SEMIGRUPOS DE OPERADORES DE CONVOLUCION

EN ESPACIOS DE HILBERT

Por:

Jorge D. Samur

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister Scientiarum en Matemáticas.

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, IVIC.

Centro de Estudios Avanzados

Caracas

Enero 1979

El trabajo de grado de Jorge D. Samur titulado "Semigrupos de Operadores de Convolución en Espacios de Hilbert" ha sido aprobado por el Jurado, quien no se hace responsable de su contenido, pero lo ha encontrado correcto en su calidad y forma de presentación en fe de lo cual firman:

Alejandro de Acosta
Director del Trabajo
IVIC

Mischa Cotlar
UCV

Evarist Giné
IVIC

RESUMEN DEL TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN MATEMATICAS

SEMIGRUPOS DE OPERADORES DE CONVOLUCION EN ESPACIOS DE HILBERT

Por

JORGE D. SAMUR

Centro de Estudios Avanzados

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

(IVIC)

Caracas, Enero 1979

ALEJANDRO DE ACOSTA

Director del Trabajo

Se describe, sobre ciertas clases de funciones, el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores de convolución que actúa en el espacio de las funciones reales uniformemente continuas y acotadas definidas sobre un espacio de Hilbert.

A G R A D E C I M I E N T O

Mi gratitud para Alejandro de Acosta, director de este trabajo, quien me ha guiado generosa y pacientemente.

También agradezco el apoyo recibido de CONICIT y CORDIPLAN durante la preparación de este material.

I N D I C E

INTRODUCCION. Toda probabilidad infinitamente divisible μ sobre un espacio de Banach real separable F tiene asociado un semigrupo de operadores de convolución fuertemente continuo en el espacio de Banach $C_u(F)$ (funciones de F en $\mathbb{R}$ uniformemente continuas y acotadas, con la norma de la convergencia uniforme). Por teoría general, cada uno de ellos posee un generador infinitesimal definido sobre un subespacio (que depende del semigrupo) denso en $C_u(F)$.

Restringiéndonos al caso en que $F=H$ es un espacio de Hilbert (aunque algunos resultados valen en situaciones más generales), nos ocupamos de describir la acción de los generadores de esos semigrupos sobre ciertas clases de funciones diferenciables. En este sentido, se generaliza al caso Hilbert (Teorema 4.1) resultados de Courrege para $\mathbb{R}^n$ [5] mostrando una clase de funciones de $C_u(H)$ sobre la cual se puede caracterizar el generador infinitesimal de todo semigrupo de operadores de convolución; pero esta clase sólo es densa en $C_u(H)$ cuando H es de dimensión finita. El resultado mejora cuando nos limitamos a semigrupos que provienen de probabilidades sin componente gaussiana: existe una clase (fija) densa en $C_u(H)$, adecuada para describir sus generadores infinitesimales (Teorema 4.4).

El método de demostración es directo a partir de las propiedades de la convergencia débil de medidas y de considerar la norma traza sobre los S-operadores: los teoremas 3.4 y 3.5 son básicos. Se usa también la unicidad de la representación de Lévy-Khinchine pero se prueba su existencia. El trabajo comparte ideas y técnicas con [2]. Los resultados de densidad mencionados dependen fuertemente de [11].

A continuación fijaremos algunas notaciones.

E designará un espacio de Banach real separable, $B_r = \{x \in E : ||x|| \leqslant r\}$ para $r > 0$.

Llamamos $B(E)$ al conjunto de las funciones borelianas acotadas de E en $\mathbb{R}$ y $C_u(E)$ al subconjunto de las funciones uniformemente continuas y acotadas. Ambos son espacios de Banach provistos de la norma $||f|| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

H indicará un espacio de Hilbert real separable. Si f es una función continua de H en $\mathbb{R}$ que tiene derivada en el sentido de Fréchet en $x \in H$, $f'(x)$ designará el elemento de H tal que $\langle f'(x), \cdot \rangle$ es la derivada de f en x ($\langle \cdot,\cdot \rangle$ es el producto interno de H). Análogamente $f''(x)$ designará el operador acotado simétrico (en H) tal que $\langle f''(x)(\cdot), \cdot \rangle$ es la segunda derivada (Fréchet) de f en x, si existe. Llamamos $C_u^{(2)}(H)$ al subespacio de $C_u(H)$ formado por las funciones f que son dos veces derivables (Fréchet) y tales que $||f'|| = \sup_{x \in H} ||f'(x)|| < \infty$, $||f''|| = \sup_{x \in H} ||f''(x)|| < \infty$ y f'' es uniformemente continua (usamos $||\cdot||$ para indicar varias normas distintas).

Si M es un espacio métrico, diremos "μ es una medida sobre M" para indicar que μ es una medida positiva definida sobre la σ- álgebra de Borel de M. Si $A \subset M$, I_A denota el indicador del conjunto A y $\mu|A$ es la medida sobre M definida por $(\mu| A)\ (C) = \mu(A \cap C)$ para todo boreliano C de M. Para una medida finita μ sobre M, $||\mu||=\mu(M)$. δ_x designa la probabilidad concentrada en $x \in M$.

Si μ es una medida sobre un Banach F, $\overline{\mu}$ es la medida definida por $\overline{\mu}(C)=\mu(-C)$ para todo boreliano C de F; μ se dice simétrica si $\overline{\mu} = \mu$. Designamos con $\mu * \nu$ el producto de convolución de dos medidas finitas μ, ν sobre F; para una tal medida finita μ se define $\exp(\mu)$ con la serie usual y el producto de convolución. Si μ es una probabilidad sobre F, su funcional característica es $\hat{\mu}(f)= \int e^{if(x)}\ \mu(dx)$ para $f \in F'$ (el dual topológico de F).

Un F-vector aleatorio X es una aplicación medible de un espacio de probabilidad en F (con su σ-álgebra de Borel); $L(X)$ designa la probabilidad que induce sobre F.

N designará el conjunto de los números naturales mayores que cero.

1. Convergencia débil; S-operadores.

Enunciaremos brevemente algunas propiedades de la convergencia débil de medidas (Referencias: [10] Chapter II, § 6 y [4], Exposé N°5).

Sea M un espacio métrico separable completo y llamemos: $C_b(M)$ al conjunto de las funciones de M en $\mathbb{R}$ continuas y acotadas, $\mathcal{M}^+(M)$ al conjunto de las medidas (positivas) finitas sobre M. La topología débil en $\mathcal{M}^+(M)$ es la topología débil que $C_b(M)$ induce sobre $\mathcal{M}^+(M)$. Si $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ es una red en $\mathcal{M}^+(M)$ y $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$, $\{\mu_\alpha\}$ converge a μ en esta topología si y sólo si para cada $f \in C_b(M)$ $\int f d\mu_\alpha \to \int f d\mu$; en este caso, escribiremos $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$. Condiciones equivalentes a $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ son:

(i) $\int f d\mu_\alpha \to \int f d\mu$ para toda $f : M \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada,

(ii) $\|\mu_\alpha\| \to \|\mu\|$ y $\overline{\lim_\alpha}\, \mu_\alpha(F) \leq \mu(F)$ para todo cerrado F de M,

(iii) $\int f d\mu \leq \int \underline{\lim_\alpha}\, f d\mu_\alpha$ para toda $f : M \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente y acotada,

(iv) $\mu_\alpha(A) \to \mu(A)$ para todo boreliano A tal que $\mu(\mathrm{Fr}A) = 0$ (FrA es la frontera de A),

(v) $\int f d\mu_\alpha \to \int f d\mu$ para toda $f : M \to \mathbb{R}$ boreliana, acotada y tal que el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida μ nula.

El siguiente teorema de Prohorov caracteriza los conjuntos débilmente relativamente compactos de $\mathcal{M}^+(M)$: un conjunto $A \subset \mathcal{M}^+(M)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo si

(I) $\sup_{\mu\in A} \|\mu\| < \infty$

(II) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K\subset M$ tal que

$$\sup_{\mu\in A} \mu(K^c) \leq \varepsilon .$$

(K^c es el complemento del conjunto K).

Dado $r > 0$ el conjunto $\mathcal{M}_r^+(M) \doteq \{\mu\in\mathcal{M}^+(M): \|\mu\|\leqslant r\}$ con la topología débil restringida es un espacio metrizable, separable y topológicamente completo. Este resultado y el teorema de Prohorov valen para $\mathcal{P}(M)$, el espacio de las probabilidades sobre M con la topología débil.

Mencionemos una última noción ([10] , Chapter III, § 2). Sea E un espacio de Banach; una familia $\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$ contenida en $\mathcal{P}(E)$ se dice <u>relativamente compacta salvo traslaciones</u> si existe una familia $\{x_\alpha : \alpha\in A\}$ de puntos de E tales que $\{\mu_\alpha * \delta_{x_\alpha} : \alpha\in A\}$ es relativamente compacta. Se tiene el siguiente resultado: si $\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}, \{\nu_\alpha : \alpha\in A\}$ son familias en $\mathcal{P}(E)$ tales que $\{\mu_\alpha * \nu_\alpha : \alpha\in A\}$ es relativamente compacta entonces $\{\mu_\alpha\}$ y $\{\nu_\alpha\}$ son relativamente compactas salvo traslaciones.

Necesitaremos el siguiente resultado, que es una generalización del Theorem 6.8, Chapter III de [10] ; su demostración sigue las ideas allí usadas.

<u>1.1 Proposición</u> Sean M un espacio métrico separable completo y $\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$ una red relativamente compacta en $\mathcal{M}^+(M)$, convergente débilmente a μ. Entonces si F es un conjunto

de funciones borelianas de M en $\mathbb{R}$ que es uniformemente acotado ($\sup\{|f(x)|: f\in F,\ x\in M\} < \infty$) y equicontinuo en todo $x \in D^c$, siendo D un cerrado con $\mu(D)=0$, se tiene

$$\lim_{\alpha} \sup_{f\in F} \left| \int f d\mu_\alpha - \int f d\mu \right| = 0.$$

<u>Demostración</u>. Para $x \in M$, $\delta>0$ llamaremos $B(x;\delta) = \{y\in M: d(x,y)<\delta\}$ (d designa la métrica de M), y para $r > 0$ $D_r=\{x \in M: d(x,M)< r\}$, $D'_r = \{x \in M: d(x,M) \leqslant r\}$. Sean $m= \sup\{|f(x)|: f \in F,\ x \in M\}$, $p= \sup_{\alpha\in A} \|\mu_\alpha\|$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Tomemos un compacto K tal que $\mu(K^c) \leqslant \varepsilon$, $\sup_{\alpha\in A} \mu_\alpha (K^c) \leqslant \varepsilon$ y $r>0$ tal que $\mu(D'_r)\leqslant\varepsilon$ (existe un tal r porque si $r_n \downarrow 0$, $D'_{r_n} \downarrow \bar{D}=D$).

Veamos que existen borelianos $C_1,\dots, C_n$ disjuntos tales que $L_r = K\cap D_r^c= \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, $\sup_{f\in F} |f(y) - f(z)|\leqslant \varepsilon$ si $y,\ z\in C_k$ ($k=1,\dots, n$) y $\mu(F_rC_k)=0$ (F_rC_k es la frontera de C_k). Para ello, observemos que para cada $x\in D^c$ la equicontinuidad de F en x implica que existe $\delta(x)> 0$ tal que $\sup_{f\in F}|f(y)-f(z)| \leqslant \varepsilon$ si $y,\ z \in B(x;\delta(x))$ y $\mu(F_rB(x;\delta(x)))=0$ (si δ no cumple esta última condición, se puede elegir un δ', $0 < \delta'< \delta$ que la cumpla pues $F_rB(x;\delta')\subset S(x,\delta') = \{y\in M: d(x,y) = \delta'\}$ y $\bigcup_{0<\delta'<\delta} S(x;\delta')$ es una unión no numerable disjunta de medida μ finita). Por ser L_r un compacto contenido en D^c, existen $x_1,\dots,x_n\in D^c$ tales que $L_r\subset \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, siendo $B_j = B(x_j;\delta(x_j))$. Por el procedimiento usual se obtienen los conjuntos deseados.

Flijamos ahora $\xi_k\in C_k$ ($k=1,\dots,n$); para una medida finita λ sobre M definimos $\tilde{\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(C_k)\, \delta_{\xi_k}$. Para $f \in F$ se tiene entonces

$$\left| \int_{L_r} f d\lambda - \int_{L_r} f d\tilde{\lambda} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} |f - f(\xi_k)| d\lambda \leq \varepsilon\, \lambda(L_r) \leq \varepsilon\, \|\lambda\| .$$

Si $\alpha \in A, f \in F$:

$$\left| \int f d\mu_\alpha - \int f d\mu \right| \leq \left| \int_{K \cap D_r} f d\mu_\alpha - \int_{K \cap D_r} f d\mu \right| + \left| \int_{L_r} f d\mu_\alpha - \int_{L_r} f d\mu \right| + \left| \int_{K^c} f d\mu_\alpha - \int_{K^c} f d\mu \right|$$

$$\leq m(\mu_\alpha(D_r') + \varepsilon) + \left| \int_{L_r} f d\mu_\alpha - \int_{L_r} f d\mu \right| + 2m\varepsilon,$$

pero $\left| \int_{L_r} f d\mu_\alpha - \int_{L_r} f d\mu \right| \leq \left| \int_{L_r} f d\mu_\alpha - \int_{L_r} f d\tilde{\mu}_\alpha \right| + \left| \int_{L_r} f d\tilde{\mu}_\alpha - \int_{L_r} f d\tilde{\mu} \right| + \left| \int_{L_r} f d\tilde{\mu} - \int_{L_r} f d\mu \right|$

$$\leq 2p\, \varepsilon + m \sum_{k=1}^{n} |\mu_\alpha(C_k) - \mu(C_k)| .$$

Luego para $\alpha \in A$

$$\sup_{f \in F} \left| \int f d\mu_\alpha - \int f d\mu \right| \leq 2(p+m)\varepsilon + m(\mu_\alpha(D_r') + \varepsilon) + m \sum_{k=1}^{n} |\mu_\alpha(C_k) - \mu(C_k)| .$$

Como

$\overline{\lim_\alpha}\, \mu_\alpha(D_r') \leq \mu(D_r')$ y $\mu_\alpha(C_k) \to \mu(C_k)$ $(k=1,..,n)$,

$$\overline{\lim_\alpha} \sup_{f \in F} \left| \int f d\mu_\alpha - \int f d\mu \right| \leq (2p+4m)\varepsilon .$$

La arbitrariedad de ε implica el resultado. ..

