

# notas de matemática

VARIEDADES ABSTRACTAS

Marta Sagastume

N° 26

1973

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

**VARIEDADES ABSTRACTAS**

**Marta S. Sagastume**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**

**Departamento de Matemática**



## Indice

Prólogo	pag. 1
Primera Parte: Definición de variedad abstracta	
§1. Introducción	4
§2. Atlas abstractos	8
§3. Morfismos de atlas abstractos	17
§4. Variedades abstractas	21
§5. Un ejemplo de atlas abstracto	24
Segunda Parte: Definición de la variedad tangente	
§1. Modelos tangentes	27
§2. Definición del atlas tangente	32
§3. Restricción del atlas dominio de un morfismo dado	39
§4. Definición del morfismo tangente asociado a uno dado	52
§5. Propiedades functoriales de los morfismos tangentes	62
§6. Aplicación del esquema a una variedad diferenciable	68
Referencias	85



## PROLOGO

El propósito de este trabajo es establecer el fundamento de una teoría categorial de variedades diferenciables, que podría generalizar definiciones y teoremas de la geometría diferencial. Se tiene la idea de que nociones tales como atlas y variedades diferenciables y aplicaciones entre ellos pueden expresarse en una forma muy general mediante el lenguaje de la teoría de categorías. Así surgen los atlas abstractos, los morfismos entre ellos, las variedades abstractas, etc. Esa definición general admite como ejemplos, además de los entes que generaliza, otros sin vinculación aparente con aquellos, como sucede en el § 5 de la primera parte, en que la proposición 5.6 y su corolario 5.7 proveen ejemplos "algebraicos" de atlas abstractos, que no surgen naturalmente del modelo "topológico" que se tuvo en mente.

A partir de las definiciones "abstractas" mencionadas se tratan de obtener propiedades análogas a las que tienen los entes de los cuales se partió. Así por ejemplo, en el § 4 de la primera parte se obtiene una categoría de variedades abstractas y morfismos entre ellas. Otra tarea importante, que ocupa toda la segunda parte, es la de construir en ciertas condiciones muy generales (ver postulados (1) a (6), § 1) el atlas tangente a uno dado, así como también el morfismo tangente asocia

do a un morfismo dado (y luego por supuesto, las variedades tangentes correspondientes). Para la definición del atlas tangente se usó la idea (ver [1]) de "pegar" sus codominios de mapa mediante morfismos de la forma  $(\varphi \circ pr, D\varphi)$  si se considera que los respectivos codominios del atlas dado se "pegan" mediante los morfismos  $\varphi$ .

También se caracteriza el morfismo tangente asociado a uno dado  $f$  por medio de los morfismos que quedan inducidos entre los modelos de los atlas tangentes, que serán de la forma  $(\varphi \circ pr, D\varphi)$ , con  $\varphi$  inducido por  $f$  entre los modelos de los atlas dados. Con estas definiciones se logra además construir un funtor tangente "generalizado" y, aplicadas al caso concreto, se demuestra que se obtienen las nociones conocidas (ver §6) relacionándose asimismo el funtor tangente "concreto" con el "abstracto" (teorema 6.9)

Se obtienen además algunos resultados como por ejemplo una realización de atlas abstractos (ver teorema 2.5, primera parte), el isomorfismo entre una categoría de variedades abstractas y otra de sus realizaciones (teorema 4.5, primera parte), una "restricción" que constituye una equivalencia de atlas abstractos, que se aplica en el caso particular del atlas dominio de un morfismo dado (ver proposición 3.5 y teorema 3.8), etc.

Se espera de esta manera seguir obteniendo resultados que llevarán a la generalización de teoremas conocidos, así como a

poner en evidencia la raíz categorial o funtorial de algunos resultados clásicos.





Primera parte: Definición de variedad abstracta

§1. INTRODUCCION

1.1 Terminología:

Las topologías de Grothendieck serán llamadas  $G$ -topologías; su definición es la de [2]. En lo que sigue  $\mathcal{C}$  es la categoría de conjuntos y funciones, y  $G\text{-}\mathcal{C}$  es la  $G$ -topología que se obtiene de  $\mathcal{C}$  adjuntándole, como  $\text{Cov}(G\text{-}\mathcal{C})$  la familia de los conjuntos  $\Phi$  de morfismos tales que, para cada  $\Phi$ , las imágenes de las funciones pertenecientes a  $\Phi$  cubren en sentido habitual un cierto conjunto  $U_\Phi$ . Se hará uso de los funtores y transformaciones naturales generalizados introducidos por Ehresmann (ver [3]): un funtor generalizado  $F$ , de la categoría  $C$  en la categoría  $C'$  asocia a cada morfismo de  $C$  una clase no vacía de morfismos de  $C'$ , de tal manera que, si  $e$  es la unidad del objeto  $A$  de  $C$ ,  $F(e)$  es la clase de las unidades de los objetos de  $F(A)$ , y si  $h = g \circ f$  en  $C$ , entonces:

$$F(h) = F(g) \circ F(f) = \{z \mid \exists u \in F(f) \text{ y } v \in F(g) \text{ con } z = v \circ u\}$$

Nuestra definición de transformación generalizada será ligeramente diferente de la de Ehresmann: si  $F$  y  $F'$  son funtores generalizados de  $C$  en  $C'$ , una transformación generalizada  $t$  de  $F$  en  $F'$  asocia a cada objeto  $A$  de  $C$  una clase de morfismos que tienen por dominio un objeto de  $F(A)$  y por codominio un objeto de  $F'(A)$ , de tal manera que: (i) Para todo  $X \in F(A)$  existe al menos una flecha de  $t(A)$  cuyo dominio es  $X$ , (ii) Si  $X \in F(A)$ ,  $X' \in F(B)$ ,  $Y \in F'(A)$ ,  $Y' \in F'(B)$ ,  $u: X \rightarrow Y$  con  $u \in t(A)$ ,  $v: X' \rightarrow Y'$  con  $v \in t(B)$  y  $g \in F(f)$  con  $f: A \rightarrow B$  y  $g: X \rightarrow X'$ ,

entonces existe  $f': A \rightarrow B$  y  $h: Y \rightarrow Y'$  tales que  $h \in F'(f')$  y  $h \circ u = v \circ g$ . Se componen las transformaciones generalizadas de  $C$  en  $C'$  por la fórmula:  $(t_2 \circ t_1)(A) = t_2(A) \cdot t_1(A)$ . Se obtiene así una categoría cuyos objetos son los funtores generalizados de  $C$  en  $C'$  y cuyos morfismos son las transformaciones generalizadas entre tales funtores. Si el segundo funtor  $F'$  es constante, entonces para cada  $X \in F(A)$  hay exactamente un morfismo perteneciente a  $t(A)$  cuyo dominio es  $X$ .

Una transformación generalizada  $t: F \rightarrow F'$  (funtores generalizados de  $C$  en  $C'$ ) tal que, para todo objeto  $A$  de  $C$ ,  $\forall h \in t(A)$ ,  $h$  sea un isomorfismo en  $C'$  será llamada equivalencia débil de  $F$  en  $F'$ .

Un funtor generalizado de la  $G$ -topología  $T$  en la  $G$ -topología  $T'$  es un funtor generalizado  $F: \text{Cat } T \rightarrow \text{Cat } T'$ , tal que se verifican las dos condiciones siguientes: (i) Para todo conjunto  $\{\varphi_i: V_i \rightarrow V\} \in \text{Cov } T$  y para todo  $X \in F(V)$ , si  $\Phi$  es la familia de todos los morfismos de la forma  $g: Y \rightarrow X$  con  $g \in F(\varphi_i)$  para para al menos un índice  $i$ , entonces  $\Phi \in \text{Cov } T'$ . (ii) Dado el diagrama  $V_1 \xrightarrow{g_1} V \xleftarrow{g_2} V_2$ ,  $g_i \in F(f_i)$  ( $i=1,2$ ),  $f_i: U_i \rightarrow U$ ; si existe en  $\text{Cat } T'$  un objeto no inicial  $A$  y morfismos  $a_i: A \rightarrow V_i$  tales que  $g_1 \circ a_1 = g_2 \circ a_2$ , entonces  $\exists \bar{U}, \bar{V} \in F(\bar{U})$ ,  $h_i: \bar{U} \rightarrow U_i$ ,  $k_i \in F(h_i)$  tales que el siguiente es un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T'$ :

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & \xleftarrow{k_1} & \bar{V} & \xrightarrow{k_2} & V_2 \\
 & \searrow \xi_1 & & \swarrow \xi_2 & \\
 & & V & & 
 \end{array}$$

Si se tiene un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T$ :

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xleftarrow{P_i} & U_{ij} & \xrightarrow{P_j} & U_j \\ & \searrow \varphi_i & & \swarrow \varphi_j & \\ & & U & & \end{array}$$

entonces existe un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T'$ :

$$\begin{array}{ccccc} V_i & \xleftarrow{r_i} & \bar{U}_{ij} & \xrightarrow{r_j} & V_j \\ & \searrow f_i & & \swarrow f_j & \\ & & V & & \end{array}$$

siendo  $r_\alpha$  ( $\alpha = i, j$ ) valores del funtor  $F$  y  $f_\alpha \in F(\varphi_\alpha)$

Hay una noción evidente de cofunctor generalizado y de transformación generalizada entre tales cofuntores.

## 1.2 Teorema de Kan sobre la existencia de límites:

Hay una noción evidente de límite de un funtor (o de un cofunctor) generalizado, con respecto a una transformación generalizada y el teorema de existencia de Kan [4] vale bajo la forma siguiente:

### Teorema de Kan para funtores generalizados en $\mathcal{C}$ :

A todo funtor generalizado  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  se puede asociar, de manera canónica, un conjunto  $A$  y una transformación generalizada  $\underline{t}$ , de manera que  $A$  sea límite directo de  $F$  con respecto a  $\underline{t}$ .

La demostración sigue el esquema de la de (4). En el conjunto de ternas  $(U, V, x)$  tales que  $U$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ ,  $V \in \Gamma(U)$  y  $x \in V$  se define una relación (reflexiva y transitiva), denotada  $\sim$ , por la condición siguiente:  $(U, V, x) \sim (U', V', x')$  si y sólo si existen morfismos  $f: U \longrightarrow U'$  y  $g: V \longrightarrow V'$  tales que  $g \in F(f)$  y  $g(x) = x'$ . Sea  $R$  la relación de equivalencia generada por  $\sim$ :  $(U, V, x) R (U', V', x')$  si y sólo si existe

una sucesión finita de ternas  $t_0, \dots, t_n$ , tales que:  $t_0 = (U, V, x)$ ,  $t_n = (U', V', x')$  y  $t_{i-1} \sim t_i$  ó  $t_i \sim t_{i-1}$ , para  $i=1, \dots, n$ .

Sea  $A$  el conjunto cociente por  $R$ . Se define una transformación generalizada  $\underline{t}$ , de  $F$  en el funtor "constante" de dominio  $\mathcal{C}$  y "valor"  $A$ , definiendo como  $t(U)$  el conjunto de aplicaciones  $t(U)_V: V \rightarrow A$  (donde  $V \in F(U)$ ) dadas por:  $t(U)_V(x) = \overline{(U, V, x)}$  donde la barra indica la clase de equivalencia con respecto a  $\underline{t}$ . En el caso en que los valores de  $F$  en los morfismos sean todas inclusiones, el conjunto  $A$  es isomorfo a  $\bigcup_{V \in F(U), U \in \text{Ob}(\mathcal{C})} V$  (unión de los valores de  $F$  en los objetos de  $\mathcal{C}$ ).

En todo lo que sigue, escribiremos simplemente "límite" en lugar de "límite directo".

pecto a una transformación generalizada  $\underline{t}$  que a cada objeto  $U$  de  $\text{Cat } T$  asocia el conjunto de las inclusiones  $U' \hookrightarrow X$ , donde  $U'$  recorre  $F(U)$ . Sea ahora  $\underline{s}$  la transformación generalizada de  $F$  en el funtor idéntico sobre  $\text{Cat } T$ , que a cada objeto  $U$  de  $\text{Cat } T$  asocia la clase de mapas de  $\mathcal{A}$  cuyo codominio es  $U$ : es una equivalencia débil. La terna  $(F, X, s)$  es un atlas abstracto de soporte  $X$  y de transformación asociada  $\underline{t}$ .

### 2.3 Subcategorías inclusivas:

Llamaremos así a toda subcategoría  $D$  de  $C$  tal que:  $\text{Ob}(D) = \text{Ob}(C)$  y para  $A$  y  $B$  objetos cualesquiera de  $D$ , el conjunto  $D(A, B) \cup D(B, A)$  tiene a lo sumo un elemento.

El ejemplo típico de subcategoría inclusiva es la subcategoría de  $\mathcal{C}$  cuyos morfismos son las inclusiones.

### 2.4 $C^r$ -categorías:

Sea  $S$  un conjunto de espacios de Banach; una categoría será llamada  $C^r$ -categoría de tipo  $S$  si sus objetos son abiertos de los espacios de  $S$  y sus morfismos son:  $C^r$ -isomorfismos, inclusiones ó composiciones en número finito cualquiera de tales morfismos con la propiedad siguiente: todo abierto incluido en un objeto es un objeto, todas las inclusiones entre objetos son morfismos, y todo  $C^r$ -isomorfismo de un objeto sobre un abierto de un espacio  $E \in S$  es un morfismo.

Una  $C^r$ - $G$ -topología de tipo  $S$  es una  $G$ -topología  $T$  tal que  $\text{Cat } T$  es una  $C^r$ -categoría de tipo  $S$  y  $\text{Cov } T$  es la familia de conjuntos de morfismos que cubren en sentido habitual un cierto objeto de  $\text{Cat } T$ .

### 2.5. Teorema de realización:

Teorema: Sea  $(F, X, s)$  con  $F: T \rightarrow G\text{-}\mathcal{C}$ , un atlas abstracto de transformación asociada  $t$ , tal que:

- (i)  $T$  es una  $C^r$ - $G$ -topología de tipo  $S$ .
- (ii)  $F$  toma sus valores en una subcategoría inclusiva de  $\text{Cat } \bar{T} = \mathcal{C}$ .

Entonces existe un  $C^r$ -atlas hereditario  $\alpha$ , de tipo  $S$ , cuyo conjunto subyacente es  $X$  y cuyos mapas son las composiciones de la forma  $h \circ \hat{g}^{-1}$ , con  $h \in s(U)$ ,  $g \in t(U)$ , y donde  $\hat{g}$  es la restricción de  $g$  a su imagen.

Demostración: Probaremos en primer lugar que, para todo  $f: U_1 \rightarrow U_2$  en  $\text{Cat } T$  y para todo  $g \in F(f)$ , la aplicación  $g$  es inyectiva.

Sea  $g: V_1 \rightarrow V_2$ . Como  $\underline{s}$  es una transformación generalizada de  $F$  en el funtor idéntico sobre  $\text{Cat } T$ , existe  $h \in s(U_1)$ ,  $k \in s(U_2)$  con  $h: V_1 \rightarrow U_1$ ,  $k: V_2 \rightarrow U_2$ . Por definición de transformación generalizada, existe entonces un morfismo  $f': U_1 \rightarrow U_2$  tal que:  $f' \circ h = k \circ g$ . Pero  $f'$  (siendo un morfismo de  $\text{Cat } T$ ) es inyectiva, y  $h$  es inyectiva puesto que  $\underline{s}$  es una equivalencia débil. Luego  $g$  es inyectiva.

Sea ahora  $V \in F(U)$ , y llamemos  $t(U)_V: V \rightarrow X$  a la única aplicación de dominio  $V$  perteneciente a  $t(U)$ . Probaremos que esta aplicación es inyectiva. Es suficiente hacer la demostración para el caso en el que  $X$  es el límite de  $F$  con respecto a  $\underline{t}$  construido de manera canónica por aplicación del teorema de Kan (1.2).

Supongamos  $t(U)_V(x) = t(U)_V(y)$ . Luego  $\overline{(U, V, x)} = \overline{(U, V, y)}$ .

Entonces existe una sucesión finita de ternas  $t_0, \dots, t_n$ , tal que (con las notaciones de 1.2)  $t_{i-1} \sim t_i$  ó  $t_i \sim t_{i-1}$ , para  $i=1, \dots, n$ , y  $t_0 = (U, V, x)$ ,  $t_n = (U, V, y)$ . Para  $n=0$  se tiene  $x=y$ . Supongamos  $n=1$ ; luego existe  $f: U \rightarrow U$ ,  $g: V \rightarrow V$  con  $g \in F(f)$  y  $g(x)=y$ , o bien  $g(y)=x$ . Por la hipótesis (ii) del enunciado del teorema se tiene  $g=1_V$ , luego  $x=y$ . Supongamos ahora  $n=2$ . Entonces existe  $(U_1, V_1, x_1)$  tal que se verifica uno de los siguientes casos:

- (a)  $(U, V, x) \sim (U_1, V_1, x_1) \sim (U, V, y)$
- (b)  $(U, V, y) \sim (U_1, V_1, x_1) \sim (U, V, x)$
- (c)  $(U, V, x) \sim (U_1, V_1, x_1)$  y  $(U, V, y) \sim (U_1, V_1, x_1)$
- (d)  $(U_1, V_1, x_1) \sim (U, V, x)$  y  $(U_1, V_1, x_1) \sim (U, V, y)$

En lo que sigue supondremos siempre  $g_i \in F(f_i)$ ,  $i=1, 2$ .

En el caso (a) se tiene:  $f_1: U \rightarrow U_1$ ,  $f_2: U_1 \rightarrow U$ ,  $g_1: V \rightarrow V_1$ ,  $g_2: V_1 \rightarrow V$ , con  $g_2(g_1(x)) = y$ . Pero  $g_2 \circ g_1 = 1_V$ , luego  $x=y$ . El caso (b) es análogo. En el caso (c) existen  $f_1, f_2: U \rightarrow U_1$ ,  $g_1, g_2: V \rightarrow V_1$ , con  $g_1(x) = g_2(y)$ . Pero de acuerdo a lo que se ha probado al principio de esta demostra -



ción,  $g_1$  es inyectiva y, por la hipótesis (ii),  $g_1 = g_2$ , luego  $x = y$ . El caso (d) es análogo.

Se demostrará por inducción que, si existe una sucesión de  $n$  ternas  $t_0, \dots, t_n$  con las propiedades ya enunciadas, entonces  $x=y$ . Esto ya ha sido demostrado para  $n = 0, 1, 2$ .

Supongámoslo verdadero para  $n \geq 2$  y supongamos que existe una sucesión de longitud  $n+1$  con las propiedades enunciadas:  $t_0, \dots, t_{n+1}$ . Si existiera un índice  $j$  tal que  $1 \leq j \leq n$  y  $t_{j-1} \sim t_j \sim t_{j+1}$ , ó  $t_{j+1} \sim t_j \sim t_{j-1}$ , se tendría una sucesión de longitud  $n$  con las mismas propiedades, pues la relación es transitiva; luego, en virtud de la hipótesis inductiva, el teorema estaría demostrado. Entonces, reemplazando el símbolo  $\sim$  por una flecha, sólo quedan por considerar los dos casos siguientes:

$$(1) \quad (U, V, x) \rightarrow (U_1, V_1, x_1) \leftarrow (U_2, V_2, x_2) \rightarrow (U_3, V_3, x_3) \dots$$

$$(2) \quad (U, V, x) \leftarrow (U_1, V_1, x_1) \rightarrow (U_2, V_2, x_2) \leftarrow (U_3, V_3, x_3) \dots$$

En el caso (1) se tiene un diagrama no necesariamente conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{g_1} & V_1 & \xleftarrow{g_2} & V_2 \\ u \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow w \\ U & \xrightarrow{f_1} & U_1 & \xleftarrow{f_2} & U_2 \end{array}$$

con.  $u \in s(U)$ ,  $v \in s(U_1)$ ,  $w \in s(U_2)$ . Pero como  $\underline{s}$  es una transformación generalizada, existen  $f'_1, f'_2$  en  $\text{Cat } T$  tales que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{g_1} & V_1 & \xleftarrow{g_2} & V_2 \\ u \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow w \\ U & \xrightarrow{f'_1} & U_1 & \xleftarrow{f'_2} & U_2 \end{array}$$

$$U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$$

con  $U' \in F_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ ,  $m \in s_1(U)$ , existe

$$\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov } \bar{T}_1$$

tal que, para cada  $j \in J$  existe un diagrama en  $\text{Cat } \bar{T}$ ,

$$V_j \xleftarrow{n} V_j' \xrightarrow{k} X_2$$

con  $V_j' \in F_2(V_j)$ ,  $k \in t_2(V_j)$ ,  $n \in s_2(V_j)$ , y un morfismo de  $\text{Cat } K$

$f_j: U_j \rightarrow V_j$ , de manera que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\
 & & \uparrow h & & \downarrow k \\
 & U' & & & V_j' \\
 & \uparrow m^{-1} & & & \uparrow n^{-1} \\
 & U & & & V_j \\
 & \downarrow \varphi_j & U_j & \xrightarrow{f_j} & V_j
 \end{array} \quad (1)$$

### 3.4 Proposición:

Sea  $C$  una clase de atlas abstractos, y sea  $K$  una  $G$ -topología intermedia para  $C$ . Si se toma como clase de objetos la clase  $C$ , como morfismos los  $K$ -morfismos entre atlas de  $C$  (3.3), y como composición la de  $\bar{T}$  (siendo  $\bar{T}$  la  $G$ -topología "blanco" para todos los atlas de  $C$ ), entonces se obtiene una categoría.

En efecto: para todo atlas  $(F, X, s) \in C$ , la aplicación  $1_X$  es un  $K$ -morfismo de ese atlas en sí mismo; para verlo, basta tomar como  $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}$  la clase de un elemento  $\{1_U\}$ , como  $V_j$  el mismo objeto  $U$ , como  $f_j$  la identidad  $1_U$ , y  $n=m$ ,  $k=h$ .

