

**ANÁLISIS DE ERRORES EN EVALUACIONES DE SUFICIENCIA
INGRESO A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
EJE LÓGICO MATEMÁTICO DEPARTAMENTO DE
CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

VERA, O.; VOLTA L

Universidad Nacional de Quilmes, Departamento de Ciencia y Tecnología
Roque Saenz Peña 352. Bernal (1878)
overa@unq.edu.ar

RESUMEN

Los resultados obtenidos en los exámenes de admisión han sido deficientes en general, y en particular para los que se corresponden con los resultados del Eje Lógico Matemático del Departamento de Ciencia y Tecnología. Resulta conveniente el conocimiento de los errores básicos, ya que provee información sobre las dificultades con las se enfrentan los alumnos al interpretar los problemas y utilizar los diferentes procedimientos para alcanzar una meta. Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; constituyen un elemento estable en los mismos. A partir de este descubrimiento, el estudiante puede ocupar distintas propiedades de un concepto que antes no era capaz de utilizar. Para abordar el problema utilizaremos la clasificación en diversas categorías de los errores que Luis Rico (1995) recupera en Radatz (1979), ofreciendo una clasificación de los mismos basada en las dificultades que los ocasionan, y en la consideración teórica del error que se recupera de Socas (1997). Finalmente, luego de realizar un análisis cuantitativo de la información utilizando tablas de clasificación, presentamos una serie de sugerencias para no incurrir en el error, y evitar así la dificultad (Ruano, 2008); para pasar de este modo a las conclusiones, que incluyen una autocrítica.

Palabras clave: dificultades, errores, lenguaje, aprendizaje

INTRODUCCIÓN

Al estudiar las dificultades, de acuerdo con los errores encontrados en los exámenes de los aspirantes al ingreso directo, reconocemos que las mismas también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la institución educativa, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones. Una delimitación de las causas posibles de un error dado, o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él, es con frecuencia bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo. El fracaso en los exámenes de admisión en los últimos años en las distintas Universidades argentinas, y en particular en la Universidad Nacional de Quilmes, es el tema fundamental de preocupación. El examen de admisión que ofrece esta Universidad, para el Eje Lógico- Matemático del Departamento de Ciencia y Tecnología pretende recuperar un conjunto de contenidos de la matemática elemental que son básicos para la comprensión de las asignaturas que tienen a la matemática como tema central (Análisis Matemático I y Álgebra) ó como herramienta de apoyo (Física I y Química I). Puesto que los resultados obtenidos vienen siendo deficientes, resulta conveniente el conocimiento de las dificultades (observables a través de los errores), ya que proveen de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar un éxito. Además a partir del conocimiento de sus errores el estudiante puede ocupar distintas propiedades, argumentar proposiciones y resignificar el uso del lenguaje. Parece necesario diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos para ver las dificultades presentes, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.

MARCO TEÓRICO

Según Socas (1997), el error debe ser considerado como la *presencia en un alumno de un esquema cognitivo inadecuado* y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o de una distracción. Los errores aparecen cuando se enfrentan a conocimientos nuevos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración, y un uso de los que ya saben.

La posición cognitiva sugiere que la mente no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en su mente un cierto equilibrio, estos son los significados personales globales (Godino y Batanero, 1994; Godino y Font, 2007). En la adquisición de un nuevo conocimiento hay que tener en cuenta que éste debe tener significado para el alumno, y para ello contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo; o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente. El alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. El conocimiento nuevo debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

Diferentes categorizaciones de los errores

Categorizar los errores nos permite reconocer las dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y en particular de las dificultades cognitivas y sus carencias en relación a los objetos matemáticos. Luis Rico (1995) recupera de Radatz (1979), quien ofrece una clasificación de los errores basada en las dificultades que los ocasionan:

1. Errores debidos a dificultades del lenguaje.

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos similar a aprender una lengua extranjera.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

En la realización de las tareas matemáticas, las diferencias de cada individuo para pensar e imaginar mediante imágenes espaciales generan dificultades.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente.

Incluyen las deficiencias de conocimiento sobre hechos, destrezas, conocimientos previos, contenidos, conocimientos específicos para la realización de la tarea matemática.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento.

