q^2\})$$

$$< 2/q^2 < \eta/3.$$

Usando la Proposición 2.2 y (3.4):

$$b_n \le \sum_{k=0}^{q-1} P[\max_{\substack{k \\ d\le \sum_{\ell=0} c(n,q,\ell)}} \| \sum_{\substack{j\in I(n,q,k) \\ j\le d}} X'_{nj} \| > \varepsilon/3]$$

$$\le \frac{1}{\alpha-\phi(1)} \sum_{k=0}^{q-1} P[\| \sum_{j\in I(n,q,k)} X'_{nj} \| > \varepsilon/6]$$

$$\le \frac{1}{\alpha-\phi(1)} \sum_{k=0}^{q-1} (\gamma^{1/q}(B^c_{\varepsilon/12}) + (1/q^2))$$

$$= \frac{1}{\alpha-\phi(1)} (q\gamma^{1/q}(B^c_{\varepsilon/12}) + \frac{1}{q})$$

$$< \eta/3 .$$

Para acotar c_n, observemos primero que

$$\max_{\substack{j \\ 1\le k\le [\frac{n}{q}]+1}} P[\| \sum_{1}^{k} Y_{nj} \| > \varepsilon/6] \le \sup_{0<t\le 2/p_1} \frac{1}{t}\gamma^t(B^c_{\varepsilon/6}) < 1/2;$$

luego, por la desigualdad de Ottaviani, resulta

$$c_n \le \sum_{k=0}^{q-1} P[\max_{\substack{k \\ d\le \sum_{\ell=0} c(n,q,\ell)}} \| \sum_{j\in I(n,q,k)} Y_{nj} \| > \varepsilon/3]$$

$$\leq 2 \sum_{k=0}^{q-1} \gamma^{(1/j_n)c(n,q,k)}(B^c_{\varepsilon/6})$$

$$< 2(\eta/6)\frac{1}{j_n}\sum_{k=0}^{q-1} c(n,q,k) = \eta/3.$$

Esto completa la demostración de (c'). □

Observación. Si un sistema triangular satisface (*) entonces se verifica la hipótesis (1) del Teorema 3.14. En particular, si $\{X_j : j\in\mathbb{N}\}$ es una sucesión estacionaria de vectores aleatorios a valores en B, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ tal que $a_n\to\infty$ y $L(a_n^{-1}\sum_1^n X_j) \underset{w}{\to} \gamma$, una medida gaussiana, vale la conclusión del teorema para el sistema triangular $\{a_n^{-1}X_j : 1\leq j\leq n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

Como en [2], se puede deducir del Teorema 3.14 el siguiente resultado. Dada una medida gaussiana γ sobre B, W_γ denotará la medida de Wiener asociada sobre C([0,1],B) (el espacio de las funciones continuas definidas sobre [0,1] y a valores en B).

3.15 Corolario. Sea $\{X_{nj} : 1\leq j\leq j_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B que satisface las hipótesis del Teorema 3.14.

Entonces existen un espacio de probabilidad (Ω,A,P), un sistema triangular $\{X'_{nj} : 1\leq j\leq j_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de vectores aleatorios definidos en Ω y a valores en B y un proceso estocástico $Z:\Omega\to C([0,1],B)$ tales que:

(a) $L(X'_{n1},\ldots,X'_{nj_n}) = L(X_{n1},\ldots,X_{nj_n})$,

(b) $L(Z) = W_\gamma$,

(c) $\max\limits_{1\leq k\leq j_n} \| S'_{nk} - Z(\frac{k}{j_n})\| \underset{P}{\to} 0$

siendo $S'_{nk}=\sum_{1}^{k} X'_{nj}$.

<u>Demostración</u>. Consideraremos dos copias B_1 y B_2 de B. Definimos $\psi: C([0,1],B) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} B_2^{j_n}$ mediante

$$\psi(x) = ((x(j/j_n)-x((j-1)/j_n))_{1\le j\le j_n})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (x\in C([0,1],B)).$$

Sea $\lambda = W_\gamma \circ \psi^{-1}$.

Tomemos dos sistemas triangulares $\{X''_{nj}\}$ y $\{Y_{nj}\}$ que satisfacen las conclusiones del Teorema 3.14 y sea $\alpha_n = L((X''_{n1},\dots,X''_{nj_n}),(Y_{n1},\dots,Y_{nj_n}))$.

Llamemos $S_n = B_1^{j_n} \times B_2^{j_n}$, $T_n = B_2^{j_n}$, $S=\prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$, $T=\prod_{n\in\mathbb{N}} T_n$ y $\phi_n: S_n\to T_n$, $p_n: S\to S_n$, $q_n: T\to T_n$ a las proyecciones canónicas correspondientes. Se tiene $\alpha_n\circ\phi_n^{-1} = (\gamma^{1/j_n})^{\otimes j_n} = \lambda\circ q_n^{-1}$. Por el Th. A.1 de [2], existe una probabilidad α sobre S tal que $\alpha\circ p_n^{-1}=\alpha_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha\circ((\phi_n\circ p_n)_{n\in\mathbb{N}})^{-1} = \lambda$.

Ahora llamemos $U_1 = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_1^{j_n}$, $V_1=U_1$, $U_2=C([0,1],B)$, $V_2=\prod_{n\in\mathbb{N}} B_2^{j_n}$, u_1 y u_2 a las proyecciones canónicas de $U_1\times U_2$ sobre ambos factores; análogamente se definen v_1 y v_2. Consideramos las probabilidades α sobre $V_1\times V_2$, $\alpha\circ v_1^{-1}$ sobre U_1 y W_γ sobre U_2; se tiene $W_\gamma\circ\psi^{-1}=\lambda=\alpha\circ v_2^{-1}$. Nuevamente por el Th. A.1 de [2], existe una probabilidad β sobre $U_1\times U_2$ tal que $\beta\circ u_1^{-1}=\alpha\circ v_1^{-1}$, $\beta\circ u_2^{-1}=W_\gamma$ y $\beta\circ(id_{U_1},\psi\circ u_2)^{-1}=\alpha$.

Definimos $\Omega=U_1\times U_2$, $P=\beta$, $Z=u_2$ y el sistema triangular $\{X'_{nj}\}$ como las coordenadas de u_1; se tiene $L(Z)=W_\gamma$ y para cada $n\in\mathbb{N}$

$$L((X'_{n1},\dots,X'_{nj_n}),(Z(\tfrac{1}{j_n})-Z(0),\dots,Z(1)-Z(\tfrac{j_n-1}{j_n})))$$

$$=\alpha\circ p_n^{-1}=\alpha_n.$$

Esto implica que $\{X'_{nj}\}$ y Z tienen las propiedades deseadas (observar que $Z(0)=0$ c.s.). □

Dados $a_1,\ldots,a_n \in B$, definimos $p(a_1,\ldots,a_n) \in C([0,1],B)$ mediante

$$p(a_1,\ldots,a_n)(t) = a_{[nt]} + (nt-[nt])(a_{[nt]+1} - a_{[nt]})$$

para $t\in[0,1]$ (es la poligonal que vale a_k en $\frac{k}{n}$ y es afín en $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$).

<u>3.16 Corolario.</u> Sea $\{X_{nj}: 1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B que satisface las hipótesis del Teorema 3.14.

Entonces

$$L(p(S_{n1},\ldots,S_{nj_n})) \underset{w}{\to} W_\gamma .$$

<u>Demostración.</u> Sean $\{X'_{nj}\}$ y Z como en el Corolario 3.15. Se tiene

$$\|p(S'_{n1},\ldots,S'_{nj_n}) - p(Z(1/j_n),\ldots,Z(1))\|_\infty$$

$$= \max_{1\le k\le j_n} \|S'_{nk} - Z(k/j_n)\| \underset{P}{\to} 0$$

y además $\|p(Z(1/j_n),\ldots,Z(1)) - Z\|_\infty \to 0$ en todo punto (continuidad de trayectorias).

Luego $p(S'_{n1},\ldots,S'_{nj_n}) \to Z$ en probabilidad y, por lo tanto,

$$L(p(S_{n1},\ldots,S_{nj_n})) = L(p(S'_{n1},\ldots,S'_{nj_n})) \underset{w}{\to} L(Z) = W_\gamma . \square$$

<u>Observación.</u>Este resultado generaliza un principio de invarianza en distribución de Eberlein, Th. (3.1) de [6], cuya hipótesis (3) ha sido reemplazada aquí por las condiciones $X_{n1}\to 0$ en probabilidad y $L(S_n) \underset{w}{\to} \gamma$. La condición que hemos llamado (**) es la propiedad (4) en el Th. (3.1) de [6] y es una versión para el caso dependiente de la condición (3.3) de [11] (hagamos notar que esta última siempre se verifica en el caso tratado en [11], como se deduce del Th. 2.1 de [2]).

Como consecuencia, damos una versión para vectores aleatorios a valores en un espacio de Hilbert del Th. 20.1 de [5]. Se la obtiene combinando los corolarios 3,12 y 3,16 junto con la observación posterior al Teorema 3,14.

3,17 Corolario. Supongamos que B es un espacio de Hilbert. Sea $\{X_j : j \in \mathbb{N}\}$ una sucesión estacionaria de vectores aleatorios a valores en B, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$ y $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)<\infty$. Supongamos que $E\,||X_1||^2<\infty$ y $EX_1=0$.

Entonces converge para cada $f\in B'$ la suma

$$\tilde{\Phi}(f)=Ef^2(X_1)+2\sum_1^\infty E[f(X_1)f(X_{j+1})]$$

y define la covarianza de una medida gaussiana centrada γ que satisface

$$L(p(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\, S_1,\tfrac{1}{\sqrt{n}}\, S_2,\ldots,\tfrac{1}{\sqrt{n}}\, S_n)) \underset{w}{\rightarrow} W_\gamma,$$

siendo $S_k=\sum_1^k X_j$.

