LA ECUACION DE SLUTSKY Y LA MEDIDA DE LA REACCION DEL CONSUMIDOR ANTE UN CAMBIO DE PRECIO.

Horacio E. Cojas

Colaboró Jose M. Giudice (Lic.en Economía)

La ecuación de Slutsky y la medida de la reacción del consumidor ante un cambio de precio

La ecuación de Slutsky, como derivada de estática comparativa, nos informa, dada una situación óptima inicial y una renta constante, sobre la tasa instantánea de cambio que afectará las cantidades de los bienes que demanda el consumidor y la utilidad marginal de la renta, al producirse la variación del precio de uno de los bienes.

Por tratarse de una tasa instántanea de cambio, no debiera extrañar que su producto por un cambio finito de un precio, arroje resultados que no coincidan con la variación realmente operada en las cantidades.

Sin embargo, en algún caso, la tasa de cambio proporcionada por la derivada multiplicada por un cambio finito de precio da con total excactitud la variación en la cantidad del bien cuyo precio se mantiene constante. Buscando posibilitar la utilización de la derivada con esta eficacia se han ensayado, para ciertas clases de funciones, procedimientos correctores que la modifican y permiten arribar a los resultados apetecidos.

---------------0---------------

La ecuación se obtiene diferenciando totalmente o derivando totalmente el sistema de ecuaciones lineales que se construyó para obtener el máximo, e incluye entre sus datos las derivadas segundas de la función de utilidad, los precios de equilibrio iniciales, la cantidad inicial de equilibrio del bien cuyo precio se modifica y, también, el valor de equilibrio que la maximización asignó a la utilidad marginal de la renta.

--0--

Las funciones de utilidad que hemos considerado sólo contemplan dos bienes, y son aquéllas cuyo grafo se halla total o parcialmente en el cuadrante positivo. En el último caso, sólo al tramo positivo se refiere este estudio. Por lo demás, deben ser continuas, diferenciables hasta el segundo orden, y sus curvas de indiferencia, estrictamente convexas hacia el origen y no intersecarse.

Son de segundo grado, ya sea por la presencia del término cuadrático "mixto" (el que reúne las dos variables), o porque a él se agregue alguna de las dos variables elevada al cuadrado.

Pueden agregarse aún al ó a los términos cuadráticos otro u otros dos términos en los que figuren las variables en forma lineal.

Los coeficientes de las variables son números reales, con la restricción de que no deben, por razón de su signo, contrariar las prescripciones sobre forma y ubicación de la curva.

--0--

Notación

Nivel de utilidad: U; en el equilibrio: U^o.

Bienes: "x", "y"; cantidades de equilibrio: x^o, y^o; cambio en la cantidad de un bien: dx, dy, según el caso.

Utilidad marginal del dinero: "λ"; en el punto de equilibrio: λ^o; cambio en la utilidad marginal del dinero: $d\lambda$.

Precios: Px, Py; en el equilibrio: $P\overset{o}{x}$, $P\overset{o}{y}$; cambio en el precio de un bien: dPx, dPy, según el caso.

Renta: R; renta de equilibrio: R^o.

Coeficientes de las variables: A1, A2, ..., A5.

Segundas derivadas parciales de la función de utilidad: respecto a la misma variable de la derivada primera: Uxx, Uyy, según el caso; respecto a la otra variable: Uxy, Uyx, según el caso.

Hessiano orlado: $|\bar{H}|$

--0--

Las derivadas de Slutsky, considerando solamente dos bienes ("x" e "y") y los efectos del cambio en el precio de uno de ellos, por ejemplo "x", se simbolizan así: $\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px}$, $\frac{\partial x^o}{\partial Px}$, $\frac{\partial y^o}{\partial Px}$, según cual sea la variable cuya modificación a raíz del cambio de precio queremos denotar.

-4-

La tasa de cambio de la variable "x" $\left(\frac{\partial x^o}{\partial Px}\right)$ resulta igual al siguiente cociente:

$$\left(\frac{\partial x^o}{\partial Px}\right)= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^o & -Py^o \\ -Px^o & \lambda^o & Uxy \\ -Py^o & 0 & Uyy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -Px^o & -Py^o \\ -Px^o & Uxx & Uxy \\ -Py^o & Uyx & Uyy \end{vmatrix}}$$

Efectuadas las operaciones, obtendremos el valor de la derivada, y éste se multiplicará por el cambio en el precio (dPx). El resultado de este producto expresará el valor del incremento o del decremento producido en "x", vale decir: dx.

Paralelamente, si el cambio que se busca es en "λ" ($d\lambda$) o en el otro bien (dy, en cuyo caso se llama efecto "cruzado"), bastará ubicar el vector de constantes en la primera ó en la tercera columna del numerador, y efectuar las operaciones.