Dado un espacio de Hilbert real separable H, como en [10] (Definition 2.3, Chapter VI) llamaremos S-operador a todo operador acotado S en H simétrico, positivo y de traza finita, es decir, $tr(S) = \sum_{j=1}^{\infty} < Se_j, e_j > < \infty$ para alguna (toda) base ortonormal $\{e_j : j \in N\}$ de H. Denotaremos $\mathcal{S}$ el conjunto de los S - operadores en H. Una clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ es compacta ([10] , Def. 2.4, Ch. VI) si:

(1) $\sup\limits_{S \in \mathcal{A}} tr(S) < \infty$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{S \in \mathcal{A}} \sum_{j=n}^{\infty} <Se_j, e_j> = 0$ para alguna

base ortonormal $\{e_j : j \in N\}$ de H.

La siguiente proposición dice cuál es la topología involucrada en esta definición (e implica que en (2) la palabra "alguna" puede reemplazarse por "toda").

1.2 Proposición. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una clase compacta si y sólo si $\mathcal{A}$ es relativamente compacta en $(L_{(1)}(H), ||\cdot||_1)$ (el espacio de los operadores con traza con la norma traza).

Demostración. Suficiencia. Por ser $\mathcal{A}$ relativamente compacto en $L_{(1)}(H)$, es acotado y esto prueba (1) pues $tr(S) = ||S||_1$ cuando S es un operador positivo con traza.

Probaremos ahora que (2) se verifica para cualquier base ortonormal $\{e_j : j \in N\}$. Fijada una tal base definamos para $n \in N$ la función $\varphi_n : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi_n(S) = \sum_{j=n}^{\infty} < Se_j, e_j >$.

De la desigualdad

$$|\varphi_n(S)-\varphi_n(S_\circ)|=|\sum_{j<n}<Se_j,e_j>-\sum_{j<n}<S_\circ e_j,e_j>|\leq|tr(S)-tr(S_\circ)|\leq\|S-S_\circ\|_1,$$

se deduce

$$|\varphi_n(S)-\varphi_n(S_\circ)|\leq|\sum_{j<n}<(S-S_\circ)e_j,e_j>|+\|S-S_\circ\|_1\leq n\|S-S_\circ\|_1.$$

Esto prueba que φ_n es continua sobre $\mathscr{O}$ (con la restricción de la topología de la norma traza). Además $\varphi_n \downarrow 0$ puntualmente sobre $\mathscr{O}$ cuando $n\to\infty$. Por hipótesis, $\bar{\mathscr{A}}$ es un compacto contenido en $\mathscr{O}$; luego el teorema de Dini prueba (2).

<u>Necesidad</u>. Fijemos la base ortonomal $\{e_j : j\in\mathbb{N}\}$ para la cual se cumple (2) de la definición de clase compacta, y tomemos una sucesión $\{S_n\}\subset\mathscr{A}$. Probaremos que contiene una subsucesión convergente en $L_{(1)}(H)$. Designaremos con $\|\cdot\|_2$ la norma de Hilbert-Schmidt.

Puesto que si S es un S-operador $S^{1/2}$ es un operador de Hilbert-Schmidt y $\|S^{1/2}\|_2^2=\|S\|_1=tr(S)$, la hipótesis implica que $\sup_n\|S_n^{1/2}\|<\infty$. Entonces existen una sucesión $\{n_k\}$ y un operador acotado T tales que $\lim_k < S_{n_k}^{1/2}x, y> = < Tx,y>$ para todos $x, y\in H$ (se usa que una bola cerrada de H con la restricción de la topología débil es un espacio métrico compacto y un procedimiento diagonal aplicado a $\{S_n e_j : n,j\in\mathbb{N}\}$). Luego T es simétrico y positivo. Además es un operador de Hilbert-Schmidt, pues (Fatou)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|Te_j\|^2=\sum_{j,i}<Te_j,e_i>^2\leq\underline{\lim}_k\sum_{j,i}<S_{n_k}^{1/2}e_j,e_i>^2$$

$$= \lim_{k} \| S_{n_k}^{1/2} \|_2^2 \leq \sup_{S \in \mathcal{A}} tr\,(S) < \infty.$$

Veamos ahora que $S_{n_k}^{1/2}$ converge fuertemente a T. Dado $x \in H$, para $m \in N$ se tiene

$$\| (S_{n_k}^{1/2} - T)x \|^2 = \sum_{j=1}^{m} < (S_{n_k}^{1/2} - T)x, e_j >^2 + \sum_{j=m+1}^{\infty} (S_{n_k}^{1/2} - T)x, e_j >^2 .$$

Por la convergencia débil de $S_{n_k}^{1/2}x$ a Tx, basta probar que el segundo término converge a cero cuando $m \to \infty$, uniformemente en k; las desigualdades

$$< (S_{n_k}^{1/2} - T)x, e_j >^2 = < x, (S_{n_k}^{1/2} - T)e_j >^2 \leq \|x\|^2 \| (S_{n_k}^{1/2} - T)e_j \|^2$$

$$\leq 2\|x\|^2 (\| S_{n_k}^{1/2} e_j \|^2 + \| Te_j \|^2$$

muestran que ese término está acotado por

$$2\|x\|^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} (< S_{n_k} e_j, e_j > + \|Te_j\|^2) .$$

La hipótesis junto con que T es un Hilbert-Schmidt implican lo afirmado.

Se deduce ahora que $\| S_{n_k}^{1/2} - T \|_2 \to 0 (k \to \infty)$ a partir de la convergencia fuerte, la compacidad de la clase $\mathcal{A}$ y la desigualdad

$$\|S_{n_k}^{1/2} - T\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \| (S_{n_k}^{1/2} - T)e_j \|^2 + 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} (< S_{n_k} e_j, e_j > + \|Te_j\|^2) .$$

Finalmente, $T^2 \in L_{(1)}(H)$ y $\| S_{n_k} - T^2 \|_1 \to 0$ $(k \to \infty)$

pues $\| S_{n_k} - T^2 \|_1 \leq \| S_{n_k}^{1/2} \|_2 \cdot \| S_{n_k}^{1/2} - T \|_2 + \| S_{n_k}^{1/2} - T \|_2 \, \| T \|_2$

y se aplica lo anterior.

Recordemos que una probabilidad γ sobre un Banach E se dice gaussiana si para toda $f \in E'$ $L(f)$ es normal (o δ_x para algún $x \in \mathbb{R}$) en $\mathbb{R}$.

<u>1.3 Corolario.</u> Consideremos $\mathscr{S}$ con la topología inducida por $\| \cdot \|_1$ y el conjunto Γ_0 de las probabilidades gaussianas centradas sobre H con la topología de la convergencia débil de medidas. Entonces la aplicación que a cada $S \in \mathscr{S}$ le asocia la única $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $\hat{\gamma}(y) = \exp\{ -\frac{1}{2} < Sy, y > \}$ es un homeomorfismo.

<u>Demostración.</u> Llamemos ψ a dicha aplicación. Por resultados conocidos, está bien definida y es una biyección (ver [10] pág. 164, Th 4.9 del Ch. VI).

Por la proposición 1.2 y la simetría de las medidas consideradas se deduce del Lemma 5.1, Ch. VI de [10] que si $A \subset \mathscr{S}$, A es relativamente compacto en $\mathscr{S}$ si y sólo si $\psi(A)$ es relativamente compacto en Γ_0. Como ambos son espacios metrizables basta probar que ψ es secuencialmente continua.

Para ello, supongamos que $\| S_n - S \|_1 \to 0$. Luego $\{ S_n \}$

es relativamente compacto en $\mathscr{V}$ y, por la observación anterior, $\{\psi(S_n)\}$ es relativamente compacto en Γ_0. Pero todas las subsucesiones convergentes de $\{\psi(S_n)\}$ tienen el mismo límite (con funcional característica $\psi(S)^\wedge$) ya que $<S_n y, y> \to <Sy, y>$ para cada $y \in H$. Luego $\psi(S_n) \xrightarrow{w} \psi(S)$.

Observación. También puede probarse que si consideramos el espacio producto $H \times \mathscr{V}$ y el espacio Γ de todas las probabilidades gaussianas, la aplicación que a $(x, S) \in H \times \mathscr{V}$ le asocia la única $\gamma \in \Gamma$ tal que $\hat{\gamma}(y) = \exp\{i<x,y> - \frac{1}{2}<Sy,y>\}$ es un homeomorfismo.

2. Semigrupos de probabilidades y de operadores.

Una probabilidad μ sobre un espacio de Banach separable E es infinitamente divisible (i.d.) si para cada $n \in N$ existe una probabilidad $\mu_{1/n}$ sobre E tal que $\mu_{1/n}^n = \mu$ (ν^n es la n-ésima potencia de convolución de la medida positiva finita ν). Se tiene $\hat{\mu}(y) \neq 0$ para cada $y \in E'$ y, por lo tanto (ver (2), section 2), existe una única función $\ell: E' \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{\mu} = \exp \ell$, ℓ es secuencialmente w*-continua y $\ell(0)=0$. En consecuencia, la raíz n-ésima de convolución $\mu_{1/n}$ es única y $\hat{\mu}_{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\ell)$.

Una familia $\{\mu_t : t \geq 0\}$ de probabilidades sobre E es un semigrupo de probabilidades (débilmente continuo) si:

(1) $\mu_0 = \delta_0$

(2) $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ $(s \geq o, t \geq o)$

(3) $\mu_t \xrightarrow{W} \mu_o$ cuando $t \to 0$.

Por (2), cada μ_t es i.d.

<u>2.1 Proposición.</u> Para cada μ i.d. sobre un espacio de Banach separable F existe un único semigrupo de probabilidades $\{\mu_t : t \geq o\}$ tal que $\mu_1 = \mu$.

<u>Demostración.</u> Sea $\ell : F' \to \mathbb{C}$ con las propiedades enunciadas tal que $\hat{\mu} = \exp \ell$.

Para $r = \frac{k}{n}$ racional positivo $(k, n, \in N)$ definimos $\mu_r = \mu^k_{1/n}$, $\mu_o = \delta_o$.
Está bien definida pues $(\mu^k_{1/n})^\wedge = \exp (\frac{k}{n} \ell)$.

Se tiene entonces que $\hat{\mu}_r = \exp (r \ell)$ y $\mu_q * \mu_r = \mu_{q+r}$ para racionales no negativos q,r.

A continuación necesitaremos el siguiente resultado (se prueba como el Theorem 4.5, Chapter 6 de [10]): si $\{\nu_n : n \in N\}$ es una sucesión de probabilidades sobre un espacio de Banach separable F tal que (1) $\{\nu_n : n \in N\}$ es relativamente compacta salvo traslaciones y (2) $\hat{\nu}_n$ converge uniformemente sobre las bolas de F' a cierta función g, entonces existe una probabilidad ν sobre F tal que $\nu_n \xrightarrow{W} \nu$ y $\hat{\nu} = g$.

Dado $t > o$ tomemos una sucesión de racionales positivos $\{r_n\}$ tal que $r_n \to t$. Para algún racional $a > o$ se tiene

$\{r_n\} \subset [0,a]$ y entonces $\{\mu_{r_n}\}$ es relativamente compacta salvo traslaciones pues cada μ_{r_n} es un factor de μ_a (por la propiedad de semigrupo y el Theorem 2.2, Chapter 3 de [10]. Además, como $\hat{\mu}_{r_n} = \exp(r_n \ell)$ y ℓ es acotada sobre lasbolas de E' (es secuencialmente w*- continua), $\hat{\mu}_{r_n}$ converge uniformemente sobre las bolas de E' a $\exp(t\ell)$. Luego, por el resultado mencionado,existe una probabilidad ν sobre E tal que $\mu_{r_n} \xrightarrow{w} \nu$ y $\hat{\nu} = \exp(t\ell)$; es claro que ν no depende de la sucesión $\{r_n\}$. Llamamos μ_t a ν.

Se tiene $\hat{\mu}_t = \exp(t\ell)$ y $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ $(s \geq 0,\ t \geq 0)$.

Si llamamos $\mathcal{P}(E)$ al espacio de probabilidades sobre E con la topología de la convergencia débil de medidas, la aplicación $t \mapsto \mu_t$ de $[0,\infty)$ en $\mathcal{P}(E)$ es continua: ambos espacios son metrizables y dada una sucesión convergente $\{t_n\}$ en $[0,\infty)$ se prueba como antes que μ_{t_n} converge débilmente (debido a la propiedad de semigrupo, $\{\mu_{t_n}\}$ es relativamente compacto salvo traslaciones). En particular, si $0 \leq a < b$ $\{\mu_t : t \in [a,b]\}$ es débilmente compacto.