4. Caso ψ-dependiente.

Algunos resultados preliminares valen para sistemas triangulares ϕ-dependientes que satisfacen la condición $\psi^*<\infty$; ésta es otra restricción sobre vectores aleatorios contiguos.

Comenzamos con una modificación de una desigualdad de [8] (véase la demostración del Th. 3.1).

4.1 Lema. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias que cumple $\phi(1)<1$ y $\psi^*<\infty$. Supongamos $\phi(1)<\alpha<1$ y sean $s>0$, $t>0$, $u>0$ tales que $u>t+s$,

$$\max_{1\le k\le n} P[||S_k|| > \tfrac{1}{2}(u-t-s)]\le 1-\alpha$$

y

$$\max_{1\le k\le n} P[||S_k|| > t/2]\le 1-\alpha.$$

Entonces

$$P[\|S_n\| > u]$$

$$\leq P[\max_{1\leq j\leq n} \|X_j\| > s] + \frac{\psi^*}{(\alpha-\phi(1))^2} P[\|S_n\| > \tfrac{1}{2}(u-t-s)]P[\|S_n\| > t/2]$$

$(S_k=\sum_1^k X_j)$.

Demostración. Llamemos $M=\max_{1\leq j\leq n} \|X_j\|$ y definamos $A_1=[\|S_1\| > t]$,

$$A_k=[\max_{1\leq h\leq k-1} \|S_h\| \leq t, \|S_k\| > t] \; (k=2,\dots,n).$$

Se tiene

$$P[\|S_n\| > u]\leq P[M>s] + \sum_{k=1}^{n} P(A_k\cap[\|S_n-S_k\| > u-t-s])$$

$$\leq P[M>s] + \sum_{k=1}^{n} \psi^*P(A_k)P[\|S_n-S_k\| > u-t-s]$$

$$\leq P[M>s] + \psi^* \max_{1\leq k\leq n} P[\|S_n-S_k\| > u-t-s].P[\max_{1\leq k\leq n} \|S_k\| > t]$$

(si $\|S_n\| > u$, $\|S_{k-1}\| \leq t$ y $\|X_k\| \leq s$ entonces $\|S_n-S_k\| \geq \|S_n\| - \|S_{k-1}\| - \|X_k\| > u-t-s$). Basta ahora aplicar la Proposición 2.2.□

4.2 Teorema. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B con sumas estacionarias, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ y que satisface la condición (*). Supongamos que $L(S_n) \underset{w}{\to} \nu$ y que μ es la medida de Lévy de ν.

Entonces para todo $\tau\in C(\mu)$ se tiene

$$j_n L(X_{n1})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c.$$

Demostración. Observemos primero que, argumentando como en la demostración del Teorema 3.3(1), se tiene que $L(\xi_{n1})^{k_n} \underset{w}{\to} \nu$ y por el Teorema central del límite, parte recíproca, del caso independiente (Th. 2.10 de [3]) resulta que $k_n L(\xi_{n1})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c$ para todo $\tau\in C(\mu)$.

Probemos que si $0<\delta<\varepsilon$

$$\mu(B_\varepsilon^c)\leq \underline{\lim_n}\, j_n P[\|X_{n1}\| > \varepsilon-\delta]. \tag{4.1}$$

Para ello, tomemos δ' tal que $0<\delta'<\delta$ y α tal que $\phi(1)<\alpha<1$. Por la propiedad (*), existe $n_0\in \mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$

$$\max_{1\leq k\leq p_n} P[\|\sum_1^k X_{nj}\| > \tfrac{1}{2}(\delta-\delta')]\leq 1-\alpha$$

y

$$\max_{1\leq k\leq p_n} P[\|\sum_1^k X_{nj}\| > \tfrac{1}{2}\delta']\leq 1-\alpha;$$

aplicando el Lema 4.1 con $s=\varepsilon-\delta$, $t=\delta'$, $u=\varepsilon$, se tiene para tales n

$$P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon]$$

$$\leq p_n P[\|X_{n1}\| > \varepsilon-\delta] + \frac{\psi^*}{(\alpha-\phi(1))^2} P[\|\xi_{n1}\| > \tfrac{1}{2}(\delta-\delta')]P[\|\xi_{n1}\| > \delta'/2].$$

Observando ahora que $\frac{k_n p_n}{j_n} \to 1$ $(n\to\infty)$ se deduce

$$\mu(B_\varepsilon^c) \leq \underline{\lim_n}\, k_n P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon]$$

$$\leq \underline{\lim_n}\, j_n P[\|X_{n1}\| > \varepsilon-\delta]$$

$$+ \frac{\psi^*}{(\alpha-\phi(1))^2} (\sup_n k_n P[\|\xi_{n1}\| > \tfrac{1}{2}(\delta-\delta')])\, \overline{\lim_n}\, P[\|\xi_{n1}\| > \delta'/2]$$

$$= \underline{\lim_n}\, j_n P[\|X_{n1}\| > \varepsilon-\delta]$$

por el caso independiente.

A continuación probaremos que

$$(4.2) \qquad \mu(F) \geq \overline{\lim_{n}}\, j_n \mathcal{L}(X_{n1})(F)$$

para todo cerrado F tal que $d(0,F)>0$.

Sea F un cerrado tal que $d(0,F)>0$ y tomemos $\varepsilon>0$. Para $n\in \mathbb{N}$, $i=1, \ldots, p_n$ llamemos $\xi_{n1}^{(i)}=\xi_{n1}-X_{ni}$, $C_i=C_{ni}=[X_{ni}\in F]$, $D_i=D_{ni}=[\xi_{n1}^{(i)}\in B_\varepsilon]$. Se tiene

$$\begin{aligned}
P[\xi_{n1}\in F+B_\varepsilon] &\geq P\Big(\bigcup_{i=1}^{p_n}(C_i\cap D_i)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{p_n} P\Big((C_i\cap D_i)\cap\Big[\bigcap_{1\leq j<i}(C_j\cap D_j)^c\Big]\Big)\\
&\geq \sum_{i=1}^{p_n} P\Big((C_i\cap D_i)\cap\Big[\bigcap_{1\leq j<i}C_j^c\Big]\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{p_n}\Big\{P(C_i\cap D_i)-P\Big(C_i\cap D_i\cap\Big[\bigcup_{1\leq j<i}C_j\Big]\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
P\Big(C_i\cap D_i\cap\Big[\bigcup_{1\leq j<i}C_j\Big]\Big) &\leq P\Big(C_i\cap\Big[\bigcup_{1\leq j<i}C_j\Big]\Big)\\
&\leq \psi^* P(C_i)P\Big(\bigcup_{1\leq j<i}C_j\Big)\\
&\leq \psi^* p_n (P(C_1))^2.
\end{aligned}$$

Fijemos $h\in\mathbb{N}$; sea

$$U_{ni}=\sum_{1\leq j<i}X_{nj}$$

si $i=1,\ldots,p_n$ y para $p_n>h$, $1\leq i\leq p_n-h$ llamemos

$$V'_{ni}=\sum_{j=i+1}^{i+h-1} X_{nj},\quad V''_{ni}=\sum_{j=i+h}^{p_n} X_{nj}.$$

Entonces, si $p_n>h$ y $2\le i\le p_n-h$

$$P(C_i\cap D_i)$$

$$\ge P(C_i\cap[\|U_{ni}\|\le\varepsilon/3]\cap[\|V'_{ni}\|\le\varepsilon/3]\cap[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3])$$

$$=P(C_i\cap[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3])-P(C_i\cap[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3]\cap([\|U_{ni}\|>\varepsilon/3]\cup[\|V'_{ni}\|>\varepsilon/3]))$$

$$\ge P(C_i)P[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3]-\phi(h)P(C_i)-P(C_i\cap[\|U_{ni}\|>\varepsilon/3])-P(C_i\cap[\|V'_{ni}\|>\varepsilon/3])$$

$$\ge P(C_1)\{P[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3]-\phi(h)-\psi^*P[\|U_{ni}\|>\varepsilon/3]-\psi^*P[\|V'_{ni}\|>\varepsilon/3]\};$$

luego para tales n se tiene

$$P[\xi_{n1}\in F+B_\varepsilon]$$

$$\ge\sum_{i=2}^{p_n-h}\{P(C_i\cap D_i)-P(C_i\cap D_i\cap[\bigcup_{1\le j<i} C_j])\}$$

$$\ge(p_n-h-1)P(C_1)\{P[\|V''_{ni}\|\le\varepsilon/3]-\phi(h)-\psi^*P[\|U_{ni}\|>\varepsilon/3]-\psi^*P[\|V'_{ni}\|>\varepsilon/3]-\psi^*p_nP(C_1)\}.$$

Dado $\delta>0$ se tiene para n suficientemente grande

$$\max_{1\le k\le p_n} P[\|\sum_1^k X_{nj}\|>\varepsilon/3]\le\delta$$

y $$p_nP(C_1)\le p_nP[\|X_{n1}\|\ge d(0,F)]\le\delta$$

(por la propiedad (*) y el Teorema 3.4, ya que $p_n/j_n\to 0$) lo cual implica que

$$P[\xi_{n1}\in F+B_\varepsilon]\ge(p_n-h-1)P(C_1)\{1-\delta-\phi(h)-3\psi^*\delta\}.$$

Luego para $h\in\mathbb{N}$ y $\delta>0$ se tiene

$$\mu(F+B_\varepsilon)\ge\overline{\lim_n}\ k_nP[\xi_{n1}\in F+B_\varepsilon]$$

$$\ge(\overline{\lim_n}\ k_n(p_n-h-1)P[X_{n1}\in F])\{1-\phi(h)-(3\psi^*+1)\delta\}$$

$$=(\overline{\lim_n}\ j_nP[X_{n1}\in F])\{1-\phi(h)-(3\psi^*+1)\delta\}$$

$(\frac{k_n}{j_n}(p_n-h-1)\to 1)$. Se deduce que para cada $h\in\mathbb{N}$

$$\mu(F+B_\varepsilon)\ge(\overline{\lim_n}\ j_nP[X_{n1}\in F])\{1-\phi(h)\}$$

y de aquí, que $\mu(F+B_\varepsilon)\ge\overline{\lim_n}\ j_nP[X_{n1}\in F]$. Pero esto implica (4.2) pues F es cerrado y ε arbitrario.