La falta de flexibilidad para interpretar y decodificar la nueva información puede ser producida por la rigidez que genera la utilización de un modo habitual de problemas similares.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

A menudo encontramos aplicadas estrategias en situaciones en las que no se puede.

MARCO METODOLÓGICO

I. Instrumento de Medición. Muestra

El examen de suficiencia es requisito imprescindible, si se pretende ingresar directamente a las carreras de nuestra Universidad: su aprobación implica comenzar a cursar las asignaturas de la Diplomatura en Ciencia y Tecnología en forma inmediata.

El examen –optativo– fue tomado a los 186 estudiantes que se presentaron. Este consistía en la resolución de ocho situaciones problemáticas referidas a:

1. Valores de verdad de proposiciones compuestas. Ejercicio 1.
2. Valores de verdad de funciones proposicionales. Ejercicio 2.
3. Propiedades de números. Ejercicio 1.
4. Conceptos y procedimientos utilizados en el trabajo algebraico. Ejercicios 3.
4. Conceptos y procedimientos de álgebra y geometría analítica. Ejercicio 4.
5. Resoluciones de ecuaciones lineales, cuadráticas y desigualdades. Ejercicios 1, 2 y 5.
5. Nociones y procedimientos sobre trigonometría. Ejercicio 6 y 7.
6. Nociones y gráficas de funciones. Ejercicios 5, 7 y 8.

Escogimos para el análisis del examen, la totalidad de las evaluaciones, atendiendo así a la diversidad. Fue realizado sobre los ejercicios 3, 4, 5, 6, 7 y 8, que se encuentran en el Anexo 1.

II. Análisis de la Información

En primera instancia resolvimos los ejercicios para identificar maneras de: argumentar, enunciar, definir, proceder y comunicar, posibles estrategias utilizadas por los alumnos a la hora de enfrentarse con los sistemas de prácticas, es decir realizamos un análisis a priori. Posteriormente se estudió cada problema de los elegidos, detectando primero los errores cometidos, para luego clasificarlos bajo alguna de las dificultades señaladas por Radatz (1979). Las dificultades en que los clasificamos son: (1) Debidos a las dificultades del lenguaje; (2) Debidos a un aprendizaje deficiente; (3) Debidos a asociaciones incorrectas, (4) Debidos a la aplicación de reglas o estrategias incorrectas.

III. Resultados del Análisis de la Información

Los errores surgidos de la observación de los seis problemas tomados en los exámenes los categorizamos según la Tabla 1.

Tabla 1. Categorización de errores.

1. Error de interpretación de consigna.	2. Error por falta de conocimiento/ aplicación de propiedades.
3. Error: $0^{-1} = 0$	4. Resuelve con ejemplos.
5. Error por mal cálculo de la distancia	6. Error por la utilización de un incorrecto gráfico ilustrativo
7. Error por falta de herramientas para la resolución.	8. Resuelve como una ecuación.
9. Error en el armado de la ecuación de la recta (común y perpendicular)	10. Error en la intersección de las rectas
11. Error al encontrar las raíces de la función cuadrática	12. Error en la aplicación de la propiedad distributiva
13. Error en la intersección de la recta y función cuadrática (no encuentran los dos puntos, no justifican con cálculos, etc.)	14. Error al graficar la ecuación cuadrática
15. Error al graficar la recta	16. Resuelve ejercicio 5) c) igualando discriminante a 0
17. Resuelve ejercicio 5) c) con valores específicos o aproximados sin justificación	18. Mal uso de la trigonometría, cálculos incoherentes con las medidas
19. Error en el gráfico de la función trigonométrica	20. Errores conceptuales sobre la división número/0 ó 0/ número
21. Error por mala relación entre la raíz cuadrada y la ecuación cuadrática	22. Error en el cálculo del dominio (por mal las desigualdades, por mal sin justificar)
23. Error en al búsqueda de raíces de la ecuación cuadrática	

En la Tabla 2 se muestran los errores encontrados en cada problema analizado, la cantidad de veces que se repiten en cada caso y la dificultad a la que los hemos asociado. Además se muestran el porcentaje de errores sobre el total de exámenes, y sobre el total de ejercicios resueltos. Por ejemplo el porcentaje 19.89 del Ejercicio 3 surge de haber contado un total de 37 errores asociados con las dificultades 2, 3 y 4; sobre un total de 186 evaluaciones observadas. Tengamos en cuenta que este problema lo han resuelto sólo 81 alumnos, lo cual nos muestra que de los que lo resolvieron, casi un 45.67 % comete un error por falta de conocimientos de propiedades, y asociadas con las dificultades 2, 3 y 4.