Tenemos construído así un semigrupo de probabilidades $\{\mu_t : t \geq 0\}$ tal que $\mu_1 = \mu$. Si $\{\tilde{\mu}_t : t \geq 0\}$ es otro semigrupo tal que $\tilde{\mu}_1 = \mu$ tendremos $\tilde{\mu}_{1/n} = \mu_{1/n}$ para cada $n \in N$ ($\tilde{\mu}_1 = \mu$ y las raíces n-ésimas de μ son únicas), luego $\tilde{\mu}_r = \mu_r$ para cada racional $r \geq 0$ (propiedad (2) de semigrupo) y finalmente $\tilde{\mu}_t = \mu_t$ para todo $t \geq 0$ (continuidad).

Dada una probabilidad μ sobre E, consideramos el <u>opera-</u>

dor de convolución (asociado a μ) $P_\mu : B(E) \longrightarrow B(E)$ definido por $P_\mu f(x) = \int_E f(x+y)\ \mu(dy)$ $(f \in B(E))$. Es un operador lineal acotado en $B(E)$ y también en $C_u(E)$; en ambos casos $\|P_\mu\| = 1$ y $P_\mu P_\nu = P_{\mu * \nu} = P_\nu P_\mu$ (ν es una probabilidad sobre E).

Observación. P_μ es invariante bajo traslaciones: si, para $x \in E$, consideramos el operador τ_x en $B(E)$ definido por $(\tau_x f)(y) = f(x+y)$ $(f \in B(E))$ se tiene $\tau_x (P_\mu f) = P_\mu(\tau_x f)$ para cada $f \in B(E)$. Además $f \mapsto P_\mu f(0)$ es una funcional lineal positiva sobre $B(E)$ tal que si $f_n \downarrow 0$ puntualmente sobre E, entonces $P_\mu f_n(0) \downarrow 0$.

Recíprocamente, si $P: B(E) \longrightarrow B(E)$ es un operador lineal tal que (1) $\tau_x(P f) = P(\tau_x f)$ para todos $x \in E$, $f \in B(E)$, (2) $f \mapsto Pf(0)$ es una funcional lineal positiva sobre $B(E)$ tal que vale 1 evaluada en la función constantemente igual a 1 y $Pf_n(o) \downarrow 0$ cuando $f_n \downarrow 0$ puntualmente sobre E, entonces P es un operador de convolución. En efecto: (2) y la Proposición II.7. 1 de [9] implican que existe una probabilidad μ sobre la σ - álgebra de Borel de E tal que $Pf(0) = \int_E f d\mu$, pero $P f(x) = (\tau_x(Pf))(0) = (P(\tau_x f))(0) = \int_E \tau_x f d\mu = P_\mu f(x)$ por (1).

Dado el semigrupo de probabilidades $\{\mu_t : t \geq 0\}$ consideramos el semigrupo de operadores de convolución $\{P_t : t \geq 0\}$, siendo $P_t = P_{\mu_t}$.

Como operadores en $B(F)$, satisfacen:

(1) $P_0 = I$ (operador identidad)

(2) $P_s P_t = P_{s+t}$ $(s \geq 0, t \geq 0)$;

considerados como operadores en $C_u(F)$, cumplen además:

(3) $\lim_{t \to 0} \|P_t f - f\| = 0$ para toda $f \in C_u(F)$.

(Observar que para cada $f \in C_u(F)$ y cada $\delta > 0$

$$\| P_t f - f \| \leq \sup_{x \in E} \int_{B_\delta} |f(x+y) - f(x)| \mu_t(dy) + 2 \| f \| \mu_t(B_\delta^c);$$

luego se obtiene (3) usando la continuidad uniforme de f y que $\mu_t \xrightarrow{w} \delta_0$ cuando $t \to 0$).

Una familia $\{P_t : t \geq 0\}$ de operadores en un espacio de Banach X que cumple (1) y (2) es un <u>semigrupo de operadores</u> (en X); si además satisface (3) es un semigrupo de operadores <u>fuertemente continuo</u> (en X).

Por lo anterior, tenemos asociado a cada semigrupo de probabilidades un semigrupo de operadores de convolución fuertemente continuo en $C_u(F)$. Recíprocamente, si $\{P_t : t \geq 0\}$ es un tal semigrupo de operadores y μ_t es la probabilidad que define a P_t, obtenemos que $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ (usando (2) y que la igualdad $P_\mu = P_\nu$ implica $\mu = \nu$) y $\mu_t \xrightarrow{w} \delta_0$ cuando $t \to 0$ (ya que (3) implica que para cada $f \in C_u(F)$

$$\int f d\mu_t = (P_t f)(0) \to f(0)).$$

Dado un semigrupo $\{P_t : t \geq o\}$ de operadores en un espacio de Banach X, llamemos $A_t = \frac{1}{t}(P_t - I)$. Se define el operador A mediante $Af = \lim_{t\to 0} A_t f$ sobre el subespacio lineal D de los f para los cuales dicho límite existe en X. A es el <u>generador infinitesimal</u> de $\{P_t : t \geq o\}$. Se sabe que si el semigrupo de operadores es fuertemente continuo en X entonces el dominio de su generador infinitesimal(que depende del semigrupo) es denso en X.

<u>3. Probabilidades i.d. en Hilbert.</u> Comenzamos con un resultado válido en el caso Banach.

<u>3.1 Teorema.</u> Sea $\{\mu_t : t \geq o\}$ un semigrupo de probabilidades sobre F. Entonces para cada $r > o$ existe un compacto convexo simétrico $K_r \subset B_r$ tal que $\{ \frac{1}{t} \mu_t | K_r^c : t > 0 \}$ es relativamente compacto.

<u>Demostración.</u> Veamos primero que si $r > 0$ y $0 < a < 1$ existen $t_o > o$ y un compacto convexo simétrico $C_r \subset B_r$ tales que $\mu_t(C_r) \geq a$ para todo $t \leq t_o$.

Para probarlo, fijemos r' ,$0 < r' < r$; como $\overline{\lim_{t\to 0}} \mu_t(\overline{B_{r'}^c}) \leq \delta_o(\overline{B_{r'}^c}) = o$ (pues $\mu_t \xrightarrow{w} \delta_o$ cuando $t \to o$) existe $t_o > 0$ tal que $\mu_t(B_r^c) \leq \frac{1-a}{2}$ para $t \leq t_o$. Además existe un compacto convexo simétrico L tal que $\mu_t(L^c) \leq \frac{1-a}{2}$ para $t \leq t_o$ (porque $\{\mu_t : t \in [o, t_o]\}$ es compacto). Basta tomar entonces $C_r = L \cap B_r$.

Llamemos $\nu_t = \mu_t * \overline{\mu}_t$; como $\nu_t \xrightarrow{w} \delta_o (t \to o)$ el anterior resultado vale también para ν_t.

Probemos ahora que para cualquier $r>o$ existe un compacto convexo simétrico $K_r \subset B_r$ tal que

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \mu_t(K_r^c) < \infty$$

Fijado $r>0$ sean $t_o>0$ y dos compactos convexos simétrico C_r, D_r contenidos en $B_{r/2}$ tales que $\mu_t\ (C_r) \geq 1/2$ y $\nu_t(D_r^c) \leq \frac{1}{4}$ para todo $t \leq 2t_o$. Sea $K_r = C_r + D_r$.

Consideremos un $t \leq t_o$ y sea $m = [t_o/t]+1$ ($[\cdot]$ es la parte entera de un número real). Sean $X_1,\ldots,X_m,X_1',\ldots,X_m'$ E-vectores aleatorios independientes con $L(X_j) = L(X_j') = \mu_t$, $S_m = \sum_{j=1}^{m} X_j$, $S_m' = \sum_{j=1}^{m} X'_j$. Se tiene $L(X_j - X_j') = \nu_t$, $L(S_m) = L(S_m') = \mu_{mt}$ y $L(S_m - S_m') = \nu_{mt}$.

Por la independencia de X_j y X_j' se tiene

$$P\{X_j \notin K_r\} \leq 2P\{X_j \notin K_r\}\ P\{X_j' \in C_r\} = 2P\{X_j \notin K_r, X_j' \in C_r\} \leq 2P\{X_j - X_j' \notin D_r\}.$$

Si q es la funcional de Minkowski de D_r, aplicando el Lemma 2.3 de [2]

$$(1/t)\mu_t(K_r^c) \leq (1/t_o) m \mu_t(K_r^c) = (1/t_o)\sum_{j=1}^{m} P\{X_j \notin K_r\}$$

$$\leq (2/t_o)\sum_{j=1}^{m} P\{X_j - X_j' \notin D_r\} = (2/t_o)\sum_{j=1}^{m} P\{q(X_j - X_j') > 1\}$$

$$\leq -(2/t_o)\log(1-2\ P\{q(S_m - S_m') > 1\})$$

$$= -(2/t_o)\log(1-2\nu_{mt}(D_r^c)) \leq (2/t_o)\log 2$$

porque $\nu_{mt}(D_r^c) \leq \frac{1}{4}$ ya que $mt \leq 2t_0$.

Luego $\sup\limits_{t>0} (1/t)\mu_t(K_r^c) \leq$ máx $\{1/t_0, \frac{2 \log 2}{t_0}\}$.

Para probar la segunda condición del teorema de Prohorov, dado $\varepsilon > 0$ sean Q, C compactos tales que $\nu_t(Q^c) \leq \frac{1}{2}(1-e^{-\varepsilon/2})$ y $\mu_t(C) \geq \frac{1}{2}$ para todo $t \leq 1+\frac{1}{\varepsilon}$. Si $t \leq \frac{1}{\varepsilon}$ y $n = \left[\frac{1}{t}\right]+1$ procediendo como antes se obtiene

$$(1/t)\mu_t(K_r^c \cap (Q+C)^c) \leq n\mu_t((Q+C)^c) \leq -2 \log(1-2\nu_{nt}(Q^c)) \leq \varepsilon$$

puesto que $nt \leq 1+\frac{1}{\varepsilon}$. Luego

$$\sup_{t>0} (1/t)\mu_t(K_r^c \cap (Q+C)^c) \leq \varepsilon.$$

<u>Observaciones.</u> (1) Para nuestros propósitos, bastaría tener la conclusión de este teorema para algún $r > 0$.

(2) Este enunciado refina el Theorem 2.3 de [2]; ambas pruebas usan las mismas ideas. Puede deducirse también de un teorema de Le Cam [8]; una demostración de este último que usa técnicas de [2], se halla en [1] (Th.2.1 y Th.2.2). Un tercer método de demostración es probar que $\{\exp(\frac{1}{t}(\mu_t-\delta_0)) : t>0\}$ es relativamente compacto (análogamente a como se hace en [2], Th.2.1) y usar luego una extensión a espacios de Banach del Th.4.3, Ch. VI de [10].

La siguiente desigualdad es consecuencia de la desigualdad recíproca de Kolmogorov en espacios de Banach (Corollary 3.1 de [2]).

3.2 Proposición. Sean q una seminorma continua sobre F y $\{X_j : j=1,\dots,n\}$ F-vectores aleatorios independientes simétricos, tales que para algún $c\in[0,\infty)$ $q(X_j) \le c$ a.s. $(j=1,\dots,n)$. Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Entonces para cada $u>o$

$$P\{q(S_n)>u\} \ge (1/4)\left[1-\frac{(u+c)^2+(u^2/2)}{Eq^2(S_n)}\right]$$

Observación. Una desigualdad similar para el caso Hilbert y $q(x)=\|x\|$ se debe a Varadhan ([10] ,Th.3.3,Ch VI), la cual puede usarse también para obtener los resultados que siguen.

De aquí en adelante nos restringiremos a un semigrupo de probabilidades sobre un Hilbert H.

3.3 Lema. Sean F un subespacio cerrado de H y $q(x)=d(x,F)$.

Si $t>0$ y $\sigma_t = (1/2)(\mu_t+\bar{\mu}_t)$ entonces

$$\int_{\{q\le r\}} q^2(1/t)\, d\mu_t \le (9/2)\, r^2 (1-12\ \sigma_t^{[1/t]+1}(\{q>r\}))^{-1}$$

para cada $r>o$ tal que $\sigma_t^{[1/t]+1}(\{q>r\})<1/12$.

($[\cdot]$ designa la parte entera de un número real).

Demostración. Fijemos $t>o$ y $r>o$ en las condiciones del enunciado; sea $n = \left[1/t\right] + 1$.

Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ H-vectores aleatorios indenendientes con $L(Y_j) = \sigma_t$ $(j=1,\ldots,n)$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Se tiene $L(T_n) = \sigma_t^n$.

Definimos $X_j^{(r)} = Y_j I_{\{q \le r\}}(Y_j)$ $(j=1,\ldots,n)$, $S_n^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} X_j^{(r)}$.