Para completar la demostración, observemos primero que basta probar el siguiente enunciado: (A) dadas una sucesión $M\subset\mathbb{N}$ y una medida σ-finita μ' con $\mu'(\{0\})=0$ tales que $w\text{-}\lim_{n\in M} j_n\mathcal{L}(X_{n1})|B_\tau^c=\mu'|B_\tau^c$ para todo $\tau\in C(\mu')$, se tiene $\mu'=\mu$.

En efecto: supongamos (A) cierto y tomemos $\tau\in C(\mu)$. Como $\{j_n\mathcal{L}(X_{n1})|B_\tau^c\}$ es relativamente compacto (Teorema 3.4) basta probar que toda sucesión $M \subset \mathbb{N}$ contiene una subsucesión M' tal que $\underset{n\in M'}{w\text{-}\lim} j_n L(X_{n1})|B_\tau^c = \mu|B_\tau^c$. Pero dada una sucesión $M \subset \mathbb{N}$, por la compacidad de $\{j_n L(X_{n1})|B_\delta^c\}$ para todo $\delta>0$ y un procedimiento diagonal, se puede encontrar una subsucesión M' de M y una medida μ' en las condiciones de (A); luego $\mu'=\mu$ y, en particular, M' satisface lo deseado.

Para demostrar (A), tomemos M y μ' con las propiedades indicadas; basta probar que $\underset{n\in M}{w\text{-}\lim} j_n L(X_{n1})|B_\tau^c = \mu|B_\tau^c$ para todo $\tau\in C(\mu)\cap C(\mu')$. Fijemos $\tau\in C(\mu)\cap C(\mu')$; es suficiente probar:

(4,3) para todo cerrado F, $\overline{\lim_{n\in M}} (j_n L(X_{n1})|B_\tau^c)(F) \le (\mu|B_\tau^c)(F)$,

(4.4) $$\lim_{n\in M} j_n L(X_{n1})(B_\tau^c) = \mu(B_\tau^c).$$

Tomemos un cerrado F; llamando $S_\tau = \{x : \|x\| = \tau\}$, se deduce de (4.2) que

$$\mu(B_\tau^c\cap F) = \mu((\mathring{B}_\tau)^c\cap F) \ge \overline{\lim_{n\in M}}\, j_n L(X_{n1})((\mathring{B}_\tau)^c\cap F)$$

$$= \overline{\lim_{n\in M}}\, (j_n L(X_{n1})(B_\tau^c\cap F) + j_n L(X_{n1})(S_\tau\cap F))$$

$$= \overline{\lim_{n\in M}}\, j_n L(X_{n1})(B_\tau^c\cap F)$$

(por (4.2) es $\overline{\lim_n}\, j_n L(X_{n1})(S_\tau) \le \mu(S_\tau) = 0$). Esto prueba (4.3).

Observemos ahora que existe el límite de (4.4) pues $\tau\in C(\mu')$ y coincide con $\mu'(B_\tau^c)$; por (4.3) se ve que basta probar que $\mu'(B_\tau^c) \ge \mu(B_\tau^c)$. Dado δ tal que $0<\delta<\tau$ y $\tau-\delta \in C(\mu')$, (4.1) implica que

$$\mu(B_\tau^c)\leq\varliminf_{n\in M} j_n \mathcal{L}(X_{n1})(B^c_{\tau-\delta})=\mu'(B^c_{\tau-\delta})$$

y basta entonces considerar una sucesión de tales δ que decrezca a cero. Queda demostrado (4.4) y, por lo tanto, el teorema.□

El siguiente lema, y su demostración, es de A. de Acosta (no publicado). Dado un subconjunto A de B, ∂A denota la frontera de A y $A^\varepsilon=\{x:d(x,A)\leq\varepsilon\}$ si $\varepsilon>0$.

<u>4.3 Lema</u>. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un conjunto de vectores aleatorios a valores en B. Si A es un subconjunto de B y $\varepsilon>0$ entonces

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)I_A\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)-\sum_{j=1}^n X_jI_A(X_j)\Big\|$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^n \|X_j\|\Big\{I_{(\partial A)^\varepsilon}(X_j)+I_{B_\varepsilon^c}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n X_i\Big)\Big\}.$$

<u>Demostración</u>. Fijemos j, $1\leq j\leq n$, y llamemos $Z_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n X_i$. Se tiene

$$X_jI_A(Z_j+X_j)-X_jI_A(X_j)=X_j\{I_A(Z_j+X_j)I_{A^c}(X_j)-I_A(X_j)I_{A^c}(X_j+Z_j)\};$$

además

$$I_A(Z_j+X_j)I_{A^c}(X_j)\leq I_A(Z_j+X_j)I_{(A^\varepsilon)^c}(X_j)+I_A(Z_j+X_j)I_{A^c\cap A^\varepsilon}(X_j)$$

$$\leq I_{B_\varepsilon^c}(Z_j)+I_{(\partial A)^\varepsilon}(X_j)$$

(por ser B un espacio lineal normado, $d(x,A)=d(x,\partial A)$ si $x\in A^c$) y, análogamente,

$$I_A(X_j)I_{A^c}(X_j+Z_j)\le I_{B_\varepsilon^c}(Z_j)+I_{(\partial A)^\varepsilon}(X_j),$$

Luego $\|X_jI_A(Z_j+X_j)-X_jI_A(X_j)\| \le 2\|X_j\|\{I_{(\partial A)^\varepsilon}(X_j)+I_{B_\varepsilon^c}(Z_j)\}$

para $j=1,\dots,n$.□

<u>4.4 Proposición</u>. Sea $\{X_{nj}:1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B estacionario, ϕ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ y que satisface la condición (*). Supongamos que para cada $n\in\mathbb{N}$

$$L(X_{n1})=(1-\|\sigma_n\|)\delta_0+\sigma_n$$

siendo σ_n una medida positiva finita tal que $\|\sigma_n\|\le 1$ y $\sigma_n(B_t)=0$ para cierto $t>0$ independiente de n.

Entonces, si $L(S_n)\xrightarrow[w]{}\nu$ y μ es la medida de Lévy de ν, se tiene que $\mu(B_t)=0$ y $\nu=\mathrm{Pois}(\mu)$. Además, $L(S_n^{(\tau)})\xrightarrow[w]{}\mathrm{Pois}(\mu|B_\tau^c)$ para todo $\tau\in C(\mu)$.

<u>Demostración</u>. Mostremos primeramente que

$$\sum_{k=1}^{k_n+1}\sum_{j\in Q(n,k)}X_{nj}^\tau \xrightarrow[P]{} 0$$

para todo $\tau>0$. Argumentando como en la demostración del Teorema 3.3(1) este hecho se deduce de que para cualquier $\tau>0$ $\sigma(X_{n1}^\tau)\le\sigma(X_{n1})$ y de que el sistema triangular $\{X_{nj}^\tau\}$ es estacionario y tiene la propiedad (*) (nótese que (*) es consecuencia del Teorema 3.4 en virtud de la desigualdad

$$P[\|\sum_1^{\ell_n}X_{nj}^\tau\|>0]\le\frac{\ell_n}{j_n}\,j_nP[\|X_{n1}\|>\tau]).$$

Probaremos ahora que para todo $\tau\in C(\mu)$

$$S_n^{(\tau)} - \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}^{\tau} \underset{P}{\to} 0, \tag{4,5}$$

Por la observación anterior, es suficiente demostrar

$$\sum_{k=1}^{k_n} (\xi_{nk}^{\tau} - \sum_{j\in P(n,k)} X_{nj}^{\tau}) \underset{P}{\to} 0 \tag{4.6}$$

para todo $\tau\in C(\mu)$.

Fijemos $\tau\in C(\mu)$ y tomemos ε tal que $0<\varepsilon<\tau$; por el Lema 4.3, se tiene para $n\in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^{k_n} (\xi_{nk}^{\tau} - \sum_{j\in P(n,k)} X_{nj}^{\tau}) \Big\| & \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j\in P(n,k)} \|X_{nj}\| \, I_{\{x:\tau-\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau+\varepsilon\}}(X_{nj}) \\ &+2 \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j\in P(n,k)} \|X_{nj}\| \, I_{B_\varepsilon^c}\Big(\sum_{\substack{i\in P(n,k)\\ i\neq j}} X_{ni}\Big) \\ &=2Y_{\varepsilon,n}+2Z_{\varepsilon,n}. \end{aligned}$$

Veamos que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \overline{\lim_{n}} \, P[Y_{\varepsilon,n}>0]=0. \tag{4.7}$$

En efecto: si $0<\varepsilon<\tau$ se tiene para $n\in \mathbb{N}$

$$P[Y_{\varepsilon,n}>0]\leq k_n p_n P[\tau-\varepsilon\leq\|X_{n1}\|\leq\tau+\varepsilon]\leq j_n P[\tau-\varepsilon\leq\|X_{n1}\|\leq\tau+\varepsilon];$$

luego, por el Teorema 4,2,

$$\overline{\lim_n}\, P[Y_{\varepsilon,n}>0]\leq\mu(\{x:\tau-\varepsilon\leq\|x\|\leq\tau+\varepsilon\})$$

y esto implica (4.7) pues $\tau\in C(\mu)$.

Ahora probaremos

(4.8) para todo $\varepsilon>0$, $Z_{\varepsilon,n} \underset{P}{\to} 0$ $(n\to\infty)$.