Además, si  $f: (F_1, X_1, s_1) \rightarrow (F_2, X_2, s_2)$ ,  $g: (F_2, X_2, s_2) \rightarrow (F_3, X_3, s_3)$  son  $K$ -morfismos, la composición  $g \circ f$  es un  $K$ -morfismo de  $(F_1, X_1, s_1)$  en  $(F_3, X_3, s_3)$ . Para verlo, sea en  $\text{Cat } \bar{T}$  el diagrama  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$  como en 3.3. Fuesto que  $f$  es un  $K$ -morfismo

existe  $\{\varphi_j: U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov } T_1$ , tal que, para todo  $j \in J$  existe  $f_j: U_j \rightarrow V_j$  en  $\text{Cat } K$  y el diagrama conmutativo (1). Pero, estando dado el diagrama  $V_j \xrightarrow{n} V'_j \xrightarrow{k} X_2$  y puesto que  $g$  es un  $K$ -morfismo, existirá:  $\{\psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j\}_{r \in R} \in \text{Cov } T_2$ , y para cada  $r \in R$  un morfismo de  $\text{Cat } K$ ,  $\xi_r: V_{jr} \rightarrow W_r$ , de manera que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_2 & \xrightarrow{g} & X_3 \\
 & \nearrow k & & & \searrow u \\
 m^{-1} \uparrow & V'_j & & & W'_r \\
 & \downarrow \varphi_j & & & \downarrow q^{-1} \\
 & V_j & \xrightarrow{\psi_{jr}} & V_{jr} & \xrightarrow{\xi_r} & W_r
 \end{array} \quad (2)$$

con  $u \in t_3(W_r)$ ,  $q \in s_3(W_r)$ . Como  $\Psi = \{\psi_{jr}: V_{jr} \rightarrow V_j\} \in \text{Cov } T_2$ , se tiene  $\Psi \in \text{Cov } K$  puesto que  $T_2$  es una sub- $G$ -topología de  $K$ .

Luego, si llamamos  $V_{jr} \times U_j$  al producto fibrado de  $V_{jr}$  por  $U_j$  sobre  $V_j$  con respecto a  $\psi_{jr}$  y  $f_j$ , se tiene:  $\Phi = \{V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j\}_{r \in R} \in \text{Cov } K$ . Pero  $K$  es intermedia y  $U_j$  es un objeto de  $\text{Cat } T_1$ ; luego  $\Phi \in \text{Cov } T_1$ . Entonces:

$$\Sigma = \{V_{jr} \times U_j \rightarrow U_j \xrightarrow{\varphi_j} U\}_{j,r} \in \text{Cov } T_1.$$

Pongamos:  $\Sigma = \{\sigma_s\}$  para  $s \in S$ . Para cada  $s \in S$  existe un morfismo de  $\text{Cat } K$ ,  $d_s: V_{jr} \times U_j \rightarrow W_r$  obtenido por composición de la proyección de producto fibrado:  $V_{jr} \times U_j \rightarrow V_j$  con  $\xi_r: V_{jr} \rightarrow W_r$ . Se ve entonces fácilmente que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{\xi \cdot f} & X_3 \\
 & \nearrow h & & & \searrow u \\
 m^{-1} \uparrow & U' & & & W'_r \\
 & \downarrow \sigma_s & & & \downarrow q^{-1} \\
 & U & \xrightarrow{\sigma_s} & V_{jr} \times U_j & \xrightarrow{d_s} & W_r
 \end{array}$$

lo que prueba la proposición.

### 3.5 Proposición:

Sean  $\alpha_1, \alpha_2$   $C^r$ -atlas hereditarios de tipo S, cuyos conjuntos subyacentes son  $X_1, X_2$  respectivamente. Sea  $A_i$  ( $i=1,2$ ) el atlas abstracto obtenido de  $\alpha_i$  por aplicación de 2.2; sean  $K$  la  $G$ -topología intermedia descrita en 3.2 tomando como  $C$  la clase  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  y  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una función. Entonces  $f$  es una  $C^r$ -aplicación diferenciable de la estructura de  $C^r$ -variedad diferenciable definida por  $\alpha_1$  en la definida por  $\alpha_2$  si y sólo si  $f$  es un  $K$ -morfismo de  $A_1$  en  $A_2$ , en el sentido de 3.3.

### 3.6 Proposición:

Sean  $A_1, A_2$  atlas abstractos que satisfacen las hipótesis (i) y (ii) del teorema 2.5;  $\alpha_1, \alpha_2$  los  $C^r$ -atlas correspondientes por aplicación del teorema 2.5;  $K$  la  $G$ -topología intermedia para la clase  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  descrita en 3.2; y  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una función (siendo  $X_i$  el soporte de  $A_i$ ,  $i=1,2$ ) Sea  $\mathcal{V}_i$  la  $C^r$ -variedad definida por el atlas  $\alpha_i$ . Entonces  $f$  es un  $K$ -morfismo de  $A_1$  en  $A_2$ , en el sentido de 3.3, si y sólo si  $f$  es una aplicación  $C^r$ -diferenciable de  $\mathcal{V}_1$  en  $\mathcal{V}_2$ .

#### §4 . VARIEDADES ABSTRACTAS

##### 4.1 Definición:

Sea  $C$  una clase de atlas abstractos y sea  $K$  una  $G$ -topología intermedia para  $C$ . Sean  $A_i = (F_i, X_i, s_i) \in C$ , para  $i=1,2$ . Diremos que  $A_1$  es  $K$ -equivalente a  $A_2$  si y sólo si  $X_1 = X_2$  y  $l_X$  es un  $K$ -morfismo de  $A_1$  en  $A_2$  y de  $A_2$  en  $A_1$  (y es entonces un isomorfismo).

Es ésta una relación de equivalencia en  $C$ .

##### 4.2 Definición:

En las condiciones de 4.1, se llama  $K$ -variedad abstracta a cada una de las clases de equivalencia en  $C$  por la relación de  $K$ -equivalencia. Un  $K$ -morfismo entre tales variedades es un  $K$ -morfismo entre dos representantes respectivos.

##### 4.3 Teorema:

En las condiciones de 4.2, las  $K$ -variedades abstractas y los  $K$ -morfismos entre ellas forman una categoría.

##### 4.4 Proposición:

Sea  $A$  un atlas abstracto que satisface (i) y (ii) de 2.5. Sean  $\mathcal{A}$  el  $C^r$ -atlas obtenido por aplicación de 2.5 y  $A'$  el atlas abstracto obtenido de  $\mathcal{A}$  por aplicación de 2.2. Entonces  $A$  y  $A'$  son  $K$ -equivalentes (siendo  $K$  como en 3.2) y pertenecen, entonces, a la misma  $K$ -variedad abstracta.

En efecto: sea el diagrama  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ , con  $U' \in \mathcal{E}(U)$ ,  $m \in s(U)$

$h \in t(U)$ . Existen entonces  $\{l_U: U \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$ , el diagrama:

$$U \xleftarrow{m \cdot \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X \quad \text{en } \text{Cat } T_2 = \text{Cat } T \text{ y el morfismo } l_U \text{ (en lugar de } f_j), \text{ tales que } l_X \text{ satisface la definici3n de morfismo 3.3 .}$$

Rec3procamente: estando dado el diagrama:

$$U \xleftarrow{m \cdot \hat{h}^{-1}} h(U') \hookrightarrow X$$

el cubrimiento  $\{l_U: U \rightarrow U\}$ , el diagrama  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$  y el morfismo de  $\text{Cat } K$   $l_U: U \rightarrow U$ , permiten establecer que  $l_X$  es un morfismo de  $A'$  en  $A$ .

#### 4.5. Teorema:

Sea  $S$  una clase de espacios de Banach y sea  $K$  la  $G$ -topolog3a definida por: los objetos de  $\text{Cat } K$  son abiertos de los espacios de  $S$ , los morfismos de  $\text{Cat } K$  son las aplicaciones  $C^r$ -diferenciables entre esos objetos, y los elementos de  $\text{Cov } K$  son las clases de morfismos que son  $C^r$ -isomorfismos en su imagen y que cubren  $U$  en el sentido habitual (donde  $U$  recorre  $\text{Ob}(\text{Cat } K)$ ). Sea  $V^r$  la categor3a de  $C^r$ -variedades de tipo  $S$  y de  $C^r$ -morfismos, y sea  $VA^r$  la categor3a siguiente: Los objetos de  $VA^r$  son las variedades abstractas construidas sobre  $C^r$ - $G$ -topolog3as de tipo  $S$  (en el sentido de 2.4) cuyos respectivos funtores generalizados (los que definen los respectivos atlas) toman sus valores en subcategor3as inclusivas de  $\mathcal{E}$ ; los morfismos de  $VA^r$  son los  $K$ -morfismos entre los objetos. Entonces, la construcci3n 2.2 y la proposici3n 3.5 definen un funtor ordinario de

$V^{\mathbb{R}}$  en  $VA^{\mathbb{R}}$ , y el teorema 2.5 y la proposición 3.6 definen un funtor de  $VA^{\mathbb{R}}$  en  $V^{\mathbb{R}}$ . Estos funtores son inversos uno del otro, y las categorías  $V^{\mathbb{R}}$  y  $VA^{\mathbb{R}}$  son entonces isomorfas.

#### 4.6 Remarque:

En todo lo anterior se puede reemplazar "espacios de Banach" por "espacios localmente convexos" y " $C^{\mathbb{R}}$ -variedad" por "variedad diferenciable" en el sentido de [6].

## §5. UN EJEMPLO DE ATLAS ABSTRACTO

### 5.1 Proposición:

Sea  $S$  un funtor fiel ordinario  $S: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{C}$  una categoría cualquiera,  $\mathcal{G}$  como en 1.1. Si  $\mathcal{C}$  tiene productos fibrados y si  $S$  los conserva, es decir: si, cada vez que  $C$  es un  $A_1 \times_B A_2$  es  $S(C)$  un  $S(A_1) \times_{S(B)} S(A_2)$ , entonces:

$$\text{Cov } T = \left\{ \left\{ \varphi_i \right\}_{i \in I} \mid \left\{ S(\varphi_i) \right\}_{i \in I} \in \text{Cov}(G-\mathcal{G}) \right\}$$
 es una clase de cubrimientos tal que:  $T = \{ \mathcal{C}, \text{Cov } T \}$  es una  $G$ -topología, y  $S$  un funtor  $S: T \rightarrow G-\mathcal{G}$ .

### 5.2 Definición:

Llamaremos "de tipo  $G-\mathcal{G}$ " a una  $G$ -topología  $T$  tal que:

(i) Existe un funtor  $S: T \rightarrow G-\mathcal{G}$  tal que  $S: \text{Cat } T \rightarrow \mathcal{G}$  es un funtor fiel ordinario.

(ii) Si  $\{S(\varphi_i)\}_{i \in I} \in \text{Cov}(G-\mathcal{G})$ , entonces  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$ .

Como se ve, (i) y (ii) implican la siguiente equivalencia:  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$  si y sólo si  $\{S(\varphi_i)\}_{i \in I} \in \text{Cov}(G-\mathcal{G})$ . Además, en la proposición 5.1 se ve que esta condición caracteriza a  $\text{Cov } T$ .

### 5.3 Definición:

Llamaremos a  $T$ , en las condiciones de la proposición 5.1, una  $G$ -topología de tipo  $G-\mathcal{G}$  definida por  $\mathcal{C}$ .

Las categorías "algebraicas": de grupos y homomorfismos



de grupos, de anillos, de módulos, etc., son ejemplos de categorías que dan lugar a G-topologías de tipo  $G-\mathcal{C}$ , siendo  $S$  el correspondiente funtor de subyacencia.

#### 5.4 Lema:

Sea  $T = \{ \text{Cat } T, \text{Cov } T \}$  una G-topología,  $\mathcal{C}$  una subcategoría de  $\text{Cat } T$ . Existe una subcategoría  $\bar{\mathcal{C}}$  de  $\text{Cat } T$  que contiene a  $\mathcal{C}$  y tal que  $T' = \{ \bar{\mathcal{C}}, \text{Cov } T|_{\bar{\mathcal{C}}} \}$  es una sub-G-topología de  $T$ , siendo  $\text{Cov } T|_{\bar{\mathcal{C}}}$  la clase de cubrimientos inducida por  $\text{Cov } T$  en  $\bar{\mathcal{C}}$ .

#### Demostración:

La categoría  $\bar{\mathcal{C}}$  es la generada por la clase de objetos que se obtiene adjuntándole a  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  todos los productos fibrados entre los objetos de  $\mathcal{C}$  y por la clase de morfismos formada por los de  $\mathcal{C}$  y las correspondientes proyecciones canónicas de los productos fibrados mencionados.

#### 5.5 Definición:

Llamaremos a  $T'$  (en las condiciones del lema 5.4) una sub-G-topología de  $T$  generada por  $\mathcal{C}$ .

#### 5.6 Proposición:

Sea  $T = \{ \text{Cat } T, \text{Cov } T \}$  una G-topología,  $\mathcal{C}$  una subcategoría de  $\text{Cat } T$ . Sea  $T'$  como en el lema 5.4,  $I: T' \hookrightarrow T$  el funtor inclusión. Entonces, si  $I$  tiene un límite  $X$ , es  $(I, X, l_I)$  un atlas abstracto.

### 5.7 Corolario:

Todo módulo  $M$  sobre un anillo  $A$  es soporte de un atlas abstracto de la forma  $(I, M, I_1)$ , siendo  $I: T' \hookrightarrow T$  el functor inclusión,  $T'$  una  $G$ -topología generada por la categoría de sub-módulos de  $M$  finitamente generados e inclusiones y  $T$  una  $G$ -topología de tipo  $G-\mathcal{C}$  definida por la categoría de  $A$ -módulos y homomorfismos de  $A$ -módulos.

#### Demostración:

Sea  $\mathcal{C}$  la categoría que genera  $T'$ , y  $\mathcal{N}$  la que define a  $T$ . Si se tiene una transformación natural  $t: I \rightarrow M'$ , con  $M'$  functor "constante" igual al objeto  $M'$  de  $\mathcal{N}$  existe un único homomorfismo  $h: M \rightarrow M'$  definido por:

$h(m) = (t(A.m))(m)$ , siendo  $A.m$  el submódulo de  $M$  generado por  $\{m\}$ . Luego, si es  $I_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$  el functor inclusión, se tiene que:  $\varinjlim I_1 = M$ . Además, si consideramos  $\bar{\mathcal{C}}$  definida por:

$\text{Ob}(\bar{\mathcal{C}}) = \{ \text{intersecciones finitas de objetos de } \mathcal{C} \}$

$\text{Morf}(\bar{\mathcal{C}}) = \{ \text{inclusiones entre objetos de } \bar{\mathcal{C}} \}$

y  $T' = \{ \bar{\mathcal{C}}, \text{Cov } T | \bar{\mathcal{C}} \}$ , también será  $\varinjlim I = M$  siendo  $I: T' \hookrightarrow T$  el functor inclusión.

## Segunda parte: Definición de variedad tangente

Nota: En lo que sigue, las referencias que aparecen en el texto serán, salvo mención en lo contrario, correspondientes a los párrafos y números de la segunda parte.

## §1 MODELOS TANGENTES

1.1 Consideraciones previas:

Tomaremos  $(F, X, s)$  como representante de una  $K$ -variedad abstracta, siendo  $F: T \rightarrow \bar{T}$ , y llamaremos modelos a los objetos de  $\text{Cat } T$ .

Consideraremos además que valen los siguientes postulados para  $T$  y  $\bar{T}$ :

(1) (Existencia de productos fibrados en  $\text{Cat } \bar{T}$ ) Dado el diagrama:  $A_1 \xrightarrow{f_1} B \xleftarrow{f_2} A_2$  en  $\text{Cat } \bar{T}$ , si existe un objeto no inicial  $A$  y morfismos  $a_i: A \rightarrow A_i$ ,  $i=1,2$ , tales que  $f_1 \circ a_1 = f_2 \circ a_2$  entonces existe el producto fibrado  $A_1 \times_B A_2$ . En particular, si existe un  $U_1' \times_X U_2'$ , siendo  $U_i' \in F(U_i)$ ,  $i=1,2$ , respecto de los morfismos  $h_i \in t(U_i)$ ,  $h_i: U_i' \rightarrow X$ , entonces existe un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_1' & \xleftarrow{q_1} & W_{12}' & \xrightarrow{q_2} & U_2' \\ & \searrow h_1 & & \swarrow h_2 & \\ & & X & & \end{array}$$

de producto fibrado, con  $q_i \in F(p_i)$ .

(2) Si se tiene un diagrama conmutativo en  $\text{Cat } \bar{T}$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow h & \downarrow s \\ & & W \end{array}$$

y si son  $h$  un morfismo de  $\text{Cat } K$ ,  $s$  uno de  $\text{Cat } T$ , entonces  $f$  es un morfismo de  $\text{Cat } K$

(3) Si es  $\Phi_1 = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } \bar{T}$ ,  $\Phi_2 = \{\psi_j: V_j \rightarrow U\}$  una familia cualquiera de morfismos de  $\text{Cat } \bar{T}$ , entonces  $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \text{Cov } \bar{T}$ .

(4) ("Pegado" de funciones) Sea  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$ . Sea  $C_\Phi$  una subcategoría de  $\text{Cat } T$  definida por:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C_\Phi) &= \{U_i, W_{ij} \mid W_{ij} \text{ es un } U_i \times U_j \text{ respecto de } \varphi_i, \varphi_j\} \\ \text{Morf}(C_\Phi) &= \{\text{identidades, composiciones de proyecciones} \\ &\quad \text{de productos fibrados}\} \end{aligned}$$

Entonces, si es  $I: C_\Phi \rightarrow \text{Cat } \bar{T}$  el funtor inclusión, se tiene que:  $\varinjlim I = U$ , respecto de la transformación natural  $t_U$  dada sobre las  $U_i$  por  $t_U(U_i) = \varphi_i$ .

(5) Si se tiene el diagrama  $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{n} V'$ , con  $\varphi$  morfismo de  $\text{Cat } T$  y  $n \in s(V)$ , entonces existe  $U' \in F(U)$ ,  $m \in s(U)$ ,  $f \in F(\varphi)$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & V' \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array} \quad (*)$$

conmuta, y "recíprocamente", dado un diagrama conmutativo  $(*)$  con  $m \in s(U)$ ,  $n \in s(V)$ ,  $\varphi$  morfismo de  $\text{Cat } T$  y  $f \in F(\varphi_1)$  (para algún  $\varphi_1$ ), se tiene que  $f \in F(\varphi)$ .

(6) Si es  $m_i \in s(U)$ ,  $i=1,2$ ,  $m_i: U' \rightarrow U$ , entonces  $m_1 = m_2$ .

## 1.2 Definición:

En las condiciones anteriores diremos que la sub-G-topología  $L$  de  $\bar{T}$  tiene modelos tangentes de  $K$ , siendo  $K$  una sub-Gtopología de  $L$ , si existe un objeto  $E$  de  $\text{Cat } L$  tal

que:

- (i) Existe una función inyectiva  $T_a: \text{Ob}(\text{Cat } K) \rightarrow \text{Ob}(\text{Cat } L)$  tal que  $T_a(U)$  es un  $U \times E$ .
- (ii) Para todo objeto  $U$  de  $\text{Cat } K$ ,  $\text{pr}_1: T_a(U) \rightarrow U$  es un morfismo suryectivo de  $\text{Cat } L$ .

### 1.3 Teorema:

Todo objeto  $U$  de  $\text{Cat } K$  es soporte de un atlas abstracto tal que: si  $U$  es un modelo, entonces los morfismos de la forma  $h \circ m^{-1}$  con  $m \in s(U)$ ,  $h \in t(U)$  son  $K^*$ -morfismos de atlas, siendo  $K^*$  la unión disjunta de  $K$  y  $T_U$ ,  $T_U$  definida por:  $\text{Ob}(\text{Cat } T_U) = \{U\}$ ,  $\text{Morf}(\text{Cat } T_U) = \{1_U\}$ ,  $\text{Cov } T_U = \{\{1_U\}\}$ . Si  $L$  tiene modelos tangentes de  $K$ , entonces la proyección  $\text{pr}_1: T_a(U) \rightarrow U$  es un  $K_U$ -morfismo de atlas, siendo  $K_U$  definida por:  $\text{Ob}(\text{Cat } K_U) = \{U, T_a(U)\}$ ,  $\text{Morf}(\text{Cat } K_U) = \{1_U, \text{pr}_1, 1_{T_a(U)}\}$ ,  $\text{Cov } K_U = \{\{1_U\}, \{1_{T_a(U)}\}\}$ .

Demostración: Se tiene que  $(1_{T_U}, U, 1_U)$  es un atlas abstracto. Análogamente lo es  $(1_{T_{T_a(U)}}, T_a(U), 1_{T_a(U)})$ , y  $\text{pr}_1: T_a(U) \rightarrow U$  es un  $K_U$ -morfismo entre ambos.

### 1.4 Definición:

Si  $L$  tiene modelos tangentes de  $K$  y si existe una función  $D: \text{Morf}(\text{Cat } K) \rightarrow \text{Morf}(\text{Cat } \bar{T})$  tal que:

- (i) Si  $\varphi: U \rightarrow V$ , entonces  $D\varphi: T_a(U) \rightarrow E$
- (ii) Si  $\varphi = 1_U$ , entonces  $D\varphi = \text{pr}_2: T_a(U) \rightarrow E$

$$(iii) D(\psi \circ \varphi) = D\psi \circ ((\varphi \circ pr_1), D\varphi)$$

(iv)  $(\varphi \circ pr_1, D\varphi)$  es un morfismo de  $Cat L$ ,  
entonces diremos que  $L$  tiene derivadas de  $K$ .