La mayoría de los alumnos no puede encarar y comenzar a resolver las prácticas que se les plantean, emerge de los porcentajes de la Tabla 2. Y en los casos particulares de los ejercicios 3, 5 y 8, los ítems b), c) y b) en un 37.03 %, 74.19 % y un 30% respectivamente no fueron resueltos ni siquiera por aquellos que sí realizaron los otros ítems de dichos ejercicios.

SUGERENCIAS QUE EMERGEN DEL ANÁLISIS DE LA TABLA 2

Tabla 2. Clasificación de los errores por problema.

Ejercicio 3	dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Error de interpretación de consigna	1 y 2	1	0.53	1.23
Error por falta de conocimiento/aplicación de propiedades	2, 3 y 4	37	19.89	45.67
Error: $0^{-1} = 0$	2	4	2.15	4.93
Resuelve con ejemplos	2 y 4	3	1.61	3.70
No resuelve		105	56.45	-
Ejercicio 4	dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Error por mal cálculo de la distancia	2 y 4	19	10.21	29.23
Error por mala utilización de gráfico ilustrativo	1 y 3	16	8.60	24.61
Error en el armado de la ecuación de la recta (común y perpendicular)	2	33	17.74	50.76
Error en la intersección de las rectas	2 y 4	10	5.37	15.38
No resuelve		121	65.05	-
Ejercicio 5	dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Error de interpretación de consigna	1 y 2	2	1.07	2.15
Error al encontrar las raíces de la función cuadrática	2	15	8.06	16.12
Error en la aplicación de la propiedad distributiva	2 y 4	2	1.07	2.15
Error en la intersección de la recta y función cuadrática (no encuentran los dos puntos, no justifican con cálculos, etc.)	2 y 3	54	29.03	58.06
Error al graficar la ecuación cuadrática	2	21	11.29	22.58
Error al graficar la recta	2	13	6.98	13.97
Resuelve ítem c) igualando discriminante a 0.	2, 3 y 4	4	2.15	4.30
Resuelve ítem c) con valores específicos o aproximados sin la debida justificación	2, 3 y 4	5	2.68	5.37
No resuelve		93	50	-
Ejercicio 6	Dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Error en el gráfico realizado	2 y 3	24	12.90	37.5
Mal uso de la trigonometría, cálculos incoherentes con las medidas	2 y 3	33	17.74	51.56
Error por falta de herramientas para la resolución	2	5	2.68	7.81
No resuelve		122	65.59	-
Ejercicio 7	dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Error por falta de herramientas/ conocimientos para la resolución	2 y 3	19	10.21	57.57
Error en el gráfico de la función trigonométrica	2	17	9.13	51.51
No resuelve		153	82.25	-
Ejercicio 8	dificultad	#Errores	Total%	Resueltos%
Errores conceptuales sobre la división número/0 ó 0/número	2 y 3	5	2.68	7.14
Error por mala relación entre la raíz cuadrada y la ecuación cuadrática	2 y 3	7	3.76	10
Error en el cálculo del dominio (por mal uso de las desigualdades, por respuesta equívoca sin justificación)	2, 3 y 4	35	18.81	50
Error en al búsqueda de raíces de la ecuación cuadrática	2	3	1.61	4.28
No resuelve		116	62.36	-

Del análisis realizado, surgen por cada problema las siguientes sugerencias:

Problema 3: Repasar y remarcar las propiedades de la potenciación y radicación, los casos de factorización y el tratamiento de las expresiones algebraicas.

Problema 4: Trabajar con el plano utilizando los beneficios de la gráfica. Profundizar en el cálculo de distancias y el manejo de rectas.