Dados $\varepsilon>0$, $\eta>0$, $s>0$ escribamos para $n\in\mathbb{N}$

$$P[Z_{\varepsilon,n}>\eta]\leq P[\max_{1\leq j\leq j_n}\|X_{nj}\|>s]+P[\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{j\in P(n,k)}\|X_{njs}\|I_{B_\varepsilon^c}(\sum_{\substack{i\in P(n,k)\\ i\neq j}}X_{ni})>\eta]$$

$$\leq P[\max_{1\leq j\leq j_n}\|X_{nj}\|>s]+\frac{1}{\eta}k_n\sum_{j=1}^{p_n}E[\|X_{njs}\|I_{B_\varepsilon^c}(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p_n}X_{ni})];$$

esto muestra que para probar (4.8) es suficiente demostrar las dos afirmaciones siguientes:

(4.9) $$\lim_{s\to\infty}\overline{\lim_n}\, P[\max_{1\leq j\leq j_n}\|X_{nj}\|>s]=0,$$

(4.10) dados $\varepsilon>0$ y $s>0$, $\displaystyle\lim_n k_n\sum_{j=1}^{p_n}E[\|X_{njs}\|I_{B_\varepsilon^c}(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p_n}X_{ni})]=0.$

Para verificar (4.9), fijemos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$. Dado $\delta>0$ llamemos $\eta=\min\{1-\alpha,\delta(\alpha-\phi(1))\}$, elijamos $s>0$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\nu^t(B^c_{\frac{s}{4}-\frac{\eta}{2}})<\eta/2$$

y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1\le k\le j_n} \rho(\mu_n^{(k)}, \nu^{k/j_n}) < \eta/2$$

si $n\ge n_0$. Luego, si $n\ge n_0$ y $1\le k\le j_n$ se tiene

$$P[\|\sum_1^k X_{nj}\| > s/4] < \nu^{k/j_n}(B^c_{\frac{s}{4}-\frac{\eta}{2}}) + \frac{\eta}{2} < \eta$$

y aplicando la Proposición 2.2 resulta

$$P[\max_{1\le j\le j_n} \|X_{nj}\| > s] \le P[\max_{1\le k\le j_n} \|\sum_1^k X_{nj}\| > s/2] \le \delta$$

para tales n. Esto prueba (4.9).

Fijemos ahora $\varepsilon>0$ y $s>0$. Si $n\in\mathbb{N}$ y $1\le j\le p_n$ llamemos

$$U_{nj} = \sum_{1\le i<j} X_{ni},\quad V_{nj} = \sum_{j<i\le p_n} X_{ni};$$

por la Proposición 2.7, tenemos

$$E[\|X_{njs}\| I_{B^c_\varepsilon}(\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{p_n} X_{ni})]$$

$$\le E[\|X_{njs}\| I_{B^c_{\varepsilon/2}}(U_{nj})] + E[\|X_{njs}\| I_{B^c_{\varepsilon/2}}(V_{nj})]$$

$$\le \psi^* E\|X_{n1s}\| \{P[U_{nj}\in B^c_{\varepsilon/2}] + P[V_{nj}\in B^c_{\varepsilon/2}]\}.$$

Tomemos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$. Por la propiedad (*), existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1\le k\le p_n} P[\|\sum_{1}^{k} X_{nj}\| > \varepsilon/4]\le 1-\alpha$$

si $n\ge n_0$; luego, si $n\ge n_0$ y $1\le j\le p_n$, se tiene (Proposición 2.2)

$$P[U_{nj}\in B^c_{\varepsilon/2}]\le \frac{1}{\alpha-\phi(1)} P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4]$$

y

$$P[V_{nj}\in B^c_{\varepsilon/2}]\le \frac{1}{\alpha-\phi(1)} P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4].$$

Luego, si $n\ge n_0$

$$k_n \sum_{j=1}^{p_n} E[\|X_{njs}\| I_{B^c_\varepsilon}(\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{p_n} X_{ni})]$$

$$\le \frac{2\psi^*}{\alpha-\phi(1)} j_n E\|X_{n1s}\| P[\|\xi_{n1}\| > \varepsilon/4];$$

pero $\xi_{n1} \to 0$ en probabilidad por el caso independiente y $\sup_n j_n E\|X_{n1s}\|<\infty$

como consecuencia del Teorema 3.4 y la desigualdad

$$j_n E\|X_{n1s}\| = j_n E[\|X_{n1}\| I_{[t<\|X_{n1}\|\le s]}]$$

$$\le s j_n P[\|X_{n1}\|>t].$$

Esto da la validez de (4.10).

Tenemos probado (4.7) y (4.8); ambos implican (4.6) y, por lo tanto, (4.5) es válido.

Sea $\tau\in C(\mu)$. Como $L(\xi_{n1})^{k_n} \xrightarrow[w]{} \nu$ del Th. 2.10 de [3] se deduce que

$L(\xi^{\tau}_{n1})^{k_n} \underset{w}{\to} \mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})$ y argumentando como en la demostración del Teorema 3.3(1) se obtiene $L(\sum_1^{k_n} \xi^{\tau}_{nk}) \underset{w}{\to} \mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})$, lo cual, sumado a (4.5), prueba que $L(S^{(\tau)}_n) \underset{w}{\to} \mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})$.

Tomemos ahora $\tau\in C(\mu)$, $\tau<t$. Dado que

$$P[S_n\neq S^{(\tau)}_n]\leq j_n P[X_{n1}\neq X^{\tau}_{n1}]\leq j_n P[0<\|X_{n1}\|\leq\tau]=0$$

lo anterior dice que $L(S_n)=L(S^{(\tau)}_n) \underset{w}{\to} \mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})$ y resulta $\nu=\mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})$ para un tal τ. Luego si $\tau,\tau'\in C(\mu)$ y $\tau<\tau'<t$ se tiene

$$\mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau'})=\mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})=\mathrm{Pois}(\{\mu|B^c_{\tau}\cap B_{\tau'}\}+\mu|B^c_{\tau'})$$

y por la unicidad de la representación de Lévy-Khintchine se obtiene $\mu|B^c_{\tau}\cap B_{\tau'}=0$. De aquí se deduce que $\mu(B_t)=0$ y que, si $\tau\in C(\mu)$ y $\tau<t$, es $\nu=\mathrm{Pois}(\mu|B^c_{\tau})=\mathrm{Pois}(\mu)$.□

Necesitaremos el siguiente resultado (Lemma 2.4 de [3]):

<u>4.5 Lema</u>. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B. Supongamos que $\{\sum_{j=1}^{j_n} L(X_{nj})|B^c_{\delta}\}$ es relativamente compacto para algún $\delta>0$. Entonces $\{L(S^{(\tau)}_n)\}$ es relativamente compacto para todo $\tau\geq\delta$.

<u>4.6 Lema</u>. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B estacionario, ψ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ y que satisface la condición (*). Si $\|X_{nj}\|\leq M$ c.s. y $\{L(S_n)\}$ es relativamente compacto entonces para todo $\delta>0$ y todo $f\in B'$

$$\lim_n E[f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})f(S^{(\delta)}_n)]=0.$$

Demostración; Fijemos $\delta>0$ y $f\in B'$. Sea $h\in \mathbb{N}$; si $n\in\mathbb{N}$ es tal que $j_n>2h+1$ e i cumple $h+1\le i\le j_n-h$ llamemos

$$U''_{ni}=\sum_{j=1}^{i-h} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta}),\quad U'_{ni}=\sum_{j=i-h+1}^{i-1} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta}),$$

$$V'_{ni}=\sum_{j=i+1}^{i+h-1} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta}) \text{ y } V''_{ni}=\sum_{j=i+h}^{j_n} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta}).$$

Para dichos n se tiene

$$|E[f(S_n^{(\delta)})f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})]|$$

$$=|E[\sum_{i=1}^{j_n}\sum_{j=1}^{j_n} f(X_{ni}^{\delta})f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})]|$$

$$\le |\sum_{j=1}^{j_n} E[f(X_{nj}^{\delta})f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})]$$

$$+|\sum_{i=1}^{j_n} E[f(X_{ni}^{\delta})\sum_{j\neq i} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})]|$$

$$\le j_n E|f(X_{n1}^{\delta})|.|f(EX_{n1\delta})|$$

$$+\sum_{i=1}^{h}|E[f(X_{ni}^{\delta})\sum_{j\neq i} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})]|$$

$$+\sum_{i=h+1}^{j_n-h}|E[f(X_{ni}^{\delta})\{U''_{ni}+U'_{ni}+V'_{ni}+V''_{ni}\}]|$$

$$+\sum_{i=j_n-h+1}^{j_n}|E[f(X_{ni}^{\delta})\sum_{j\neq i} f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})]|$$

$$=a_n+b_n+c_n+d_n,$$

Tenemos las acotaciones siguientes:

$$a_n\leq\|f\|^2 j_n E\|X_{n1}^{\delta}\|\ E\|X_{n1\delta}\|\ ,$$

$$b_n\leq\sum_{i=1}^{h}\left|E[f(X_{ni}^{\delta})\{\sum_{j=1}^{i-1}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})+\sum_{j=i+1}^{j_n}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})\}]\right|$$

$$\leq\psi^*\sum_{i=1}^{h}E|f(X_{n1}^{\delta})|\{E|\sum_{j=1}^{i-1}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})|+E|\sum_{j=i+1}^{j_n}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})|\}$$

$$\leq 2h\psi^*E|f(X_{n1}^{\delta})|.\ \max_{1\leq k\leq j_n}E|\sum_{1}^{k}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})|$$

$$\leq 4h\psi^*\|f\|^2E\|X_{n1}^{\delta}\|.\ \max_{1\leq k\leq j_n}E\|\sum_{1}^{k}X_{nj\delta}\|$$