### 1.5 Proposición:

Si  $L$  tiene derivadas de  $K$ , si se define  $T_a: Cat K \rightarrow Cat L$  sobre los morfismos por:  $T_a(\varphi) = (\varphi \circ pr_1, D\varphi)$ , entonces  $T_a$  es un funtor y su imagen es una subcategoría de  $Cat L$  isomorfa a  $Cat K$ , sea  $Cat \bar{K}$ ; si además definimos:

$$Cov \bar{K} = \left\{ \left\{ T_a(\varphi_i): T_a(U_i) \rightarrow T_a(U) \mid \{\varphi_i\} \in Cov K \right\} \right\},$$

entonces es  $\bar{K}$  una  $G$ -topología. Además  $T_a(Cat T)$  es una subcategoría de  $Cat \bar{K}$ , sea  $Cat T'$ . Definiendo:

$$Cov T' = \left\{ \left\{ T_a(\varphi_i): T_a(U_i) \rightarrow T_a(U) \mid \{\varphi_i\} \in Cov T \right\} \right\}$$

se tiene que  $T'$  es una sub- $G$ -topología de  $\bar{K}$ .

#### Demostración:

Por definición, dados  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2, \psi: U_2 \rightarrow U_3$  morfismos de  $Cat K$ , será:  $T_a(\psi \circ \varphi)$  el único morfismo tal que:

$$p_3 \circ T_a(\psi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi \circ p_1$$

$$q_3 \circ T_a(\psi \circ \varphi) = D(\psi \circ \varphi)$$

siendo  $p_i: T_a(U_i) \rightarrow U_i, q_i: T_a(U_i) \rightarrow E$  proyecciones canónicas,  $i=1,2,3$ . Además:

$$p_3 \circ T_a(\psi) \circ T_a(\varphi) = \psi \circ p_2 \circ T_a(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ p_1$$

$$q_3 \circ T_a(\psi) \circ T_a(\varphi) = D\psi \circ T_a(\varphi) = D(\psi \circ \varphi),$$

esto último por definición 1.4. Luego se ve que:

$$T_a(\psi \circ \varphi) = T_a(\psi) \circ T_a(\varphi). \text{ Además: } T_a(1_U) = (1_U \circ p, D(1_U)) = (p, q) = 1_{U \times E}$$

(siendo  $p:T_a(U) \rightarrow U$  y  $q:T_a(U) \rightarrow E$  las proyecciones canónicas). Luego,  $T_a$  es un funtor y, por ser inyectivo sobre los objetos, es  $\text{Cat } \bar{K}$  una subcategoría de  $\text{Cat } L$ . Veamos que también es inyectivo sobre los morfismos; sean  $\varphi, \varphi':U_1 \rightarrow U_2$ , tales que  $T_a(\varphi) = T_a(\varphi')$ . Se tiene que:  $\varphi \circ p_1 = p_2 \circ T_a(\varphi) = p_2 \circ T_a(\varphi') = \varphi' \circ p_1$  (siendo  $p_i:T_a(U_i) \rightarrow U_i$ ,  $i=1,2$ ). Por ser  $p_1$  suryectiva (definición 1.2) será  $\varphi = \varphi'$ . Luego  $T_a$  es un isomorfismo de  $\text{Cat } K$  sobre  $\text{Cat } \bar{K}$ , de lo cual se deducen trivialmente las demás afirmaciones del lema.

#### 1.6 Definición:

Llamaremos modelos tangentes a los objetos de  $\text{Cat } T'$ .

#### 1.7 Proposición:

Las proyecciones  $pr_1:T_a(U) \rightarrow U$  constituyen una transformación natural  $\underline{pr}$  del funtor  $T_a$  en el funtor idéntico en  $\text{Cat } K$ .

#### 1.8 Definición:

Diremos que  $L$  es una G-topología de derivadas de  $K$  si tiene derivadas de  $K$  y si es intermedia para  $\{K, \bar{K}\}$  (según definición 3.1 de la primera parte).

#### 1.9 Corolario:

Si  $L$  es una G-topología de derivadas de  $K$ , es intermedia para  $\{T, T'\}$ .

## 2. DEFINICIÓN DEL ATLAS TANGENTE

### 2.1 Definición:

Con referencia a la definición 1.4 se dirá que  $L$  tiene derivadas conservativas de  $K$  si  $\tilde{T}_a$  conserva cubrimientos y productos fibrados de  $T$ , es decir si se verifica:

(i) Si  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$ , entonces  $\{T_a(\varphi_i)\} \in \text{Cov } \bar{T}$ .

(ii) Si:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xrightarrow{R} & W & \xrightarrow{P_2} & U_2 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & f_1 & U & f_2 & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T$ , entonces:

$$\begin{array}{ccccc} T_a(U_1) & \xrightarrow{T_a(P_1)} & T_a(W) & \xrightarrow{T_a(P_2)} & T_a(U_2) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & T_a(f_1) & T_a(U) & T_a(f_2) & \end{array}$$

lo es en  $\text{Cat } \bar{T}$ .

(iii) Si es  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$ ,  $I: C_\Phi \hookrightarrow \text{Cat } T$  el functor inclusión ( $C_\Phi$  como en el postulado (4), §1) se tiene que:

$$T_a(U) = \varinjlim (T_a \circ I) \text{ en } \text{Cat } \bar{T}.$$

### 2.2 Definición:

Diremos que una sub-G-topología  $T$  de  $\bar{T}$  es G-plena en  $\bar{T}$  si se verifica:

(i) Si  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } \bar{T}$  y para todo  $i$ ,  $\varphi_i \in \text{Morf}(\text{Cat } T)$ , entonces:  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$ .

(ii) Todo diagrama de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xrightarrow{P_1} & W & \xrightarrow{P_2} & U_2 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & f_1 & U & f_2 & \end{array}$$

en  $\text{Cat } \bar{T}$ , donde  $p_i, f_i$  ( $i=1,2$ ) son morfismos de  $\text{Cat } T$ , es un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T$ .



### 2.3 Proposición:

Sea  $(F, X, s)$  como en §1, sea  $T$   $G$ -plena en  $\bar{T}$  y supongamos que existe una  $G$ -topología  $L$  que tiene derivadas conservativas de  $K$ . Si, además, existe una función inyectiva  $\Phi$ ,  $\Phi: V(F) \rightarrow \text{Ob}(\text{Cat } T)$ , siendo  $V(F)$  la clase de valores de  $F$  en los objetos de  $\text{Cat } T$ , tal que para todo  $U' \in V(F)$ ,  $\Phi(U')$  es un producto  $U' \times E$ , entonces existe un funtor generalizado  $\bar{F}: T' \rightarrow \bar{T}$  ( $T'$  definido como en la proposición 1.5) que tiene las siguientes propiedades:

- (i) Existe una transformación generalizada  $q: \bar{F} \rightarrow F$
- (ii) Existe una equivalencia débil  $\bar{s}$  de  $\bar{F}$  en el funtor idéntico en  $\text{Cat } T'$ .

### Demostración:

Definimos  $\bar{F}$  sobre los objetos por:

$$\bar{F}(T_a(U)) = \{ \Phi(U') \mid U' \in F(U) \}$$

Sea, para cada  $U' \in F(U)$  el morfismo  $m: U' \rightarrow U$ ,  $m \in s(U)$  (es único por postulado (6), §1); si llamamos  $\bar{m} = m \circ l_E$ , siendo  $l_E$  la identidad en  $E$ , quedará bien definida, para  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$  morfismo de  $\text{Cat } T$ , la clase:

$$\bar{F}(T_a(\varphi)) = \{ \bar{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}_1 \mid \exists f \in F(\varphi) \text{ con: } \varphi' \circ m_1 = m_2 \circ f \}$$

(nótese que, para cada  $f \in F(\varphi)$  existe  $\varphi'$  por definición de transformación generalizada aplicada a  $\underline{s}$ , y es única por ser  $m_1$  y  $m_2$  isomorfismos).

Veamos que  $\bar{F}$  es, en efecto, un funtor generalizado. Sean  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ ,  $\psi: U_2 \rightarrow U_3$  morfismos de  $\text{Cat } T$ , sea  $\bar{h} \in \bar{F}(T_a(\psi \circ \varphi))$ .

Luego, existirán  $h \in F(\psi \circ \varphi)$ ,  $h: U_1' \rightarrow U_3'$ ,  $\eta': U_1 \rightarrow U_3$ , tales que:

$\bar{h} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\eta') \circ \bar{m}_1$  y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_1' & \xrightarrow{h} & U_3' \\ m_1 \downarrow & & \downarrow m_3 \\ U_1 & \xrightarrow{\eta'} & U_3 \end{array}$$

Por ser:  $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ , existirán  $f \in F(\varphi)$ ,  $f: U_1' \rightarrow U_2'$ ,  $g \in F(\psi)$ ,  $g: U_2' \rightarrow U_3'$  tales que  $h = g \circ f$ , y, dados  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  existirán  $\varphi'$ ,  $\psi'$ , tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} U_1' & \xrightarrow{f} & U_2' \\ m_1 \downarrow & & \downarrow m_2 \\ U_1 & \xrightarrow{\varphi'} & U_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U_2' & \xrightarrow{g} & U_3' \\ m_2 \downarrow & & \downarrow m_3 \\ U_2 & \xrightarrow{\psi'} & U_3 \end{array}$$

Luego:  $\psi' \circ \varphi' \circ m_1 = m_3 \circ h$  por lo que, por unicidad de  $\eta'$ , se tiene que  $\psi' \circ \varphi' = \eta'$  y entonces, si llamamos:

$$\bar{f} = \bar{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}_1, \quad \bar{g} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi') \circ \bar{m}_2, \text{ será } \bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f},$$

con  $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$ ,  $\bar{g} \in \bar{F}(T_a(\psi))$ .

Recíprocamente, sea  $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f} \in \bar{F}(T_a(\psi)) \circ \bar{F}(T_a(\varphi))$ . Serán entonces  $\bar{f}, \bar{g}$  de la forma:  $\bar{f} = \bar{m}_2^{-1} \circ T_a(\varphi') \circ \bar{m}_1$ ,  $\bar{g} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi') \circ \bar{m}_2$  siendo  $\varphi', \psi'$  asociados a algún valor  $f \in F(\varphi)$ ,  $g \in F(\psi)$  respectivamente. Puesto que  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  son componibles y por la inyectividad de  $\bar{F}$ , lo serán también  $f$  y  $g$  y entonces es:

$\bar{h} = \bar{m}_3^{-1} \circ T_a(\psi' \circ \varphi') \circ \bar{m}_1$  siendo, según se vió antes,  $\psi' \circ \varphi'$  asociado a  $g \circ f \in F(\psi \circ \varphi)$ .

Sea  $1_{T_a(U)}$  la identidad en  $T_a(U)$ ; luego:  $1_{T_a(U)} = T_a(1_U)$

Sea  $f \in \bar{F}(1_U)$ ,  $\varphi': U \rightarrow U$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & U'' \\ m \downarrow & & \downarrow m' \\ U & \xrightarrow{\varphi'} & U \end{array}$$

conmuta; por ser  $\bar{F}$  funtor generalizado y por postulado (6), § 1

eso implica:  $f = 1_{U'}$ , ( $U'' = U'$ ) y  $\varphi' = 1_U$ . Luego si es  $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(1_U))$

necesariamente será  $\bar{f} = 1_{\bar{U}}$ , con  $\bar{U}' = \bar{\Phi}(U')$ .

Definimos  $q$  por:

$q(U) = \{ \text{pr}_1: \bar{\Phi}(U') \rightarrow U' \mid U' \in F(U) \text{ y } \text{pr}_1 \text{ proyección canónica} \}$   
considerando aquí el functor  $T_a^{-1}$  como el que une las categorías  
dominio de  $\bar{F}$  y  $F$ .

Dado el morfismo  $\varphi: U \rightarrow V$  en  $\text{Cat } T$ , sea el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}' & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{V}' \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ U' & & V' \end{array} \quad (*)$$

con  $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$ ,  $u \in q(U)$ ,  $v \in q(V)$ . Entonces existen  $f \in F(\varphi)$ ,  
 $\varphi': U \rightarrow V$  tales que:  $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\varphi') \cdot \bar{m}$  y  $\varphi' \cdot m = n \cdot f$ . Además  
 $f$  hace conmutativo el diagrama (\*). En efecto:

$$\begin{aligned} v \cdot \bar{f} &= v \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\varphi') \cdot \bar{m} = n^{-1} \cdot \text{pr}_V \cdot T_a(\varphi') \cdot \bar{m} \\ &= n^{-1} \cdot \varphi' \cdot \text{pr}_U \cdot \bar{m} = n^{-1} \cdot \varphi' \cdot m \cdot u \\ &= f \cdot u \end{aligned}$$

(siendo, en las igualdades anteriores,  $\text{pr}_U: T_a(U) \rightarrow U$ ,  
 $\text{pr}_V: T_a(V) \rightarrow V$  las proyecciones canónicas). Por lo tanto, es  
 $q$  una transformación generalizada.

Definimos  $\bar{s}: \bar{F} \rightarrow 1_{\text{Cat } T}$ , por:

$$\bar{s}(T_a(U)) = \{ \bar{m}: \bar{U}' \rightarrow T_a(U) \mid \bar{U}' \in \bar{F}(T_a(U)), \bar{m} = m \times 1_E, m \in s(U) \}$$

Sea  $T_a(\varphi): T_a(U) \rightarrow T_a(V)$  un morfismo de  $\text{Cat } T$ ,  $\bar{f} \in \bar{F}(T_a(\varphi))$ .

Entonces,  $\bar{f}$  es de la forma:  $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\varphi') \cdot \bar{m}$ , con  $\bar{m} \in \bar{s}(T_a(U))$ ,  
 $\bar{n} \in \bar{s}(T_a(V))$ . Luego el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}' & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{V}' \\ \bar{m} \downarrow & & \downarrow \bar{n} \\ T_a(U) & \xrightarrow{T_a(\varphi')} & T_a(V) \end{array}$$

conmuta, con lo que se prueba que  $\bar{s}$  es una transformación gene-  
ralizada y, obviamente, una equivalencia débil.

Probemos finalmente que  $\bar{F}: T' \rightarrow \bar{T}$  es un funtor entre G-topologías. Sea  $\{T_a(\varphi_i): T_a(U_i) \rightarrow T_a(U)\} \in \text{Cov } T'$ . Por definición, será entonces  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$ . Sea  $U' \in F(U)$ ,  $\bar{U}' \in \bar{F}(T_a(U))$ . Entonces:  $\{f_i^\alpha: U_i^\alpha \rightarrow U'\} \in \text{Cov } \bar{T}$ , siendo  $f_i^\alpha \in F(\varphi_i)$ . Dada  $f_i^\alpha$  existe  $\varphi_i^\alpha: U_i \rightarrow U$  morfismo de  $\text{Cat } T$  tal que  $\varphi_i^\alpha \circ m_i = m \circ f_i^\alpha$ , o sea:  $\varphi_i^\alpha = m \circ f_i^\alpha \circ (m_i^\alpha)^{-1}$ . Luego:  $\{\varphi_i^\alpha\} \in \text{Cov } \bar{T}$  y, puesto que  $T$  es G-plena en  $\bar{T}$  será:  $\{\varphi_i^\alpha\} \in \text{Cov } T$ . Como  $L$  tiene derivadas conservativas de  $K$ , es  $\{T_a(\varphi_i^\alpha)\} \in \text{Cov } \bar{T}$ . Si definimos  $\bar{f}_i^\alpha$  por:  $\bar{f}_i^\alpha = \bar{m}^{-1} \circ T_a(\varphi_i^\alpha) \circ \bar{m}_i^\alpha$  es  $\bar{f}_i^\alpha \in \bar{F}(T_a(\varphi_i))$  y además, por lo que se ha visto y por ser  $\bar{m}$ ,  $\bar{m}_i^\alpha$  equivalencias, se tiene que:  $\{\bar{f}_i^\alpha: \bar{U}_i^\alpha \rightarrow \bar{U}'\} \in \text{Cov } \bar{T}$ . Es decir, se verifica el axioma (i) de funtor entre G-topologías.

Sea el diagrama  $\bar{U}_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \bar{U}' \xleftarrow{\bar{g}_2} \bar{U}_2$ ,  $\bar{g}_i \in \bar{F}(T_a(\varphi_i))$  ( $i=1,2$ ) y supongamos que es  $a_i: A \rightarrow \bar{U}_i$  morfismo de  $\text{Cat } \bar{T}$  tal que:  $\bar{g}_1 \circ a_1 = \bar{g}_2 \circ a_2$ . Si son  $g_i \in F(\varphi_i)$ ,  $\varphi_i'$  tales que:  $\bar{g}_i = \bar{m}^{-1} \circ T_a(\varphi_i') \circ \bar{m}_i$ ,  $m \circ g_i = \varphi_i' \circ m_i$  (con  $m \in s(U)$ ,  $m_i \in s(U_i)$ ) será:  $g_1 \circ a_1 \circ p_1 = g_2 \circ a_2 \circ p_2$ , donde  $p_i \in q(U_i): \bar{U}_i \rightarrow U_i$ .

Luego, por ser  $F$  funtor entre G-topologías, existirá un objeto  $W$  de  $\text{Cat } T$ , un  $W' \in F(W)$  y morfismos  $k_i \in F(\varphi_i)$  ( $i=1,2$ ) tales que:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xleftarrow{k_1} W & \xrightarrow{k_2} U_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & U' & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado, siendo  $\varphi_i: W \rightarrow U_i$  en  $\text{Cat } T$ .

Si es  $\varphi_i'$  un morfismo de  $\text{Cat } T$  tal que:  $m_i \circ k_i = \varphi_i' \circ n$  con  $n \in s(W)$  entonces:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xleftarrow{\varphi_1'} W & \xrightarrow{\varphi_2'} U_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } \bar{T}$ , y, por ser  $T$  G-plena en  $\bar{T}$ , lo es también en  $\text{Cat } T$ . Como  $L$  tiene derivadas

conservativas de  $K$ , se tiene que:

$$T_2(u_1) \xrightarrow{T_2(\psi'_1)} T_2(u_2) \xrightarrow{T_2(\psi'_2)}$$

es un diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } \bar{T}$ . Si tomamos:

$\bar{k}_i = \bar{m}_i^{-1} \circ T_a(\psi'_i) \circ \bar{n}$ , entonces  $\bar{k}_i \in \bar{F}(T_a(\psi'_i))$  y si es  $\bar{W}' = \bar{\Phi}(W')$

el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{U}_1 & \xrightarrow{\bar{k}_1} & \bar{W}' & \xrightarrow{\bar{k}_2} & \bar{U}_2 \\ & \searrow \bar{s}_1 & & \swarrow \bar{s}_2 & \\ & & \bar{U}' & & \end{array}$$

es de producto fibrado.

#### 2.4 Definición:

Llamaremos semicompleta a una categoría  $\mathcal{C}$  tal que todo funtor generalizado  $F$  a valores en  $\mathcal{C}$  tiene límite directo si y sólo si existe una transformación generalizada  $k:F \rightarrow A$ , siendo (por abuso de notación)  $A$  el funtor "constante" igual a un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ .

#### 2.5 Teorema:

Si existe una  $G$ -topología  $L$  de derivadas conservativas de  $K$  (según 1.8 y 2.1) y si  $\text{Cat } \bar{T}$  es semicompleta, entonces en las condiciones de 2.3 existe  $\bar{X}$  tal que  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  es un atlas abstracto. Además, si son  $\underline{t}$  y  $\underline{\bar{t}}$  las transformaciones generalizadas asociadas a los límites  $\underline{X}$  y  $\underline{\bar{X}}$  respectivamente, entonces existe un único morfismo  $p:\bar{X} \rightarrow X$  en  $\text{Cat } \bar{T}$  tal que:  $p \circ \bar{t} = \underline{t} \circ q$  (considerando a  $p$  como transformación natural entre funtores constantes) que es un  $L$ -morfismo entre los atlas  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  y  $(F, X, s)$ .

Demostración:

Sea  $k: \bar{F} \rightarrow X$  definida por:  $k = t \circ q$ . Entonces puesto que  $\text{Cat } \bar{T}$  es semicompleta, existirá  $\bar{X} = \varinjlim \bar{F}$ . Obviamente,  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  es un atlas abstracto. Además, por la propiedad universal del límite, existirá un único morfismo  $p: \bar{X} \rightarrow X$  tal que:  $p \circ \bar{t} = k$ , o sea:  $p \circ \bar{t} = t \circ q$ , y que es un L-morfismo de atlas; en efecto, dado el diagrama:  $T_a(U) \xleftarrow{\bar{m}} U' \xrightarrow{\bar{h}} X$ , con  $\bar{m} \in \bar{s}(T_a(U))$ ,  $\bar{h} \in \bar{t}(T_a(U))$  tomando el cubrimiento trivial para  $T_a(U)$  y el morfismo  $pr(U): T_a(U) \rightarrow U$  de  $\text{Cat } L$ , se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{X} & \xrightarrow{p} & X \\
 \bar{h} \uparrow & & \uparrow h \\
 \bar{U}' & \xrightarrow{r} & U' \\
 \bar{m} \downarrow & & \downarrow m \\
 T_a(U) & \xrightarrow{pr(U)} & U
 \end{array}$$

siendo  $h \in t(U)$ ,  $m \in s(U)$ , pues existe  $r: \bar{U}' \rightarrow U'$ ,  $r \in q(U)$  que hace conmutativos los dos diagramas parciales.

2.6 Definición:

En las condiciones del teorema 2.5, se llamará a  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  un atlas tangente al  $(F, X, s)$  y al morfismo  $p$  su proyección natural.

### § 3. RESTRICCIÓN DEL ATLAS DOMINIO DE UN MORFISMO DADO

Comenzaremos este párrafo demostrando algunas conclusiones que se pueden obtener de los postulados (1) a (6) del § 1.