Como sabemos, al efectuar éstas, es virtud de la ecuación de Slutsky poder presentar separados los efectos de sustitución y renta, pero éste no es el problema que nos ocupa ahora. Nuestro interés se centra en la exactitud de la evaluación del efecto total operado, sin atender a su origen.

--0--

Tipos de funciones de utilidad estudiadas

1er. Tipo: A1 xy + A2 x + A3 y = U

En lo que sigue se considera un cambio en Px. El razonamiento es simétrico en caso de cambiar Py.

En este tipo de función, la derivada de Slutsky multiplicada por el cambio de precio, proporciona información correcta sobre el efecto "cruzado", es decir, es fehaciente el dato sobre la variación o ausencia de variación (efecto "cruzado" nulo) de "y" cuando cambia Px. Aclaramos que para nosotros es correcta la información que coincide con la que se obtiene maximizando.

Respecto al cambio en las variables " λ " y " x ", la información sólo es indicativa por su signo: indica que la cantidad de equilibrio de la variable ha aumentado o disminuído, pero el dato que se obtiene al multiplicar por el cambio en el precio no es correcto.

Esta falencia puede subsanarse multiplicando el valor de la derivada (siempre hablamos de las variables " λ" y "x", porque el efecto "cruzado", repetimos, en este tipo de ecuación no necesita corrección), por la razón entre el precio de equilibrio y el nuevo precio, es decir: $\frac{P_x^o}{P_x^o + dPx}$.

$$\text{Por lo tanto: } d\lambda = \left(\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px}\right) . \frac{P_x^o}{P_x^o + dPx} . dPx$$

$$y \quad dx = \left(\frac{\partial x^o}{\partial Px}\right) . \frac{P_x^o}{P_x^o + dPx} . dPx$$

2do. Tipo: $A1\ xy + A2\ x + A4\ x^2 = U$ (a)

$A1\ xy + A3\ y + A5\ y^2 = U$ (b)

En estas funciones, al término cuadrático "mixto" se agrega una de las dos variables, en forma lineal primero (aunque este término puede faltar) y elevada al cuadrado después. Calificaremos este último término de cuadrático "simple".

En este tipo de función, la derivada de Slutsky no es útil para evaluar la tása de cambio de ninguna de las tres variables ante un cambio finito en un precio.

El procedimiento corrector que se propone sólo contempla el cambio de precio de la variable que figura en el término cuadrático "simple", y consiste en sumar algebraicamente al denominador del cociente que expresa las derivadas, antes de efectuar la división, la expresión que se indicará a continuación.

Recordando que ese denominador es el hessiano orlado, cuyo signo positivo cumplimenta la segunda condición del óptimo, podemos indicar el nuevo denominador así:

$$|\overline{H}| + 2 . A1 . Py . dPx, \text{ para ecuación (a)}$$

$$|\overline{H}| + 2 . A1 . Px . dPy, \text{ para ecuación (b)}$$

Obtenidas las derivadas corregidas, su valor se multiplica por dPx ó dPy, según el caso, para obtener la magnitud del cambio operado en la variable de que se trata.

Entonces, en el caso de la ecuación (a) -cambio en Px, siendo "x" la variable del término cuadrático "simple"- se tendrá:

$$d\lambda = \frac{\text{Numerador del cociente que expresa la derivada}}{|\overline{H}| + 2 . A1 . P_y^2 . dPx} . dPx$$

$$dx = \frac{\text{Numerador del cociente que expresa la derivada}}{|\overline{H}| + 2 . A1 . P_y^2 . dPx} . dPx$$

$$dy = \frac{\text{Numerador del cociente que expresa la derivada}}{|\overline{H}| + 2 . A1 . P_y^2 . dPx} . dPx$$

3er. Tipo: $A1\ xy + A2\ x + A5\ y^2 = U$ (a)

$A1\ xy + A3\ y + A4\ x^2 = U$ (b)

Cuando, a más del término cuadrático "simple" aparece la OTRA variable en forma lineal, y siempre que se trate del cambio de precio de la variable del término cuadrático "simple", el procedimiento recién visto da información correcta sobre esta misma variable y sobre " λ ", pero no sobre el efecto cruzado.

La derivada de "y" respecto del cambio en Px requiere también la modificación del numerador del cociente que expresa la derivada. En el caso de la ecuación (b), la derivada corregida será:

$$\left(\frac{\partial y^{\circ}}{\partial Px}\right)_C = \frac{\text{Numerador del cociente que expresa la derivada} + A3.dPx}{|\overline{H}| + 2 . A1 . P_y^2 . dPx}$$

---0---

-6-

La eficacia de los correctores analizados descansa en el hecho de que, si se adiciona a la expresión simbólica desarrollada que define en la optimización primitiva a una de las variables, la expresión simbólica desarrollada de la respectiva derivada corregida multiplicada por el cambio en el precio, se obtiene, efectuadas las operaciones y simplificaciones necesarias, una expresión idéntica a la que se obtiene para la misma variable mediante una nueva maximización al nuevo precio y renta constante.