(se usó la Proposición 2.7 y que $E|\sum_{1}^{k}f(X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})|=E|f(\sum_{1}^{k}X_{nj\delta})-f(E[\sum_{1}^{k}X_{nj\delta}])|\leq 2\|f\|\ E\|\sum_{1}^{k}X_{nj\delta}\|$),

$$c_n\leq E|f(X_{n1}^{\delta})|.\sum_{i=h+1}^{j_n-h}\{\psi(h)E|U''_{ni}|+\psi^*E|U'_{ni}|+\psi^*E|V'_{ni}|+\psi(h)E|V''_{ni}|\}$$

$$\leq j_nE|f(X_{n1}^{\delta})|\{\psi(h)\max_{h+1\leq i\leq j_n-h}(E|U''_{ni}|+E|V''_{ni}|)+\psi^*\max_{h+1\leq i\leq j_n-h}(E|U'_{ni}|+E|V'_{ni}|)\}$$

$$\leq 4\|f\|^2\psi(h)j_nE\|X_{n1}^{\delta}\|\max_{1\leq k\leq j_n}E\|\sum_{1}^{k}X_{nj\delta}\|$$

$$+4\|f\|^2\psi^*j_nE\|X_{n1}^{\delta}\|\ E\|\sum_{1}^{h-1}X_{nj\delta}\|$$

$$\leq 4\|f\|^2 j_n E\|X_{n1}^{\delta}\| \{\psi(h) \max_{1\leq k\leq j_n} E\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| + \psi^*(h-1) E\|X_{n1\delta}\|\}$$

(se usaron las proposiciones 2,6 y 2,7) y, procediendo como con b_n,

$$d_n \leq 4h\psi^* \|f\|^2 E\|X_{n1}^{\delta}\| \max_{1\leq k\leq j_n} E\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| .$$

Supongamos probado que

$$(4.11) \qquad C=\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{1\leq k\leq j_n} E\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| <\infty,$$

Por otra parte, se tiene $E\|X_{n1}^{\delta}\| \leq MP[\|X_{n1}\|>\delta]$ y $E\|X_{n1\delta}\| \leq \delta P[\|X_{n1}\|>\varepsilon]+\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$. Luego $E\|X_{n1}^{\delta}\| \to 0$, $E\|X_{n1\delta}\| \to 0$ y, por el Teorema 3.4, $K=\sup_n j_n E\|X_{n1}^{\delta}\| <\infty$.

Luego se tiene para todo $h\in\mathbb{N}$

$$\overline{\lim_n}\, |E[f(S_n^{(\delta)}) f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})]| \leq 4\|f\|^2 KC\psi(h)$$

y basta entonces hacer tender h a ∞ para obtener la conclusión deseada.

Resta probar (4.11). Observemos primero que aplicando el Teorema 3.4 y el Lema 4.5 se deduce que $\{\mathcal{L}(S_n^{(\delta)})\}$ es relativamente compacto y de aquí que lo es $\{\mathcal{L}(S_{n,\delta})\}$ ya que $S_{n,\delta}=S_n-S_n^{(\delta)}$. Nótese que el sistema triangular $\{X_{nj\delta}\}$ tiene las mismas propiedades que $\{X_{nj}\}$ (para verificar (*), escribir

$$P[\|\sum_1^{\ell_n} X_{nj\delta}\|>\varepsilon] \leq P[\|\sum_1^{\ell_n} X_{nj}\|>\varepsilon] + \frac{\ell_n}{j_n} j_n P[\|X_{n1}\|>\delta]$$

y tener en cuenta el Teorema 3,4).

Podemos suponer que $\{L(S_{n,\delta})\}$ converge débilmente a cierta probabilidad ν. Fijemos α tal que $\phi(1)<\alpha<1$ y llamemos $\eta=1-\alpha$. Elijamos $x_0>0$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \nu^t(B^c_{\frac{x_0}{2}-\frac{\eta}{2}})< \eta/2$$

y $n_0\in \mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$

$$\max_{1\leq k\leq j_n} \rho(\mu^{(k)}_{n\delta},\nu^{k/j_n})< \eta/2$$

donde hemos llamado $\mu^{(k)}_{n\delta}=L(\sum_1^k X_{nj\delta})$.

Luego si $n\geq n_0$, $1\leq k\leq j_n$ y $x\geq x_0$ se tiene

$$P[\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| > x/2]\leq \mu^{(k)}_{n\delta}(B^c_{x_0/2})$$

$$<\nu^{k/j_n}(B^c_{\frac{x_0}{2}-\frac{\eta}{2}})+\frac{\eta}{2}$$

$$<1-\alpha.$$

Por la Proposición 2.2, se tiene para $n\geq n_0$ y $1\leq k\leq j_n$:

$$E\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| \leq x_0+\int_{x_0}^{\infty} P[\|\sum_1^k X_{nj\delta}\| > x]dx$$

$$\leq x_0+ \frac{1}{\alpha-\phi(1)} \int_{x_0}^{\infty} P[\|S_{n,\delta}\| > x/2]dx$$

$$\leq x_{\alpha}+\frac{2}{\alpha-\phi(1)}E\|S_{n,\delta}\|$$

y basta entonces aplicar la Proposición 3,5 para obtener (4.11).□

Podemos obtener ahora condiciones necesarias de convergencia a un límite infinitamente divisible.

4.7 Teorema. Sea $\{X_{nj}:1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B, estacionario, ψ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ y que satisface la condición (*). Supongamos que $L(S_n)\underset{w}{\to}\nu$ con representación de Lévy-Khintchine $\nu=\delta_{z_\tau}*\gamma*c_\tau\mathrm{Pois}\mu$ para $\tau\in C(\mu)$, siendo $z_\tau\in B$, γ una medida gaussiana centrada y μ una medida de Lévy.

Entonces:

(a) para todo $\tau\in C(\mu)$: $j_n L(X_{n1})|B_\tau^c\underset{w}{\to}\mu|B_\tau^c$,

(b) para todo $f\in B'$,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\left\{\begin{matrix}\overline{\lim_n}\\ \\ \underline{\lim_n}\end{matrix}\right\}Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})=\lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \tau\in C(\mu)}}\ \lim_n Ef^2(S_{n,\tau}-ES_{n,\tau})$$

$$=\Phi_\gamma(f,f),$$

(c) para todo $\tau\in C(\mu)$,

$$L(S_n^{(\tau)})\underset{w}{\to}\mathrm{Pois}(\mu|B_\tau^c),$$

$$L(S_{n,\tau})\underset{w}{\to}\delta_{z_\tau}*\gamma*c_\tau\mathrm{Pois}(\mu|B_\tau)$$

y $$ES_{n,\tau}\to z_\tau \text{ en } B.$$

Demostración. El Teorema 4.2 prueba (a). Probemos (c).

Fijemos $\tau \in C(\mu)$ y veamos que $L(S_n^{(\tau)}) \xrightarrow[w]{} \mathrm{Pois}(\mu|B_\tau^c)$. Como $\{L(S_n^{(\tau)})\}$ es relativamente compacto (por el Teorema 3.4 y el Lema 4.5) podemos suponer que es convergente; llamemos α a su límite débil y observemos que el sistema triangular $\{X_{nj}^\tau\}$ tiene las mismas propiedades que $\{X_{nj}\}$ (la propiedad (*) se deduce del Teorema 3.4 y la desigualdad

$$P[\|\sum_1^{\ell_n} X_{nj}^\tau\| > 0] \leq (\ell_n/j_n) j_n P[\|X_{n1}\| > \tau]).$$

Aplicando la Proposición 4.4 resulta $\alpha = \mathrm{Pois}\lambda$ siendo λ una medida de Lévy, $\lambda(B_\tau)=0$. Basta probar ahora que $\lambda = \mu|B_\tau^c$. Para ello, tomemos $\tau' \in C(\lambda)$, $\tau' < \tau$; se tiene entonces, como $L(X_{n1}^\tau) = L(X_{n1})(B_\tau)\delta_0 + L(X_{n1})|B_\tau^c$, $j_n L(X_{n1}^\tau)|B_{\tau'}^c = j_n L(X_{n1})|B_\tau^c$ y se deduce del Teorema 4.2 que $\lambda|B_{\tau'}^c = \mu|B_\tau^c$. Luego $\lambda = \mu|B_\tau^c$.

Probemos ahora que si $\tau \in C(\mu)$ y cierta subsucesión $\{L(S_{n',\tau})\}$ converge débilmente a β entonces β tiene medida de Lévy $\mu|B_\tau$. Hagamos notar primeramente que $\{X_{n'j\tau}\}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.2 y llamemos λ a la medida de Lévy de β; dado $\tau' \in C(\lambda) \cap C(\mu)$, $\tau' < \tau$ se tiene $j_n L(X_{n1\tau})|B_{\tau'}^c = j_n L(X_{n1})|B_\tau \cap B_{\tau'}^c$ para todo n, lo cual implica que $\lambda|B_{\tau'}^c = \mu|B_\tau \cap B_{\tau'}^c$. De aquí se deduce que $\lambda = \mu|B_\tau$.

Probemos ahora la siguiente afirmación: (I) si $\tau \in C(\mu)$ y cierta subsucesión $L(S_{n_k,\tau}) \xrightarrow[w]{} \delta_z * \tilde{\gamma} * c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_\tau)$ (lo anterior asegura esta expresión para el límite) siendo $z \in B$ y $\tilde{\gamma}$ una medida gaussiana centrada entonces $\{L(S_{n_k,\tau'})\}$ converge a $\delta_z * \tilde{\gamma} * c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau'})$ para todo $\tau' > \tau$, $\tau' \in C(\mu)$.