Si P es el proyector ortogonal sobre F y $Q=I-P$ entonces $q(x) = ||Qx||$. Luego los $X_j^{(r)}$ son indenendientes, simétricos (lo son los Y_j y $\{x : q(x) \le r\}$ es simétrico) y $q(X_j^{(r)}) \le r$ a.s. Anlicando la Pronosición 3.2 con $u=c=r$ obtenemos

$$\int_{\{q\le r\}} q^2(1/t)\, d\mu_t \le n \int_{\{q \le r\}} q^2 d\sigma_t = n\, E\left[q^2(X_1^{(r)})\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\left[q^2(X_j^{(r)})\right] = \sum_{j=1}^{n} E||QX_j^{(r)}||^2 =$$

$$= E|| \sum_{j=1}^{n} QX_j^{(r)}||^2 = E(q^2(S_n^{(r)}))$$

$$< (9/2)\, r^2 (1 - 4P\{q(S_n^{(r)}) > r\})^{-1}$$

(válido si verificamos que $P\{q(S_n^{(r)}) > r\} < 1/4$); para obtener la cuarta igualdad se usa que H es un Hilbert y que los; $QX_j^{(r)}$ son independientes, están en $L^2(H)$ y $EQX_j^{(r)} = 0$.

Pero $P\{q(S_n^{(r)})>r\}\leq P\{q(S_n^{(r)})>r, q(Y_j)\leq r(j=1,\ldots,n)\}+$

$$+ P\{\sup_{1\leq j\leq n} q(Y_j)>r\}$$

$$\leq 3P\{q(T_n)>r\}= 3\sigma_t{}^n(\{q>r\}).$$

(Se usó la desigualdad $P\{\sup_{1\leq j\leq n} q(Y_j)> r\} \leq 2P\{q(\sum_1^n Y_j)>r\}$, que vale para $Y_1,\ldots,Y_n$ independientes simétricos a valores en un Banach. Una demostración se hace en la prueba del Lemma 2.3 de [2]).

Esto implica el enunciado.

<u>Observación</u>. Un espacio de Banach separable F se dice de cotipo 2 si existe una constante $M>0$ tal que para $\{X_1,\ldots,X_n\}$ E-vectores aleatorios independientes, $X_j \in L^2(E)$, $E(X_j)=0$ (Bochner) $(j=1,..,n)$ se verifica

$$\sum_{j=1}^n E||X_j||^2\leq M\ E||\sum_{j=1}^n X_j||^2 \quad .$$

(Ejemplos: L^p con $1\leq p\leq 2$). El Lema 3.3 vale, introduciendo la constante M en la desigualdad, en espacios de cotipo 2 para seminormas de la forma $q(x)=||Ax||$ (A operador acotado).

Dado un semigrupo de probabilidades $\{\mu_t:t\geq 0\}$ sobre H definimos para cada $t>0$: $x_t \in H$, el S-operador T_t y la medida positiva finita ν_t sobre H tales que

$$x_t = \int \frac{x}{1+||x||^2}(1/t)\mu_t(dx)$$

$$\langle T_t y, y'\rangle = \int \frac{\langle x,y\rangle\langle x,y'\rangle}{(1+||x||^2)^2}(1/t)\mu_t(dx) \qquad (y,y',\in H)$$

$$\nu_t(dx) = \frac{||x||^2}{1+||x||^2}(1/t)\mu_t(dx) \quad .$$

<u>3.4 Teorema.</u> $\{\nu_t : t>0\}$ es relativamente compacto.

<u>Demostración.</u> Basta probar

(I) $\sup_{t>0} ||\nu_t|| < \infty$

(II) $\forall \varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset H$ tal que $\sup_{t>0} \nu_t(K^c) \leq \varepsilon$.

Para demostrar (I) probemos primero que para todo $r>0$

$$\sup_{t>0} \int_{B_r} ||x||^2 (1/t)\mu_t(dx) < \infty. \tag{1}$$

Consideramos para cada $t>0$ la medida $\sigma_t = \frac{1}{2}(\mu_t + \bar{\mu}_t)$.

El conjunto $\{\mu_t^k : 0<t\leq 1, k\in N, k\leq [1/t]+1\}$ es relativamente compacto pues está contenido en $\{\mu_t : 0<t\leq 2\}$

que lo es (Proposición 2.1); por lo tanto, también es relativamente compacto $\{\bar\mu_t^k : 0<t\leq 1, k\in N, k\leq [1/t]+1\}$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea K compacto tal que $\mu_t^h * \bar\mu_t^k(K^c) \leq \varepsilon$ para $0 < t \leq 1$, $h, k \in N$, $h\leq [1/t]+1, k\leq [1/t]+1$. Entonces

$$\sigma_t^{[1/t]+1}(K^c) = \frac{1}{2^{[1/t]+1}} \sum_{h=0}^{[1/t]+1} \binom{[1/t]+1}{h} \mu_t^h * \bar\mu_t^{[1/t]+1-h}(K^c) \leq \varepsilon .$$

Luego $\{\sigma_t^{[1/t]+1} : 0<t\leq 1\}$ es relativamente compacto.

Podemos entonces tomar $r_o > 0$ tal que $\sup_{0<t\leq 1} \sigma_t^{[1/t]+1}(B_{r_o}^c) \leq \frac{1}{24}$ y aplicar el Lema 3.3 a $q(x) = ||x||$. Se tiene entonces para $r \geq r_o$

$$\sup_{0<t\leq 1} \int_{B_r} ||x||^2 (1/t)\mu_t(dx) \leq 9r^2 .$$

Esto prueba (1) para $r \geq r_o$ (si $t > 1$ la integral correspondiente está acotada por r^2) e implica el resultado para cada $r > 0$.

Luego aplicando el Teorema 3.1 se obtiene (I):

$$\sup_{t>0} ||\nu_t|| \leq \sup_{t>0} \int_{B_1} ||x||^2 (1/t)\mu_t(dx) + \sup_{t>0} (1/t)\mu_t(B_1^c) < \infty .$$

Nuevamente por el Teorema 3.1 dado $\varepsilon > 0$ existen compactos $K_1 \subset B_1$ y L tales que

$$\sup_{t>0} \nu_t((K_1 \cup L)^c) \leq \sup_{t>0} (1/t)\mu_t(K_1^c \cap L^c) \leq \varepsilon.$$

Esto prueba (II).

<u>Observación</u>. Teniendo en cuenta la observación anterior se ve que este teorema vale en espacios de Banach de cotipo 2; es el Th. 4.1 de [2] extendido aquí a todo el semigrupo.

<u>3.5 Teorema</u>. $\{T_t : t>0\}$ es una clase compacta de S- operadores.

<u>Demostración</u>. Sea $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de H. Hay que probar:

(I) $\sup_{t>0} tr(T_t) < \infty$

(II) $\lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle T_t e_j, e_j\rangle = 0.$

La afirmación (I) se obtiene a partir del Teorema 3.4 ya que

$$tr(T_t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_t e_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \int \frac{\langle x, e_j\rangle^2}{(1+\|x\|^2)^2} \frac{1}{t}\mu_t(dx) = \int \frac{1}{1+\|x\|^2} \nu_t(dx) \leq \|\nu_t\| .$$

Para demostrar (II) llamemos F_n al subespacio generado por $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $q_n(x) = d(x,Fn)$. Veamos que para cada $r>0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t>0} \int_{\{q_n \leq r\}} q_n^2 (1/t) d\mu_t \leq 9r^2 \qquad \text{si } n \geq n_0 \tag{1}$$

Para ello, probemos primero que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in(0,1]} \sigma_t^{[1/t]+1} (\{q_n>r\}) = 0 \tag{2}$$

(σ_t como en el Lema 3.3). Pongamos $\lambda_t=\sigma_t^{[1/t]+1}$.
El conjunto $\{\lambda_t : t\in(0,1]\}$ es relativamente compacto (demostración del Teorema 3.4) y dados $r>0$, K compacto se tiene

$$\sup_{t\in(0,1]} \lambda_t(\{q_n>r\}) \leq \sup_{t\in(0,1]} \lambda_t(\{q_n\geq r\}\cap K) + \sup_{t\in(0,1]} \lambda_t(K^c).$$

Luego existe $n_0\in N$ tal que $\{q_n\geq r\}\cap K=\emptyset$ para $n\geq n_0$ (por el Teorema de Dini, pues $q_n{}^2\downarrow 0$ puntualmente). De aquí se deduce (2).

Para obtener (1) basta tomar, fijado $r>0$, un $n_0\in N$ tal que $\sup_{t\in(0,1]}\sigma_t^{[1/t]+1}(\{q_n>r\})\leq(1/24)$ para $n\geq n_0$ y aplicar el Lema 3.3 (para $t>1$ la integral de (1) es $\leq r^2$).

Finalmente, para $n\in N, t>0, r>0$, K compacto se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle T_t e_j, e_j\rangle = \int \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle^2\Big) \frac{1}{(1+\|x\|^2)^2}\, \frac{1}{t}\mu_t(dx) = \int \frac{q_n^2(x)}{(1+\|x\|^2)^2}\, \frac{1}{t}\mu_t(dx) \leq$$

$$\leq \int_{\{q_n\leq r\}} q_n^2 \frac{1}{t} d\mu_t + \int_{\{q_n\geq r\}\cap K} q_n^2\frac{1}{t} d\mu_t + \nu_t(K^c) . \tag{3}$$

Dado $\varepsilon>0$ tomemos $r>0$ tal que $9r^2\leq \varepsilon/2$ y K compacto tal que $\sup_{t>0} \nu_t(K^c) \leq \varepsilon/2$. Se puede elegir entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ el primer término de (3) es $\leq \varepsilon/2$ (por (1)) y el segundo es cero (Teorema de Dini).

A continuación, definimos algunas funciones auxiliares que necesitaremos luego.

<u>3.6 Lema.</u> (a) Dada $f \in C_u^{(2)}(H)$, definimos para cada $x \in H$

$$B_f(x,y) = \begin{cases} \left[f(x+y) - f(x) - \dfrac{\langle f'(x), y\rangle}{1+\|y\|^2} - \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\langle f''(x)y, y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2} \right] \dfrac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Entonces $\{B_f(x,\cdot) : x \in H\}$ es uniformemente acotado y equicontinuo en todo $y \in H$.

(b) Para $y \in H$ sea

$$M(y,x) = \begin{cases} \left[e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \dfrac{i\langle x,y\rangle}{1+\|x\|^2} + \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\langle x,y\rangle^2}{(1+\|x\|^2)^2} \right] \dfrac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entonces para cada $r > 0$ $\{M(y,\cdot) : \|y\| \leq r\}$ es uniformemente acotado y equicontinuo en todo $x \in H$.

(c) Para $y \in H$ sea

$$K(y,x) = \begin{cases} \left[e^{i\langle x,y\rangle} - 1 - \dfrac{i\langle x,y\rangle}{1+\|x\|^2} \right] \dfrac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Para cada $y \in H$, $K(y,\cdot)$ es acotada y continua en $H - \{0\}$.

Demostración. (a) Pongamos $u(y)=\frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}$ para $y \neq 0, V(y)=\frac{y}{1+\|y\|^2}$.

Por la fórmula de Taylor, se tiene para todo $y \in H$

$$f(x+y)=f(x)+<f'(x),y>+\frac{1}{2}<f''(x)y,y>+\int_0^1 (1-s)<(f''(x+sy)-f''(x))y,y>ds.$$

De aquí se deduce que para $y \neq 0$ (observar que $u(y)(y-V(y))=y$)

$$B_f(x,y)=<f'(x),y>+\frac{1}{2}<f''(x)y,y+V(y)>+u(y)\int_0^1 (1-s)<(f''(x+sy)-f''(x))y,y>.$$

Luego si $\|y\| \leq 1$

$$|B_f(x,y)| \leq (\|f'\|+\|f''\|)\|y\|+\sup_{s\in[0,1]} \|f''(x+sy)-f''(x)\|. \qquad (1)$$

Si $\|y\|>1$ es $u(y)<2$; entonces

$$\sup_{x\in H} \|B_f(x,\cdot)\| \leq 5(\|f\|+\|f'\|+\|f''\|). \qquad (2)$$

Para probar la equicontinuidad en 0, basta aplicar (1). Sea ahora $y_0 \neq 0$ y tomemos un entorno W de y_0 tal que $\|y\| \geq \beta$ si $y \in W$, para cierto $\beta>0$. Si $x \in H$, $y\in W$ se tiene

$$|B_f(x,y)-B_f(x,y_0)| \leq |u(y)f(x+y)-u(y_0)f(x+y_0)|+|f(x)||u(y_0)-u(y)| \qquad (3)$$

$$+|u(y_0)<f'(x), V(y_0)>-u(y)<f'(x),V(y)>|$$

$$+\frac{1}{2}|u(y_0)<f''(x)V(y_0),V(y_0)>-u(y)<f''(x)V(y),V(y)>|.$$

Llamando A,B,C y D a los términos del miembro derecho:

$$A \leq \frac{1+\beta^2}{\beta^2} |f(x+y)-f(x+y_o)| + \|f\| \cdot |u(y)-u(y_o)|$$

$$B \leq \|f\| \cdot |u(y_o)-u(y)|$$

$$C \leq u(y_o) \|f'\| \cdot \|V(y_o)-V(y)\| + \|f'\| \cdot |u(y_o)-u(y)|$$

$$D \leq u(y_o) \|f''\| \cdot \|V(y_o)-V(y)\| + (1/2) \|f''\| \cdot |u(y_o)-u(y)| .$$

Usando ahora la continuidad uniforme de f y la continuidad de u y V, se prueba la equicontinuidad en y_o.