Ejemplificando con una función de utilidad muy sencilla: $U = Al\ xy$, y denotando con x' el valor que asigna a la variable "x" la nueva maximización, tendríamos:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^0 & & \left(\dfrac{\partial x^0}{\partial P_x}\right)_C & & dP_x & & x' \\[2ex]
\dfrac{R^0}{2P_x^0} & + & -\dfrac{R^0}{2\ P_x\ P_x^0} \cdot \dfrac{P_x^0}{P_x^0 + dP_x} & \cdot & dP_x & \equiv & \dfrac{R^0}{2\ (P_x^0 + dP_x)}
\end{array}
$$

---0---

Debemos destacar finalmente que, aún dentro del reducido marco en que nos hemos desenvuelto, los procedimientos correctores, al permitir cuantificar la magnitud de los efectos cuyas tasas de cambio evalúan los dos términos de la ecuación de Slutsky: sustitución y renta, proporcionan, a nuestro entender, un dato a tener en cuenta cuando se afirma que el término que en esta ecuación evalúa el efecto sustitución supone inalterable el nivel de utilidad.

---0---

Referencias:

- Chiang, Alpha C. "Métodos fundamentales de economía matemática", Amorrortu, Buenos Aires, 1971.

- Slutsky, E. "Sulla teoría del bilancio del Consumatore", en Revista Giornale degli Economisti, Julio 1915.

EJEMPLOS NUMERICOS

Ejemplos con los tipos de funciones de utilidad estudiados:

Ejemplo del 1er. Tipo:

$U = xy + 26x + y$; $U^o = 240$.

$R = 38x + 7y$; $P_x^o = 38$; $P_y^o = 7$; $R^o = 312$.

Datos del máximo restringido:

$x^o = 6$; $y^o = 12$; $\lambda^o = 1$; hessiano orlado, $|\overline{H}| = 532$ (positivo)

Cambio de precio: Px baja a: 30,40 ($dPx = -7{,}60$)

La maximización dá los siguientes valores:

$x' = 7{,}625$; cambio operado: $dx = 1{,}625$

$y' = 11{,}45714286$; " " : $dy = -0{,}54285714$

$\lambda' = 1{,}232142857$; " " : $d\lambda = 0{,}232142857$

Derivadas sin corrección	Variaciones que se obtienen
$\frac{\partial x^o}{\partial Px} = -\frac{91}{532} = -0{,}171052631$	$dx = -0{,}171052631 \cdot (-7{,}6) = 1{,}3$
$\frac{\partial y^o}{\partial Px} = \frac{38}{532} = 0{,}071428571$	$dy = 0{,}071428571 \cdot (-7{,}6) = -0{,}54285714$ (= variación real)
$\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px} = -\frac{13}{532} = -0{,}02443609$	$d\lambda = -0{,}02443609 \cdot (-7{,}6) = 0{,}185714285$

Corrección: Se multiplica, en el caso que corresponda, el valor de la derivada por:

$$\frac{P_x^o}{P_x^o + dPx}$$

$$\left(\frac{\partial x^o}{\partial Px}\right)_c = \frac{\partial x^o}{\partial Px} \cdot \frac{P_x^o}{P_x^o + dP_x} = -\frac{91}{532} \cdot \frac{38}{30{,}4} = -0{,}171052631 \cdot \frac{38}{30{,}4} = -0{,}213815788$$

Variación que se obtiene: $dx = -0{,}213815788 \cdot (-7{,}6) = 1{,}625$

$$\left(\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px}\right)_c = \frac{\partial \lambda^o}{\partial Px} \cdot \frac{P_x^o}{P_x^o + dP_x} = -\frac{13}{532} \cdot \frac{38}{30{,}4} = -0{,}02443609 \cdot \frac{38}{30{,}4} = -0{,}030545112$$

Variación que se obtiene: $d = -0{,}030545112 \cdot (-7{,}6) = 0{,}232142857$

Como se ha visto, $\frac{\partial y^o}{\partial Px}$ ("efecto cruzado") no necesita corrección.

Ejemplo del 2do. Tipo:

$U = 30\ xy + 10\ x^2;\ U^o = 1.000.$

$R = 29\ x + 12\ y\ ;\ P_x = 29;\ P_y = 12;\ R^o = 200.$

Datos del máximo restringido:

$x^o = 4;\ y^o = 7;\ \lambda^o = 10;\ |\overline{H}| = 18.000$ (positivo).

Cambio de precio: Px baja a: 20 (dPx = -9).