#### 3.1 Lema:

Sea  $W_{12}^1$  como en el postulado (1), § 1. Entonces:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xleftarrow{p_1} & W_{12} & \xrightarrow{p_2} & U_2 \\ & \searrow h_1 \circ m_1^{-1} & & \swarrow h_2 \circ m_2 & \\ & & X & & \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado, siendo  $p_i^1$  ( $i=1,2$ ) tal que:  $m_i^{-1} \circ p_i^1 = q_i \circ m_{12}^{-1}$ , con  $m_{12} \in s(W_{12})$ ,  $m_i \in s(U_i)$ .

#### 3.2 Lema:

Sea  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov } T$ . Entonces para todo  $U' \in F(U)$  existe  $\Phi' = \{f_i: U_i' \rightarrow U'\}_{i \in I} \in \text{Cov } \bar{T}$  tal que para todo  $i$ :  $f_i \in F(\varphi_i)$  y  $f_i$  es tal que  $m \circ f_i = \varphi_i \circ m_i$ , siendo  $m \in s(U)$ ,  $m_i \in s(U_i)$ .

#### Demostración:

Inmediata usando el postulado (5), § 1 y por el axioma de composición de cubrimientos.

#### 3.3 Definición:

Llamaremos a  $\Phi'$  una imagen de  $\Phi$  por  $F$  asociada a  $U'$ .

#### 3.4 Lema:

Sea  $T$   $G$ -plena en  $\bar{T}$ . Si es  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  y  $\Psi = \{\varphi_j: V_j \rightarrow U\}$  una familia de morfismos de  $\text{Cat } T$ , entonces:  $\Phi \cup \Psi \in \text{Cov } T$ .

3.5 Lema:

Sea  $C_{\Phi}$  como en el postulado (4), §1,  $U' \in F(U)$ ,  
 $\Phi' = \{f_i: U'_i \rightarrow U'\}$  una imagen de  $\Phi$  por  $F$  asociada a  $U'$ . Si es  
 $C_{\Phi'}$  la categoría definida por:

$$\text{Ob}(C_{\Phi'}) = \{U'_i, U'_{ij} \mid U'_{ij} \text{ valor de } F \text{ que es un } U'_i \times_U U'_j \text{ respecto de } f_i, f_j\}$$

$$\text{Morf}(C_{\Phi'}) = \{\text{identidades, composiciones de proyecciones de productos fibrados}\}$$

entonces  $\varinjlim I' = U'$ , siendo  $I': C_{\Phi'} \rightarrow \text{Cat } \bar{T}$  el funtor inclusión.

Demostración:

Por ser  $\Phi' \in \text{Cov } \bar{T}$  existe para todo  $i$ , para todo  $j$ ,  $U'_i \times_U U'_j$  luego, por ser  $F$  un funtor entre  $G$ -topologías, existe un producto fibrado de esa forma que es valor del funtor. Es decir, se tiene un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} U'_i & \xleftarrow{q_i} & U'_{ij} & \xrightarrow{q_j} & U'_j \\ & \searrow f_i & & \swarrow f_j & \\ & & U' & & \end{array}$$

con  $q_\alpha \in F(p_\alpha)$ ,  $\alpha = i, j$ .

Sean  $\pi_i, \pi_j$  tales que  $m_i \circ q_i = \pi_i \circ m_{ij}$ ,  $m_j \circ q_j = \pi_j \circ m_{ij}$  para  $m_\alpha \in s(U_\alpha)$ ,  $\alpha = i, j$ ,  $m_{ij} \in s(U_{ij})$ . Luego por el postulado (5), §1, será  $q_\alpha \in F(\pi_\alpha)$ . Además, por 2.1 (primera parte) se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xleftarrow{\pi_i} & U_{ij} & \xrightarrow{\pi_j} & U_j \\ & \searrow \varphi_i & & \swarrow \varphi_j & \\ & & U & & \end{array}$$

que es de producto fibrado. Sea  $D_{\Phi'}$  una categoría análoga a la  $C_{\Phi'}$  que figura en el postulado (4), §1, que contiene a los  $U_{ij}, \pi_i, \pi_j$ . Evidentemente, existe un funtor ordinario  $A: D_{\Phi'} \rightarrow C_{\Phi'}$ , que es un isomorfismo ( $A$  lleva  $U_i$  en  $U'_i$ ,  $U_{ij}$  en



$U'_{ij}$ ,  $\pi_i$  en  $q_i$ ). Existe también una transformación natural  $a: I \rightarrow I'$  (siendo  $I: D_{\Phi} \rightarrow \text{Cat } \bar{T}$  el functor inclusión) que es una equivalencia débil, dada por:  $a(W): I(W) \rightarrow I'(A(W))$ ,  $a(W) = (m_W)^{-1}$ , con  $m_W \in s(W)$  (nótese que hemos considerado una transformación natural entre funtores con distintos dominios, con el functor  $A$  como vínculo entre esos dominios). Si es  $m: U' \rightarrow U$ ,  $m \in s(U)$ , se tiene que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & U \\ a \downarrow & & \downarrow m^{-1} \\ I' & \xrightarrow{u'} & U' \end{array} \quad (\ast)$$

conmuta, siendo  $u$  la transformación natural asociada al límite (dada sobre los  $U_i$  por la familia  $\{\varphi_i\}$ ) y  $u'$  la análoga dada sobre los  $U'_i$  por la familia  $\{f_i\}$ .

Si es  $Y$  un objeto de  $\text{Cat } \bar{T}$ ,  $h: I' \rightarrow Y$  una transformación natural, existirá, por la propiedad universal del límite, un único morfismo  $k: U \rightarrow Y$  de  $\text{Cat } \bar{T}$  tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & U \\ a \downarrow & h & \downarrow k \\ I' & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

conmuta. Luego, si tomamos  $l = k \cdot m$ , se ve, tomando en cuenta el diagrama  $(\ast)$ , que  $l$  es el único morfismo tal que:

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{u'} & U' \\ h \searrow & & \downarrow l \\ & & Y \end{array}$$

conmuta.

### 3.6 Proposición: ("restricción" de un atlas dado)

Sea  $(F, X, s)$  un atlas abstracto como en 1.1 .

Sea  $\tilde{T}$  una sub-G-topología de  $T$  tal que:

- (i)  $\tilde{T}$  es G-plena en  $T$ .
- (ii) Si es  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$  un morfismo de  $\text{Cat } T$  y  $U_2$  un objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}$ , entonces  $U_1$  es un objeto y  $\varphi$  un morfismo de  $\text{Cat } \tilde{T}$ .
- (iii) Para todo objeto  $U$  de  $\text{Cat } T$  existe  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  con  $U_i$  objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}$ .

Entonces, existe un funtor  $\tilde{F}: \tilde{T} \rightarrow T$  y una transformación generalizada  $\tilde{s}$  tales que: (1) Para todo  $\tilde{U}' \in \tilde{F}(\tilde{U})$  vale la siguiente condición: (R) existe  $U' \in F(U)$ , existe  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  con  $U_i \in \tilde{U}$  y  $\Phi' = \{f_i: U'_i \rightarrow U'\}$  imagen de  $\Phi$  por  $F$  asociada a  $U'$ , con  $U'_{i_0} = \tilde{U}'$ .

$$(2) \tilde{s} = s|_{\tilde{F}}$$

(3)  $(\tilde{F}, X, \tilde{s})$  es un atlas K-equivalente

al  $(F, X, s)$ .

Demostración:

Se define  $\tilde{F}$  por:

$$\tilde{F}(\tilde{U}) = \{\tilde{U}' \in F(\tilde{U}) \text{ tales que verifican (R)}\}.$$

$$\tilde{F}(\varphi) = \{f \in F(\varphi) \mid f: \tilde{U}'_1 \rightarrow \tilde{U}'_2, \tilde{U}'_i \in \tilde{F}(\tilde{U}_i), i=1,2\}$$

Se ve que  $\tilde{F}$  es un funtor generalizado, y que  $\tilde{s}$  queda definida por (2).

Sea  $t: F \rightarrow X$  la transformación asociada al límite, y sea  $\tilde{t} = t|_{\tilde{F}}$ . Probemos que  $\varinjlim \tilde{F} = X$ , según  $\tilde{t}$ . Sea  $Y$  un objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}$ ,  $\tilde{u}: \tilde{F} \rightarrow Y$  una transformación generalizada y veamos que existe una extensión de  $\tilde{u}$  en  $u$ ,  $u: F \rightarrow Y$ . Sea  $U$  un objeto de  $\text{Cat } T$ ,  $U' \in F(U)$ . Por hipótesis, existe  $\Phi = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  tal que para todo  $i$ ,  $U_i$  es un objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}$ . Luego, si es

$\Phi' = \{f_i: U_i' \rightarrow U'\} \in \text{Cov } \bar{T}$  una imagen de  $\Phi$  por  $F$  asociada a  $U'$ , si son  $D_{\Phi}$ ,  $C_{\Phi}$  asociadas a  $\Phi$  como en el lema 3.5, si son  $I, I', A$  también como en esa demostración, se ve que:

$\tilde{F}|_{D_{\Phi}} = I' \circ A$ . Además, teniendo en cuenta el hecho general (demostrable inmediatamente) de que, si es  $W$  un límite de un functor  $G: C \rightarrow D$ , lo es también de cualquier functor de la forma  $G \circ A$ , con  $A$  un isomorfismo,  $A: C' \rightarrow C$ , se tiene que:

$U' = \varinjlim I' \circ A$ . Luego, existirá un único morfismo  $\underline{1}$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I' \circ A & \xrightarrow{u' \circ A} & U' \\ & \searrow \tilde{u}_{U'} & \downarrow \underline{1} \\ & & Y \end{array}$$

siendo  $\tilde{u}_{U'} = \tilde{u}|_{I' \circ A}$ . Es decir que para todo  $i$  conmutará el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_i' & \xrightarrow{f_i} & U' \\ & \searrow h_i & \downarrow \underline{1} \\ & & Y \end{array} \quad (\#)$$

con  $h_i \in \tilde{u}(U_i')$ , siendo  $\underline{1}$  el único que hace esos diagramas conmutativos. Luego definimos el valor de  $\underline{u}$  en  $U'$  por:

$\underline{1}: U' \rightarrow Y$  ( $\underline{1} \in u(U)$ ). Sea  $\Psi = \{\psi_j: V_j \rightarrow U'\} \in \text{Cov } T$ , con  $V_j$  objeto de  $\text{Cat } \bar{T}$ , para todo  $j$ . Sea  $\Psi' = \{\psi_j': V_j' \rightarrow U'\}$  una imagen de  $\Psi$  por  $F$  asociada a  $U'$ . Por lo ya visto, existirá un único morfismo  $\underline{1}': U' \rightarrow Y$  tal que, para todo  $j$ , el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_j' & \xrightarrow{\psi_j'} & U' \\ & \searrow h_j & \downarrow \underline{1}' \\ & & Y \end{array} \quad (\#\#)$$

conmuta; siendo  $h_j \in \tilde{u}(V_j')$ . Por el postulado (3), se tiene que  $\Psi' \cup \Phi' \in \text{Cov } \bar{T}$  y, por el lema 3.4 que  $\Phi \cup \Psi \in \text{Cov } T$ , y obviamente  $\Psi' \cup \Phi'$  es una imagen de  $\Phi \cup \Psi$  por  $F$  asociada a  $U'$ .

Entonces, existe un único morfismo  $h:U' \rightarrow Y$  tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} U'_i & \xrightarrow{f_i} & U' \\ & \searrow h_i & \downarrow h \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V'_j & \xrightarrow{g_j} & U' \\ & \searrow h_j & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

Luego, por  $(*)$  y  $(**)$  debe ser  $h=l=l'$ , por lo que se ve que  $\underline{l}$  no depende del cubrimiento elegido, es decir que  $u:F \rightarrow Y$  está bien definida. Además, es una transformación generalizada.

En efecto: sea  $\varphi:U \rightarrow V$  morfismo de  $\text{Cat } T$ , sean  $f \in F(\varphi)$ ,  $f:U' \rightarrow V'$ ,  $k \in u(U)$ ,  $k:U' \rightarrow Y$ ;  $l \in u(V)$ ,  $l:V' \rightarrow Y$  y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \\ & & \downarrow \varphi \\ V_j & \xrightarrow{\psi_j} & V \end{array}$$

en  $\text{Cat } T$ , siendo  $\Phi = \{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$ ,  $\Gamma = \{\psi_j\} \in \text{Cov } T$ ,  $U_i, V_j$  objetos de  $\text{Cat } \bar{T}$  para todo  $i$ , para todo  $j$ . Sean  $\Phi' = \{f_i:U'_i \rightarrow U'\}$  imagen de  $\{\varphi_i\}$  por  $F$  asociada a  $U'$ ,  $\Gamma' = \{g_j:V'_j \rightarrow V'\}$  idem de  $\{\psi_j\}$  asociada a  $V'$ . Si es  $\varphi':U \rightarrow V$  tal que  $n \circ f = \varphi' \circ m$  (con  $m \in s(U)$ ,  $n \in s(V)$ ) se tiene, por lema 3.4 que:  $\{\varphi' \circ \varphi_i\} \cup \Gamma' \in \text{Cov } T$ , y además  $\{f \circ f_i\} \cup \Gamma' \in \text{Cov } \bar{T}$  y éste es imagen por  $F$  del anterior, asociada a  $V'$ . Entonces, por lo visto, se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} U'_i & \xrightarrow{f \circ f_i} & V' \\ & \searrow h_i & \downarrow l \\ & & Y \end{array}$$

conmuta, como  $\underline{l}$  es el único tal que:  $l \circ f_i = h_i$ , se tiene que:  $m \circ f = l$ .

Entonces, por la propiedad universal del límite, se tiene que existe un único morfismo  $p:X \rightarrow Y$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{t} & X \\ & \searrow u & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

conmuta, en particular conmutará también:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{s}} & X \\ & \searrow \tilde{u} & \downarrow P \\ & & Y \end{array}$$

es decir que  $\varinjlim \tilde{F} = X$ ; luego  $(\tilde{F}, X, \tilde{s})$  es un atlas abstracto.

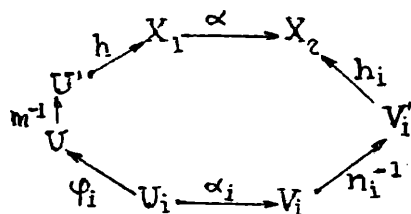
Trivialmente se ve que si  $K$  es una  $G$ -topología intermedia para  $\{\tilde{T}, T\}$ ,  $l_X$  es un  $K$ -morfismo de  $(\tilde{F}, X, \tilde{s})$  en  $(F, X, s)$ . Recíprocamente, dado el diagrama  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ , con  $m \in s(U)$ ,  $h \in t(U)$  sea  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$ , dado por la hipótesis (iii) de la proposición. Se tiene entonces que, si es  $\{f_i: U'_i \rightarrow U'\}$  imagen por  $F$  de  $\{\varphi_i\}$  asociada a  $U'$ , existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{l_X} & X \\ & \nearrow h & & & \nwarrow h_i \\ U' & & & & U'_i \\ \uparrow m^{-1} & & & & \uparrow m_i^{-1} \\ U & \xleftarrow{\varphi_i} & U_i & \xrightarrow{l_{U_i}} & U_i \end{array}$$

En efecto:  $h \circ m^{-1} \circ \varphi_i = h \circ f_i \circ m_i^{-1} = h_i \circ m_i^{-1}$ . Entonces también sería  $l_X$  un  $K$ -morfismo de  $(F, X, s)$  en  $(\tilde{F}, X, \tilde{s})$ . Además,  $K$  es intermedia para  $\{T\}$ , siendo  $\tilde{T} \subset T \subset K \subset \bar{T}$ . Si es  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ ,  $U$  un objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}$ , se tiene que  $U_i$  es un objeto y  $\varphi_i$  un morfismo de  $\text{Cat } \tilde{T}$  (por hipótesis (ii)) y entonces, como  $U$  es en particular un objeto de  $\text{Cat } T$ , será  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } T$ , lo que implica, por ser  $\tilde{T}$   $G$ -plena en  $T$ , que  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } \tilde{T}$ . Es decir que  $K$  es intermedia para  $\{\tilde{T}, T\}$  y, por lo anterior, resulta (3).

### 3.7 Definición:

Dado un morfismo  $\alpha$  entre los atlas  $A_1 = (F_1, X_1, s_1)$  y  $A_2 = (F_2, X_2, s_2)$ , dado un modelo  $U$  de  $A_1$  y un  $U' \in F(U)$ , existe  $\tilde{F} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T_1$  y morfismos  $\alpha_i: U_i \rightarrow V_i$  de  $\text{Cat } K$ , con  $V_i$  modelo de  $A_2$ , tales que:



conmuta, siendo  $m \in s_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ ,  $n_i \in s_2(V_i)$ ,  $h_i \in t_2(V_i)$ .

Llamaremos a  $\Phi$  un cubrimiento de  $U$  asociado a  $(\alpha, U')$ .

### 3.8 Teorema:

Sea  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  un morfismo de  $\text{Cat } \bar{T}$ . Sea para  $i=1,2$ ,  $V_i$  una  $K$ -variedad de soporte  $X_i$ ,  $A_i = (F_i, X_i, s_i)$  un atlas de  $V_i$ . Entonces  $\alpha$  es un morfismo de  $V_1$  en  $V_2$  sii existe  $\tilde{A}_1 = (\tilde{F}_1, X_1, \tilde{s}_1) \in V_1$  tal que  $\alpha$  es un morfismo de  $\tilde{A}_1$  en  $A_2$  y para todo modelo de  $\tilde{U}$  de  $\tilde{A}_1$ , para todo  $\tilde{U}' \in \tilde{F}_1(\tilde{U})$  un cubrimiento de  $\tilde{U}$  asociado a  $(\alpha, \tilde{U}')$  es el trivial.

#### Demostración:

Si  $\alpha$  es un morfismo de  $\tilde{A}_1$  en  $A_2$ , por definición es de  $V_1$  en  $V_2$ . Recíprocamente, sea  $\alpha$  un morfismo de  $V_1$  en  $V_2$  sea  $\text{Cat } \tilde{T}_1$  la subcategoría plena de  $\text{Cat } T_1$  tal que:

$$\begin{aligned}
 \text{Ob}(\text{Cat } \tilde{T}_1) = & \left\{ \tilde{U} \text{ modelo de } A_1 \mid \exists U \text{ modelo de } A_1, U' \in F_1(U) \right. \\
 & \Phi = \{ \varphi_i: U_i \rightarrow U \} \text{ con } U_{i_0} = \tilde{U}, \\
 & \left. \Phi \text{ cubrimiento de } U \text{ asociado a } (\alpha, U') \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \text{Cov } \tilde{T}_1 = \text{Cov } T_1 \mid \text{Cat } \tilde{T}_1$$

Obviamente,  $\tilde{T}_1$  es  $G$ -plena en  $T_1$ .

Veamos que se verifican las hipótesis (ii) y (iii) de la proposición 3.6. Sea  $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$  un morfismo de  $\text{Cat } T_1$ ,  $U_2$  un

objeto de  $\text{Cat } \tilde{T}_1$ . Luego existen un modelo  $U$  de  $A_1$ ,  $U' \in F_1(U)$   $\tilde{\Phi}$  un cubrimiento de  $U$  asociado a  $(\alpha, U')$  tales que es  $\tilde{\Phi} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\}$  con  $U_{i_0} = U_2$ . Si tomamos  $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi} \cup \{\varphi_{i_0} \circ \varphi\}$  se tiene que  $\tilde{\Phi}_1 \in \text{Cov } T_1$  (por lema 3.4) y si son  $V_{i_0}$  modelo de  $A_2$ ,  $\alpha_{i_0}$  morfismo de  $\text{Cat } K$ , dados por ser  $\tilde{\Phi}$  cubrimiento asociado a  $(\alpha, U')$  entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\
 & & \uparrow h & & \downarrow k \\
 & U' & & & V'_{i_0} \\
 & \uparrow m^{-1} & & & \uparrow n \\
 & U & & & V_{i_0} \\
 & \downarrow \varphi_{i_0} \circ \varphi & U_1 & \xrightarrow{\alpha_{i_0} \circ \varphi} & V_{i_0}
 \end{array}$$

conmuta, siendo  $m \in s_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ ,  $n \in s_2(V_{i_0})$ ,  $k \in t_2(V_{i_0})$ ; luego  $\tilde{\Phi}_1$  es un cubrimiento de  $U$  asociado a  $(\alpha, U')$  y entonces resulta  $U_1$  un objeto y  $\varphi$  un morfismo de  $\text{Cat } \tilde{T}_1$  (esto último por ser  $\text{Cat } \tilde{T}_1$  subcategoría plena de  $\text{Cat } T$ ).

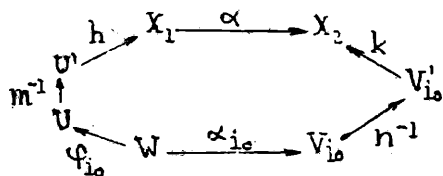
Entonces, puesto que la hipótesis (iii) se verifica trivialmente, por la proposición 3.6 tenemos que  $\tilde{A}_1$  es  $K$ -equivalente a  $A_1$ . Luego, será  $\alpha$  un morfismo de  $\tilde{A}_1$  en  $A_2$ .