(b) Llamemos $R_y(x)=\cos\langle x,y\rangle$, $I_y(x)=\mathrm{sen}\langle x,y\rangle$. Entonces:

$$R_y'(x)=-(\mathrm{sen}\langle x,y\rangle)y, \quad R_y''(x)(\cdot)=-(\cos\langle x,y\rangle)\langle\cdot,y\rangle y$$

$$I_y'(x)=(\cos\langle x,y\rangle)y, \quad I_y''(x)(\cdot)=-(\mathrm{sen}\langle x,y\rangle)\langle\cdot,y\rangle y$$

$$\| R_y'(x_1)-R_y'(x_2) \| = |\mathrm{sen}\langle x_1,y\rangle-\mathrm{sen}\langle x_2,y\rangle| \; \|y\|$$

$$\|R_y''(x_1)-R_y''(x_2)\| \leq |\cos\langle x_1,y\rangle-\cos\langle x_2,y\rangle| \; \|y\|^2$$

$$\| I_y'(x_1)-I_y'(x_2)\| = |\cos\langle x_1,y\rangle-\cos\langle x_2,y\rangle| \; \|y\|^2$$

$$\| I_y''(x_1)-I_y''(x_2) \| \leq |\mathrm{sen}\langle x_1,y\rangle-\mathrm{sen}\langle x_2,y\rangle| \; \|y\|^2$$

$$\|R_y\| = \|I_y\| = 1, \quad \|R_y'\| = \|I_y'\| = \|y\|, \quad \|R_y''\| = \|I_y''\| = \|y\|^2 .$$

Luego R_y, I_y pertenecen a $C_u^{(2)}(H)$ y $M(y,x)=B_{R_y}(0,x)+iB_{I_y}(0,x)$. Aplicando (2) de la demostración de (a) se obtiene

$$\sup_{\|y\|\le r} \|M(y,\cdot)\| \le 10(1+r+r^2)$$

para cada $r>0$. Para probar la equicontinuidad en todo $x\in H$ de $\{M(y,\cdot):\|y\|\le r\}$ para un $r>0$ fijo, se aplica (1) a R_y, I_y en el caso $x=0$; para $x\neq 0$ se acota como en (3) y se usa la equicontinuidad en todo x de $\{R_y:\|y\|\le r\}$ y $\{I_y:\|y\|\le r\}$.

(c) Se aplica (b) y que si $y\in H$, $x\neq 0$: $K(y,x)=M(y,x)-\frac{1}{2}\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)}$.

La demostración del próximo teorema requiere el siguiente lema de unicidad ([10] , Th 8.1, Ch. IV).

<u>3.7 Lema</u>. Si $x_0, x_0' \in H$, $S,S'\in\mathscr{O}$, ν,ν' son medidas finitas sobre H tales que $\nu(\{0\})=0=\nu'(\{0\})$ y se cumple

$$\exp\left[i\langle x_0,y\rangle-\frac{1}{2}\langle Sy,y\rangle+\int K(y,\cdot)d\nu\right]$$
$$=\exp\left[i\langle x_0',y\rangle-\frac{1}{2}\langle S'y,y\rangle+\int K(y,\cdot)d\nu'\right],$$

entonces $x_0=x_0'$, $S=S'$, $\nu=\nu'$.

<u>3.8 Teorema</u>. Existen $x_0\in H$, un S-operador T_0 y una medida finita ν_0 sobre H tales que

$$x_t\longrightarrow x_0, \quad T_t \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T_0, \quad \nu_t \xrightarrow{w} \nu_0$$

cuando $t \to 0$.

Demostración. Dados $t>0$, $y \in H$, si $M(y,\cdot)$ es la función definida en la parte (b) del Lema 3.6 se tiene

$$(1/t)(\hat{\mu}_t(y)-1)=i<x_t,y>-(1/2)<T_t y,y>+\int M(y,\cdot)d\nu_t. \qquad (1)$$

Tomemos una sucesión $\{t_n\}\subset(0,\infty)$ tal que $t_n \to 0$. Los Teoremas 3.4 y 3.5 y la Proposición 1.2 implican que existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ de $\{t_n\}$, un S-operador T_o y una medida finita ν_o sobre H tales que

$$T_{t_{n_k}} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T_o, \quad \nu_{t_{n_k}} \xrightarrow{w} \nu_o \qquad (k\to\infty).$$

Por otra parte, si $\ell: H \to \mathbb{C}$ es la función secuencialmente W^*- continua tal que $\hat{\mu}_1 = \exp\ell$ (Sección 2) se tiene para $t\in(0,1]$

$$\left|\frac{1}{t}(\hat{\mu}_t(y)-1)-\ell(y)\right|\le t\exp|\ell(y)|,$$

lo cual muestra que el miembro izquierdo de (1) converge a ℓ uniformemente sobre las bolas de H. Además $\{\int M(y,\cdot)d\nu_{t_{n_k}}\}$ converge de la misma manera a $\int M(y,\cdot)d\nu_o$, , pues para cada $r>0$ $\{M(y,\cdot):\|y\|\le r\}$ es una familia uniformemente acotada y equicontinua en cada $x\in H$. Sucede lo mismo con la convergencia de $\{<T_{t_{n_k}}y,y>\}$ a $<T_o y,y>$; se deduce entonces de (1) que $\{<x_{t_{n_k}},\cdot>\}$ converge uniformemente sobre las bolas de H. Esto muestra que existe $x_o \in H$ tal que $x_{t_{n_k}} \longrightarrow x_o$ en H.

Hemos probado que dada una sucesión $\{t_n\} \subset (0,\infty)$, $t_n \to 0$, existen una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ de $\{t_n\}$, $x_o \in H$, un S-operador T_0 y una medida finita ν_0 sobre H tales que

$$x_{t_{n_k}} \longrightarrow x_o, \quad T_{t_{n_k}} \xrightarrow{\|\cdot\|} T_o, \quad \nu_{t_{n_k}} \xrightarrow{w} \nu_o \qquad (k\to\infty) \tag{2}$$

y además

$$\hat{\mu}_1(y)=\exp\left[i<x_o,y>-\tfrac{1}{2}<Sy,y>+\int K(y,\cdot)d(\nu_o-\nu_o(\{0\})\ \delta_o)\right] \tag{3}$$

($K(y,\cdot)$ como en el Lema 3.6, (c)) siendo $S=T_0-U$ con U definido por

$$<Uy,y> = \int_{\{0\}^c} \frac{<x,y>^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)}\ \nu_o(dx). \tag{4}$$

Veamos que un tal S es un S-operador. Como U es positivo (además es un S-operador: $tr(U)=\int_{\{0\}^c} \frac{1}{1+\|x\|^2}\nu_o(dx)<\infty$) se tiene que $S \le T_0$ y basta probar entonces que S es positivo, es decir, $U\le T_o$. Para ello, fijemos $y \in H$ y definamos la función $u:H \to \mathbb{R}$ mediante

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{<x,y>^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

Como u es semicontinua inferiormente, acotada y

$$<Uy,y> = \int u\,d\nu_o,$$

$$<T_t y,y> = \int u\,d\nu_t,$$

obtenemos

$$<Uy,y> = \int u\,d\nu_o \leq \lim_{k\to\infty} \int u\,d\nu_{t_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} < T_{t_{n_k}} y,y> = < T_o y,y>.$$

en virtud de que $\nu_{t_{n_k}} \xrightarrow{w} \nu_o$.

Si $\{s_n\} \subset (0,\infty)$ es otra sucesión tal que $s_n \to 0$ existirán x_o', t_o', ν_o' que verifican (2) para una subsucesión de $\{s_n\}$ y (3) con el S-operador $S' = T_o' - U'$, estando definido U' mediante ν_o' como en (4). Probaremos que $x_o = x_o'$, $T_o = T_o'$, $\nu_o = \nu_o'$.

Por el Lema 3.7 se tendrá

$$x_o = x_o', \quad S = S', \quad \nu_o - \nu_o(\{0\})\delta_o = \nu_o' - \nu_o'(\{0\})\delta_o \; .$$

Luego $U = U'$ pues sobre $\{0\}^c$ ν_o coincide con $\nu_o - \nu_o(\{0\})\delta_o$ y, por lo tanto, con ν_o' ; esto implica que $T_o = T_o'$. Para probar que $\nu_o = \nu_o'$, basta ver que $\nu_o(\{0\}) = \nu_o'(\{0\})$; en realidad, ambos son iguales a $tr(S)$:

$$\nu_o(\{0\}) = \int \frac{1}{1+\|x\|^2}\,\nu_o(dx) - \int_{\{0\}^c} \frac{1}{1+\|x\|^2}\,\nu_o(dx) =$$

$$= \lim_k \int \frac{1}{1+\|x\|^2}\,\nu_{t_{n_k}}(dx) - tr(U) =$$

$$= \lim_k tr(T_{t_{n_k}}) - tr(U) = tr(T_o) - tr(U) = tr(S)$$

ya que $T_{t_{n_k}} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T_0$; idéntico argumento lo prueba para ν_o'.

En suma, lo dicho asegura la existencia de x_o, T_o y ν_o y que se verifican las convergencias deseadas (es decir, para $t \to 0, t>0$) por ser todas ellas en espacios métricos.

3.9 Colorario. (a) (Representación de Lévy-Khinchine)

Sea μ una probabilidad sobre H. Entonces μ es i.d. si y sólo si existen $x_o \in H$, un S-operador S y una medida positiva finita ν sobre H tal que $\nu(\{0\})=0$ que cumplen

$$\hat{\mu}(y)=\exp\left[i<x_o,y>-\ (1/2)<Sy,y>+\int K(y,\cdot)d\nu\right] \qquad (y\in H).$$

En estas condiciones, x_o, S y ν están determinados por μ. (Diremos que $[x_o,S,\nu]$ es la representación de Lévy-Khinchine de μ).

(b) Si $\{\mu_t : t\geq 0\}$ es un semigrupo de probabilidades sobre H y $[x_o,S,\nu]$ es la representación de Lévy-Khinchine de μ_1 entonces, cuando $t \to 0$:

(i) $x_t \longrightarrow x_o$

(ii) $T_t \xrightarrow{\|\cdot\|_1} S+U$, siendo $<Uy,y>= \displaystyle\int \frac{<x,y>^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)}\,\nu(dx)$

(ii)' Si para $t>0$, $\delta>0$ definimos el S-operador $V_{t,\delta}$

mediante

$$\langle V_{t,\delta}y,y\rangle = \int_{B_\delta} \langle x,y\rangle^2 \frac{1}{t}\,\mu_t(dx),$$

entonces

$$\lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{t\to 0}}\ \|V_{t,\delta} - S\|_1 = 0 \quad .$$

(iii) $\nu_t \xrightarrow{w} \nu + tr(S)\delta_o$.

Demostración. (a) La existencia de representación la da el Teorema 3.8 y la unicidad el Lema 3.7 Por otra parte, dados x_o, S, ν, se puede probar (ver [10], pág. 164 y Th4.8, Chapter VI) que para cada $n \in N$

$$\exp\left[i\langle \frac{1}{n} x_o, y\rangle - \frac{1}{2}\langle \frac{1}{n} Sy,y\rangle + \int K(y,\cdot)\ d(\frac{1}{n}\nu)\right]$$

es la funcional característica de una probabilidad sobre H que, por lo tanto, es raíz n-ésima de μ.

(b) Las afirmaciones (i),(ii) y (iii) son inmediatas a partir del Teorema 3.8 y su demostración. Probemos (ii)'.

Sean T_o, ν_o, U como en el teorema y para cada $t > o$, $\delta > 0$ los S-operadores definidos por:

$$\langle T_{t,\delta}y,y\rangle=\int_{B_\delta}\frac{\langle x,y\rangle^2}{(1+\|x\|^2)^2}\,\frac{1}{t}\mu_t(dx),$$

$$\langle T_t^\delta y,y\rangle = \int_{B_\delta^c}\frac{\langle x,y\rangle^2}{(1+\|x\|^2)^2}\,\frac{1}{t}\mu_t(dx)$$

$$\langle U_\delta y,y\rangle=\int_{B_\delta-\{0\}}\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)^2}\,\nu_o(dx),$$

$$\langle U^\delta y,y\rangle=\int_{B_\delta^c}\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)^2}\,\nu_o(dx)$$

Fijemos $\delta>0$ tal que $\nu_o(\{x:\|x\|=\delta\})=0$. Como $S=T_o-U$, para cada $t>0$ se tiene

$$V_{t,\delta}-S=(V_{t,\delta}-T_{t,\delta})+(U-T_t^\delta)+(T_t-T_o).$$

Sabemos que $\lim_{t\to 0}\|T_t-T_o\|_1=0.$

Para cada $t>0$, como $V_{t,\delta}-T_{t,\delta}$ es positivo

$$\|V_{t,\delta}-T_{t,\delta}\|_1=\operatorname{tr}(V_{t,\delta}-T_{t,\delta})=\int_{B_\delta}\|x\|^2\left(\frac{2+\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right)\nu_t(dx);$$

luego, por la propiedad del δ que hemos elegido,

$$\lim_{t\to 0}\|V_{t,\delta}-T_{t,\delta}\|_1=\int_{B_\delta}\|x\|^2\left(\frac{2+\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right)\nu_o(dx).$$

Para el término restante, observemos que $\{T_t^\delta:t>0\}$

es relativamente compacto en $(L_{(1)}(H), \|\cdot\|_1)$ (se deduce por la Proposición 1.2, ya que $0 \le T_t^\delta \le T_t$). Sea T_0^δ el límite (en $L_{(1)}(H)$) de una sucesión $\{T_{t_n}^\delta\}$ con $t_n \to 0$; entonces

$$\begin{aligned} \langle T_0^\delta y, y\rangle &= \lim_n \langle T_{t_n}^\delta y, y\rangle = \\ &= \lim_n \int_{B_\delta^c} \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)} \nu_{t_n}(dx) = \int_{B_\delta^c} \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2(1+\|x\|^2)} \nu_0(dx) = \\ &= \langle U^\delta y, y\rangle. \end{aligned}$$

Se deduce que $T_t^\delta \xrightarrow{\|\cdot\|_1} U^\delta$ cuando $t \to 0$. En consecuencia

$$\lim_{t\to 0} \|U - T_t^\delta\|_1 = \|U - U^\delta\|_1 = \|U_\delta\|_1 = \int_{B_\delta - \{0\}} \frac{1}{1+\|x\|^2} \nu_0(dx).$$

Lo anterior prueba que si $\delta > 0$ es tal que $\nu_0(\{x : \|x\| = \delta\}) = 0$

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \|V_{t,\delta} - S\|_1 \le \int_{B_\delta} \|x\|^2 \left(\frac{2+\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right) \nu_0(dx) + \int_{B_\delta - \{0\}} \frac{1}{1+\|x\|^2} \nu_0(dx).$$

Como a lo sumo hay una cantidad numerable de tales δ, se obtiene el enunciado.