Problema 5: Luego del análisis de las funciones lineal y cuadrática, trabajar con ejercicios que midan relaciones de estos tipos. Buscar problemas en los que se necesite hallar la intersección de las funciones. Insistir en encontrar las dos coordenadas del o de los puntos de intersección. Fomentar la utilización del gráfico para compara los resultados obtenidos. Remarcar el significado y las utilidades del discriminante en una ecuación o función cuadrática.

Problema 6: Mostrar la utilidad de las relaciones trigonométricas. Desmitificar su excesiva dificultad. Proponer ejercicios con gráficos dados para que los alumnos se acostumbren a sus beneficios, y luego proponer otros en los que deban realizarlos ellos.

Problema 7: Remarcar el significado y utilidad de cada uno de los componentes de una función trigonométrica de seno y coseno. Mostrar la importancia de los gráficos periódicos de estas funciones, y su simple creación. Proponer ejercicios en los que sea inminente la búsqueda de máximos, mínimos y ceros de dichas funciones.

Problema 8:

Las funciones son altamente necesarias en las materias básicas de las carreras universitarias. Por lo que se debe apuntar a que los estudiantes comprendan qué tipo de relación es una función, y cuál es el dominio de la misma, cómo buscarlo y por qué.

En la Tabla 2 se muestran la cantidad de errores encontrados asociados a las dificultades clasificadas según Radatz (1979): (1) Debidos a las dificultades del lenguaje; (2) Debidos a un aprendizaje deficiente; (3) Debidos a asociaciones incorrectas, (4) Debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. La Tabla 3 muestra además el porcentaje que determinan sobre la cantidad total de errores cometidos (387).

Tabla 3. Cantidad de errores por dificultad

	Cantidad de errores asociados a las dificultades	% sobre el total de errores
Dificultad 1 y 2	3	0.8
Dificultad 2, 3 y 4	81	20.9
Dificultad 2	111	28.7
Dificultad 2 y 4	34	8.8
Dificultad 1 y 3	16	4.1
Dificultad 2 y 3	142	36.7
Total de errores	387	100

LECTURA Y DEL ANÁLISIS DE LA TABLA 3

El porcentaje mayor de errores cometidos está asociado a las dificultades 2 y 3. Esto evidencia deficiencias en el aprendizaje de los aspirantes, cosa que podemos atribuir, entre otras, a falencias provenientes de períodos escolares anteriores, ya que los ejercicios analizados corresponden a temas que deberían haberse estudiado y comprendido en esas instancias. Por otro lado, la dificultad 3, referida a asociaciones incorrectas comparte ese mayor porcentaje de 36.7 %. Esto puede deberse al esfuerzo que lleva al alumno a intentar resolver situaciones utilizando los métodos conocidos en cualquier ambiente que resulte similar.

Le sigue en cantidad de errores, con un 28.7 % del total, netamente la dificultad 2. Errores como: $0^{-1} = 0$, incorrecto armado de la ecuación de la recta e incorrecta búsqueda de las raíces de la ecuación cuadrática, desconocimiento de trigonometría en la resolución de triángulos y en el gráfico de tales funciones, son muestra fiel de una deficiencia en dichos contenidos, en forma conceptual y procedimental.

El siguiente porcentaje de error se lleva un 20.9 % sobre el total de errores cometidos. Estos errores están asociados a las dificultades 2, 3 y 4. A lo dicho anteriormente sobre las dos primeras, se le agrega una tercera relacionada con la aplicación de estrategias y reglas irrelevantes. Un aprendizaje deficiente lleva a la no comprensión de los contenidos, lo que produce una ineficaz aplicación de los mismos. Errores comunes como querer encontrar las raíces de una ecuación cuadrática sin igualarla a cero, trabajar una desigualdad como una igualdad, aplicar propiedades algebraicas en ocasiones en las que no se puede o en las que no es conveniente, evidencian las dificultades 2, 3 y 4.