Sea el diagrama:  $W \xleftarrow{o} W' \xrightarrow{1} X_1$ , con  $o \in \tilde{s}_1(W)$ ,  $1 \in \tilde{t}_1(W)$ . Entonces por definición de  $\text{Cat } \tilde{T}_1$  y de  $\tilde{F}_1$  existirá un  $\tilde{\Phi} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\}$  tal que  $U_{i_0} = W$  y si es  $\Phi' = \{f_i: U_i \rightarrow U'\}$  imagen de  $\tilde{\Phi}$  por  $F$  asociada a  $U'$ , será  $U'_{i_0} = W'$ . Luego, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

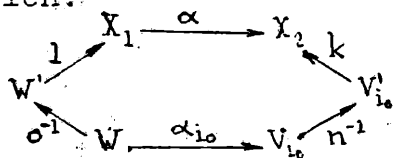
$$\begin{array}{ccc}
 W' & \xrightarrow{f_{i_0}} & U' \\
 o \downarrow & & \downarrow m \\
 W & \xrightarrow{\varphi_{i_0}} & U
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 W' & \xrightarrow{f_{i_0}} & U' \\
 & \searrow 1 & \downarrow h \\
 & & X_1
 \end{array}
 \qquad (*)$$

con  $m \in s_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ . Por ser  $\tilde{\Phi}$  un cubrimiento de  $U$  asociado a  $(\alpha, U')$  existirán un morfismo de  $\text{Cat } K$   $\alpha_{i_0}: W \rightarrow V_{i_0}$ , sien-

do  $V_{i_0}$  un modelo de  $A_2$  y un  $V'_{i_0} \in \mathbb{F}_2(V_{i_0})$  tales que el diagrama:



conmuta, siendo  $n \in s_2(V_{i_0})$ ,  $k \in t_2(V_{i_0})$ . Luego, por  $(\#)$  conmutará también:

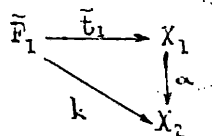


Es decir que el cubrimiento:  $\{l_W: W \rightarrow W'\}$  es asociado a  $(\alpha, W')$ .

3.9 Corolario:

Sean  $V_1, V_2$   $K$ -variedades de soportes  $X_1, X_2$  respectivamente. Sea  $A_i = (F_i, X_i, s_i) \in V_i, i=1,2$ . Entonces, un morfismo  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  en  $\text{Cat } \bar{T}$  es un  $K$ -morfismo de variedades sii existe una transformación generalizada  $k: \tilde{F}_1 \rightarrow X_2$  ( $\tilde{F}_1$  como en el teorema 3.8) tal que: (1) Para todo  $U' \in \tilde{F}_1(U), k' \in k(U)$ , el morfismo  $k': U' \rightarrow X_2$  es de la forma:  $k' = v \circ n^{-1} \circ \alpha' \circ m$ , con  $m \in \tilde{s}_1(U), n \in s_2(V), v \in t_2(V), \alpha'$  morfismo de  $\text{Cat } K$ .

(2) El morfismo  $\alpha$  es el único que hace conmutativo el siguiente diagrama:



Demostración:

Si  $\alpha$  es un morfismo de variedades, por el teorema 3.8 se ve que existe  $k$  de esa forma. Veamos que es transforma-



ción generalizada. Sea  $f:U_1' \rightarrow U_2'$ ,  $f \in \tilde{F}_1(\varphi)$  y  $\varphi:U_1 \rightarrow U_2$  un morfismo de  $\text{Cat } \tilde{T}_1$ . Veamos que  $k_2 \circ f = k_1$ , siendo

$$\begin{aligned} k_i &= v_i \circ n_i^{-1} \circ \alpha_i' \circ m_i \quad (i=1,2), \quad k_i \in k(U_i) \\ k_2 \circ f &= v_2 \circ n_2^{-1} \circ \alpha_2' \circ m_2 \circ f = \alpha \circ h_2 \circ f \quad (\text{por ser } \alpha \text{ un morfismo}) \\ &= \alpha \circ h_1 = v_1 \circ n_1^{-1} \circ \alpha_1' \circ m_1 \\ &= k_1 \end{aligned}$$

Luego, debe existir un único morfismo  $h:X_1 \rightarrow X_2$  tal que el

diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{t}_1} & X_1 \\ & \searrow k & \downarrow h \\ & & X_2 \end{array}$$

conmuta (por ser  $\varinjlim \tilde{F}_1 = X_1$ ). Como  $\underline{\alpha}$  verifica esa condición, será  $h = \underline{\alpha}$ .

La recíproca es trivial.

### 3.10 Definición:

Sean  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\tilde{A}_1$  como en el teorema 3.8; dado el diagrama  $U_1' \xleftarrow{m_1} U_1 \xrightarrow{h_1} X_1$ , con  $m_1 \in \tilde{s}_1(U_1)$ ,  $h_1 \in \tilde{t}_1(U_1)$ , existirá uno correspondiente:  $V_1' \xleftarrow{n_1} V_1 \xrightarrow{k_1} X_2$ , con  $n_1 \in s_2(V_1)$ ,  $k_1 \in t_2(V_1)$  y un morfismo  $\alpha_1:U_1 \rightarrow V_1$  de  $\text{Cat } K$  tales que el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ & \nearrow h_1 & & & \searrow k_1 \\ U_1' & & & & V_1' \\ & \nwarrow m_1^{-1} & U_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & V_1 \\ & & & & \nearrow n_1^{-1} \end{array}$$

conmuta. Sea  $\alpha_1' = n_1^{-1} \circ \alpha_1 \circ m_1$ .

Llamaremos a  $V_1'$  (respectivamente  $V_1$ ) un valor de  $F_2$  correspondiente a  $U_1'$  (respectivamente a un modelo correspondiente a  $U_1$ ) respecto de  $U_1$ ,  $V_1$  (respectivamente de  $U_1'$ ,  $V_1'$ ) por  $\alpha$ ,

y a  $\alpha'_1$  (respectivamente  $\alpha_1$ ) un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U'_1$  y  $V'_1$  (respectivamente entre  $U_1$  y  $V_1$ ).

### 3.11 Corolario:

En las mismas condiciones que el teorema 3.8, si son  $a:U'_1 \rightarrow U'_2$ ,  $a \in \tilde{F}_1(\varphi)$ ;  $\varphi:U_1 \rightarrow U_2$ ;  $\alpha'_2:U'_2 \rightarrow V'_2$  un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U'_2$  y  $V'_2$ , entonces existe un valor  $W'_1$  de  $F_2$  correspondiente a  $U'_1$  (respecto de  $U_1$ ;  $W_1$  para algún  $W_1$ ) y existe  $b:W'_1 \rightarrow V'_2$ ,  $b \in F_2(\psi)$ ,  $\psi:W_1 \rightarrow V_2$  tales que:

$$\begin{array}{ccc} U'_1 & \xrightarrow{\alpha'_1} & W'_1 \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ U'_2 & \xrightarrow{\alpha'_2} & V'_2 \end{array}$$

conmuta, siendo  $\alpha'_1$  un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U'_1$  y  $W'_1$ .

#### Demostración:

Sea  $\beta'_1:U'_1 \rightarrow V'_1$  un morfismo inducido por  $\alpha$ ,  $\beta'_1 = n_1^{-1} \circ \beta_1 \circ m_1$ , con  $m_1 \in \tilde{s}_1(U_1)$ ,  $n_1 \in s_2(V_1)$ .

Sea  $\varphi':U_1 \rightarrow U_2$  tal que  $m_2 \circ a = \varphi' \circ m_1$ , con  $m_2 \in \tilde{s}_1(U_2)$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V'_1 & \xleftarrow{A \cdot m_1^{-1}} & U_1 \xrightarrow{\alpha'_2 \circ \varphi'} V'_2 \\ & \searrow k_1 & \swarrow k_2 \\ & X_2 & \end{array}$$

siendo  $k_i \in t_2(V_i)$ ,  $i=1,2$ . En efecto:

$$\begin{aligned} k_2 \circ \alpha'_2 \circ \varphi' &= \alpha \circ h_2 \circ m_2^{-1} \circ \varphi' \quad (\text{con } h_2 \in t_1(U_2) \text{ por ser } \alpha \text{ un morfismo}) \\ &= \alpha \circ h_2 \circ a \circ m_1^{-1} = \alpha \circ h_1 \circ m_1^{-1} \\ &= k_1 \circ \beta'_1 \circ m_1^{-1} \end{aligned}$$

Luego, por el postulado (1), § 1, existe un  $W'_1 \in F_2(W_1)$  tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 V_1' & \xrightarrow{q_1} & W_1' & \xrightarrow{q_2} & V_2' \\
 & \searrow k_1 & & \swarrow k_2 & \\
 & & X_2 & & 
 \end{array}$$

es de producto fibrado, siendo  $q_i \in F_2(p_i)$ ,  $i=1,2$ . Entonces, por el lema 3.1 será también:

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & \xrightarrow{p_1'} & W_1 & \xrightarrow{p_2'} & V_2 \\
 & \searrow k_1 \circ n_1^{-1} & & \swarrow k_2 \circ n_2^{-1} & \\
 & & X_2 & & 
 \end{array}$$

un diagrama de producto fibrado, con  $p_i'$ ,  $i=1,2$  tales que (1)  $p_1' \circ o = n_1 \circ q_1$  siendo  $o: W_1' \rightarrow W_1$ ,  $o \in s_2(W_1)$ . Se ve entonces que existe un único morfismo  $\alpha_1: U_1 \rightarrow W_1$  tal que: (2)  $p_1' \circ \alpha_1 = \beta_1$  y (3)  $p_2' \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi'$ . Como  $\beta_1$  es un morfismo de Cat K y  $p_1'$  de Cat T, resulta  $\alpha_1$  un morfismo de Cat K (por postulado (2), § 1).

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 & & \\
 & & \nearrow h_1 & & \searrow l & & \\
 U_1' & & & & & & W_1' \\
 & \searrow m_1^{-1} & & & & & \nearrow o^{-1} \\
 & & U_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & W_1 & & 
 \end{array}$$

con  $l \in t_2(W_1)$ , lo que se deduce inmediatamente de (1), (2) y (3)

Luego,  $\alpha_1$  es un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U_1$  y  $W_1$  y

$$\alpha_1' = o^{-1} \circ \alpha_1 \circ m_1 \text{ lo es entre } U_1' \text{ y } W_1'.$$

Si es  $b = q_2$ , se tiene además que:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2' \circ a &= n_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ m_2 \circ a = n_2^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi' \circ m_1 = n_2^{-1} \circ p_2' \circ \alpha_1 \circ m_1 \\
 &= b \circ o^{-1} \circ \alpha_1 \circ m_1 \\
 &= b \circ \alpha_1'
 \end{aligned}$$

#### 4. DEFINICION DEL MORFISMO TANGENTE ASOCIADO A UNO DADO

Analizaremos, a modo de introducción, los postulados del §1 y conclusiones correspondientes del §3, para el caso de un atlas tangente a uno dado. Es decir, deberemos reemplazar en los enunciados "T" por "T'", "K" por "K̄" (pues K̄ será la G-topología intermedia para la variedad tangente a construirse) y (F, X, s) por (F̄, X̄, s̄).

El postulado (1) vale trivialmente en este caso (puesto que F̄ es a valores en T̄) sin el caso particular, referente específicamente al funtor F.

El postulado (2) no vale en general; el (3) es válido obviamente. Probemos que el postulado (4) también es aplicable en el caso que estamos considerando:

##### 4.1 Lema:

Sea  $\Gamma = \{ \bar{\varphi}_i : \bar{U}_i \rightarrow \bar{U} \} \in \text{Cov } T'$ . Sea la categoría  $C_r$  definida por:

$$\text{Ob}(C_r) = \{ \bar{U}_i, \bar{W}_{ij} \mid \bar{W}_{ij} \text{ es un } \bar{U}_i \times_{\bar{U}} \bar{U}_j \text{ respecto de } \bar{\varphi}_i, \bar{\varphi}_j \text{ en } \text{Cat } T' \}$$

$$\text{Morf}(C_r) = \{ \text{identidades, composiciones de proyecciones de productos fibrados} \}$$

Entonces, si es  $\bar{I}: C_r \rightarrow \text{Cat } \bar{T}$  el funtor inclusión, se tiene que:  $\bar{U} = \varinjlim \bar{I}$  respecto de la transformación generalizada  $t_{\bar{U}}$  dada sobre los  $\bar{U}_i$  por  $t_{\bar{U}}(\bar{U}_i) = \bar{\varphi}_i$ .

Demostración:

Como  $T_a$  es un isomorfismo, existe una subcategoría de  $\text{Cat } T$ , sea  $C_{\mathcal{F}}$ , asociada a  $\mathcal{F} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  como en el postulado (4), § 1 tal que:  $T_a(C_{\mathcal{F}}) = C_{\mathcal{F}}$  (en particular, será  $\bar{\varphi}_i = T_a(\varphi_i)$ ). Por la definición 2.1, se tiene que:

$\varinjlim (T_a \circ I) = T_a(U)$  en  $\text{Cat } \bar{T}$  y es, evidentemente (por ser  $T_a \circ I$  e  $\bar{I}$  funtores de igual imagen pero distinto dominio)  $T_a(U) = \bar{U} = \varinjlim \bar{I}$ .

Siguiendo con las consideraciones, mostremos la validez del postulado (5), que tomará la siguiente forma:

"2 Lema:

Dado el diagrama:  $\bar{U} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{V} \xleftarrow{\bar{n}} \bar{V}'$ , con  $\bar{\varphi}$  morfismo de  $\text{Cat } T'$ ,  $\bar{n} \in \bar{s}(\bar{V}')$ , existen  $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$ ,  $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$  tales que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}' & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{V}' \\ \bar{m} \downarrow & & \downarrow \bar{n} \\ \bar{U} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{V} \end{array} \quad (\ast)$$

conmuta; además, dado un diagrama conmutativo  $(\ast)$ , con  $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$ ,  $\bar{n} \in \bar{s}(\bar{V}')$ ,  $\bar{\varphi}$  morfismo de  $\text{Cat } T'$  y  $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi}_1)$  para algún morfismo  $\bar{\varphi}_1$  de  $\text{Cat } T'$ , se tiene que  $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$ .

Demostración:

Existe un diagrama  $U \xrightarrow{\varphi} V \xleftarrow{n} V'$ , con  $\varphi$  morfismo de  $\text{Cat } T$ ,  $n \in s(V')$ , tal que  $\bar{\varphi} = T_a(\varphi)$ ,  $\bar{n} = n \times 1_{\mathbb{Z}}$ ; luego, por el postulado (5), § 1 existirán  $m \in s(U)$ ,  $f \in F(\varphi)$  tales que:  $n \circ f = \varphi \circ m$ . Entonces:  $\bar{n} = n \times 1_{\mathbb{Z}}$ ,  $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{m}$  ( $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$ ) satis-

facen lo pedido.

Sea  $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi}_1)$  tal que:  $\bar{n} \circ \bar{f} = \bar{\varphi} \circ \bar{m}$ , es decir (I)  $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{m}$ . Por definición de  $\bar{F}$ , existen  $\varphi'_1: U \rightarrow V$ ,  $f \in F(\varphi'_1)$  tales que:  $n \circ f = \varphi'_1 \circ m$  (para  $m \in s(U)$ ,  $n \in s(V)$ ) y  $\bar{f} = \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi'_1) \circ \bar{m}$ . Por (I) se ve que  $\bar{\varphi} = T_a(\varphi'_1)$  y por ser  $T_a$  un isomorfismo, si es  $\bar{\varphi} = T_a(\varphi)$ , será  $\varphi = \varphi'_1$ . Por lo tanto el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f} & V' \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$

conmuta, con  $f \in F(\varphi'_1)$ . Por el postulado (5), § 1, se tiene entonces que  $f \in F(\varphi)$  y luego, por definición de  $\bar{F}$ , será  $\bar{f} \in \bar{F}(\bar{\varphi})$ .

El postulado (6), § 1 vale trivialmente para  $\bar{s}$  en lugar de  $s$ .

Podemos demostrar asimismo, a modo de corolarios, los siguientes lemas:

4.3 Lema: (análogo al lema 3.4)

Sea  $T$   $G$ -plena en  $\bar{T}$ ; si son  $\Gamma = \{\bar{\varphi}_i\} \in \text{Cov } T'$ ,  $\Delta = \{\bar{\psi}_j\}$  una familia de morfismos de  $\text{Cat } T'$ , entonces  $\Gamma \cup \Delta \in \text{Cov } T'$ .

Demostración:

Trivial usando el lema 3.4 y la definición de  $\text{Cov } T'$

4.4 Lema: (análogo al lema 3.2)

Sea  $\Gamma = \{\bar{\varphi}_i: \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}\} \in \text{Cov } T'$ ; entonces, para todo  $\bar{U} \in \bar{F}(\bar{U})$  existe  $\Gamma' = \{\bar{f}_i: \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}\} \in \text{Cov } \bar{T}$  tal que, para todo  $i$ :  $\bar{f}_i \in \bar{F}(\bar{\varphi}_i)$  y  $\bar{f}_i$  es tal que:  $\bar{m} \circ \bar{f}_i = \bar{\varphi}_i \circ \bar{m}_i$  siendo  $\bar{m} \in \bar{s}(\bar{U})$ ,  $\bar{m}_i \in \bar{s}(\bar{U}_i)$ .

4.5 Definición:

Llamaremos a  $\Gamma'$  una imagen de  $\Gamma$  por  $\bar{F}$  asociada a  $\bar{U}'$ .

4.6 Remarque:

Como en las demostraciones de: el lema 3.5, la proposición 3.6 y el teorema 3.8 sólo se usan los postulados (3), (4) y (5) del §1 y el lema 3.4, valdrán estos tres enunciados también para el atlas  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  en lugar de  $(F, X, s)$ ; la única salvedad es que, en la demostración de la proposición 3.6 faltaría probar que  $\bar{K}$  es intermedia para  $\{T'\}$ , lo que se deduce inmediatamente de la definición de  $\text{Cov } T'$  y del hecho de que  $K$  es intermedia para  $\{T\}$ .

4.7 Proposición:

Sean  $(F, X, s)$ ,  $(\tilde{F}, X, \tilde{s})$  como en la proposición 3.6. Sea  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  un atlas tangente a  $(F, X, s)$ , definido como en 2.6. Entonces, si es  $\tilde{T}'$  la  $G$ -topología definida por:  $\text{Cat } \tilde{T}' = T_a(\text{Cat } \tilde{T})$ ,  $\text{Cov } \tilde{T}' = \left\{ \left\{ T_a(\varphi_i) \mid \{\varphi_i\} \in \text{Cov } \tilde{T} \right\} \right\}$ , se tiene que existe un funtor  $\bar{F}$  y una transformación generalizada  $\bar{s}$  que verifican (1), (2) y (3) de la mencionada proposición para  $T'$  en lugar de  $T$  y  $\tilde{T}'$  en lugar de  $\tilde{T}$  (en particular, (3) se expresará:  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$  es  $\bar{K}$ -equivalente a  $(\bar{F}, \bar{X}, \bar{s})$ ).

Demostración:

Por remarque 4.6, bastará probar que  $\tilde{T}'$ ,  $T'$  verifican las hipótesis (i), (ii) y (iii) de la proposición 3.6, lo

cual se deduce trivialmente de la validez de los mismos (i), (ii) y (iii) para  $\tilde{T}$  y  $T$  y del hecho de que  $T_a$  es un isomorfismo.

#### 4.8 Remarque:

En particular podemos tomar en el enunciado 4.7, si suponemos dado un morfismo  $\alpha$  de  $(F_1, X_1, s_1)$  en  $(F_2, X_2, s_2)$ , el  $(\tilde{F}_1, X_1, \tilde{s}_1)$  dado por el teorema 3.8.

#### 4.9 Teorema:

Sea  $A_i = (F_i, X_i, s_i)$  un atlas abstracto,  $\bar{A}_i = (\bar{F}_i, \bar{X}_i, \bar{s}_i)$  un atlas tangente a  $A_i$ ,  $i=1,2$ . Dado un morfismo  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  que sea un  $K$ -morfismo de  $A_1$  en  $A_2$  existe una transformación generalizada  $\bar{k}: \bar{F}_1 \rightarrow \bar{X}_2$  (siendo  $(\bar{F}_1, \bar{X}_1, \bar{s}_1)$  como en 4.7 y 4.8) tal que: (1) Para todo  $\bar{U}' \in \bar{F}_1(T_a(U))$ ,  $l \in \bar{k}(T_a(U))$ ,  $l: \bar{U}' \rightarrow \bar{X}_2$  es de la forma  $l = \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha')$ , con  $\bar{n} \in \bar{s}_1(T_a(U))$ ,  $\bar{n} \in \bar{s}_2(T_a(V))$ ,  $\bar{v} \in \bar{t}_2(T_a(V))$ , siendo  $\alpha'$  un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V$ .

(2) Existe un morfismo  $\bar{\alpha}: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$  único tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_1 & \xrightarrow{\bar{t}_1} & \bar{X}_1 \\ & \searrow \bar{k} & \downarrow \bar{\alpha} \\ & & \bar{X}_2 \end{array}$$

(3) Si son  $q_1: \bar{F}_1 \rightarrow F_1$  como en la proposición 2.3  $k$  como en el corolario 3.9,  $p_2: \bar{X}_2 \rightarrow X_2$  la proyección canónica, será el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_1 & \xrightarrow{\bar{k}} & \bar{X}_2 \\ q_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ F_1 & \xrightarrow{k} & X_2 \end{array}$$



conmutativo, (con  $\tilde{q}_1 = q_1 \mid \tilde{F}_1$ ).

