UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Tesis de Maestría

Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales
(orientación Matemática)

La diversidad de conocimientos aritméticos de les estudiantes en el tránsito hacia una práctica algebraica

Prof. Valeria A. Borsani

Directora: Dra. Carmen Sessa

Co-directora: Dra. Claudia Broitman

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad Nacional de La Plata
Diciembre de 2023

Resumen

En el desarrollo de esta tesis diseñamos e implementamos una propuesta de enseñanza para un aula de primer año de escuela secundaria que considere la experiencia aritmética de les estudiantes como punto de apoyo para el desarrollo de prácticas que son del orden de lo algebraico. Nuestra propuesta gira en torno a estudiar la divisibilidad de un número, dado como la expresión numérica de un cálculo que combina varias operaciones. Más precisamente, a lo largo de la secuencia y en los episodios que analizamos, se promovió la lectura de información de expresiones numéricas y, eventualmente, su transformación para obtener nueva información.

Los episodios presentados documentan la intimidad del trabajo de un grupo de estudiantes con su docente, en espacios de discusión colectiva; estudiamos la construcción en el aula de un nuevo tipo de práctica necesaria para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como similares a otros ya conocidos. Profundizar en la trama de las interacciones que se dieron en el aula nos permitió, por un lado, comprender procesos de producción particulares donde se conjugan la dimensión individual y la colectiva. Por otro, pudimos entender algunas dificultades de les estudiantes ante la ruptura involucrada en la nueva tarea. Finalmente, en el estudio de las interacciones identificamos tensiones entre las producciones que les estudiantes comparten -mediadas por sus conocimientos y experiencias previas- y las intenciones de enseñanza de la docente. Como síntesis, en el último capítulo, identificamos nuevos conocimientos matemáticos y formas de hacer de les estudiantes que emergen de los episodios estudiados. También pusimos en relieve distintas tensiones que atraviesa una docente que, en pos de promover la autonomía en el trabajo de sus estudiantes, busca alejarse de escenas en las que explicite lo que hay que hacer.

Palabras Claves:

Transición aritmética álgebra – Interacciones en el aula – Expresiones numéricas – Leer y transformar – Divisibilidad.

Abstract

In the development of this thesis, we designed and implemented a teaching activities for a first-year high school classroom that considers the students' arithmetic experience as a support point for the development of “algebraic” practices. Our classroom project its about to studying the divisibility of a number, given as the numerical expression of a calculation that combines several operations. More precisely, throughout the sequence and in the episodes we analyzed, the reading of information from numerical expressions and, eventually, their transformation to obtain new information, was promoted//encouraged.

The episodes presented shows the details of the work of a group of students with their teacher, in spaces of collective discussion. We study the construction in the classroom of a new type of practice necessary to address mathematics objects and problems that, in the beginning, appears to be similar to other already known. Deepen the analysis of the interactions that took place in the classroom allowed us, on the one hand, to understand production processes where the individual and collective dimensions are combined. On the other hand, we could understand some of the students´ difficulties going thru to the rupture involved in the new task. Finally, in the study of interactions we identify tensions between the productions that students share – product of their previous knowledge and experiences - and the teacher's teaching intentions. As a synthesis, in the last chapter, we identify new mathematical knowledge and ways of doing of students that emerge from the episodes studied. We also highlighted different tensions that a teacher goes through who, in order to promote autonomy in her students' work, seeks to take distance from scenes in which she explains what needs to be done.

Key Words

Arithmetic algebra transition - Classroom interactions - Numerical expressions - Read and transform – Divisibility.

Agradecimientos

Quiero detenerme a agradecer a cada una de las personas que, de diferentes maneras y en diferentes momentos, colaboraron para que este proyecto se iniciara, se desarrollara y concluyera. Quiero adelantar que hay nombres repetidos, que refieren a las mismas personas, con quienes formamos parte de un gran grupo en el que los roles de amigues, compañeres y colegas se entrelazan y se conjugan para armar una red de acompañamiento tenaz, de contención amorosa, de compartires de ideas profundas y de miradas críticas. Formar parte de esta red es lo que me sostiene día a día para seguir trabajando por una educación pública y de calidad.