Observaciones. 1) En lugar de $\frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2}$ se podría haber usado la función $\min\{1, \|x\|^2\}$, la cual muestra mejor que hay que considerar por separado el comportamiento dentro y fuera de los entornos de 0.

2) La fórmula de representación de Lévy-Khinchine en espacios de Hilbert (parte (a) del Corolario 3.9) se debe a Varadhan (ver [10], th. 4.10, Ch. VI). La demostración presentada aquí es distinta de la original y sigue la línea de la prueba de Khinchine en la recta real; con ideas similares y el mismo núcleo K se obtiene en [2] la representación en espacios de Banach de cotipo 2, también probada en [3] . Estos trabajos muestran que el núcleo K no es adecuado para espacios de Banach más generales, pero gracias al trabajo de Tortrat, Araujo y Dettweiler es válida una representación en un Banach arbitrario. Una demostración de ese resultado y referencias se hallan en [1] ; siguiendo esa exposición, lo enunciaremos para compararlo con la fórmula del caso Hilbert.

Sea E un espacio de Banach real separable. Para $\tau > 0$, sea $h_\tau(f,x)=e^{if(x)}-1-if(x)I_{B_\tau}(x)$ para $f \in E', x \in E$.

Se define que una medida positiva σ-finita λ sobre E es una <u>medida de Lévy</u> si para algún $\tau > 0$: (I) $\int |h_\tau(f,\cdot)|d\lambda < \infty$ para cada $f \in E'$, y (II) existe una probabilidad $c_\tau \text{Pois}\,\lambda$ sobre E tal que $(c_\tau \text{Pois}\,\lambda)^\wedge(f) = \exp\int h_\tau(f,\cdot)d\lambda$ para toda $f \in E'$ (En esta definición τ puede ser reemplazado por cualquier $\tau' > 0$. Se tiene $\lambda|\{0\}^c = \lambda'|\{0\}^c$ sii $c_\tau \text{Pois}\,\lambda = c_\tau \text{Pois}\,\lambda'$. Ejemplo: una medida finita λ es de Lévy y c_τ Pois $\lambda = \exp(\lambda - \|\lambda\|\delta_o) * \delta_{b_\tau}$ con $b_\tau = -\int_{B_\tau} x\ \lambda(dx)$ para cada $\tau > 0$).

Fijado $\tau > o$, una probabilidad μ sobre E es i.d. si y sólo si existen $z_\tau \in E$, una probabilidad gaussiana centrada γ y una medida de Lévy λ tales que

$$\mu = \delta_{z_\tau} * \gamma * c_\tau \text{ Pois } \lambda .$$

Además z_τ, γ y $\lambda|\{0\}^c$ son únicos y se tiene

(1) $\lim\limits_n \int_{B_\tau} x \; n\mu_{1/n}(dx) = z_\tau$

(2) $\lim\limits_{\delta\downarrow 0} \left\{ \begin{matrix} \overline{\lim\limits_n} \\ \underline{\lim\limits_n} \end{matrix} \right\} \int_{B_\delta} f^2 \, d(n\mu_{1/n}) = \Phi_\gamma(f,f)$ (la covarianza de γ)

(3) $n\mu_{1/n} |B_\delta^c \xrightarrow{w} \lambda|B_\delta^c$ para cada $\delta>0$ tal que $\lambda(\{x:\|x\|=\delta\})=0$.

Si E es un espacio de Hilbert y $[x_0, S, \nu]$ es la representación de Lévy-Khinchine de μ como en el Corolario 3.9, (a) se tiene

$$z_\tau = x_0 + \int_{B_\tau} x\nu(dx) - \int_{B_\tau^c} \frac{x}{\|x\|^2}\nu(dx), \quad \Phi_\gamma(y,y) = \langle Sy, y\rangle, \quad (\lambda|\{0\}^c)(dx) = \frac{1+\|x\|^2}{\|x\|^2}\nu(dx).$$

Además en este caso particular se tiene el refinamiento (ii)' del Corolario 3.9 de la propiedad (2).

4. Semigrupos de operadores de convolución en espacios de Hilbert.

Consideramos semigrupos de operadores de convolución

$\{P_t : t \geq 0\}$ fuertemente continuos en $C_u(H)$. Por lo visto en la Sección 2 se tiene $P_t = P_{\mu_t}$ siendo $\{\mu_t : t \geq 0\}$ un semigrupo de probabilidades (débilmente continuo).

Se lo puede considerar como semigrupo en $B(H)$ y en $C_u(H)$; llamamos D y D_u a los dominios de los generadores infinitesimales respectivos. Se tiene $D_u \subset D$.

4.1 Teorema. $C_u^{(2)}(H) \subset D_u$. Además, si $[x_o, S, \nu]$ es la representación de Lévy-Khintchine de μ_1, para cada $f \in C_u^{(2)}(H)$ y cada $x \in H$

$$Af(x) = \langle x_o, f'(x)\rangle + \frac{1}{2} tr(Sf''(x)) + \int \left[f(x+y) - f(x) - \frac{\langle f'(x), y\rangle}{1+\|y\|^2} \right] \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2} \nu(dy).$$

Demostración. Sea $f \in C_u^{(2)}(H)$; si $x \in H$

$$A_t f(x) = \frac{1}{t}(P_t - I) f(x) = \int \left[f(x+y) - f(x) \right] \frac{1}{t}\mu_t(dy) =$$

$$= \langle x_t, f'(x)\rangle + \frac{1}{2} \int \frac{\langle f''(x)y, y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2} \frac{1}{t}\mu_t(dy) + \int B_f(x, \cdot) d\nu_t \qquad (1)$$

(B_f como en el Lema 3.6,(a)).

Veamos que para todo operador simétrico Δ se tiene

$$\int \frac{\langle \Delta y,y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\ \frac{1}{t}\mu_t(dy)=tr(T_t\Delta) \tag{2}$$

Probemos primero (2) cuando Δ es un proyector ortogonal P. Sea $\{e_i:i\in I\}$ una base ortonomal de $P(H)$ y $\{e_j:j\in J\}$ una base ortonomal de $P(H)^{\perp}$ (con $I\cap J=\emptyset$). Entonces $\{e_i:i\in I\cup J\}$ es una base ortonormal de H. Para todo $y\in H$ se cumple

$$\langle Py,e_i\rangle=\begin{cases}\langle y,e_i\rangle & \text{si } i\in I\\ 0 & \text{si } i\in J\ ,\end{cases}$$

y se tiene $\langle Py,y\rangle=\|Py\|^2=\sum_{i\in I}\langle y,e_i\rangle^2=\sum_{i\in I}\langle Py,e_i\rangle\langle y,e_i\rangle$

$$=\sum_{i\in I\cup J}\langle y,\ Pe_i\rangle\langle y,e_i\rangle\quad .$$

Como los términos de esta serie son no negativos

$$\int\frac{\langle Py,y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\ \frac{1}{t}\mu_t(dy)=\sum_{i\in I\cup J}\int\frac{\langle y,Pe_i\rangle\langle y,e_i\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\ \frac{1}{t}\mu_t(dy)$$

$$=\sum_{i\in I\cup J}\langle T_tPe_i,e_i\rangle=tr(T_tP).$$

Luego (2) vale para combinaciones lineales finitas de proyectores ortogonales.

Sea ahora Δ un operador simétrico. Por el teorema

espectral, existe una sucesión de operadores $\{\Delta_n\}$ que son combinaciones lineales finitas de proyectores ortogonales tales que $\|\Delta_n - \Delta\| \to 0$. Para cada Δ_n vale (2).
Pero

$$\int \frac{\langle \Delta_n y, y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\ \frac{1}{t}\mu_t(dy) \longrightarrow \int \frac{\langle \Delta y, y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\ \frac{1}{t}\mu_t(dy) \qquad (n\to\infty)$$

por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue ya que $\|\Delta_n - \Delta\| \to 0$ y $\left|\frac{\langle \Delta_n y, y\rangle}{(1+\|y\|^2)^2}\right| \leq \sup_n \|\Delta_n\| < \infty$. Además

$$|tr(T_t\Delta_n) - tr(T_t\Delta)| = |tr(T_t(\Delta_n - \Delta))| \leq \|T_t(\Delta_n - \Delta)\|_1 \leq \|T_t\|_1 \|\Delta_n - \Delta\|,$$

lo que asegura que $tr(T_t\Delta_n) \to tr(T_t\Delta)\ (n\to\infty)$. Luego (2) vale para todo operador simétrico Δ. La igualdad (1) se reescribe

$$A_t f(x) = \langle x_t, f'(x)\rangle + \frac{1}{2} tr(T_t f''(x)) + \int B_f(x,\cdot)\, d\nu_t.$$

. Sean $T_o = S + U$, siendo U el operador del Corolario 3.9(b), y $\nu_o = \nu + tr(S)\delta_0$. Para todo $x \in H$ se tiene

$$|\langle x_t, f'(x)\rangle - \langle x_o, f'(x)\rangle| \leq \|x_t - x_o\| \cdot \|f'\|,$$

$$|tr(T_t f''(x)) - tr(T_o f''(x))| = |tr((T_t - T_o) f''(x))| \leq \|(T_t - T_o) f''(x)\|_1 \leq \|T_t - T_o\|_1 \|f''\|\ ;$$

además $\{B_f(x,\cdot):x\in H\}$ es uniformemente acotado y equicontinuo (Lema 3.6(a)). Por la Proposición 1.1 y el Corolario 3.9(b) tenemos entonces que

$$A_t f(x) \longrightarrow \langle x_0, f'(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T_0 f''(x)) + \int B_f(x,\cdot)\,d\nu_0$$

uniformemente en $x\in H$ cuando $t \to 0$. Esto prueba que $f\in D_u$.

Pero

$$\int B_f(x,\cdot)\,d\nu_0 = \int\left[f(x+y)-f(x)-\frac{\langle f'(x),y\rangle}{1+\|y\|^2}\right]\frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\nu(dy)-\frac{1}{2}\int\frac{\langle f''(x)y,y\rangle}{\|y\|^2(1+\|y\|^2)^2}\nu(dy)$$

y la última integral coincide con tr $(Uf''(x))$, lo que se ve argumentando como se hizo para T_t. Puesto que $S=T_0-U$, se obtiene la expresión de Af del enunciado.

El Teorema 4.1 incluye resultados de Courrège para el caso finito-dimensional [5, Théorème 1 y 2]. En esa situación se tiene además que $C_u^{(2)}(H)$ es denso en $C_u(H)$, pero esto deja de ser cierto en dimensión infinita; este hecho ha sido probado por D. Herrero (comunicación personal) quien, usando argumentos de [11, § 5, Th 1] muestra que $C_u^{(2)}(\ell^2)$ no es denso en $C_u(\ell^2)$ (explícitamente, prueba que si $A=\{x\in\ell^2: x_i\leq 0, \|x\|\leq 1\}$ y tomamos $f(x) = \min\{1,d(x,A)\}$, para toda $g\in C_u^{(2)}(\ell^2)$ es $\|f-g\|\geq 1/2$).

Por otra parte, a continuación exhibiremos un subespacio denso en $C_u(H)$ que está contenido en el dominio del generador infinitesimal de todo semigrupo sin componente gaussiana; también se dice cómo actúan dichos operadores sobre esa clase. La densidad de ese subespacio se obtiene de otro resultado de [11] .

Nota. Agradecemos aquí a D. Herrero por numerosas conversaciones sobre este punto y a J. Eells el haber dirigido nuestra atención, por intermedio de A. de Acosta, hacia [11].

Llamemos $C^{(1)}_{u,L}(H)$ al espacio de las funciones $f \in C_u(H)$ derivables en el sentido de Fréchet y tales que su derivada f' cumple : $\|f'\| = \sup_{x \in H} \|f'(x)\| < \infty$; para ciertos $\delta > 0, M > 0$ es $\|f'(x) - f'(y)\| \leq M \|x-y\|$ si $\|x-y\| \leq \delta$.

4.2 Proposición. $C^{(1)}_{u,L}(H)$ es denso en $C_u(H)$.

Demostración. Se demuestra en [11, § 4, Corollary 4] que, dados A,B cerrados en H a distancia positiva, existe una función $f: H \to [0,1]$ continua y con derivada Lipschitz tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$. Veamos que se puede tomar $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$.