SUGERENCIAS QUE EMERGEN DEL ANÁLISIS DE LA TABLA 3

Los mayores problemas surgen de un aprendizaje deficiente. Esto conduce a que las dificultades en las asociaciones incorrectas y la aplicación de reglas irrelevantes sean más frecuentes. Esta situación es la que tratamos de revertir durante el curso de ingreso a la Universidad, atendiendo estas cuestiones, que no sólo tienen que ver con un déficit en los aprendizajes, sino también con conceptos equivocadamente aprendidos. La presentación de situaciones en las que las dificultades crecen en forma gradual, sería una manera de afrontar estos problemas, aunque esta no es para nada exhaustiva.

CONCLUSIONES

Las cuatro dificultades presentadas por Radatz (1979) fueron halladas en los exámenes analizados. Quizás un uso excesivo de símbolos matemáticos puede ser causa de una dificultad asociada al lenguaje. El aprendizaje de la formalidad matemática es gradual, y no se da en forma conjunta a la incorporación de conocimientos conceptuales y procedimentales. La falta de interpretación de los enunciados puede haber llevado a los aspirantes a realizar asociaciones incorrectas, razón por la cual no resolvió el ejercicio, o lo hizo equivocadamente. Los estudiantes no culminan la escuela media manejando los conocimientos básicos que los docentes universitarios necesitamos para trabajar en las primeras materias de la carrera. Los conocimientos que traen no siempre son afianzados, y por lo tanto resultan poco aplicables. Esto lleva, entre otras cosas, a la aplicación de reglas o estrategias incorrectas.

BIBLIOGRAFÍA

- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.
- Godino, J. D. y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémico*. URL: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

- Radatz (1979). *Errors Analysis in Mathematics Education*. Journal for Reserch in Mathematics Education. Vol. 9, pp. 163-172.
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L y Gómez, P. “Educación matemática”. Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico.
- Ruano Barrera R.4, Socas M. M., Palarea Medina M. M (2008). *Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra*. PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática. Vol. 2, pp. 61-74.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. En Rico, L: “La educación Matemática en la enseñanza Secundaria”. Ed. Horsori, España.

ANEXO 1

Ejercicio 3

Dada la siguiente expresión algebraica:

$$A = \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{t})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{t}} - \sqrt{a} + \sqrt{t} \right] \left(\frac{\frac{3}{a^2} \frac{3}{t^2}}{at} \right)^{-1}$$

- a) Proponer un par de valores para a y un par de valores para t , a fin que la expresión NO tenga sentido.
 b) Desarrollar A , a fin de probar que la siguiente igualdad es verdadera: $A = \frac{4(\sqrt{a} + \sqrt{t})}{a-t}$

Ejercicio 4

Los puntos $A(a, b)$, $B(5, 6)$ y $C(7, -2)$ forman un triángulo. Se sabe que la recta que contiene al lado

\overline{AB} es $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$, y que la recta que contiene al lado \overline{AC} pasa por el punto $(6, -\frac{3}{2})$. Se pide:

- a) hallar el punto A y graficar el triángulo b) hallar la distancia entre A y B .
 c) hallar y graficar la ecuación de la recta perpendicular al lado \overline{AB} que pasa por C .

Ejercicio 5

Sea $f(x) = -3x\left(x + \frac{2}{3}\right)$ y la recta $y = 6x + 2k$

- a) Graficar $f(x)$.
 b) hallar la intersección de $f(x)$ con la recta si $k = -8$. Graficar la recta y marcar la intersección.

c) Hallar **todos** los valores de " k " para que la recta intercepte a la parábola en dos puntos.

Ejercicio 6

Un paralelogramo tiene lados de longitud 3 cm y 5 cm, y un ángulo de 50° . Determinar la longitud de las diagonales y el área del mismo (recordar que el área del paralelogramo es base · altura).

Ejercicio 7

a) Dada $f(x) = a \operatorname{sen}(b(x - c))$, se pide hallar a , b y c , tal que se cumplan a la vez las siguientes condiciones: amplitud = 3, corrimiento de fase = $\frac{\pi}{4}$, longitud del período = 4π .

Escribir la correspondiente ecuación para f .

b) Graficar $f(x)$.; c) Hallar un valor para $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}\right)$ de manera tal que $f(x) = 0$.

Ejercicio 8

Dada $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$

a) Dar tres valores para los cuales $f(x)$ no tiene sentido y explicar por qué.

b) hallar el dominio de f .