Para demostrar (I), fijemos τ' con tales propiedades y una subsucesión infinita $\{n'\}$ de $\{n_k\}$ tal que $\{L(S_{n',\tau'})\}$ converge débilmente; basta probar que su límite tiene la forma deseada (pues $\{L(S_{n_k,\tau'})\}$ es relativamente compacto). Gracias a la integrabilidad que da la Proposición 3.5 se tiene

$$\lim_{n'} ES_{n',\tau}=z+\int x\ d[c_\tau Pois(\mu|B_\tau)](x)=z$$

(se usó una propiedad de las medidas de Poisson τ-centradas; para su demostración y la de otras propiedades que usaremos puede verse el §1 de [3]); también, llamando $m=\lim_{n'}(ES_{n',\tau'}-ES_{n',\tau})$, se tiene

$$m=\lim_{n'} j_{n'}E[X_{n'1}I_{[\tau<\|X_{n'1}\|\leq\tau']}]$$

$$=\lim_{n'}\int x\ (j_{n'}L(X_{n'1})|B_\tau^c\cap B_{\tau'})(dx)$$

$$=\int x\ (\mu|B_\tau^c\cap B_{\tau'})(dx)$$

como consecuencia del Teorema 4.2. Si el límite de $\{L(S_{n',\tau'})\}$ tiene representación de Lévy-Khintchine $\delta_{z'}*\gamma'*c_{\tau'}Pois(\mu|B_{\tau'})$ con $z'\epsilon B$ y γ' gaussiana centrada, resulta

$$\lim_{n'} ES_{n',\tau'}=z',$$

$$z'=z+m,$$

$$L(S_{n',\tau'}-ES_{n',\tau}) \underset{w}{\to} \delta_m*\gamma'*c_{\tau'}Pois(\mu|B_{\tau'}),$$

$$L(S_{n',\tau}-ES_{n',\tau}) \underset{w}{\to} \tilde{\gamma}*c_\tau Pois(\mu|B_\tau)$$

y $\qquad L(S^{(\tau)}_{n',\tau'}) \underset{w}{\to} \mathrm{Pois}(\mu|B^c_\tau \cap B_{\tau'})$

(que se deduce de la compacidad relativa de $\{L(S^{(\tau)}_{n',\tau'})\}$, la Proposición 4.4 y el Teorema 4.2 con argumentos similares a los ya usados). Por propiedades elementales de las medidas de Poisson τ-centradas se tiene para todo $f\epsilon B'$

$$\int f^2\, d[\delta_m*\gamma'*c_{\tau'}\mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau'})]=f^2(m)+\Phi_{\gamma'}(f,f)+\int f^2\, d(\mu|B_{\tau'}),$$

$$\int f^2\, d[\tilde{\gamma}*c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_\tau)]=\Phi_{\tilde{\gamma}}(f,f)+\int f^2\, d(\mu|B_\tau)$$

y $$\int f^2\, d\mathrm{Pois}(\mu|B^c_\tau\cap B_{\tau'})=f^2(m)+\int f^2\, d(\mu|B^c_\tau\cap B_{\tau'});$$

en consecuencia, de la igualdad

$$Ef^2(S_{n',\tau'}-ES_{n',\tau})$$

$$=Ef^2(S_{n',\tau}-ES_{n',\tau})+Ef^2(S^{(\tau)}_{n',\tau'})+2E[f(S_{n',\tau}-ES_{n',\tau})f(S^{(\tau)}_{n',\tau'})],$$

aplicando el Lema 4.6 se deduce $\Phi_{\gamma'}(f,f)=\Phi_{\tilde{\gamma}}(f,f)$ para todo $f\epsilon B'$. Luego $\gamma'=\tilde{\gamma}$ y además $\delta_m*c_{\tau'}\mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau'})=c_\tau\mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau'})$; esto termina la demostración de (I).

Fijemos ahora $\tau\epsilon C(\mu)$ y completemos la demostración de (c). Sea $\{n'\}\subset \mathbb{N}$ una sucesión infinita tal que $\{L(S_{n',\tau})\}$ converge a $\delta_z*\tilde{\gamma}*c_\tau\mathrm{Pois}(\mu|B_\tau)$ siendo $z\epsilon B$ y $\tilde{\gamma}$ una medida gaussiana centrada; probaremos que $z=z_\tau$ y $\tilde{\gamma}=\gamma$. Esto, por la compacidad relativa de $\{L(S_{n,\tau})\}$ y una aplicación de la Proposición 3.5, terminará la demostración de (c). Tomemos entonces una sucesión creciente $\{\tau_k\}\subset C(\mu)$ tal que $\tau_1 > \tau$ y $\tau_k \uparrow \infty$; por (I) resulta que

$$L(S_{n',\tau_k}) \underset{w}{\to} \delta_z * \tilde{\gamma} * c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau_k}) = \nu_k$$

para todo $k\in\mathbb{N}$ y entonces puede elegirse una subsucesión $\{n_k\}\subset\{n'\}$ tal que $\rho(L(S_{n_k,\tau_k}),\nu_k)<1/k$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Obsérvese ahora que $S_{n_k}^{(\tau_k)} \to 0$ en probabilidad (dado $\varepsilon>0$, el Teorema 3.4 permite elegir $r>0$ tal que $\sup_n j_n L(X_{n1})(B_r^c)\leq\varepsilon$ y entonces será $P[\|S_{n_k}^{(\tau_k)}\|>0]\leq j_{n_k} P[\|X_{n_k 1}\|>\tau_k]\leq\varepsilon$ si k es suficientemente grande como para que $\tau_k\geq r$) y que $c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_{\tau_k}) \underset{w}{\to} c_\tau \mathrm{Pois}\mu$ (por propiedades básicas de la convergencia débil de medidas y de las medidas de Poisson τ-centradas). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\nu &= w\text{-}\lim_k L(S_{n_k})\\ &= w\text{-}\lim_k L(S_{n_k,\tau_k})\\ &= w\text{-}\lim_k \nu_k\\ &= \delta_z * \tilde{\gamma} * c_\tau \mathrm{Pois}\mu\end{aligned}$$

y la unicidad de la representación de Lévy-Khintchine hace que $z=z_\tau$, $\tilde{\gamma}=\gamma$. Como dijimos, de aquí se deduce la tercera conclusión del enunciado.

Por otra parte, de (c) y aplicando la Proposición 3.5 se obtiene que

$$\lim_n Ef^2(S_{n,\tau}-ES_{n,\tau})=\Phi_\gamma(f,f)+\int f^2\, d[c_\tau \mathrm{Pois}(\mu|B_\tau)]$$

para cada $f\in B'$ y cada $\tau\in C(\mu)$; de aquí, razonando como en la demostración del Th. 2.10 de [3], se deduce la segunda expresión para la covarianza de γ que se anuncia en (b). Para probar la primera expresión, fijemos $f\in B'$ y observemos que, por lo que acabamos de demostrar, es suficiente verificar que $u(\delta,f)=\underline{\lim}_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})$ y $v(\delta,f)=\overline{\lim}_n Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})$ son funciones no decrecientes de δ. Pero si $0<\delta<\delta'$ se tiene

$$Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})$$

$$=Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})+Ef^2(S^{(\delta)}_{n,\delta'}-ES^{(\delta)}_{n,\delta'})+2E[f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})f(S^{(\delta)}_{n,\delta'}-ES^{(\delta)}_{n,\delta'})]$$

$$\geq Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})+2E[f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})f(S^{(\delta)}_{n,\delta'})]$$

y la monotonía de $u(.,f)$ y $v(.,f)$ es entonces consecuencia del Lema 4.6.□

Seguiremos usando la notación $V_n(\delta,f)$ con el significado de la Sección 3.

<u>4.8 Corolario</u>. Sea $\{X_{nj}\}$ un sistema triangular que satisface todas las hipótesis del Teorema 4.7. Supongamos que se cumple alguna de las dos siguientes condiciones:

(i) $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)<\infty$ y para todo $f\in B'$ existe $\delta>0$ tal que

$$C_{\delta,f}=\sup_n j_n Ef^2(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})<\infty.$$

(ii) $\sum_1^\infty \psi(j)<\infty$ y para todo $f\in B'$ existe $\delta>0$ tal que

$$M_{\delta,f}=\sup_n j_n^{1/2}E|f(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})|<\infty.$$

Entonces, para todo $f\in B'$,

$$(b')\qquad \lim_{\delta\downarrow}\left\{\begin{matrix}\overline{\lim_n}\\ \\ \underline{\lim_n}\end{matrix}\right\} V_n(\delta,f)=\lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \tau\in C(\mu)}}\lim_n V_n(\tau,f)=\Phi_\gamma(f,f).$$

<u>Demostración</u>. Comencemos observando que dados $f\in B'$ y $\delta>0$ la finitud de $C_{\delta,f}$ equivale a que $K_{\delta,f}=\sup_n j_n Ef^2(X_{n1\delta})<\infty$ si se verifica que $\sup_n j_n^{1/2}|Ef(X_{n1\delta})|$ $<\infty$; pero esto se deduce de nuestras hipôtesis ya que $j_n^{1/2}|Ef(X_{n1\delta})|\leq$ $\|f\|\,\|ES_{n,\delta}\|$ y $\sup_n\|ES_{n,\delta}\|<\infty$ (usar (a) y (c) del Teorema 4.7).

Supongamos válido (i); fijemos $f\in B'$ y su correspondiente δ. Si $\tau\in C(\mu)$ y $\tau\leq\delta$ se tiene, como en la demostración del Corolario 3.8,

$$(4.12)\quad Ef^2(S_{n,\tau}-ES_{n,\tau})$$

$$=V_n(\tau,f)-2\sum_{1}^{j_n-1} jE[f(X_{n1\tau}-EX_{n1\tau})f(X_{n,j+1,\tau}-EX_{n,j+1,\tau})]$$

$$=V_n(\tau,f)-2a_n$$

y $|a_n|\leq 2(\frac{1}{j_n}\sum_{1}^{j_n-1} j\phi^{1/2}(j))C_{\tau,f}$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$ pues $C_{\tau,f}<\infty$. Luego basta aplicar (b) del Teorema 4.7 para obtener

$$\lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \tau\in C(\mu)}}\lim_n V_n(\tau,f)=\Phi_\gamma(f,f).$$

Para deducir de (ii) la misma igualdad, tomemos $f\in B'$ y el δ que le asocia dicha condición. Sea $\tau\in C(\mu)$, $\tau\leq\delta$; se tiene $M_{\tau,f}<\infty$ pues

$$j_n^{1/2}E|f(X_{n1\tau}-EX_{n1\tau})|\leq j_n^{1/2}E|f(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})|+2\|f\|\,\delta j_n P[\|X_{n1}\|>\tau].$$

Luego se tiene en (4.12)

$$|a_n|\leq\Big(\frac{1}{j_n}\sum_{1}^{j_n-1} j\psi(j)\Big)M_{\tau,f}^2$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$. Nuevamente se usa (b) del Teorema 4.7 para obtener lo deseado.