(4) Si  $p_i: \bar{X}_i \rightarrow X_i$  ( $i=1,2$ ) es la proyección canónica, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{X}_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \end{array}$$

Demostración:

Sea  $\bar{U}' \in \tilde{F}_1(\bar{U})$ , con  $\bar{U} = T_a(U)$ . Entonces,  $\bar{U}' = \Phi(U')$  ( $\Phi$  como en 2.3), con  $U' \in F_1(U)$ . Tenemos entonces un diagrama:  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X_1$ , con  $m \in \tilde{S}_1(U)$ ,  $h \in \tilde{t}_1(U)$ . Puesto que  $\alpha$  es un morfismo de  $A_1$  en  $A_2$  (también lo será de  $\bar{A}_1$  en  $A_2$ ) existirán un objeto  $V$  de  $\text{Cat } T_2$ , un  $V' \in F_2(V)$  y un morfismo  $\alpha': U \rightarrow V$  de  $\text{Cat } K$ , inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V$ . Sean  $v: V' \rightarrow X_2$ ,  $v \in t_2(V)$ ,  $n: V' \rightarrow V$ ,  $n \in s_2(V)$ . Definimos entonces:

$$\bar{k}(T_a(U)) = \left\{ \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot \bar{m} \mid \bar{v} \in \bar{t}_2(T_a(V)), \bar{m} \in \bar{S}_1(T_a(U)) \right. \\ \left. \bar{n} \in \bar{s}_2(T_a(V)), \alpha' \text{ inducido por } \alpha \text{ entre } U \text{ y } V \right\}$$

Probemos la siguiente propiedad de  $\bar{k}$ : si son  $l: \bar{U}' \rightarrow \bar{X}_2$ ,  $l_1: \bar{U}' \rightarrow \bar{X}_2$  dadas por  $l = \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot \bar{m}$ ;  $l_1 = \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1^{-1} \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1$ , siendo  $\bar{v}_1 \in \bar{t}_2(T_a(V_1))$ ,  $\bar{n}_1 \in \bar{s}_2(T_a(V_1))$ ,  $\alpha'_1$  morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V_1$ , entonces  $l = l_1$ ; o sea: los valores de  $\bar{k}$  no dependen del correspondiente  $V'$  de  $U'$  elegido en cada caso.

En efecto: puesto que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xleftarrow{n_1^{-1} \cdot \alpha'_1} U & \xrightarrow{n^{-1} \cdot \alpha'} V' \\ & \searrow v_1 & \swarrow v \\ & & X_2 \end{array}$$

existirá (según el postulado (1), §1), un  $W' \in F_2(W)$ , para algún  $W$ ,

que es un  $V_1' \times_{X_2} V'$  con proyecciones  $q \in F(p)$ ,  $q_1 \in F(p_1)$ . De acuerdo con el lema 3.1, será además, para  $p'$ ,  $p_1'$  tales que:  $p' \circ o = n \cdot q$  y  $p_1' \circ o = n_1 \cdot q_1$  (con  $o: W' \rightarrow W$ ,  $o \in s_2(W)$ )  $W$  un  $V_1 \times_{X_2} V$  respecto de los morfismos  $v_1 \cdot n_1^{-1}$  y  $v \cdot n^{-1}$  con proyecciones  $p'$  y  $p_1'$ . Entonces, por la propiedad universal del producto fibrado existirá un único morfismo (de Cat  $K$  por postulado (2))  $\alpha_2'$  tal que:

$$p' \circ \alpha_2' = \alpha' \quad , \quad p_1' \circ \alpha_2' = \alpha_1'$$

Entonces, si son  $\bar{W} = T_a(W)$ ,  $\bar{W}' = \bar{\Phi}(W')$ ,  $\bar{o} = o \times 1_E$ ,  $\bar{n} = n \times 1_E$ ,  $\bar{n}_1 = n_1 \times 1_E$  y definiendo:  $\bar{q} = \bar{n}^{-1} \cdot T_a(p') \cdot \bar{o}$ ,  $\bar{q}_1 = \bar{n}_1^{-1} \cdot T_a(p_1') \cdot \bar{o}$ , se tiene que:  $\bar{q} \in \bar{F}_2(T_a(p))$ ,  $\bar{q}_1 \in \bar{F}_2(T_a(p_1))$ . Además, si es  $\bar{w}: \bar{W}' \rightarrow \bar{X}_2$ ,  $\bar{w} \in \bar{t}_2(\bar{W})$ , podemos probar que:

$$\bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') = \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1^{-1} \cdot T_a(\alpha_1')$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') &= \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(p') \cdot T_a(\alpha_2') = \bar{v} \cdot \bar{q} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha_2') \\ &= \bar{w} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha_2') = \bar{v}_1 \cdot \bar{q}_1 \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha_2') \\ &= \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1^{-1} \cdot T_a(p_1') \cdot T_a(\alpha_2') \\ &= \bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1^{-1} \cdot T_a(\alpha_1') \end{aligned}$$

lo que implica:  $l = l_1$ .

Una vez definida  $\bar{k}$  de la forma dada por (1), veamos que es en efecto, una transformación generalizada.

Sea  $\bar{f} \in \bar{F}_1(T_a(\varphi))$ ,  $\bar{f}: \bar{U}_1' \rightarrow \bar{U}'$ , sea el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}_1' & \xrightarrow{l_1} & X_2 \\ \bar{f} \downarrow & \searrow & \uparrow \\ \bar{U}' & & l \end{array}$$

con  $l_1 \in \bar{k}(T_a(U_1))$ ,  $l \in \bar{k}(T_a(U))$ . Dada  $\bar{f}$  existirán  $\varphi'$ ,  $f \in \tilde{F}_1(\varphi)$

tales que:  $\bar{f} = \bar{m}^{-1} \cdot T_a(\varphi') \cdot \bar{m}_1$  y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U'_1 & \xrightarrow{f} & U' \\ m_1 \downarrow & & \downarrow m \\ U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

con  $m \in \bar{s}_1(U)$ ,  $m_1 \in \bar{s}_1(U_1)$ . Por el corolario 3.11 sabemos que: si es  $V'$  correspondiente de  $U'$ ,  $\alpha'' = n^{-1} \cdot \alpha'$ ,  $m$  un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U'$  y  $V'$  con  $n \in s_2(V)$  existe un  $W'$  correspondiente de  $U'_1$ , un  $\alpha''_1 = o^{-1} \cdot \alpha'_1 \cdot m_1$  con  $o \in s_2(W)$  que es un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U'_1$  y  $W'$  y un  $g \in F_2(\psi)$  para algún  $\psi$ ,  $g: W' \rightarrow V'$  tales que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U'_1 & \xrightarrow{\alpha''_1} & W' \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ U' & \xrightarrow{\alpha''} & V' \end{array}$$

conmuta. Si es  $\psi': W \rightarrow V$  tal que  $n \cdot g = \psi' \cdot o$ , entonces  $\bar{g} = \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\psi') \cdot \bar{o} \in \bar{F}_2(T_a(\psi))$  y además se deduce trivialmente que:  $\alpha' \cdot \varphi = \psi' \cdot \alpha'_1$ . Entonces se tiene que:

$\bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot \bar{m} \cdot \bar{f} = \bar{w} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1$  (siendo  $\bar{w}: \bar{W}' \rightarrow \bar{X}_2$  un valor de  $\bar{t}_2$ ). En efecto:

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot \bar{m} \cdot \bar{f} &= \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot T_a(\varphi) \cdot \bar{m}_1 = \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\psi') \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1 \\ &= \bar{v} \cdot \bar{g} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1 \\ &= \bar{w} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1 \end{aligned}$$

Como según se probó,  $l_1$  no depende del valor de  $F_2$  correspondiente de  $U'_1$  elegido, podemos tomar:  $l_1 = \bar{w} \cdot \bar{o}^{-1} \cdot T_a(\alpha'_1) \cdot \bar{m}_1$  y también:  $l = \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \cdot T_a(\alpha') \cdot \bar{m}$ . Luego se ha probado que:

$$l \cdot \bar{f} = l_1$$

Siendo  $A_1 = (\bar{F}_1, X_1, \bar{s}_1)$  como en el teorema 3.8, por 4.7 y 4.8 es  $(\bar{F}_1, \bar{X}_1, \bar{s}_1)$   $\bar{K}$ -equivalente a  $(\bar{F}_1, \bar{X}_1, \bar{s}_1)$ . En particular:

$\varinjlim \bar{F}_1 = \bar{X}_1$ . Luego, (2) resulta trivial.

Sea para  $i=1,2$   $p_i: \bar{X}_i \rightarrow X_i$ ,  $q_i: \bar{F}_i \rightarrow F_i$  como en la hipótesis. Entonces, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{l} & \bar{X}_2 \\ r_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ U & \xrightarrow{k} & X_2 \end{array}$$

siendo  $r_1 \in \tilde{Q}_1(\bar{U})$ ,  $k' \in k(U)$ ,  $l \in \bar{k}(\bar{U})$ .

En efecto: como  $k'$  y  $l$  no dependen de los correspondientes de  $U'$  elegidos, tomamos:  $V'$  correspondiente de  $U'$  (respecto de  $U, V$ ) con  $\alpha'$  morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V$ . Si definimos entonces:  $k' = v \circ n^{-1} \circ \alpha' \circ m$ ,  $l = \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m}$ , con  $v \in t_2(V)$ ,  $n \in s_2(V)$ ,  $m \in \tilde{S}_1(U)$ . Se tiene que;

$$\begin{aligned} k' \circ r_1 &= v \circ n^{-1} \circ \alpha' \circ m \circ r_1 = v \circ n^{-1} \circ \alpha' \circ p_U \circ \bar{m} = \\ &= v \circ n^{-1} \circ p_V \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m} = v \circ p_V \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m} \\ &= p_2 \circ \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha') \circ \bar{m} \\ &= p_2 \circ l \end{aligned}$$

donde se han considerado  $p_U$ ,  $p_V$  y  $p_V$  proyecciones canónicas, teniendo en cuenta además, en la antecúltima igualdad, el teorema 2.5. Hemos probado entonces la validez de (3).

Por último, consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{X}_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \end{array}$$

Se tiene la transformación generalizada:  $\bar{k}_1: \bar{F}_1 \rightarrow X_2$  definida por:  $\bar{k}_1 = \alpha \circ \tilde{v}_1 \circ \tilde{q}_1$ . Luego, existe un único morfismo  $\psi$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{v}_1} & \bar{X}_1 \\ & \searrow \bar{k}_1 & \downarrow \psi \\ & & X_2 \end{array}$$

Además, es:  $\bar{k}_1 = \alpha \circ t_1 \Big|_{\bar{F}_1} \circ q_1 \Big|_{\bar{F}_1} = \alpha \circ p_1 \circ \bar{t}_1 \Big|_{\bar{F}_1} = (\alpha \circ p_1) \circ \bar{t}_1$

y también:  $\bar{k}_1 = \alpha \circ \tilde{t}_1 \circ \tilde{q}_1 = k \circ \tilde{q}_1 = p_2 \circ \bar{k} = (p_2 \circ \bar{\alpha}) \circ \tilde{t}_1$

Entonces, debe ser:  $\alpha \circ p_1 = p_2 \circ \bar{\alpha}$ , lo que prueba (4).

#### 4.10 Corolario:

Si es  $\bar{\alpha} : X_1 \rightarrow X_2$  como en el teorema 4.9 , entonces  $\bar{\alpha}$  es un  $\bar{K}$ -morfismo de  $(\bar{F}_1, \bar{X}_1, \bar{s}_1)$  en  $(\bar{F}_2, \bar{X}_2, \bar{s}_2)$  y si  $\alpha'$  es un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V$ , entonces  $T_a(\alpha')$  lo será (entre  $T_a(U)$  y  $T_a(V)$ ) por  $\bar{\alpha}$ .

Demostración:

Inmediata usando 3.9 , 4.7 y 4.8 .

#### 4.11 Definición:

Llamaremos a  $\bar{\alpha}$  un morfismo tangente asociado a  $\alpha$ .

## §5. PROPIEDADES FUNTORIALES DE LOS MORFISMOS TANGENTES

### 5.1 Proposición:

Sea  $\mathcal{C}$  una clase de atlas abstractos,  $K$  una  $G$ -topología intermedia para  $\mathcal{C}$ . Sea  $\bar{\mathcal{C}}$  otra clase de atlas abstractos que contiene, para cada atlas  $A$  de  $\mathcal{C}$  al menos un  $\bar{A}$  tangente a  $A$  y supongamos que es  $\bar{K}$  (definida a partir de  $K$  como en 1.5) una  $G$ -topología intermedia para  $\bar{\mathcal{C}}$ . Sean  $\mathcal{C}$  y  $\bar{\mathcal{C}}$  las categorías cuyas clases de objetos son  $\mathcal{C}$  y  $\bar{\mathcal{C}}$  respectivamente y cuyos morfismos son los  $K$ -morfismos y  $\bar{K}$ -morfismos de atlas, respectivamente. Entonces existe un funtor  $\bar{\mathcal{C}}_a: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  tal que si  $A$  es un atlas de  $\mathcal{C}$ ,  $\bar{\mathcal{C}}_a(A)$  es un atlas tangente a  $A$  y si  $\alpha$  es un  $K$ -morfismo de atlas,  $\bar{\mathcal{C}}_a(\alpha)$  es un morfismo tangente asociado a  $\alpha$ .

#### Demostración:

Definimos  $\bar{\mathcal{C}}_a(A) = \bar{A}$ , eligiendo como  $\bar{A}$  un atlas tangente a  $A$  perteneciente a  $\bar{\mathcal{C}}$ , y  $\bar{\mathcal{C}}_a(\alpha) = \bar{\alpha}$ , siendo  $\bar{\alpha}$  como se definió en § 4.

Sea  $l_X: A \rightarrow A$ , con  $A = (F, X, s)$  atlas de  $\mathcal{C}$  y sea  $\bar{A} = \bar{\mathcal{C}}_a(A)$ , de soporte  $\bar{X}$ . Por definición, el morfismo  $\bar{l}_X$  es el único tal que:

$$\begin{array}{ccc} \bar{F} & \xrightarrow{\bar{t}} & \bar{X} \\ & \searrow \bar{k} & \downarrow \bar{l}_X \\ & & X \end{array}$$

conmuta, siendo  $\bar{k}$  tal que, si  $l \in \bar{k}(T_a(U))$ , es de la forma:

$l = \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi) \circ \bar{m}$ , con  $\bar{v} \in \bar{t}(T_a(V))$ ,  $\bar{n} \in \bar{s}(T_a(V))$ ,  $\bar{m} \in \bar{s}(T_a(U))$ ,  $\varphi$  morfismo inducido por  $l_X$  entre  $U$  y  $V$ . Luego se tiene que, si es  $\bar{u} \in \bar{t}(T_a(U))$ , entonces:

$$(\#) \quad \bar{l}_X \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi) \circ \bar{m}$$

Dados  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{n}$ , existen  $u: U' \rightarrow X$ ,  $v: V' \rightarrow X$ ,  $m$  y  $n$  tales

que:  $u = v \circ n^{-1} \circ \varphi \circ m$ , con  $u \in \bar{t}(U)$ ,  $v \in t(V)$ ,  $m \in \tilde{s}(U)$ ,  $n \in s(V)$ . Luego, por el postulado (1),  $\exists$   $l$ , existirá un  $W' \in F(W)$  que es un  $U' \times_X V'$  respecto de  $u, v$  con proyecciones  $q_i \in F(p_i)$  ( $i=1,2$ ) para ciertos  $p_i$  y, por el lema 3.1, si son  $p_i'$  tales que  $m \circ q_i = p_i' \circ o$  (con  $o: W' \rightarrow W$ ,  $o \in s(W)$ ) será  $W$  un  $U \times_X V$  respecto de  $u \circ m^{-1}, v \circ n^{-1}$ . Por la propiedad universal del producto fibrado existirá entonces un morfismo  $p_1'': U \rightarrow W$  tal que:  $p_1' \circ p_1'' = 1_U$  y  $p_2' \circ p_1'' = \varphi$ . Sean  $\bar{W} = T_a(W)$ ,  $\bar{W}' = \bar{\Phi}(W')$  (siendo  $\bar{\Phi}$  como en la proposición 2.3),  $\bar{o} = o \times 1_E$ ,  $\bar{w}: \bar{W}' \rightarrow \bar{X}$ ,  $\bar{w} \in \bar{t}(\bar{W})$ ; si definimos  $\bar{q}_1 = \bar{m}^{-1} \circ T_a(p_1') \circ \bar{o}$ ,  $\bar{q}_2 = \bar{n}^{-1} \circ T_a(p_2') \circ \bar{o}$ , entonces será  $\bar{q}_i \in \bar{F}(T_a(p_i))$  y  $\bar{w} = \bar{u} \circ \bar{q}_1 = \bar{v} \circ \bar{q}_2$  (por definición de transformación generalizada aplicada a  $\bar{t}$ ). Por lo tanto se tiene que:  $\bar{m}^{-1} = \bar{q}_1 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'')$ , lo que implica:

$$\begin{aligned}
 (\text{**}) \quad 1_{\bar{X}} \circ \bar{u} &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi) \circ \bar{m} \quad \text{En efecto:} \\
 \bar{u} \circ \bar{m}^{-1} &= \bar{u} \circ \bar{q}_1 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') = \bar{w} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') = \bar{v} \circ \bar{q}_2 \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(p_1'') \\
 &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(p_2') \circ T_a(p_1'') \\
 &= \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\varphi)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (\*) y (\*\*) se ve que  $1_{\bar{X}} = \bar{1}_{\bar{X}}$ , o sea:

$$\bar{\tau}_a(1_A) = 1_{\bar{\tau}_a(A)}$$

Sean  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $\alpha: A_1 \rightarrow A_2$ ,  $\beta: A_2 \rightarrow A_3$ , morfismos de  $\mathcal{C}$ , con  $A_i = (F_i, X_i, s_i)$ .

Dado el diagrama  $U \xleftarrow{m} U' \xrightarrow{h} X$ , con  $m \in s_1(U)$ ,  $h \in t_1(U)$ , siguiendo el procedimiento de la proposición 3.4 de la primera parte, se obtiene un cubrimiento  $\Sigma = \{\sigma_s: U_s \rightarrow U\}$  asociado a

$(\alpha, U')$  tal que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 & \xrightarrow{\beta} & X_3 & \xrightarrow{u} & W'_r \\
 & \nearrow h & & & & & & & \\
 U' & & & & & & & & \\
 \downarrow m^{-1} & & & & & & & & \\
 U & \xrightarrow{\alpha_s} & U_s & \xrightarrow{d_s} & W_r & \xrightarrow{o^{-1}} & W'_r & & \\
 & \searrow & & & & & & & 
 \end{array}$$

donde  $d_s = \beta_r \circ \alpha_s$  siendo, si se considera al atlas  $\tilde{A}_1$  "restringido" a los modelos  $U_s$ ,  $\alpha_s$  un morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U_s$  y  $V_{jr}$  y, si se considera el atlas  $\tilde{A}_2$  "restringido" a los modelos  $V_{jr}$ ,  $\beta_r$  un morfismo inducido por  $\beta$  entre  $V_{jr}$  y  $W_r$ .

Sean  $\bar{k}_1: \bar{F}_1 \rightarrow \bar{X}_2$ ,  $\bar{k}_2: \bar{F}_2 \rightarrow \bar{X}_3$ ,  $\bar{k}_3: \bar{F}_1 \rightarrow \bar{X}_3$  las transformaciones generalizadas asociadas a los morfismos  $\alpha, \beta$  y  $\beta \circ \alpha$  respectivamente (como en el teorema 4.9). Sean  $\bar{U}' \in \bar{F}_1(T_a(U))$ ,  $l_3 \in \bar{k}_3(T_a(U))$ ,  $l_3 = \bar{w} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(d) \circ \bar{m}$ , con  $\bar{w}: \bar{W}' \rightarrow \bar{X}_3$ ,  $\bar{w} \in \bar{t}_3(T_a(W))$ ,  $\bar{o} \in \bar{s}_3(T_a(W))$ ,  $\bar{d}$  morfismo inducido por  $\beta \circ \alpha$  entre  $U$  y  $W$ ,  $\bar{m} \in \bar{s}_1(T_a(W))$ . Por lo demostrado más arriba sabemos que existe  $V$  modelo correspondiente de  $U$  por  $\alpha$ , existe  $\alpha_1$ , morfismo inducido por  $\alpha$  entre  $U$  y  $V$  y existe  $\beta_1$  ídem por  $\beta$  entre  $V$  y  $W$ , tales que:  $d = \beta_1 \circ \alpha_1$ . Sea  $V'$  correspondiente a  $U'$  (siendo  $\bar{U}'$  un  $U' \times E$ ) por  $\alpha$  respecto de  $U, V$ ; sea  $\bar{n}: \bar{V}' \rightarrow T_a(V)$ ,  $\bar{n} \in \bar{s}_2(T_a(V))$ ,  $\bar{V}'$  un  $V' \times E$ ,  $\bar{u}: \bar{U}' \rightarrow \bar{X}_1$ ,  $\bar{u} \in \bar{t}_1(T_a(U))$ . Entonces:

$\bar{\beta} \circ \bar{\alpha} \circ \bar{u} = \bar{\beta} \circ \bar{v} \circ \bar{n}^{-1} \circ T_a(\alpha_1) \circ \bar{m}$  por ser  $\bar{\alpha}$  el único morfismo tal que:  $\bar{\alpha} \circ \bar{t}_1 = \bar{k}_1$ . Además  $\bar{\beta} \circ \bar{v} = \bar{w} \circ \bar{o}^{-1} \circ T_a(\beta_1) \circ \bar{n}$ , por ser  $\bar{\beta}$  el único morfismo tal que:  $\bar{\beta} \circ \bar{t}_2 = \bar{k}_2$ . Luego:  $\bar{\beta} \circ \bar{\alpha} \circ \bar{u} = l_3$  lo que implica, por unicidad de  $\bar{\beta} \circ \alpha$ :  $\bar{\beta} \circ \bar{\alpha} = \overline{\beta \circ \alpha}$ . Es decir que:  $\bar{C}_a(\beta \circ \alpha) = \bar{C}_a(\beta) \circ \bar{C}_a(\alpha)$ .

Hemos probado entonces que  $\bar{C}_a$  es un funtor.