Supongamos $d(A,B) = 4\delta > 0$. Si $A' = \{x : d(x,A) \leq \delta\}$ y $B' = \{x : d(x,A) \geq 2\delta\}$ se tiene $d(A',B') \geq \delta$. Por el resultado mencionado, existe f con las propiedades anteriores respecto de A', B' y, por lo tanto, respecto de A,B; f' cumple $\|f'(x) - f'(y)\| \leq M\|x-y\|$ para cualesquiera x, $y \in H$ y cierta constante M. Como f' se anula sobre los abiertos $A''\{x:d(x,A)<\delta\}$ y $B''=\{x:d(x,A)>3\delta\}$ y para todo $x\in H$ es $d(x,A''\cup B'')\leq d(x,A\cup B'')<4\delta$, se tiene $\|f'(x)\|\leq 4\delta M$ para todo x. El teorema del valor medio asegura la continuidad uniforme y $f\in C^{(1)}_{u,L}(H)$.

La proposición quedará demostrada probando la siguiente modificación de un ejercicio de [7] (Ch.7,Problem P) :

(*) Sean M un espacio métrico y L un subespacio vectorial de $C_u(M)$ (igual definición y norma que nuestro caso particular). Supongamos que para cada par de cerrados A,B en M con $d(A,B)>0$ y para cada intervalo real $[a,b]$ existe $f\in L$ tal que $a\leq f\leq b$, $f|_A=a$ y $f|_B=b$. Entonces L es denso en $C_u(M)$.

Para probarlo, veamos primero que para toda $k\in C_u(M)$ existe $f\in L$ tal que $\|k-f\|\leq\frac{2}{3}\|k\|$. Dada una tal $k\neq 0$ tomemos los cerrados $A=k^{-1}([-\|k\|,-\frac{1}{3}\|k\|])$, $B=k^{-1}([\frac{1}{3}\|k\|,\|k\|])$; existe $\delta>0$ tal que $|k(x)-k(y)|<\frac{2}{3}\|k\|$ si $d(x,y)<\delta$ y se tiene entonces $d(A,B)\geq\delta$. La hipótesis asegura la existencia de una $f\in L$ tal que $-\frac{1}{3}\|k\|\leq f\leq\frac{1}{3}\|k\|$, $f|_A=-\frac{1}{3}\|k\|$, $f|_B=\frac{1}{3}\|k\|$; esta f cumple lo afirmado.

Supongamos ahora que L no es denso en $C_u(M)$ (llamemos ρ a la distancia de este espacio) y tomemos $g\in C_u(M)$ tal que $\delta=\rho(g,L)>0$. Sea $h\in L$ tal que $\|g-h\|<\frac{3}{2}\delta$ y sea $k=g-h$. Entonces $\rho(k,L)=\rho(g,L)$: si $f\in L$ tenemos $\|k-f\|=$ $=\|g-(h+f)\|\geq\rho(g,L)$ porque $h+f\in L$, $\|g-f\|=\|k-(f-h)\|\geq\rho(k,L)$ pues $f-h\in L$. Pero, por otra parte, existe $f_o\in L$ tal que

$\|k-f_0\| \le \frac{2}{3}\|k\|$ y se tiene $\rho(k,L) \le \|k-f_0\| \le \frac{2}{3}\|k\| < \delta = \rho(g, L)$.
Esta contradicción prueba (*).

4.3 Lema. Sea $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$ y definamos

$$L_f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\left[f(x+y)-f(x)-\dfrac{\langle f'(x),y\rangle}{1+\|y\|^2}\right] & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Entonces $\{L_f(x,\cdot): x \in H\}$ es equicontinuo en todo $y \neq 0$ y uniformemente acotado.

Demostración. La equicontinuidad en $y \neq 0$ se prueba como en el Lema 3.6(a).

Utilizando la fórmula de Taylor se obtiene que si $y \neq 0$

$$L_f(x,y) = \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\int_0^1 \langle f'(x+sy)-f'(x),y\rangle ds + \langle f'(x),y\rangle.$$

Sean $\delta>0, M>0$ tales que $\|f'(x)-f'(y)\| \le M\|x-y\|$ si $\|x-y\| \le \delta$. Si $\|y\| \le \delta$ tenemos $|\langle f'(x+sy)-f'(x),y\rangle| \le M\|y\|^2$ para $s \in [0,1]$ y, por lo tanto, $|L_f(x,y)| \le (1+\delta^2)M + \|f'\|\,\delta$ para todo x; si $\|y\| > \delta$ resulta $|L_f(x,y)| \le \frac{1+\delta^2}{\delta^2}(2\|f\| + \|f'\|)$ para todo x. Esto prueba la acotación uniforme.

4.4 Teorema. Sea $\{P_t : t \ge 0\}$ asociado a la probabilidad i.d. μ_1 cuya representación de Lévy-Khintchine es $[x_0, S, \nu]$ con $S=0$.

Entonces $C^{(1)}_{u,L}(H) \subset D_u$ y para cada $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$ y cada $x \in H$

$$A f(x) = \langle x_0, f'(x)\rangle + \int \left[f(x+y)-f(x)-\frac{\langle f'(x),y\rangle}{1+\|y\|^2}\right]\frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\,\nu(dy).$$

Demostración. Sea $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$; si $x \in H$

$$A_t f(x) = \langle x_t, f'(x) \rangle + \int L_f(x,\cdot)\, d\nu_t$$

(L_f como en el Lema 4.3).

Como S=0 el Corolario 3.9(b) asegura que $\nu_t \xrightarrow{w} \nu$. Además el lema anterior dice que $\{L_f(x,\cdot) : x \in H\}$ es equicontinuo en todo $y \neq 0$ y uniformemente acotado. Puesto que $\nu(\{0\})=0$, la Proposición 1.1 implica entonces que

$$\int L_f(x,\cdot)\, d\nu_t \longrightarrow \int L_f(x,\cdot)\, d\nu$$

uniformemente en x, cuando $t \to 0$.

Para completar la demostración, resta sólo observar que

$\|x_t - x_o\| \to 0$ y $\|f'\| < \infty$

Observación. Se obtiene este resultado gracias a que conocemos la masa que la medida límite de las ν_t asigna a 0; esto depende de la convergencia de los T_t en $\|\cdot\|_1$.

Veremos a continuación que restringiendo aún más la clase de probabilidades considerada, se tiene $D_u = C_u(H)$ (y $D=B(H)$) . Recordemos que un semigrupo $\{P_t : t \geq 0\}$ de operadores en un Banach X es uniformemente continuo (es decir, $\lim_{t\to 0} \|P_t - I\| = 0$) si y sólo si su generador infinitesimal es un operador acotado definido sobre todo X. (La siguiente proposición en el caso $H=\mathbb{R}^n$ es el Lemme 8 de [5] ; la demostración aquí es algo distinta).

4.5 Proposición. Sea $\{P_t : t \geq 0\}$ asociado a $\{\mu_t : t \geq 0\}$. Son equivalentes:

1) $\{P_t : t \geq 0\}$ es uniformemente continuo (en $B(H)$ o en $C_u(H)$),

2) Existe una medida positiva finita λ sobre H tal que

$$\mu_t = \exp(t(\lambda - \|\lambda\| \delta_0)) = e^{-t\|\lambda\|} \exp(t\lambda).$$

Si esto sucede, el generador infinitesimal es $P_{\lambda - \|\lambda\|\delta_0}$ y si $[x_0, S, \nu]$ es la representación de Lévy-Khinchine de μ_1 se tiene

$$(\lambda \restriction \{0\}^c)(dy) = \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\, \nu(dy), \quad x_0 = \int \frac{y}{\|y\|^2}\, \nu(dy), \quad S = 0.$$

(Observemos que para una medida signada finita ν se definen $\exp(\nu)$ y el operador de convolución P_ν como en el caso $\nu \geq 0$ y tienen propiedades análogas)

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2): Si $\{P_t\}$ es uniformemente continuo sobre $B(H)$, también lo es sobre $C_u(H)$ y sabemos que el generador infinitesimal A es un operador acotado definido sobre $C_u(H)$.

Sea $[x_0, S, \nu]$ la representación de Lévy-Khinchine de μ_1. Veamos que $S=0$. Para ello, basta probar que $tr(S) = \nu_0(\{0\}) = 0$. Dado $r > 0$ tomemos $f_r \in C_u(H)$ tal que $0 \leq f_r \leq 1$, $f_r = 1$ sobre B_r, $f_r = 0$ sobre B_{2r}^c ; la función $g_r(x) = (\|x\|^2/(1+\|x\|^2)) f_r(x)$ está en $C_u(H)$ y $\|g_r\| \leq \frac{(2r)^2}{1+(2r)^2}$. Como $\nu_t \xrightarrow{w} \nu_0$, para el abierto $\mathring{B}_r$ se tiene

$$\nu_0(\mathring{B}_r) \le \underline{\lim}_{t\to 0} \nu_t(\mathring{B}_r) \le \underline{\lim}_{t\to 0} \int g_r \frac{1}{t}\, d\mu_t$$

$$= \lim_{t\to 0} A_t g_r(0) = A g_r(0).$$

Luego, para todo $r>0, \nu_0(\{0\}) \le \frac{(2r)^2}{1+(2r)^2}\|A\|$, o sea, $\nu_0(\{0\})=0$.

Llamemos λ a la medida positiva tal que

$$(\lambda \restriction \{0\}^c)(dy) = \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\nu(dy), \quad \lambda(\{0\})=0.$$

Si $r>0$ es tal que $\nu(\{x:\|x\|=r\})=0$ tomemos $f_r \in C_u(H)$ tal que $0\le f_r \le 1$, $f_r = 1$ sobre B_r^c, $f_r(0)=0$; se tiene

$$\lambda(B_r^c) = \lim_{t\to 0}\int_{B_r^c} \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\nu_t(dy) \le \overline{\lim_{t\to 0}}\int f_r \frac{1}{t} d\mu_t = \lim_{t\to 0} A_t f_r(0) = A f_r(0).$$

Luego, para cualquiera de esos r, $\lambda(B_r^c)\le\|A\|$. Esto prueba que λ es finita.

Aplicando el Teorema 4.1 tenemos para toda $f\in C_u^{(2)}(H)$

$$Af(x) = \langle x_0, f'(x)\rangle + \int\left[f(x+y)-f(x)-\frac{\langle f'(x),y\rangle}{1+\|y\|^2}\right]\lambda(dy)$$

$$= \langle x_0 - z, f'(x)\rangle + \int\left[f(x+y)-f(x)\right]\lambda(dy)$$

siendo $z = \int \frac{y}{1+\|y\|^2}\lambda(dy)$.

Para $x\in H$ sea $h_x(y) = \operatorname{sen}\langle y,x\rangle$; se tiene $h_x \in C_u^{(2)}(H)$, $h_x(0)=0, h_x'(0)=x, \|h_x\| = 1$ y

$$Ah_x(0) = \langle x_0 - z, x\rangle + \int h_x\, d\lambda.$$

Luego $|<x_o-z,x>|<\|A\|+\|\lambda\|$ para todo $x\in H$.

Esto implica que $x_o-z=0$.

Finalmente si ℓ es la función tal que $\hat{\mu}_1=\exp\ell$ y, fijado $y\in H$, llamamos R_y e I_y a las partes real e imaginaria de $e^{i<y,\cdot>}$, tenemos

$$\ell(y)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\hat{\mu}_t(y)-1)=AR_y(0)+iAI_y(0)=\int(e^{i<x,y>}-1)\lambda(dx)$$

$(R_y(0)=1, R_y'(0)=0, I_y(0)=0, I_y'(0)=y)$. Esto es $\ell(y)=(\lambda-\|\lambda\|\delta_o)\hat{}(y)$.

Luego $\mu_t=\exp(t(\lambda-\|\lambda\|\delta_o))$ (pues $\exp(\nu)\hat{}=\exp(\hat{\nu})$).

2) $\Longrightarrow$ 1): Pongamos $\nu=\lambda-\|\lambda\|\delta_o$ y sea $A=P_\nu$. Entonces $P_t=e^{tA}$ y la desigualdad

$$\left\|\frac{1}{t}(P_t-I)-A\right\|\leq te^{\|A\|} \qquad (t\in(0,1])$$

muestran que $\{P_t\}$ es uniformemente continuo en $B(H)$ y que A es su generador infinitesimal.

Además, definiendo $(\nu'|\{0\}^c)(dy)=\frac{\|y\|^2}{1+\|y\|^2}\lambda(dy)$, $\nu'(\{0\})=0$, y $x_o'=\int\frac{y}{1+\|y\|^2}\lambda(dy)$, el resto del enunciado se deduce del Lema 3.7.

Cuando $\mu_t=\delta_{tx_o}$ con $x_o\in E$ (Banach), $x_o\neq 0$, inmediatamente se ve que D_u está formado por las $f\in C_u(E)$ tales que existe $D_{x_o}f(x)$ (la derivada direccional de f en x en la dirección x_o) para todo $x\in E$ y $D_{x_o}f\in C_u(E)$; se tiene $Af=D_{x_o}f$.

Mencionemos también que vale en Hilbert (la demostración se apoya en el Teorema 4.1) el siguiente resultado (para $\mathbb{R}^n$, Lemme 6 de [5]): dado $\{P_t:t\geq 0\}$ en $C_u(H)$, asociado $\{\mu_t:t\geq 0\}$, son equivalentes:

1) A es de carácter local sobre D_u (es decir, si $f\in D_u$ se anula en un entorno de $x\in H$ entonces $Af(x)=0$)

2) μ_t es gaussiana

3) $\lim\limits_{t\to 0} (1/t)\mu_t(B_\delta^c)= 0$ para todo $\delta>0$.