Para probar la parte restante de (b'), notemos que si $f\in B'$ y $0<\alpha<\beta$ se tiene

(4.13) $V_n(\alpha,f)$

$$\leq V_n(\beta,f)+j_n|(Ef(X_{n1\beta}))^2-(Ef(X_{n1\alpha}))^2|$$

$$-2j_n\sum_{1}^{j_n-1}\{E[f(X_{n1\alpha})f(X^{\alpha}_{n,j+1,\beta})]-Ef(X_{n1\alpha})Ef(X^{\alpha}_{n1\beta})\}$$

$$-2j_n\sum_{1}^{j_n-1}\{E[f(X^{\alpha}_{n1\beta})f(X_{n,j+1,\alpha})]-Ef(X^{\alpha}_{n1\beta})Ef(X_{n1\alpha})\}$$

$$-2j_n\sum_{1}^{j_n-1}\{E[f(X^{\alpha}_{n1\beta})f(X^{\alpha}_{n,j+1,\beta})]-(Ef(X^{\alpha}_{n1\beta}))^2\}$$

$$=V_n(\beta,f)+a_n(\alpha,\beta)-2\{b_n(\alpha,\beta)+c_n(\alpha,\beta)+d_n(\alpha,\beta)\}.$$

Por el Teorema 4.7, $a_n(\alpha,\beta)\to 0$ para cualesquiera $0<\alpha<\beta$, pues se

... ración del Th. 2.10 de [3])

$$\ldots_n|Ef(X_{n1\alpha}+X_{n1\beta})Ef(X_{n1\beta}-X_{n1\alpha})|$$

$$Ef(X_{n1\alpha}+X_{n1\beta})|j_n|Ef(X^{\alpha}_{n1\beta})|$$

$$\beta E\|X_{n1\beta}\|\, j_nP[\|X_{n1}\| > \alpha]$$

... que se verifica (i); tomemos $f\in B'$ y el δ de di-

...ciones de (4.13), se tiene, si $0<\alpha<\beta\leq\delta$:

$$(j_nEf^2(X_{n1\alpha}))^{1/2}(j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta}))^{1/2}$$

$$K^{1/2}_{\delta,f}\ (j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta}))^{1/2},$$

$$K^{1/2}_{\delta,f}\ (j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta}))^{1/2}$$

$$j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta});$$

...ualdad

$${}^{1/2}(j)\{2(K_{\delta,f}j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta}))^{1/2}+j_nEf^2(X^{\alpha}_{n1\beta})\}$$

...r ahora que

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta,f)=\Phi_\gamma(f,f)$$

y para ello es suficiente demostrar que

$$\lim_{k} \overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta_k,f)=\Phi_\gamma(f,f)$$

para toda sucesión de reales positivos $\{\delta_k\}$ que converge a cero. Fijemos una tal sucesión $\{\delta_k\}$ y elijamos sucesiones $\{\tau_k\}$ y $\{\tau_k'\}$ contenidas en $C(\mu)$ tales que $\tau_k<\delta_k<\tau_k'$ y $\tau_k'\to 0$; luego, para k tal que $\tau_k'\leq\delta$, se deduce de (4.14) y usando (a) del Teorema 4.7

$$\overline{\lim_{n}}\, V_n(\tau_k,f)\leq \overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta_k,f)$$

$$+4\sum_{1}^{\infty} \phi^{1/2}(j)\{2(K_{\delta,f}\int_{B_{\tau_k'}} f^2\, d\mu)^{1/2}+\int_{B_{\tau_k'}} f^2\, d\mu\}$$

y $$\overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta_k,f)\leq \overline{\lim_{n}}\, V_n(\tau_k',f)$$

$$+4\sum_{1}^{\infty} \phi^{1/2}(j)\{2(K_{\delta,f}\int_{B_{\tau_k'}} f^2\, d\mu)^{1/2}+\int_{B_{\tau_k'}} f^2\, d\mu\}.$$

Luego, gracias a la finitud de $K_{\delta,f}$ y de $\int_{B_1} f^2\, d\mu$, se deduce

$$\Phi_\gamma(f,f)=\lim_{k}\lim_{n} V_n(\tau_k,f)\leq\underline{\lim_{k}}\, \overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta_k,f)$$

$$\leq\overline{\lim_{k}}\, \overline{\lim_{n}}\, V_n(\delta_k,f)\leq\lim_{k}\lim_{n} V_n(\tau_k',f)=\Phi_\gamma(f,f).$$

Esto completa la demostración, con la hipótesis (i), de la expresión para Φ_γ en (b') que involucra el límite superior; la referente al límite inferior se trata análogamente, fijando una sucesión $\{\delta_k\}$ que tiende a cero y eligiendo sucesiones en $C(\mu)$ como las anteriores.

Ahora deduciremos de (ii) las expresiones de Φ_γ en términos de límites superior e inferior. Dados $f\in B'$, $0<\alpha<\beta$, se tiene, con las notaciones de (4.13):

$$|b_n(\alpha,\beta)|\leq \sum_1^\infty \psi(j)\ E|f(X_{n1\alpha})|j_n E|f(X^\alpha_{n1\beta})|$$

$$\leq \beta\|f\| \sum_1^\infty \psi(j)\ E|f(X_{n1\alpha})|j_n P[\|X_{n1}\| > \alpha],$$

$$|c_n(\alpha,\beta)|\leq \beta\|f\| \sum_1^\infty \psi(j)\ E|f(X_{n1\alpha})|j_n P[\|X_{n1}\| > \alpha]$$

y $$|d_n(\alpha,\beta)|\leq \beta\|f\| \sum_1^\infty \psi(j)\ E|f(X^\alpha_{n1\beta})|j_n P[\|X_{n1}\| > \alpha].$$

Se obtiene entonces de (4.13) que si $0<\alpha<\beta$

$$\overline{\lim_n}\ V_n(\alpha,f)\leq \overline{\lim_n}\ V_n(\beta,f) \text{ y } \underline{\lim_n}\ V_n(\alpha,f)\leq \underline{\lim_n}\ V_n(\beta,f).$$

Esta propiedad y lo ya probado implican lo que se quería demostrar.□

Observación. Sea $\{X_{nj}\}$ como en el Teorema 4.7. Si $\sum_1^\infty \phi^{1/2}(j)<1/4$ ó $\sum_1^\infty \psi(j)<1/2$ entonces vale (b') del Corolario 4.8 (argumentando como en la observación posterior al Corolario 3.8, se prueba que $C_{\delta,f}$ o $M_{\delta,f}$ es finito para todo $f\in B'$ y todo $\delta>0$).

Concluímos con dos resultados que dan condiciones suficientes para la convergencia a un límite infinitamente divisible cuando B es de dimensión finita.

4.9 Teorema. Supongamos que B es de dimensión finita. Sea $\{X_{nj}; 1\leq j\leq j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B estacionario, ψ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ tal que:

(1) $\{X_{nj}\}$ satisface (*),

(2) existe una medida σ-finita μ sobre B tal que para todo $\tau\in C(\mu)$

$$j_n L(X_{n1})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c,$$

(3) para todo $f\in B'$ existe una sucesión de reales positivos $\{\delta_k\}$ con $\delta_k\downarrow 0$ tal que

$$\tilde{\Phi}(f)=\lim_k \left\{\begin{matrix}\overline{\lim_n} \\ \underline{\lim_n}\end{matrix}\right\} Ef^2(S_{n,\delta_k}-ES_{n,\delta_k})$$

existen,

(4) existe $\delta>0$ tal que $\{ES_{n,\delta}\}$ es relativamente compacto en B.

Entonces:

(a) μ es una medida de Lévy,

(b) existe una medida gaussiana centrada γ sobre B tal que $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)$ $(f\in B')$,

(c) para todo $\tau\in C(\mu)$,

$$L(S_n-ES_{n,\tau}) \underset{w}{\to} \gamma * c_\tau \text{Pois}\mu.$$

Demostración. Tomemos el δ de la hipótesis (4). Sea $f\in B'$; por (3), existe δ' con $0<\delta'<\delta$ tal que $C_f=\sup_n Ef^2(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})<\infty$ y por Chebychev se obtiene

$$P[|f(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'})|>t]\leq t^{-2}c_f$$

para todo $t>0$, lo que muestra que $\{L(f(S_{n,\delta'}-ES_{n,\delta'}))\}$ es relativamente compacto. También lo es $\{L(S_{n,\delta}^{(\delta')})\}$ en virtud de (2) y el Lema 4.5, pues $S_{n,\delta}^{(\delta')}=S_n^{(\delta')}-S_n^{(\delta)}$; por la Proposición 3.5 se deduce que $\{ES_{n,\delta}^{(\delta')}\}$ es relativamente compacto en B.

Luego $\{L(f(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta}))\}$ es relativamente compacto para cada $f\in B'$ y en consecuencia lo es $\{L(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})\}$ puesto que B es de dimensión finita. De (4) se deduce que $\{L(S_{n,\delta})\}$ es relativamente compacto y, como lo es $\{L(S_n^{(\delta)})\}$, $\{L(S_n)\}$ resulta relativamente compacto.

Consideremos ahora una sucesión $\{n'\}\subset \mathbb{N}$ tal que $\{L(S_{n'})\}$ converge débilmente. Su límite será una probabilidad infinitamente divisible ν con representación de Lévy-Khintchine $\delta_{z_\tau}*\gamma*c_\tau \mathrm{Pois}\mu'$ siendo $z_\tau\in B$, γ una medida gaussiana centrada, μ' una medida de Lévy y $\tau\in C(\mu')$. Por el Teorema 4.7 y la hipótesis (2) se tiene $\mu'|\{0\}^c=\mu|\{0\}^c$; por otra parte, la hipótesis (3) y la segunda conclusión del Teorema 4.7 muestran que γ tiene covarianza $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)$ $(f\in B')$. Además, $ES_{n',\tau}\to z_\tau$ en B si $\tau\in C(\mu)$.