5.2 Lema:

Sean los atlas  $A=(F,X,s)$ ,  $A'=(F',X',s')$ , y sean  $\bar{A}=(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$ ,  $\bar{A}'=(\bar{F}',\bar{X}',\bar{s}')$  atlas tangentes, respectivamente, a los anteriores. Si  $A$  es  $K$ -equivalente a  $A'$ , entonces  $\bar{X}$  es isomorfo a  $\bar{X}'$  y  $\bar{A}$  es  $\bar{K}$ -equivalente al atlas  $(\bar{F}',\bar{X},\bar{s}')$ .

Demostración:

Por la demostración de la proposición 5.1 se ve que pueden tomarse  $\tilde{A}'$ ,  $\tilde{A}$  de manera que existan  $k$  y  $k'$ ,  $k:\tilde{F}\rightarrow X$ ,  $k':\tilde{F}'\rightarrow X$  transformaciones generalizadas tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{t}} & X \\ & \searrow k & \downarrow i \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{F}' & \xrightarrow{\tilde{t}'} & X \\ & \searrow k' & \downarrow i' \\ & & X \end{array}$$

siendo  $i=i'=1_X$ ,  $i:A\rightarrow A'$ ,  $i':A'\rightarrow A$  ( $k$  y  $k'$  asociadas a  $i$ ,  $i'$  como en 3.9) y tales que  $i'\circ i = 1_A$ .

Aplicando la proposición 5.1 al caso en que  $\mathcal{C}$  y  $\bar{\mathcal{C}}$  son dadas por:  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{A, A'\}$ ,  $\text{Ob}(\bar{\mathcal{C}}) = \{\bar{A}, \bar{A}'\}$  y como morfismos los  $K$  y  $\bar{K}$ -morfismos respectivamente, tenemos que si son  $\lambda = \bar{\zeta}_a(i)$ ,  $\mu = \bar{\zeta}_a(i')$  ( $\bar{\zeta}_a$  definido trivialmente, análogo al de 5.1), serán, en particular  $\lambda:\bar{X}\rightarrow\bar{X}'$ ,  $\mu:\bar{X}'\rightarrow\bar{X}$  tales que:

$\mu\circ\lambda = \bar{\zeta}_a(i'\circ i) = \bar{\zeta}_a(1_A) = 1_{\bar{\zeta}_a(A)} = 1_{\bar{X}}$ . Análogamente podría demostrarse que  $\lambda\circ\mu = 1_{\bar{X}'}$ . Es decir, en particular  $\mu\circ\lambda = 1_{\bar{X}}$  y  $\lambda\circ\mu = 1_{\bar{X}'}$ , por lo que resulta que  $\lambda$  y  $\mu$  son isomorfismos, inversos uno del otro, de  $\bar{X}$  en  $\bar{X}'$  y de  $\bar{X}'$  en  $\bar{X}$  respectivamente.

Si tomamos la transformación generalizada  $\bar{t}'' = \mu\circ\bar{t}'$  (considerando, por abuso del lenguaje, a  $\mu$  como transformación ge-

neralizada) (es el  $\lim_{\leftarrow} \bar{F}' = \bar{X}$  respecto de  $\bar{t}''$  y, evidentemente,  $\bar{A}$  es  $\bar{K}$ -equivalente a  $(\bar{F}', \bar{X}, \bar{s}')$ .

### 5.3 Teorema:

Sea  $V_K$  una categoría de  $K$ -variedades abstractas. Entonces existen una categoría de  $\bar{K}$ -variedades abstractas  $V_{\bar{K}}$  y un funtor  $\bar{C}: V_K \rightarrow V_{\bar{K}}$  tales que: si es  $V$  un objeto de  $V_K$ ,  $\bar{C}(V)$  es una clase de atlas tangentes a los de  $V$  en correspondencia biunívoca con ellos y si es  $\alpha: V_1 \rightarrow V_2$ ,  $A_i \in V_i$  ( $i=1,2$ ) entonces  $\bar{C}(\alpha): \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2$  es un morfismo tangente asociado a  $\alpha$  (siendo  $\bar{A}_i \in \bar{C}(V_i)$ ,  $\bar{A}_i$  atlas tangente a  $A_i$ )

#### Demostración:

Sea  $V$  un objeto de  $V_K$ ,  $A=(F,X,s) \in V$ . Sea  $\bar{A}=(\bar{F},\bar{X},\bar{s})$  un atlas tangente a  $A$ . Según el lema 5.2 existirá una  $\bar{K}$ -variedad  $\bar{V}$  de soporte  $\bar{X}$  tal que cada atlas de  $\bar{V}$  es tangente a uno de  $V$  y recíprocamente.

Sea entonces  $V_{\bar{K}}$  la categoría cuyos objetos son las  $\bar{K}$ -variedades  $V$  construidas de esa manera y cuyos morfismos son los  $\bar{K}$ -morfismos entre ellas. Sea  $\bar{C}: V_K \rightarrow V_{\bar{K}}$  definido por:  $\bar{C}(V)=\bar{V}$ ,  $\bar{C}(\alpha)=\bar{\alpha}$ , siendo, si consideramos  $\alpha: A_1 \rightarrow A_2$  ( $A_i \in V_i$ ,  $i=1,2$ ),  $\bar{\alpha}: \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2$  un morfismo tangente asociado a  $\alpha$  entre los atlas  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  ( $\bar{A}_i \in \bar{V}_i$ ,  $i=1,2$ ) tangentes a  $A_1, A_2$  respectivamente. Por la proposición 5.1,  $\bar{C}$  es un funtor.

### 5.4 Definición:

Llamaremos a  $\bar{C}(V)$  una variedad tangente a  $V$  y,

si es  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  un  $K$ -morfismo de variedades,  $\zeta(\alpha)$  será un morfismo tangente asociado a  $\alpha$  entre las variedades  $\zeta(V_1)$  y  $\zeta(V_2)$ . Además, si es  $p: \bar{X} \rightarrow X$  la proyección natural (definición 2.6), será  $p: \zeta(V) \rightarrow V$ , y también la llamaremos proyección natural.

### 5.5 Observación:

Si es  $L$  una  $G$ -topología de derivadas conservativas de  $K$  (definiciones 1.8 y 2.1) es, en particular,  $L$  intermedia para  $\{K, \bar{K}\}$ . Luego una  $K$ -variedad abstracta (respectivamente una  $\bar{K}$ -variedad abstracta) es una  $L$ -variedad abstracta y un  $K$ -morfismo entre variedades (respectivamente un  $\bar{K}$ -morfismo) es un  $L$ -morfismo entre variedades.

Sea  $\mathcal{V}_K^L$  (respectivamente  $\mathcal{V}_{\bar{K}}^L$ ) la categoría cuyos objetos y morfismos son los mismos que los de  $\mathcal{V}_K$  (respectivamente  $\mathcal{V}_{\bar{K}}$ ) en 5.3, pero considerados como  $L$ -variedades y  $L$ -morfismos respectivamente. Sea  $\mathcal{V}_L$  la categoría generada por  $\mathcal{V}_K^L \cup \mathcal{V}_{\bar{K}}^L$  y sea

$\mathcal{J}: \mathcal{V}_K^L \rightarrow \mathcal{V}_L$  el funtor inclusión. Entonces, se tiene el siguiente corolario de 5.3:

### 5.6 Corolario:

Existe una transformación natural  $p: \zeta \rightarrow \mathcal{J}$  tal que  $p(V): \zeta(V) \rightarrow V$  es la proyección natural de  $V$ .

#### Demostración:

Inmediata por el teorema 4.9 .

## 36. APLICACION DEL ESQUEMA A UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE

Supondremos en lo que sigue que los  $C^F$ -atlas mencionados son E-atlas ([1], II, §1) hereditarios (según 2.2, primera parte) y cumplen la siguiente condición: si son  $m_1, m_2$  mapas con el mismo dominio y el mismo codominio, entonces  $m_1 = m_2$ .

Veamos que valen los postulados (1) a (6) del §1 para  $T, \bar{T}$  definidos como en 2.2 (primera parte) y  $K$  definida como en 3.2 (primera parte).

La primera parte del postulado (1) vale trivialmente en  $\bar{T} = G - \mathcal{C}$ . Es decir: si existe un objeto  $A$  como se afirma, el producto fibrado será un conjunto no vacío. En la segunda parte, por ser  $h_1, h_2$  inclusiones (ver 2.2 primera parte) un producto fibrado será  $U_1' \cap U_2'$  que, por ser el atlas hereditario, es un dominio de mapa.

El postulado (2) resulta trivialmente pues, por ser  $g$  un morfismo de  $\text{Cat } T$  es un isomorfismo en su imagen y, si llamamos  $\hat{g}$  a ese isomorfismo, es  $f = \hat{g}^{-1} \circ h$ .

Por definición de  $\text{Cov}(G - \mathcal{C})$ , el postulado (3) se verifica también trivialmente.

Demostraremos ahora la validez del postulado (4).

Si es  $\bar{\Phi} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } T$  será cada  $\varphi_i$  un isomorfismo en su imagen y un  $U_i \times_U U_j$  es  $W_{ij} = \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ . Basta probarlo en este caso. Evidentemente  $t_U$ , definida sobre  $W_{ij}$  por:  $t_U(W_{ij}) = \text{inc}_{W_{ij} \rightarrow U}$  (inclusión) es una transformación natural. Sea  $v: I \rightarrow V$  otra, con  $V$  objeto de  $\text{Cat } T$ , sea  $v_i = v(U_i)$

$v_{ij} = v(W_{ij})$ . Entonces:  $v_{ij} = v_i \circ p_i = v_j \circ p_j$ , siendo  $p_\alpha = \hat{\varphi}_\alpha^{-1} \Big|_{W_{ij}}$  ( $\alpha = i, j$ ) la proyección canónica del producto fibrado. Sea  $u \in U$ ; existirá  $i, u_i \in U_i$  tal que  $\varphi_i(u_i) = u$ . Definimos  $h(u) = v_i(u_i)$ ; si es  $u_j \in U_j$  tal que  $\varphi_j(u_j) = u$ , entonces  $u \in W_{ij}$  y se tiene que:  $v_i(u_i) = v_i \circ \hat{\varphi}_i^{-1}(u) = v_i \circ p_i(u) = v_j \circ p_j(u) = v_j(u_j)$ . Luego,  $h$  está bien definida y para todo  $i$ , para todo  $j$ , hace conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \\ & \searrow v_i & \downarrow h \\ & & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W_{ij} & \xrightarrow{\text{inc}} & U \\ & \searrow v_{ij} & \downarrow h \\ & & V \end{array}$$

Verificaremos ahora el postulado (5).

Se tiene que  $\varphi(U)$  es un abierto en  $V$ . Luego si son:  $U' = m^{-1}(\varphi(U))$ ,  $m = \hat{\varphi}^{-1} \circ n \Big|_{n^{-1}(\varphi(U))}$  (donde  $\hat{\varphi} = \varphi$  pero con codominio restringido a su imagen) por ser el atlas hereditario tendremos que:  $m: U' \rightarrow U$  es un mapa. Si es  $\underline{f}$  la inclusión de  $U'$  en  $V'$  se obtiene lo requerido. La segunda parte es obvia por definición de  $F$ .

Por último, el postulado (6) se mencionó expresamente como hipótesis para los atlas a considerar, al pedir que exista un único mapa con dominio y codominio dados, en el principio del párrafo.

### 6.1 Lema:

Sea  $\mathcal{A}$  un  $C^r$ -atlas perteneciente a una variedad  $\mathcal{V}$ . Si es  $K$  la  $G$ -topología definida en 3.2 (primera parte) para la clase  $C$  de atlas de la variedad, sean  $O, M$  y  $N$  las siguientes

clases:

$$O = \{ Ux_E \mid U \text{ es objeto de } \text{Cat } K \}$$

$$M = \{ (\varphi_1, \varphi_2) : Ux_E \rightarrow Vx_E \mid \exists \varphi : U \rightarrow V, \varphi \in \text{Morf}(\text{Cat } K) \text{ con}$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi \circ \text{pr}, D\varphi), \text{ siendo } \text{pr} : Ux_E \rightarrow U \text{ la proyección cartesiana, } D\varphi \text{ la derivada usual} \}$$

$$N = \left\{ \left\{ (\varphi_1, \varphi_2) \in M, (\varphi_1, \varphi_2)_i : U_i x_E \rightarrow Ux_E \text{ tal que} \right. \right. \\ \left. \left. (\varphi_1, \varphi_2)_i = (\varphi_i \circ \text{pr}, D\varphi_i), \{ \varphi_i \} \in \text{Cov } K \right\}_i \right\}$$

Si definimos:  $\text{Ob}(\text{Cat } L) = \text{Ob}(\text{Cat } K) \cup O \cup \{E\}$ ,  $\text{Morf}(\text{Cat } L)$  es la clase generada por  $\text{Morf}(\text{Cat } K) \cup M \cup \{ \text{pr} : Ux_E \rightarrow U \text{ tal que } \text{pr} \text{ proyección cartesiana} \}$ ,  $\text{Cov } L = \text{Cov } K \cup N$ , entonces  $L$  es una  $G$ -topología intermedia para  $\{K, \bar{K}\}$ , siendo  $\bar{K}$  definida por:  $\text{Ob}(\text{Cat } \bar{K}) = O$ ,  $\text{Morf}(\text{Cat } \bar{K}) = M$ ,  $\text{Cov } \bar{K} = N$ .

Demostración:

Probemos que si  $L$  está bien definida; es decir, que  $\text{Cov } L$  está bien definido.

Sea  $\Phi$  una equivalencia en  $\text{Cat } L$ . Para probar  $\{\Phi\} \in \text{Cov } L$  bastará suponer  $\Phi \in M$ . Sea entonces  $\Phi = (\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi)$ ,  $\Psi = (\psi \circ \text{pr}_V, D\psi)$ , con  $\Psi = \Phi^{-1}$ , donde  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\psi : V \rightarrow U$ .

Entonces:

$$\text{pr}_U \circ \Psi \circ \Phi = \psi \circ \text{pr}_V \circ \Phi = \psi \circ \varphi \circ \text{pr}_U \text{ (pues } \Psi \circ \Phi = 1_{Ux_E} \text{)}$$

Luego, por ser  $\text{pr}_U$  suryectiva será  $\psi \circ \varphi = 1_U$ . Análogamente  $\varphi \circ \psi = 1_V$ .

Se ha probado entonces que si  $(\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi)$  es una equivalencia, también  $\varphi$  lo es. Además  $\{\varphi\} \in \text{Cov } K$  y, por defi

nición de  $N$  será  $\{\tilde{\Phi}\} \in \text{Cov } L$ .

Veamos que la "composición" de familias de  $N$  da una familia de  $N$ . Para eso mostraremos previamente que  $M$  es cerrado respecto a la composición.

Sea  $\tilde{\Phi} = (\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi) \in M$ ,  $\varphi: U \rightarrow V$ ,  $\tilde{\Psi} = (\psi \circ \text{pr}_V, D\psi)$ ,  $\psi: V \rightarrow W$ ,  $\tilde{\Psi} \in M$ . Sean  $\text{pr}_A: Ax \in E \rightarrow A$ , para  $A=U, V, W$  y  $\text{pr}_E: Wx \in E \rightarrow E$  proyecciones cartesianas. Entonces:

$$\text{pr}_W \circ \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = \psi \circ \varphi \circ \text{pr}_U$$

$$\text{pr}_E \circ \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = D\psi \circ D\varphi$$

Sean  $u \in U$ ,  $x \in E$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} (D\psi \circ D\varphi)(u, x) &= D\psi(\varphi(u), D\varphi(u).x) = D\psi(\varphi(u)) \cdot (D\varphi(u).x) \\ &= (D\psi(\varphi(u)) \circ D\varphi(u))(x) \\ &= (D(\psi \circ \varphi)(u))(x) \\ &= (D(\psi \circ \varphi))(u, x) \end{aligned}$$

donde en la anteúltima igualdad se usó la regla de derivación de una función compuesta. Luego:

$$(\text{xx}) \quad D\psi \circ D\varphi = D(\psi \circ \varphi),$$

por lo que:  $\text{pr}_E \circ \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = D(\psi \circ \varphi)$ . Hemos probado entonces:

$$(\text{xxx}) \quad \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = (\psi \circ \varphi \circ \text{pr}_U, D(\psi \circ \varphi))$$

de donde resulta:  $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} \in M$ .

Por ser  $\text{Cov } K$  cerrado respecto a la "composición" de familias y por lo que acabamos de probar de  $M$ , tenemos que también  $N$  es cerrado respecto a dicha "composición".

Verifiquemos por último el axioma (iii) de  $G$ -topologías. Los únicos casos posibles son:

1º)  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ ,  $\psi: V \rightarrow U$ ,  $\psi$  morfismo de  $\text{Cat } K$ .

- 2º)  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ ,  $\text{pr}: U \times E \rightarrow U$  (morfismo de  $\text{Cat } L$ )  
 3º)  $\{\Phi_i: U_i \times E \rightarrow U \times E\} \in N$ ,  $\Psi: V \times E \rightarrow U \times E$ ,  $\Psi \in M$   
 4º)  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ ,  $G: V \times E \rightarrow U$ ,  $G = \text{pr}_U \circ \Psi$ ,  $\Psi \in M$   
 5º)  $\{\varphi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov } K$ ,  $H: V \times E \rightarrow U$ ,  $H = \Psi \circ \text{pr}_V$ ,  $\Psi$  morfismo de  $\text{Cat } K$

1º) Obvio por ser  $K$  una  $G$ -topología.

2º) Sea el diagrama:  $U_i \xrightarrow{\varphi_i} U \xleftarrow{\text{pr}} U \times E$ , sea  $\text{pr}_i: U_i \times E \rightarrow U_i$ ,  
 $\Phi_i = (\varphi_i \circ \text{pr}_i, D\varphi_i)$ . Entonces el siguiente es un diagrama

de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xleftarrow{\text{pr}_i} & U_i \times E & \xrightarrow{\Phi_i} & U \times E \\ & \searrow \varphi_i & & & \swarrow \text{pr} \\ & & U & & \end{array}$$

Para probarlo, mostremos previamente que si es  $\varphi: U \rightarrow V$  una equivalencia, entonces  $(\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi)$  también lo es.

Sea  $\psi = \varphi^{-1}$ ,  $\psi: V \rightarrow U$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi) \circ (\psi \circ \text{pr}_V, D\psi) &= (\psi \circ \varphi \circ \text{pr}_U, D(\psi \circ \varphi)) \text{ (por (XXX))} \\ &= (\text{pr}_U, D(1_U)) \\ &= (\text{pr}_U, \text{pr}_E) \\ &= 1_{U \times E}, \end{aligned}$$

donde  $\text{pr}_E: U \times E \rightarrow E$  es la proyección cartesiana, usando además aquí la siguiente igualdad conocida:

$$\text{(XXX)} \quad D(1_U) = \text{pr}_E$$

Ahora la demostración de que el diagrama de más arriba es de producto fibrado se deduce trivialmente del hecho de que  $\varphi_i$  es un isomorfismo en su imagen. Además, por definición de  $N$  será  $\{\Phi_i\} \in \text{Cov } L$ .



3º) Dado el diagrama  $U_i \times E \xrightarrow{\Phi_i} U \times E \xleftarrow{\Psi} V \times E$  existirán  $\varphi_i$ ,  $\psi$  morfismos de  $\text{Cat } K$  tales que  $\Phi_i = (\varphi_i \circ \text{pr}_i, D\varphi_i)$ ,  $\Psi = (\psi \circ \text{pr}_U, D\psi)$  siendo  $\text{pr}_i: U_i \times E \rightarrow U_i$ ,  $\text{pr}_U: U \times E \rightarrow U$  proyecciones cartesianas, y  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } K$ . Entonces existe  $V_i$  que es un  $U_i \times V$  respecto de  $\varphi_i$  y  $\psi$ , y si son  $p_i: V_i \rightarrow V$ ,  $q_i: V_i \rightarrow U_i$  las proyecciones canónicas, será  $\{p_i\} \in \text{Cov } K$ .

Afirmamos que el siguiente es un diagrama de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} U_i \times E & \xleftarrow{Q_i} & V_i \times E & \xrightarrow{P_i} & V \times E \\ & \searrow \Phi_i & & \swarrow \Psi & \\ & & U \times E & & \end{array}$$

siendo  $P_i = (p_i \circ \text{pr}_{V_i}, DP_i)$ ,  $Q_i = (q_i \circ \text{pr}_i, Dq_i)$ ,  $\text{pr}_{V_i}: V_i \times E \rightarrow V_i$  proyección. En efecto: evidentemente el diagrama conmuta, por ser  $\varphi_i \circ q_i = \psi \circ p_i$  y por (\*\*); además, si es  $S$  un objeto de  $\text{Cat } L$  y son  $\Sigma_1: S \rightarrow U_i \times E$ ,  $\Sigma_2: S \rightarrow V \times E$  morfismos de  $\text{Cat } L$  tales que  $\Phi_i \circ \Sigma_1 = \Psi \circ \Sigma_2$ , necesariamente  $\Sigma_k \in M$  ( $k=1,2$ ), o sea que  $S$  es de la forma:  $S = W \times E$ , y  $\Sigma_k = (\sigma_k \circ \text{pr}_W, D\sigma_k)$ , siendo  $\text{pr}_W: W \times E \rightarrow W$  proyección. Entonces será  $\varphi_i \circ \sigma_1 = \psi \circ \sigma_2$  por lo cual existirá  $h$  (morfismo de  $\text{Cat } K$ ) tal que:  $q_i \circ h = \sigma_1$ ,  $p_i \circ h = \sigma_2$ . Si tomamos  $H = (h \circ \text{pr}_W, Dh)$  será:  $Q_i \circ H = \Sigma_1$ ,  $P_i \circ H = \Sigma_2$ . Además, por ser  $\{p_i\} \in \text{Cov } K$ , será  $\{P_i\} \in \text{Cov } L$ .