Quiero agradecer a Carmen Sessa, mi directora de tesis, por haberme acompañado y enseñado tanto en este trayecto, por el respeto y la calidez con que dialogó con las ideas que se fueron gestando en esta tesis, por orientarme y animarme a transitar esta experiencia, por su incansable contención…

A Claudia Broitman, mi co-directora, por su generosidad al aceptar acompañarme en esta etapa, por la calidad y la calidez que encontré en cada uno de los intercambios compartidos. Por sus aportes claros y profundos que siempre ayudaron a precisar aquello que quería compartir en el texto.

A Patricia Sadovsky, quien me acompañó en un primer intento de tesis, con otro tema. Ella, junto con Carmen, fueron profes en mi formación inicial - hace ya 26 años - y siguen siendo mis profes hoy en día. Me enseñaron un camino en el que es posible trabajar por una enseñanza de calidad, por una escuela más inclusiva, por una sociedad más justa.

Desde lo institucional, quiero agradecer a la Facultad de Ciencia Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, a la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata y a la Universidad Pedagógica Nacional por generar y sostener espacios de formación públicos y gratuitos de excelencia académica. Es para mi un gran honor el haber formado y seguir formando parte de esos espacios, como estudiante, como docente, como trabajadora.

Al Dr. Hassane Squalli, quien colaboró con absoluta generosidad para que parte de este trayecto lo pudiera compartir con él, en la Universidad de Sherbrooke, Quebec, Canadá.

A mis compañeres de UNIPE, Betina, Cecilia, Juan Pablo, Enrique, Mara y Carmen, por todo lo construido y aprendido en equipo. Por las discusiones y reflexiones compartidas que me ayudaron a crecer en mi formación.

A Nati, Mara, Vero y Enri, compañeres de cursada, amigues, con quienes supimos aprovechar cada momento compartido para ir a fondo con lo que nos estaban enseñando, con lo que queríamos aprender.

A Mara y Carmen, mis amigas y compañeras, quienes siempre me acompañan con escucha atenta, aportando a mi trabajo -a mi vida- su mirada crítica y cariñosa.

A mi mamá y mi papá, por acompañarme y sostenerme en cada momento, por su esfuerzo en enseñarme que la perseverancia es siempre buena compañera. A Ile, Pablo y Vero, por el empuje, por el acompañarme y ayudarme a dimensionar cada pequeño paso transitado.

A Pitu, quien me acompañó con paciencia y entusiasmo en este y en tantos otros proyectos de mi vida. Por estar a mi lado en las etapas más importantes de esta tesis, escuchando, aportando y conteniendo con energía y amor; por lo compartido y lo vivido.

A Tizi, Mati, Ivanka, Enzo, Isi, Max y Feli, mis sobris, quienes me enseñaron que el amor es el motor necesario para la creatividad, la alegría y el desprejuicio. Tuve que recostarme en esta certeza en varios momentos de este trayecto.

A Vicky, quien de manera paciente y amorosa me acompañó durante mucho más que "19 días y 500 noches" de estudio, de trabajo, de vida.

A Ana y Juan, por empujar… desde algún lugar.

Sobre el Lenguaje inclusivo en este trabajo:

Las corrientes psicológicas sociohistóricas (Wertsch, 1988) refieren al papel de las herramientas simbólicas para configurar y transformar el pensamiento. Entendemos al lenguaje como una de las variables que transforma, modela nuestra forma de interpretar, pensar, construir el mundo y, en consecuencia, la forma en que actuamos en él. En este sentido, el lenguaje es una construcción social en donde se ponen en juego acciones comunicativas y reflexivas. Siempre sucede en el marco de interacciones entre personas, siempre es en relación con *une otre*.

Como construcción social, el lenguaje se transforma constantemente. En las décadas del ´50 y ´60 los movimientos feministas comenzaron a denunciar el uso de genéricos masculinos que invisibilizan a las mujeres. Recientemente, nos enfrentamos al disruptivo *lenguaje inclusivo* que nos interpela y nos convoca a pensar nuevas formas de inclusión. Particularmente, identificamos y reconocemos marcas que reproducen desigualdades en el lenguaje que utilizamos y asumimos el desafío político de transformarlo haciendo nuestra la lucha por visibilizar los derechos de las mujeres e identidades no binarias.