La maximización dá los siguientes valores:

$x' = 6{,}25$ cambio operado: $dx = 2{,}25$

$y' = 6{,}25$ " " $dy = 0{,}75$

$\lambda' = 15{,}625$ " " $d\lambda = 5{,}625$

Derivadas sin corrección	Variaciones que se obtienen
$\frac{\partial x^o}{\partial P_x} = -\frac{2.880}{18.000} = -0{,}16$	$dx = -0{,}16\ .\ (-9) = 1{,}44$
$\frac{\partial y^o}{\partial P_x} = \frac{960}{18.000} = 0{,}05\overline{3}\ldots$	$dy = 0{,}05\overline{3}\ldots\ (-9) = -0{,}48$
$\frac{\partial \lambda^o}{\partial P_x} = -\frac{7.200}{18.000} = -0{,}4$	$d\lambda = -0{,}4\ .\ (-9) = 3{,}6$

Corrección: El denominador de la derivada ($|\overline{H}| = 18.000$) debe disminuirse en la siguiente medida antes de efectuar el cociente:

$|\overline{H}| + 2\lambda_1\ P_y\ dP_x = 18.000 + 2 \times 30 \times 12\ (-9) = 11.520.$ Entonces:

$$\left(\frac{\partial x^o}{\partial P_x}\right)_c = -\frac{2.880}{11.520} = -0{,}25$$

Variación que se obtiene: $dx = -0{,}25\ .\ (-9) = 2{,}25$

$$\left(\frac{\partial y^o}{\partial P_x}\right)_c = \frac{960}{11.520} = 0{,}08\overline{3}\ldots$$

Variación que se obtiene: $dy = 0{,}08\overline{3}\ldots\ (-9) = -0{,}75$

$$\left(\frac{\partial \lambda^o}{\partial P_x}\right)_c = -\frac{7.200}{11.520} = -0{,}625$$

Variación que se obtiene: $d\lambda = -0{,}625\ .\ (-9) = 5{,}625$

Ejemplo del 3er. Tipo:

$U = 50\ xy + x^2 + y;\ U^o = 1.029$

$R = 21\ x + 25{,}1\ y;\ P_x = 21;\ P_y = 25{,}1;\ R^o = 205{,}4$

Datos del máximo restringido:

$x^o = 5;\ y^o = 4;\ \lambda^o = 10;\ |\overline{H}| = 51.449{,}98$ (positivo)

Cambio de precio: Px baja a: 14 (dPx = - 7)

La maximización da los siguientes valores:

$x' = 7{,}598162691$	cambio operado:		$dx =$	$2{,}598162691$
$y' = 3{,}945247902$	"	"	$dy =$	$-\ 0{,}054752098$
$\lambda' = 15{,}17562289$	"	"	$d\lambda =$	$5{,}17562289$

Derivadas sin corrección	Variaciones que se obtienen
$\frac{\partial x^o}{\partial Px} = -\frac{12.575{,}1}{51.499{,}98} = -\ 0{,}244414089;$	$dx = -\ 0{,}244414089\ .\ (-7) = 1{,}710898624$
$\frac{\partial y^o}{\partial Px} = \frac{272}{51.499{,}98} = 0{,}005286688;$	$dy = 0{,}005286688\ .\ (-7) = 0{,}037006816$
$\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px} = -\frac{25.050}{51.449{,}98} = -\ 0{,}486880655;$	$d\lambda = -\ 0{,}486880655\ .\ (-7) = 3{,}408164585$

Corrección: Para las variables "x" y "λ" basta con modificar el denominador de la derivada, como ya se dijo ($|\overline{H}| + 2\ A1\ P_y\ dPx$). En cambio para la variable "y", hay que modificar también el numerador sumándole el producto: A3 dPx.

El nuevo denominador, para las tres variables, será:

$$51.449{,}98 + 2 \times 50 \times 25{,}1\ (-7) = 33.879{,}98$$

En cuanto a los numeradores: las variables "x" y "λ" conservan el de la ecuación original; la variable "y" debe adicionarle el producto antedicho:

$$272 + 1\ (-7) = 265$$

$$\left(\frac{\partial x^o}{\partial Px}\right)_C = -\frac{12.575{,}1}{33.879{,}98} = -\ 0{,}371166098$$

Variación que se obtiene: $dx = -\ 0{,}371166098\ (-7) = 2{,}598162691$

$$\left(\frac{\partial y^o}{\partial Px}\right)_C = \frac{265}{33.879{,}98} = 0{,}007821728$$

Variación que se obtiene: $dy = 0{,}007821728\ (-7) = -\ 0{,}054752098$

$$\left(\frac{\partial \lambda^o}{\partial Px}\right)_C = \frac{25.050}{33.879{,}98} = -\ 0{,}73937\ 4698$$

Variación que se obtiene: $d\lambda = -\ 0{,}739374698\ (-7) = 5{,}17562289$