4º) Se deduce inmediatamente del 2º y 3º caso.

5º) Idem del 1º y 2º.

Por último, en el transcurso de la demostración ha sido probado que  $K$  está bien definida. En efecto, basta ver que toda equivalencia  $\Phi$  de  $M$  es tal que  $\{\Phi\} \in N$ , que  $M$  y  $N$  son "cerradas respecto a la composición" y que vale el axioma (iii) de

$G$ -topologías para  $K$ , lo que resulta del 3º caso que se probó. Es obvio también que  $L$  es intermedia para  $\{K, \bar{K}\}$ .

## 6.2 Lema:

Si es  $L$  como en el lema 6.1, entonces  $L$  es una  $G$ -topología de derivadas de  $K$  (según definición 1.8).

### Demostración:

Veamos en primer lugar que  $L$  tiene modelos tangentes de  $K$  (según definición 1.2).

Trivialmente se ve que  $K$  es una sub- $G$ -topología de  $L$  y que  $\text{Cat } L$  es una subcategoría de  $\text{Cat } \bar{T}$  ( $\bar{T}=G\text{-}\mathcal{C}$ ). Sea  $\{\Phi_i\} \in \text{Cov } L$  y veamos que  $\{\Phi_i\} \in \text{Cov } \bar{T}$ . Basta probar que  $N \subset \text{Cov } \bar{T}$ . Sea  $\{\Phi_i\} \in N$ ; luego para todo  $i$  existe un morfismo  $\varphi_i$  de  $\text{Cat } K$  tal que  $\Phi_i = (\varphi_i \circ \text{pr}, D\varphi_i)$  y  $\{\varphi_i\} \in \text{Cov } K$ . Por definición de  $\text{Cov } K$  es  $\varphi_i$  un isomorfismo en su imagen, para todo  $i$ , y se tiene además que, si es  $\varphi_i: U_i \rightarrow U$ ,  $\bigcup \varphi_i(U_i) = U$ . Entonces,  $D\varphi_i(x)$  es biyectiva para todo  $x$  y, si es  $(u, y) \in U \times E$  existirá  $(u_i, x) \in U_i \times E$  tal que  $\Phi_i(u_i, x) = (u, y)$ . Es decir que  $\bigcup \Phi_i(U_i \times E) = U \times E$ , y entonces  $N \subset \text{Cov } \bar{T}$ .

Definimos  $T_a$  por  $T_a(U) = U \times E$ , para  $U$  objeto de  $\text{Cat } K$ . Obviamente  $T_a$  es inyectiva y vale también (ii) de la definición 1.2.

Podemos considerar a la derivación usual como una función  $D: \text{Morf}(\text{Cat } K) \rightarrow \text{Morf}(\text{Cat } L)$  tal que si  $\varphi: U \rightarrow V$  es un morfismo de  $\text{Cat } K$ , entonces es  $D\varphi: U \times E \rightarrow E$ . Además, si  $\varphi = l_U$ , por (\*\*\*) de la demostración del lema 6.1 será  $D\varphi = \text{pr}_E$  (proyección cartesiana) y se verifica también (por \*) de la misma demostración) que:  $D\varphi \circ (\varphi \circ \text{pr}, D\varphi) = D(\varphi \circ \varphi)$ . Es decir

que, según la definición 1.4,  $L$  tiene derivadas de  $K$ .

Por ser además  $L$  intermedia para  $\{K, \bar{K}\}$  (lema 6.1) vale lo propuesto por el enunciado.

### 6.3 Lema:

La  $G$ -topología  $L$  tiene derivadas conservativas de  $K$  (según definición 2.1)

#### Demostración:

Como  $\bar{K}$  es una sub- $G$ -topología de  $L$  y ésta lo es de  $T$ , se ve que vale trivialmente (i) de dicha definición.

Sea el siguiente diagrama de producto fibrado en  $\text{Cat } T$ :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xleftarrow{P_1} & W & \xrightarrow{P_2} & U_2 \\ & \searrow f_1 & & \swarrow f_2 & \\ & & U & & \end{array}$$

Entonces, por ser  $f_i$  ( $i=1,2$ ) un isomorfismo en su imagen, podemos tomar  $W=f_1(U_1) \cap f_2(U_2)$  (sinó sería  $W' \approx W$  y por lo tanto  $T_a(W) \approx T_a(W')$  por ser  $T_a$  funtor), y  $p_i = \hat{f}_i^{-1}$ , siendo  $\hat{f}_i = f_i$  pero con codominio restringido a su imagen.

Siendo  $T_a(f_i)$  ( $i=1,2$ ) un isomorfismo en su imagen (por ser lo  $f_i$ ), un producto fibrado en  $G-\mathcal{E}$  es:

$$W_{12} = T_a(f_1)(T_a(U_1)) \cap T_a(f_2)(T_a(U_2))$$

Bastaría ver que es  $W_{12} = T_a(W)$ .

Probemos que:  $T_a(f_i)(T_a(U_i)) = f_i(U_i) \times E$  ( $i=1,2$ )

Sea  $(u,y) \in f_i(U_i) \times E$ . Luego existe  $u_i \in U_i$  tal que  $f_i(u_i) = u$ . Por ser  $f_i$  un isomorfismo en su imagen, será  $Df_i(t)$  biyectiva para todo  $t$ . Por lo tanto existirá  $x \in E$  tal que  $Df_i(u_i).x = y$

Es decir que:  $(u,y) \in T_a(f_i)(T_a(U_i))$ , con lo que queda probado lo propuesto (la otra inclusión es evidente).

Entonces:

$$\begin{aligned} W_{12} &= (f_1(U_1) \times E) \cap (f_2(U_2) \times E) \\ &= (f_1(U_1) \cap f_2(U_2)) \times (E \cap E) \\ &= W \times E \\ &= T_a(W) \end{aligned}$$

Luego, vale el punto (ii) de la definición 2.1.

Sea ahora  $\Phi = \{ \varphi_i: U_i \rightarrow U \} \in \text{Cov } T$ ,  $I: C_\Phi \rightarrow \text{Cat } T$  el functor inclusión. Si es  $I': C_r \rightarrow \text{Cat } T'$  el functor inclusión,  $\text{Cat } T' = T_a(\text{Cat } T)$ ,  $C_r = T_a(C_\Phi)$ , si probamos que  $\varinjlim I' = T_a(U)$ , será  $\varinjlim (T_a \circ I) = T_a(U)$  (por ser  $T_a$  un isomorfismo de  $C_\Phi$  en  $C_r$ )

Siguiendo el procedimiento que se usó para demostrar la validez del postulado (4), al principio de este párrafo, y teniendo en cuenta lo probado respecto al producto fibrado  $T_a(U_1) \times T_a(U_2)$  mas arriba, se ve que:  $T_a(U) = \varinjlim I'$ .

#### 6.4 Proposición:

Dado un  $C^r$ -atlas  $\mathcal{A}$ , que sea un E-atlas hereditario, si es K la G-topología definida como en 3.2 (primera parte) entonces existe una G-topología L de derivadas conservativas de K (según definiciones 1.3 y 2.1)

#### 6.5 Nota:

Consideraremos en lo que sigue la siguiente definición ([1]) de espacio tangente en un punto  $x \in X$ , siendo X el espacio subyacente a un atlas  $\mathcal{A}$ :  $T_x(X) = A/\sim$ ; siendo A el conjun-

to de ternas  $(U', m; v)$  con  $m: U' \rightarrow U$  mapa en  $\underline{x}$  de  $\mathcal{A}$ ,  $v \in E$  y la relación de equivalencia definida por:  $(U', m, v) \sim (V', n, w)$  sii  $T_a(n \circ m^{-1})(m(x), v) = (n(x), w)$ .

Se ve que, fijado un mapa  $(U', m)$  hay un isomorfismo:

$T_x(X) \rightarrow E$  dado por:  $(U', m, v) \mapsto v$ .

Además, si es  $T(X) = \bigvee_{x \in X} T_x(X)$  (unión disjunta), será  $T(X)$  el soporte del atlas  $T(\mathcal{A})$  tangente al  $\mathcal{A}$ , cuyos dominios de mapa son los  $\pi^{-1}(U')$ , siendo  $\pi: T(X) \rightarrow X$  la proyección:

$\pi|_{T_x(X)} = \{x\}$ ,  $U'$  dominio de mapa de  $\mathcal{A}$ .

Se tiene entonces, para cada  $(U', m)$  mapa en  $\underline{x}$  un isomorfismo  $\alpha: \pi^{-1}(U') \rightarrow U' \times E$  definido por:  $(U', m, v) \mapsto (x, v)$ .

Por último, si es  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una aplicación diferenciable se define  $T(f): T(X_1) \rightarrow T(X_2)$  de la siguiente manera: sea  $T_x(f): T_x(X_1) \rightarrow T_{f(x)}(X_2)$  tal que:  $T_x(f)(U', m, v) = (V', n, w)$ , siendo  $w = Df'(m(x)).v$ ,  $f'$  definida en  $m(f^{-1}(V') \cap U')$  por  $f' = n \circ f \circ m^{-1}$ ; entonces  $T_x(f) = T(f)|_{T_x(X_1)}$ . Trivialmente resultará:

$\pi_2 \circ T(f) = f \circ \pi_1$ , siendo  $\pi_1, \pi_2$  proyecciones canónicas.

## 6.6 Proposición:

El atlas abstracto  $(G, E(X), u)$  obtenido como en 2.2 (primera parte) a partir de  $T(\mathcal{A})$  es un atlas tangente (según la definición 2.6) al  $(F, X, s)$  obtenido por la misma construcción a partir de  $\mathcal{A}$ . Además, la proyección  $\pi: T(X) \rightarrow X$  es su proyección natural.

Demostración:

En primer lugar veamos que valen en este caso las hipótesis del teorema 2.5 (suficientes para la existencia del atlas tangente a  $(F, X, s)$ ).

Trivialmente se ve que  $T$  es  $G$ -plena en  $\bar{T}$  y, como  $\mathcal{C}$  tiene límites directos (teorema de Kan) es en particular semicompleta; obviamente existe la función  $\bar{\Phi}$  como en 2.3 y, por proposición 6.4, se tiene la totalidad de las hipótesis.

Si, es  $G: T'' \rightarrow \bar{T}$  definido como en 2.2 (primera parte) a partir de  $T(\mathcal{X})$ , será  $\text{Cat } T''$  la categoría cuyos objetos son los de la forma  $U \times E$  con  $U$  modelo de  $\mathcal{X}$  y cuyos morfismos son los  $\bar{\Phi} = (\varphi \circ \text{pr}_U, D\varphi)$  que son cambios de mapa en  $T(\mathcal{X})$  (luego  $\varphi$  es un cambio de mapa en  $\mathcal{X}$ ), las inclusiones entre objetos y las composiciones. Luego, es igual a  $\text{Cat } T'$ , siendo  $T'$  definida como en § 2 a partir de  $T$ , donde  $T$  es el dominio del funtor  $F$ .

Además  $\text{Cov } T''$  es la clase de familias  $\{\bar{\Phi}_i: U_i \times E \rightarrow U \times E\}$  tales que  $\bigcup \bar{\Phi}_i(U_i \times E) = U \times E$ ; siendo  $\bar{\Phi}_i$  un morfismo de  $\text{Cat } T''$  será de la forma:  $\bar{\Phi}_i = (\varphi_i \circ \text{pr}_{U_i}, D\varphi_i)$ , siendo  $\varphi_i: U_i \rightarrow U$ ,  $\text{pr}_{U_i}: U_i \times E \rightarrow U_i$  proyección. Según se vió en la demostración del lema 6.3 es  $\bar{\Phi}_i(U_i \times E) = \varphi_i(U_i) \times E$ . Luego:  $\bigcup \bar{\Phi}_i(U_i \times E) = (\bigcup \varphi_i(U_i)) \times E = U \times E$ , por lo que:  $\bigcup \varphi_i(U_i) = U$ . Entonces  $\text{Cov } T'' = \text{Cov } T'$  y entonces  $T' = T''$ .

Veamos que  $(G, T(X), u)$  definido como sigue verifica la definición 2.6 para  $(F, X, s)$ .

Según 2.2  $G$  será:

$$G(U \times E) = \{ \pi^{-1}(U') \mid \exists m: U' \rightarrow U, \text{ mapa de } \mathcal{X} \}$$



También los valores de  $u$  según la hemos definido, coinciden con los de  $\bar{s}$  de  $\S 2$ , pues, si consideramos:  $U' \xleftarrow{\text{pr}_{U'} \circ \alpha} \pi^{-1}(U') \xrightarrow{\text{pr}_E \circ \alpha} E$ , siendo  $\alpha: \pi^{-1}(U') \xrightarrow{\cong} U' \times E$  y  $\text{pr}_{U'}: U' \times E \rightarrow U'$ ,  $\text{pr}_E: U' \times E \rightarrow E$  proyecciones, es  $\pi^{-1}(U')$  un  $U' \times E$  con proyecciones  $\text{pr}_{U'} \circ \alpha$  y  $\text{pr}_E \circ \alpha$ , y  $\bar{m}$  un  $\text{m} \times \text{l}_E$ , para cada  $m$ , en  $\text{Cat } \bar{T}$ .

Entonces se ha visto que:  $(G, T(X), u)$  es un atlas tangente a  $(F, X, s)$ .

Por último, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U') & \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}(U')}} & U' \\ \bar{m} \downarrow & & \downarrow m \\ U \times E & \xrightarrow{\text{pr}_U} & U \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } (\text{pr}_U \circ (\text{m} \times \text{l}_E) \circ \alpha)(\overline{U', m, v}) &= (\text{pr}_U \circ (\text{m} \times \text{l}_E))(x, v) \\ &= \text{pr}_U(m(x), v) \\ &= m(x) \end{aligned}$$

$$(m \circ \pi)(\overline{U', m, v}) = m(x)$$

Entonces conmutará también:

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\pi} & X \\ \text{inc} \uparrow & & \uparrow \text{inc} \\ \pi^{-1}(U') & \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}(U')}} & U' \\ \bar{m}^{-1} \uparrow & & \uparrow m^{-1} \\ U \times E & \xrightarrow{\text{pr}_U} & U \end{array}$$

por lo que resulta  $\pi$  proyección natural entre  $(G, T(X), u)$  y  $(F, X, s)$ .

### 6.7 Proposición:

Sea  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una aplicación diferenciable entre los atlas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y sea  $T(f)$  su correspondiente aplicación tangente. Si es  $\bar{A}_i$  ( $i=1,2$ ) el atlas abstracto asociado



a  $T(\alpha_1)$  como en la proposición 6.6, entonces  $T(f)$  es un morfismo tangente asociado a  $f$  (según definición 4.11), considerando  $f: A_1 \rightarrow A_2$ , siendo  $A_i$  atlas abstracto asociado a  $\alpha_i$  (como en 2.2, primera parte).

Demostración:

Vamos a definir en primer lugar el atlas  $\tilde{\alpha}_1$  equivalente al  $\alpha_1$  mediante la siguiente construcción: si es  $U'$  un dominio de mapa  $\alpha_1$ , tendremos que:  $U' = \bigcup (U' \cap f^{-1}(V'))$ , la unión extendida a todos los dominios de mapa  $V'$  de  $\alpha_2$ . Por ser  $f$  diferenciable, en particular continua, será  $U' \cap f^{-1}(V')$  abierto en  $U'$ . Por ser el atlas hereditario, será también un dominio de mapa. Consideramos entonces el atlas  $\tilde{\alpha}_1$  cuyos dominios de mapa son sólo los de esa forma y los mapas son, naturalmente, las respectivas restricciones de los de  $\alpha_1$ . Trivialmente será  $\tilde{\alpha}_1$  equivalente a  $\alpha_1$ . Además, si se toma el atlas abstracto  $\tilde{A}_1$  asociado a  $\tilde{\alpha}_1$  como en 2.2 (primera parte), evidentemente satisface las hipótesis del teorema 3.8.

Sea  $\tilde{A}_1 = (\tilde{G}_1, T(X_1), \tilde{u}_1)$  asociado a  $T(\tilde{\alpha}_1)$ ,  $\tilde{A}_2 = (G_2, T(X_2), u_2)$  asociado a  $T(\alpha_2)$ , como en la proposición 6.6. Definimos entonces la transformación generalizada  $\bar{k}: \tilde{G}_1 \rightarrow T(X_2)$  como sigue: sea  $\pi_1^{-1}(U') \xrightarrow{\bar{m}} U' \in E$  un mapa de  $T(\tilde{\alpha}_1)$ ; entonces, existirá un mapa  $\pi_2^{-1}(V') \xrightarrow{\bar{n}} V' \in E$  de  $T(\alpha_2)$  tal que  $f(U') \subset V'$ , por definición de  $\tilde{\alpha}_1$ . Luego, se puede definir  $f' = n \circ f \circ m^{-1}$ ,  $f': U \rightarrow V$ . Sea  $\Phi' = (f' \circ \text{pr}_U, Df')$ ,  $\Phi': U' \in E \rightarrow V' \in E$ ; sea entonces el valor  $\bar{l}$  de  $\bar{k}$  en  $U' \in E$  de dominio  $\pi_1^{-1}(U')$  definido por  $\bar{l} = \bar{n}^{-1} \circ \Phi' \circ \bar{m}$ .

Veamos que se verifica la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}_1 & \xrightarrow{\tilde{u}_1} & T(X_1) \\ & \searrow \bar{k} & \downarrow T(f) \\ & & T(X_2) \end{array}$$

O sea que, para cada dominio de mapa  $U'$  de  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $T(f)|_{\pi_1^{-1}(U')} = \bar{l}$

Sea  $x \in \pi_1^{-1}(U')$ ; luego  $U' \xrightarrow{m} U$  es un mapa en  $x$ . Consideremos identificado  $\pi_1^{-1}(U')$  con  $U' \times E$  por el isomorfismo  $\alpha$ ,  $\alpha: (U', m, v) \rightarrow (x, v)$  y análogamente  $\pi_2^{-1}(V')$  con  $V' \times E$  por  $\beta: (V', n, w) \rightarrow (f(x), w)$  (siendo  $V' \xrightarrow{n} V$  mapa en  $f(x)$ ).

Entonces:  $T(f)(x, v) = T_x(f)(x, v) = (f(x), w)$ , siendo  $w = Df'(m(x)) \cdot v$ ,  $f' = n \circ f \circ m^{-1}$ . Por otra parte:

$$\begin{aligned} \bar{l}(x, v) &= ((n^{-1}x)_E) \circ \Phi' \circ (m)_E(x, v) = (n^{-1}x)_E((f' \circ m)(x), \\ &\quad Df'(m(x)) \cdot v) \\ &= (f(x), w) \end{aligned}$$

Trivialmente se ve además que  $\pi_2 \circ T(f) = f \circ \pi_1$ .

Luego, si definimos el valor  $l$  de la transformación generalizada  $k: \tilde{F}_1 \rightarrow X_2$  (siendo  $\tilde{F}_1$  tal que:  $\tilde{A}_1 = (\tilde{F}_1, X_1, \tilde{s}_1)$ ) en  $U$  con dominio en  $U'$  por  $l = n^{-1} \circ f' \circ m$ , o sea:  $l = f|_{U'}$ , se tiene que:

$$\pi_2 \circ \bar{l} = l \circ \pi_1 \quad \text{en } \pi_1^{-1}(U').$$

Fuesto que, por la proposición 3.5 (primera parte) es  $f$  un morfismo de  $A_1$  en  $A_2$ , hemos probado entonces que  $\bar{k}$ ,  $T(f)$  verifican las condiciones del teorema 4.9. En particular  $T(f)$  es un morfismo tangente asociado a  $f$ .



$V = \Gamma^r(\mathcal{V})$ , con  $\mathcal{V}$   $C^r$ -variedad de tipo S modelada sobre un espacio E.

Si tomamos los atlas tangentes a los de  $\mathcal{V}$ , se ve que por la proposición 6.6, aplicándoles la construcción 2.2 (primera parte) se obtienen los atlas abstractos tangentes (según definición 2.6) a los de V. Además, puesto que son equivalentes (forman la variedad  $T(\mathcal{V})$ ), los atlas abstractos correspondientes serán  $\bar{K}$ -equivalentes, por proposición 5.5 (primera parte); es decir que pertenecen a una misma  $\bar{K}$ -variedad abstracta  $\bar{V}$ .

Definimos entonces:  $\mathcal{Z}(V) = \bar{V}$  y, si es  $\alpha: V_1 \rightarrow V_2$  un  $K$ -morfismo de variedades,  $\mathcal{Z}(\alpha) = T(\alpha)$ , que es una buena definición teniendo en cuenta la proposición 5.5 (primera parte) y la 6.7.

Luego, existe  $\mathcal{Z}$  en las condiciones del teorema 5.3.

Se ve además trivialmente que:  $\Gamma^{r-1} \circ \tau = \mathcal{Z} \circ \Gamma^r$ .



## REFERENCIAS

- [1] S. Lang: "Introduction to Differentiable Manifolds"  
Interscience. New York, 1962.
- [2] M. Artin: "Grothendieck Topologies".  
Harvard University, 1962.
- [3] Ch. Ehresmann: "Catégories et structures"  
Dunod. Paris, 1965.
- [4] D. Kan: "Functors involving c.s.s. complexes".  
Trans. Amer. Math. Soc. 87, 330-346, 1958.
- [5] N. Bourbaki: "Variétés différentielles et analytiques"  
Fascicule de résultats. Hermann. Paris.
- [6] A. Bastiani: "Applications différentiables et variétés  
différentiables de dimension infinie"  
Jour. d'Analyse Math. XIII, 1-114, 1964.

Otros textos consultados:

- B. Mitchell: "Theory of categories"  
Academic Press. New York, 1965.
- L. Auslander and R.E. MacKenzie: "Introduction to Differentia-  
ble Manifolds". Mc.Graw Hill, 1963.