En la escuela secundaria, son les estudiantes quienes explicitan continuamente la necesidad de hacer partícipes de la conversación a quienes están en un proceso de transición y/o que no se identifican con el uso de genéricos masculinos o binarios.

Creemos que es tiempo de instalar debates que reconozcan la complejidad de los vínculos entre lenguaje y política. En este sentido, asumimos transitar un proceso de transformación en el discurso que acompañe el propósito de sostener espacios de producción académica inclusiva. Para ello, elegimos intervenir nuestro escrito utilizando la "*e*"[1], no como una letra que reemplaza a otras letras, sino como posición política desde la que queremos visibilizar géneros que de otra manera no estarían incluidos. Para nosotres, "(…) cada e que tensiona la norma lingüística también subraya las violencias de la sociedad patriarcal." (Herrera, D., 2019, p. II).

[1] Entre otras alternativas como *i*, *x* o @.

Índice

CAPÍTULO 1

El problema de investigación

1.1. Introducción

En esta investigación nos propusimos estudiar la intimidad del trabajo matemático de un grupo de estudiantes, y la complejidad de la gestión docente, cuando en el aula se proponen problemas que pueden concebirse dentro de una zona de trabajo que, por un lado, se apoya en conocimientos y prácticas aritméticas, y por otro, promueve un tipo de práctica que consideramos del orden de lo algebraico.

Junto con una profesora de matemática diseñamos -para un curso de primer año de escuela secundaria en el que ella daba clases- un conjunto de actividades que involucran expresiones numéricas de cálculos que combinan varias operaciones. Con estas actividades se moviliza el tipo de práctica matemática que nos interesa promover: la lectura de información de expresiones numéricas y su eventual transformación para obtener nueva información. La cuestión que articula la secuencia es decidir si un número dado a través de una expresión numérica es múltiplo de otro. El trabajo de campo se desarrolló en el aula de primer año en el que la profesora daba clases.

De todo el proceso de producción que se generó a partir del trabajo con la secuencia de problemas, nos centramos en particular en el análisis de algunos hechos del aula que tuvieron lugar en las discusiones colectivas generadas y sostenidas por la docente a partir de las resoluciones autónomas de les estudiantes de dos problemas. Estarán en juego transformaciones de las escrituras que se hacen necesarias para estudiar si un producto de dos números es múltiplo de otro número ***a***, cuando ninguno de los factores lo es.

En este capítulo 1 continuamos precisando y contextualizando el problema de investigación que abordamos, los supuestos y las preguntas que orientaron nuestro estudio.

En el capítulo 2 presentamos diferentes elementos teóricos que nos ayudaron a enmarcar esta investigación. Consideramos tanto investigaciones que abordan la discusión teórica de la transición aritmética – álgebra en el plano de la matemática escolar, como desarrollos que nos permiten analizar el papel de las interacciones entre estudiantes y entre estudiantes y docente en procesos de construcción de conocimientos matemáticos.

En el capítulo 3 desarrollamos las decisiones metodológicas que organizaron y determinaron nuestra manera de producir la secuencia de actividades junto con la docente y la recolección y análisis de la información. Presentamos el marco teórico de referencia para estas decisiones y describimos nuestro proceso de construcción de los datos.

La presentación de la secuencia llevada al aula y el análisis matemático-didáctico que realizamos los presentamos en el capítulo 4. En este análisis explicitamos relaciones matemáticas comprometidas en los problemas identificando posibles estrategias y acciones de estudiantes en términos de conocimientos que explican dichas acciones; también identificamos intenciones de enseñanza y decisiones en torno a la organización y gestión de los diferentes espacios de trabajo.