En el caso de la recta real, se sabe que el dominio del generador infinitesimal A del semigrupo gaussiano $(\mu_t(dx)=(2\pi t)^{-1/2}\exp(\frac{-x^2}{2t}))$ está formado por las $f\in C_u(\mathbb{R})$ dos veces derivables, tales que f'' es uniformemente continua y acotada; además $Af =\frac{1}{2} f''$ (ver [12], Ch. IX, 5). Describiremos ahora un resultado de Gross ([6]) para semigrupos gaussianos en un Banach y lo usaremos para mostrar, en el caso Hilbert, clases de funciones densas en los dominios de los generadores de semigrupos más generales (pero dichas clases dependerán del semigrupo considerado).

Sea γ una probabilidad gaussiana sobre un Banach separable E; supondremos que el soporte de γ es todo E. Comenzaremos describiendo el <u>espacio de Hilbert de γ</u> (seguiremos la exposición de [1]).

Sea Φ sobre $E'\times E'$ la covarianza de γ $(\Phi(y,y')=\int yy'd\gamma$ para $y,y'\in E'$); es una forma bilineal simétrica, definida positiva (pues el soporte de γ es E) y define un producto interno en E'. Llamaremos $\hat{E}'$ a la completación de E' respecto de ese producto interno y nuevamente Φ a la extensión de la covarianza a $\hat{E}'$. Por otra parte, consideremos en E el subespacio lineal H_γ formado por los $x \in E$ tales que $y \mapsto (x,y)$ es Φ-continua ($(x,y)=y(x)$) . Se verifica que dada $z \in (E')^*$ (dual algebraico de E') tal que z es Φ-continua existe un único $x \in E$ tal que $z(y)=(x,y)$, para todo $y \in E'$. Luego, hay un isomorfismo canónico $\Psi : H_\gamma \to (\hat{E}')'$ caracterizado porque $\Psi(x)(y)=(x,y)$ si $x \in H_\gamma$, $y \in E'$. Sea $\rho : (\hat{E}')' \to \hat{E}'$ la representación de Riesz; está determinada por $z(y) = \Phi(\rho(z),y)$ si $z \in (\hat{E}')'$, $y \in E'$. Se tiene entonces el isomorfismo $\phi = \rho\Psi$ caracterizado por $(x,y)= \Phi(\phi(x),y)$ para $x \in H_\gamma$, $y \in E'$. H_γ es un espacio de Hilbert con el producto interno $\langle u,v\rangle_\gamma = \Phi(\phi(u),\phi(v))$ $(u,v \in H_\gamma)$; es el espacio de Hilbert de γ. Resulta ser separable y denso en E. Notar que la desigualdad $\Phi(y,y) \leq \|y\|^2 \int \|x\|^2 \gamma(dx) = \|y\|^2 c^2$ implica que para $x \in H_\gamma$ es $\|x\| \leq c\|x\|_\gamma$. Otra caracterización de H_γ es que si $x \in E$, $\gamma * \delta_x$ es equivalente a γ (cada una absolutamente continua respecto de la otra) si sólo si $x \in H_\gamma$ ([6] , Proposition 1).

En el caso en que E es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la covarianza de γ se considera definida sobre $E \times E$ y es de la forma $\Phi(y,y') = \langle Sy,y'\rangle$ siendo S un S-operador (inyectivo, pues el soporte de γ es E); se toma entonces la completación $\hat{E}$ de E respecto de Φ, H_γ está formado por los $x \in E$ tales que $y \mapsto \langle x,y\rangle$ es Φ-continua sobre E y la aplicación $\phi: H_\gamma \to \hat{F}$ está caracterizada por $\langle x,y\rangle = \Phi(\phi(x),y)$ si $x \in H_\gamma$, $y \in E$. Se tiene además $S(F)=\phi^{-1}(E)$, $S^{-1}=\phi|\phi^{-1}(E)$, $\langle Sx,Sx'\rangle_\gamma = \langle Sx,x'\rangle$ para $x,x' \in F$. Si $\{e_n : n \in N\}$ es una base ortonormal de F que diagonaliza a S entonces $\{\|Se_n\|_\gamma^{-1} Se_n : n \in N\}$ es una base ortonormal de H_γ.

Dada una función real f sobre el espacio de Banach E, diremos que f es <u>H_γ-derivable</u> en un punto $x \in E$ si la función $g(h)=f(x+h)$, $g: H_\gamma \to \mathbb{R}$ es derivable en el sentido de Fréchet en 0; en este caso, existe $Df(x) \in H_\gamma$ tal que $|f(x+y)-f(x)-\langle Df(x),h\rangle_\gamma|$ $o(\|h\|_\gamma)$ cuando $\|h\|_\gamma \to 0$ ($h \in H_\gamma$). Análogamente, f será dos veces H_γ-derivable en x si g lo es en 0; llamaremos $D^2f(x)$ al operador en H_γ asociado a la segunda derivada. Como $\|\cdot\|_\gamma$ es más fuerte que $\|\cdot\|$ la derivabilidad usual implica esta noción y las derivadas coinciden (convenientemente restringidas). Si $A \in L_{(1)}(H_\gamma)$, designaremos su traza con $tr_\gamma(A)$.

Enunciamos ahora el resultado de Gross (Corollary 3.2 de [6]): dada γ gaussiana sobre E con soporte en todo el espacio, la clase de funciones que cumplen las siguientes condiciones es densa en el dominio del generador infinitesimal del semigrupo $\{P_t\}$ asociado a γ:

(i) f está en el dominio de A,

(ii) Para cada $x \in E$, f es dos veces H_γ-derivable en x y $D^2f(x) \in L_{(1)}(H_\gamma)$,

(iii) $D^2f: E \to L_{(1)}(H_\gamma)$ es acotada y uniformemente continua

(iv) $Af(x)=\frac{1}{2}tr_\gamma(D^2f(x))$.

Consideremos ahora el caso en que $E=H$ es un espacio de Hilbert.

Sea $\{P_t : t \geq 0\}$ asociado a μ_1 cuya representación de Lévy-Khinchine es $[x_0, S, \nu]$ y la probabilidad gaussiana γ correspondiente a S tiene soporte en todo H. Mostraremos que la clase G_γ de las funciones $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$ que tienen las propiedades (i)-(iv) es densa en el dominio del generador A de $\{P_t\}$ y que

$$Af(x) = \langle x_0, f'(x)\rangle + \frac{1}{2}tr_\gamma(D^2 f(x)) + \int \left[f(x+y) - f(x) - \frac{\langle f'(x), y\rangle}{1+\|y\|^2}\right] \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2}\, \nu(dy)$$

para cada $f \in G_\gamma$ y cada $x \in H$.

Llamemos $\{P'_t\}$ al semigrupo asociado a γ_1 y $\{P''_t\}$ al asociado a ρ_1, siendo $[0, S, 0]$ y $[x_0, 0, \nu]$ las representaciones de Lévy-Khinchine de γ_1 y ρ_1 respectivamente, sean A', D'_u y A'', D''_u sus generadores infinitesimales y dominios.

Sea L el conjunto de las funciones de la forma $R'f(x) = \int_0^\infty e^{-t}(P'_t f)(x)dt$ con $f \in C^{(1)}_{u,L}(H)$. Se tiene que $L \subset D'_u$ pues las funciones de D'_u son las $R'f$ con $f \in C_u(H)$. Además $L \subset C^{(1)}_{u,L}(H)$ y cada función de L satisface (i)-(iv)(pues en la demostración de [6, Corollary 3.2] se prueba que $R'f$ cumple dichas condiciones cuando f es Lipschitz, y toda $f \in L$ lo es). Como el dominio del genrador de un semigrupo de operadores fuertemente continuo es denso en el espacio en que actúa el semigrupo, y L es denso en D'_u pues lo es $C^{(1)}_{u,L}(H)$ en $C_u(H)$, se tiene que L es denso en $C_u(H)$; luego lo es $G_\gamma \supset L$. El Teorema 4.4 implica que $G_\gamma \subset D'_u \cap D''_u$ y que para obtener la representación deseada basta verificar que toda $f\in D'_U \cap D''_U$ está en el dominio del generador A y que $A=A'f+A''f$. Esto se deduce de la desigualdad (observar que $P_t=P'_tP''_t$):

$$\|\tfrac{1}{t}(P_tf-f)-(A'f+A''f)\|\leq \|\tfrac{1}{t}(P''_tf-f)-A''f\|+\|P'_tA''f-A''f\|+\|\tfrac{1}{t}(P'_tf-f)-A'f\|.$$

Veamos ahora que cuando existe la segunda derivada Fréchet en un punto x, la representación coincide con la del Teorema 4.1.

Se tienen las aplicaciones

$$H_\gamma \xrightarrow{i} H,\ H \xrightarrow{\sigma} H' \xrightarrow{j} H'_\gamma \xrightarrow{\tau} H_\gamma$$

siendo σ y τ las representaciones de Riesz para H y H_γ ; i la inclusión, que verifica $\|i(x)\|\leq c\|x\|_\gamma$, j la inyección que a cada $f\in H'$ le asocia la funcional perteneciente a H'_γ que es su restricción a H_γ y cumple $\|j(f)\|_\gamma\leq c\|f\|$.

Observemos que si existe la derivada Fréchet $f'(x)\in H$ entonces f es H_γ -derivable en x y $Df(x)=\tau j\sigma f'(x)\in H_\gamma$; si además existe la segunda derivada $f''(x)$ (operador en H), se tiene que f es dos veces H_γ -derivable y $D^2f(x)=\tau j\sigma f''(x)i$ (operador en H_γ). Además $D^2f(x)\in L_{(1)}(H_\gamma)$ (ver [6], §3).

Supongamos que existe $f''(x)$ y sea $\{e_n:n\in N\}$ una base ortonormal de H tal que $Se_n=\lambda_ne_n$; entonces $\{\|Se_n\|_\gamma^{-1}Se_n:\ n\in N\}$ es una base ortonormal de H_γ . Como $e_n\in S(F)=\phi^{-1}(F)$ (pues $\lambda_n\neq 0$) y $\phi|\phi^{-1}(F)=S^{-1}$

$$\|Se_n\|_\gamma^2=\Phi(\phi(Se_n),\phi(Se_n))=\Phi(e_n,e_n)=\langle Se_n,e_n\rangle=\lambda_n.$$

Además

$$< D^2f(x)\frac{Se_n}{\|Se_n\|_\gamma}, \frac{Se_n}{\|Se_n\|_\gamma} >_\gamma = \frac{1}{\lambda_n} \Phi(\phi(D^2f(x)Se_n),\phi(Se_n)) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \Phi(\phi(D^2f(x)Se_n),e_n) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} < D^2f(x)Se_n,e_n >.$$

Por la definición de las aplicaciones σ, j, τ, $D^2f(x)Se_n$ es el $h \in H_\gamma$ tal que $< h,k >_\gamma = <f''(x)Se_n,k>$ para todo $k \in H_\gamma$.

Pero $<h,e_n>_\gamma = \Phi(\phi(h),\phi(e_n)) = \Phi(\phi(h), \lambda_n^{-1} \phi(Se_n))$

$$= \Phi(\phi(h), \lambda_n^{-1} e_n)$$

$$= <h,e_n>\lambda_n^{-1}$$

Luego $\frac{1}{\lambda_n} < D^2f(x)Se_n, e_n > = < h,e_n >_\gamma = < f''(x)Se_n,e_n >$, y se tiene $tr_\gamma (D^2f(x)) = tr(Sf''(x))$.

REFERENCIAS

1. de Acosta, A., Araujo, A. y Giné, E. (1978). On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. A publicarse en Advances in Probability.

2. de Acosta, A. y Samur, J. (1977). Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces. A publicarse en Studia Math.

3. Araujo, A. y Giné, E. (1976). Type , cotype and Lévy measures in Banach spaces. A publicarse en Ann. Probability.

4. Badrikian, A. (1970). Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. Lect. Notes in Math. 139. Springer-Verlag.

5. Courrège, Ph. (1964). Génerateur infinitésimal d'un semigroupe de convolution sur R^n et formule de Lévy-Khinchine, Bull. Sc. Math., 2ème série, 88,3-30.

6. Gross L. (1967). Potential Theory on Hilbert space. J. of Functional Analysis Vol. 1, N°2, 123-181.

7. Kelley, J. (1955). General Topology. Van Nostrand, Princeton.

8. Le Cam, L. (1970). Remarques sur le théorème limite centrale dans les spaces localement convexes. Les Probabilités sur les structures algébriques. CNRS, Paris, 233-249.

9. Neveu, J. (1965). Mathematical foundations of the calculus of probability. Holden-Day, San Francisco.

10. Parthasarathy, K.R. (1967). Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York.

11. Wells, J. (1973). Differentiable functions on Banach spaces with Lipschitz derivatives. J. Differential Geometry, 8, 135-152.

12. Yosida, K. (1968). Functional Analysis (Second edition) Springer-Verlag, Berlin.

CURRICULUM VITAE.

Datos personales.

Nombre: Jorge Donato Samur.

Lugar y fecha de nacimiento: La Plata, Argentina- 24/8/48.

Nacionalidad: argentina.

Estudios realizados.

Secundarios: Colegio Nacional de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

Universitarios: Licenciatura en Matemática; UNLP, Argentina.

Cargos desempeñados.

— Auxiliar docente; Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP, Argentina.

— Profesor; IVIC.

— Auxiliar de investigación; CONICIT, Venezuela (Proyecto 51-26.S1.0893).

Becas.

— Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

— CORDIPLAN, Venezuela.

Publicaciones.

Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces (en colaboración con A. de Acosta. A publicarse en Studia Mathematica).