De la existencia de tales sucesiones $\{n'\}$ se deducen las conclusiones (a) y (b).

Para probar (c), fijemos $\tau\in C(\mu)$ y observemos que $\{L(S_n-ES_{n,\tau})\}$ es relativamente compacto ($\{ES_{n,\tau}\}$ es relativamente compacto en B por (4) y porque lo es $\{ES_{n,\beta}^{(\alpha)}\}$ si $0<\alpha<\beta$). Es suficiente demostrar que toda subsucesión convergente tiene el límite deseado; pero si $\{L(S_{n'}-ES_{n',\tau})\}$ es una tal subsucesión, basta tomar una subsucesión $\{n''\}$ de $\{n'\}$ tal que $\{L(S_{n''})\}$ converge y aplicarle el argumento anterior.□

4.10 Corolario. Supongamos que B es de dimensión finita. Sea $\{X_{nj}: 1\le j\le j_n, n\in\mathbb{N}\}$ un sistema triangular de vectores aleatorios a valores en B estacionario, ψ-dependiente con $\phi(1)<1$, $\psi^*<\infty$ tal que:

(1) existe una medida σ-finita μ sobre B tal que para todo $\tau\in C(\mu)$

$$j_n L(X_{n1})|B_\tau^c \underset{w}{\to} \mu|B_\tau^c,$$

(2) se cumple alguna de las condiciones (i) o (ii) del Corolario 4.8 y para todo $f\in B'$ existe una sucesión de reales positivos $\{\delta_k\}$ con $\delta_k\downarrow 0$ tal que existen

$$\tilde{\Phi}(f)=\lim_k \left\{\begin{matrix}\overline{\lim_n}\\ \\ \underline{\lim_n}\end{matrix}\right\} V_n(\delta_k,f),$$

(3) existe $\alpha>0$ tal que $\{ES_{n,\alpha}\}$ es relativamente compacto en B.

Entonces:

(a) μ es una medida de Lévy,

(b) existe una medida gaussiana centrada γ sobre B tal que $\Phi_\gamma(f,f)=\tilde{\Phi}(f)$ $(f\in B')$,

(c) para todo $\tau\in C(\mu)$,

$$L(S_n-ES_{n,\tau}) \underset{w}{\to} \gamma * c_\tau \mathrm{Pois}\,\mu.$$

<u>Demostración</u>. Debemos verificar que $\{X_{nj}\}$ satisface la condición (*) y la hipótesis (3) del Teorema 4.9.

Con el objeto de probar la primera propiedad, tomemos α como en (3) y escribamos para $n\in\mathbb{N}$, $\ell_n\in\mathbb{N}$ tal que $\ell_n\leq j_n$:

$$\sum_1^{\ell_n} X_{nj} = \sum_1^{\ell_n} (X_{nj\alpha}-EX_{nj\alpha}) + \frac{\ell_n}{j_n} ES_{n,\alpha} + \sum_1^{\ell_n} X_{nj}^{\alpha}.$$

Por (1) y (3), es suficiente demostrar que el sistema triangular $\{X_{nj\alpha}-EX_{nj\alpha}\}$ cumple (*).

Sea $\{\ell_n\}\subset\mathbb{N}$ tal que $\ell_n\leq j_n$ y $\ell_n/j_n\to 0$. Supongamos que se verifica la condición (i) del Corolario 4.8. Si $f\in B'$ y $\delta>0$ es tal que $C_{\delta,f}<\infty$ se tiene

$$Ef^2\Big(\sum_1^{\ell_n} (X_{nj\delta}-EX_{nj\delta})\Big)\leq \frac{\ell_n}{j_n}\{1+4\sum_1^{\infty} \phi^{1/2}(j)\}C_{\delta,f}$$

que tiende a cero cuando $n\to\infty$; como, por otra parte, es consecuencia de (1) que $\sum_1^{\ell_n} (X_{njt}^s-EX_{njt}^s) \to 0$ en probabilidad si $0<s<t$, se obtiene que $f\Big(\sum_1^{\ell_n} (X_{nj\alpha}-EX_{nj\alpha})\Big) \to 0$ en probabilidad para cada $f\in B'$. Luego $\sum_1^{\ell_n} (X_{nj\alpha}-EX_{nj\alpha})$ $\to 0$ en probabilidad pues B es de dimensión finita.

Ahora supongamos que se cumple (ii) del Corolario 4.8. Dado $f\in B'$, argumentando como en la demostración de dicho corolario y usando (2), se obtiene $\delta'>0$ tal que $M_{\delta',f}<\infty$ y $\sup_n|V_n(\delta',f)|<\infty$; llamemos $Y_{nj}=f(X_{nj\delta'}-EX_{nj\delta'})$ y escribamos

$$Ef^2\Big(\sum_1^{\ell_n} (X_{nj\delta'}-EX_{nj\delta'})\Big)$$

$$= \frac{\ell_n}{j_n} V_n(\delta',f)-2\ell_n \sum_{j=\ell_n}^{j_n-1} E[Y_{n1}Y_{n,j+1}]-2 \sum_1^{\ell_n-1} jE[Y_{n1}Y_{n,j+1}].$$

Se tiene

$$|\ell_n \sum_{j=\ell_n}^{j_n-1} E[Y_{n1}Y_{n,j+1}]| \le \frac{\ell_n}{j_n}(\sum_1^{\infty} \psi(j))M^2_{\delta',f}$$

y
$$|\sum_1^{\ell_n-1} jE[Y_{n1}Y_{n,j+1}]| \le \frac{1}{\ell_n}(\sum_1^{\ell_n-1} j\psi(j))M^2_{\delta',f};$$

luego $f(\sum_1^{\ell_n}(X_{nj\delta'}-EX_{nj\delta'})) \to 0$ en probabilidad. Como antes, se deduce de aquí que $\sum_1^{\ell_n}(X_{nj\alpha}-EX_{nj\alpha}) \to 0$ en probabilidad.

Para deducir la condición (3) del Teorema 4.9 de nuestra hipótesis (2), basta probar que para $f\in B'$ y $\delta>0$ suficientemente pequeño

$$d_n=Ef^2(S_{n,\delta}-ES_{n,\delta})-V_n(\delta,f)$$

$$=-2\sum_1^{j_n-1} jE[f(X_{n1\delta}-EX_{n1\delta})f(X_{n,j+1,\delta}-EX_{n,j+1,\delta})]$$

tiende a cero cuando $n\to\infty$. Pero si se verifica (i) del Corolario 4.8 se tiene

$$|d_n|\le 4(\frac{1}{j_n}\sum_1^{j_n-1} j\phi^{1/2}(j))C_{\delta,f} \to 0$$

si δ es pequeño como para que $C_{\delta,f}<\infty$ (ver la demostración del corolario); si vale (ii), se tendrá

$$|d_n|\le 2(\frac{1}{j_n}\sum_1^{j_n-1} j\psi(j))M^2_{\delta,f}$$

que tiende a cero por razones análogas.□

Bibliografía.

1. de Acosta, A. (1970). Existence and convergence of probability measures in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 152, 273-298.

2. de Acosta, A. (1980). Invariance principles in probability for triangular arrays of B-valued random vectors and some applications. A publicarse en Ann. Probability.

3. de Acosta, A., Araujo, A., Giné, E. (1978). On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. En Kuelbs, J., Ed. Advances in Probability, Vol. IV, 1-68. Dekker, New York.

4. Araujo, A., Giné, E. (1980). The central limit theorem for real and Banach valued random variables. Wiley, New York.

5. Billingsley, P. (1968). Convergence of probability measures. Wiley, New York.

6. Eberlein, E. (1979). An invariance principle for lattices of dependent random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 50, 119-133.

7. Gihman, I. I., Skorohod, A. V. (1974). The theory of stochastic processes I. Springer-Verlag, New York.

8. Hoffmann-Jorgensen, J. (1974). Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Mathematica 52, 159-186.

9. Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V. (1971). Independent and stationary sequences of random variables. Wolters-Noordhoff, Groningen.

10. Iosifescu, M., Theodorescu, R. (1969). Random processes and learning. Springer-Verlag, Berlin.

11. Kuelbs, J. (1973). The invariance principle for Banach space valued random variables. J. of Multivariate Analysis 3, 161-172.

12. Philipp, W. (1969). The central limit problem for mixing sequences of random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 12, 155-171.

13. Philipp, W. (1980). Weak and L^p-invariance principles for sums of B-valued random variables. Ann. Probab. 8, 68-82.

14. Skorohod, A.V. (1956). Limit theorems for stochastic processes. Theor. Prob. Appls. 1, 261-290.

15. Strassen, V. (1965). The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Statist. 36, 423-439.

Curriculum Vitae

Datos personales:

Nombre: Jorge Donato Samur

Lugar y fecha de nacimiento: La Plata, Argentina, 24/8/48

Nacionalidad: Argentina

Estudios realizados:

Secundarios: Colegio Nacional de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina.

Universitarios: Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP, Argentina; Licenciado en Matemáticas.

De postgrado: IVIC; Magister Scientiarum en Matemáticas.

Cargos desempeñados:

- Auxiliar docente; Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP, Argentina.
- Profesor; IVIC.
- Auxiliar de investigación; CONICIT, Venezuela.
- Estudiante Graduado, IVIC.

Campo en que ha trabajado y/o publicado:

- Docencia e investigación en Matemáticas.

Honores y distinciones:

- Becario del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.
- Becario de CORDIPLAN, Venezuela.

Publicaciones:

- (En colaboración con A. de Acosta) Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces. Studia Mathematica 66 (1979), 143-160.