En el capítulo 5 compartimos el análisis de algunos hechos de las clases que formaron parte del trabajo de campo. Nos propusimos entender la intimidad del trabajo de les estudiantes -no necesariamente visible para une docente en el momento de la clase- con el objetivo de comprender sus producciones (la manera en que las expresan, los razonamientos que ponen en juego, la lógica con que los articulan), los problemas didácticos que aparecen y la acción de la docente en el espacio colectivo a propósito de lo que les estudiantes comparten.

En el capítulo 6 nos proponemos poner en relieve diferentes asuntos que emergen de los episodios estudiados. Reflexionamos sobre los interrogantes que quedan abiertos al concluir esta indagación y planteamos algunas líneas de investigación que se podrían desarrollar como continuación que aquí planteamos.

Finalmente, se encuentran las referencias bibliográficas utilizadas a lo largo de esta investigación. En el Anexo se presentan los enunciados del conjunto de actividades llevadas al aula.

1.2. Delimitación del problema de investigación

En la última década, el problema de la “articulación primaria-secundaria” intensificó su presencia dentro de las políticas educativas de Argentina. Tanto desde el Ministerio de Educación Nacional como desde los ministerios de educación provinciales se elaboraron diferentes documentos curriculares con la intención de ayudar a les docentes a, por un lado, problematizar los primeros pasos de las y los estudiantes por la escuela secundaria y, por otro, a asumir que la enseñanza tiene que hacerse cargo de este problema. Si bien estos documentos curriculares ayudan a visualizar la problemática y ofrecen algunos elementos para pensar la articulación, la complejidad del problema requiere que se lo aborde y analice en diferentes dimensiones: desde políticas educativas, condiciones de funcionamiento institucional y de trabajo docente, conocimientos pedagógicos–didácticos, hasta decisiones en torno a las estrategias de enseñanza que se van a desplegar en las aulas (Grimaldi e Itzcovich, 2013).

En relación con el trabajo matemático, Grimaldi e Itzcovich (Op. cit) muestran cómo el tratamiento de ciertos objetos matemáticos que se hace en cada uno de estos niveles puede favorecer o ser un obstáculo para que les estudiantes estrechen lazos entre los sentidos, representaciones y técnicas asociadas a estos. Así, se vuelve necesario analizar las transiciones, las rupturas y continuidades en relación con los sentidos del conocimiento matemático, con el tipo de práctica que se propicia en el aula y con los objetos de enseñanza. En este pasaje, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en los primeros años de la escuela secundaria se presentan como un problema complejo.

Sadovsky (2004) explicita que, en el paso de la escuela primaria a la secundaria, los conocimientos aritméticos construidos por les estudiantes pueden resultar insuficientes a la hora de abordar problemas algebraicos en los que, por ejemplo, se necesiten relacionar dos variables que no están determinadas. En efecto, los ya clásicos y fundantes estudios en el dominio de la didáctica del álgebra asociados a los primeros aprendizajes identificaron rupturas entre el álgebra y la aritmética (Vergnaud, 1988; Kieran 1992). Rupturas que no sólo se consideran en relación con los objetos involucrados, sino también en relación con los problemas que les estudiantes deben resolver y las técnicas de trabajo que tienen que desarrollar.

A propósito del trabajo escolar con ecuaciones, investigaciones nacionales mostraron que, frente a algunas propuestas de enseñanza para los primeros aprendizajes algebraicos focalizadas en tareas de traducción del lenguaje coloquial a simbólico y resolución de ecuaciones, les estudiantes van consolidando una noción de ecuación como una igualdad con una incógnita: la identifican con el procedimiento que se tiene que realizar para resolverlas y les es difícil concebir ecuaciones con más de una variable o más de una solución (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996, 1999). En este tipo de trabajo, las nociones de variable y equivalencia, centrales en el campo del álgebra, quedan ocultas para les estudiantes y se restringe el sentido de ecuación que se construye.

Squalli (2015) afirma que, operacionalmente, el "pensamiento algebraico" se despliega mediante un conjunto de razonamientos particulares (generalizar, razonar analíticamente, expresar, razonar en términos de estructuras, etc.) y mediante diferentes maneras de abordar los conceptos involucrados en actividades algebraicas (una tendencia a ver la igualdad como una equivalencia, la tendencia a dejar operaciones en suspenso, la tendencia a ver una expresión numérica como un objeto en sí mismo y no solo como una cadena de cálculo, etc.). Arcavi (1994) enuncia diferentes "conductas" que considera importantes adquirir para lograr tener un "sentido de los símbolos". En particular, retuvimos para este trabajo la idea de que es posible leer información de una expresión algebraica, antes de manipularla y también que se puede manipular con el objetivo de leer nueva información.

Estas ideas, que seguiremos profundizando en el próximo capítulo, permitirían fundamentar que trayectos de enseñanza para los primeros años de la escuela secundaria que se focalicen en el trabajo con expresiones algebraicas y colaboren con la construcción de las nociones de equivalencia y de variable, resultan potentes para que les estudiantes desarrollen una práctica que cargue de sentido a los objetos algebraicos. Desde nuestra posición, esto es concomitante con que les estudiantes: reconozcan expresiones equivalentes, puedan leer información de una expresión algebraica y eventualmente la transformen en otra equivalente para leer nueva información, que puedan evaluar expresiones algebraicas como recurso válido en la resolución de una tarea y que entiendan cuáles son sus alcances y límites, entre otros. Sostenemos que el tratamiento algebraico de las expresiones debe aparecer al servicio de –o necesario para– resolver un problema o responder una pregunta.

El trabajo con ecuaciones lo pensamos para un momento posterior, de manera que puedan abordarse como una condición que se impone sobre las expresiones algebraicas y su resolución como la búsqueda de los valores de la variable que la verifican. Estas decisiones coinciden con prescripciones curriculares vigentes en diferentes jurisdicciones de nuestro país (por ejemplo, los diseños[2] de las provincias de Buenos Aires, Mendoza, Córdoba y de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires). Este trayecto permitiría que les estudiantes comprendan las transformaciones que se realizan en el proceso de resolución en vínculo con la noción de equivalencia de expresiones algebraicas y la de equivalencia de ecuaciones.

Ahora bien, a pesar de la inevitable ruptura que supone lo que Chevallard (1984) designa como el "pasaje de la aritmética al álgebra", la aritmética escolar se presenta fértil para el despliegue de un tipo de trabajo propio del álgebra. Así, las investigaciones que se apoyan en una mirada más transicional entre la aritmética y el álgebra, convergen en la idea de que habría potencialidades al trabajar con objetos matemáticos en la frontera entre la aritmética y el álgebra, con la hipótesis de que esto facilitaría la entrada al álgebra (Grugeon-Allys et Pilet, 2017).

Concomitante con lo anterior, uno de los supuestos en los que se apoya esta tesis es que un trayecto formativo que recupere conocimientos y prácticas aritméticas desarrolladas por les estudiantes en la escuela primaria y que promueva un trabajo de lectura de información de expresiones numéricas de cálculos que combinan varias operaciones, y de su eventual transformación para leer nueva información, genera buenas condiciones para la construcción con sentido de un tipo de práctica propia del trabajo algebraico. En relación con esto, sostenemos que es posible un trabajo con expresiones numéricas que siente bases para un futuro encuentro con expresiones algebraicas y ecuaciones.

Bajo estos supuestos, en este trabajo de investigación, diseñamos e implementamos una propuesta de enseñanza para un aula de primer año de escuela secundaria de la provincia de Buenos Aires[3] en la cual se considere la experiencia aritmética de les estudiantes como punto de apoyo para el desarrollo de prácticas que, según nuestro punto de vista, son del orden de lo algebraico. En nuestra propuesta se

[2] En las Referencias Bibliográficas hemos incluido los enlaces que permiten acceder a los diseños curriculares mencionados.
[3] El primer año de la escuela secundaria de la Provincia de Buenos Aires corresponde a séptimo grado de la escuela primaria de otras jurisdicciones del país.

presentan diferentes tareas que giran en torno a estudiar la divisibilidad de un número por otro, cuando el primero viene dado por una escritura de cálculos donde eventualmente se combinan la suma y la multiplicación.

Cuando pensamos una enseñanza que se propusiera generar condiciones para que les estudiantes produzcan conocimientos del orden de lo algebraico tomando sus experiencias aritméticas como referencia, nos vimos obligadas a considerar que las interacciones entre estudiantes se apoyarían en diferentes lógicas (algunas más aritméticas, otras más algebraicas). Esta característica configuró un aula -en el momento de planificar la enseñanza- en la que la diversidad de conocimientos sería protagonista en las construcciones que emergieran de las interacciones.

Nuestros análisis se centran, precisamente, en los espacios de discusión colectiva del grupo de estudiantes, cuando se trata de la construcción de un nuevo tipo de práctica para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como similares a otros ya conocidos. En dos de los episodios que serán analizados en el capítulo 5, la producción autónoma de algune estudiante es el contenido a partir de cual se despliegan las interacciones en el aula y, en este sentido, serán analizadas como parte de nuestro estudio.

Profundizar en la trama de interacciones que se dieron en el aula nos permitió entender asuntos que no fueron -ni podían serlo- anticipados y que dificultaban el trabajo ante la ruptura involucrada en la nueva tarea. En estas interacciones identificamos tensiones entre las producciones que les estudiantes comparten -mediadas por sus conocimientos y experiencias previas- y las intenciones de enseñanza de la docente.

1.2.1. Objetivos y preguntas que orientan nuestro estudio

La lectura de la información que porta una expresión algebraica numérica y eventualmente su transformación, en tanto soporte válido para abordar un problema y para explicar una respuesta, es una cuestión central de la propuesta que quisimos diseñar para el aula. El objetivo inicial de nuestra investigación es comprender y estudiar cómo este proceso se da en un aula.

Desde el inicio, nos planteamos diferentes objetivos y preguntas en torno a esta problemática que nos permitieron delinear un camino para el avance de nuestro estudio. Algunos de estos se consolidaron como ejes orientadores durante todo el desarrollo de esta tesis, otros se reformularon y precisaron a partir de los sucesos del aula. El proceso de recorte y análisis de la información recabada permitió también el surgimiento de nuevos interrogantes.

En torno a este objetivo inicial formulamos ahora los siguientes interrogantes que permiten enmarcar los asuntos que son estudiados en los episodios:

- Les estudiantes ponen en juego diferentes conocimientos -tanto en términos de relaciones y propiedades que movilizan, como de las estrategias que se despliegan- cuando tienen que leer y/o transformar para leer información de una expresión algebraica numérica. En relación con esto nos preguntamos: ¿Qué ideas de les estudiantes orientan y guían la lectura y/o la transformación que realizan y cómo se modifican esas ideas en la interacción con compañeres? ¿Cómo se relacionan las diferentes ideas en el espacio colectivo, a partir de la gestión docente?
- ¿Qué gestos realiza le docente en el aula ante la necesidad de demandar argumentos que acompañen lo que sus estudiantes leen de una expresión numérica? ¿Qué implicancias para los aprendizajes individuales y del colectivo tienen las decisiones que toma le docente en relación con las respuestas orales de sus estudiantes?
- ¿Qué es para les estudiantes una respuesta matemáticamente válida y suficientemente explicativa cuando se trata de expresiones algebraicas numéricas? ¿Cómo interactúa le docente con la construcción de estos aspectos normativos? ¿Cómo opera la comunidad aula en esta construcción?
- Los argumentos -mayormente orales- apoyados en propiedades de los números y las operaciones pueden resultar más eficientes o económicos para les estudiantes que el trabajo algebraico con las expresiones numéricas al que apuntamos ¿Qué tensiones se generan entre los estudiantes y con el docente en el espacio de discusión colectiva, cuando se trata de la construcción de este nuevo tipo de práctica?

Si bien la tesis no pretende responder exhaustivamente estas preguntas, esperamos que nuestro estudio aporte elementos para comprender mejor los cuatro puntos anteriores.

CAPÍTULO 2

Marco teórico de Referencia

Para enmarcar teóricamente nuestro estudio consideramos tanto investigaciones que abordan la discusión teórica de la transición aritmética – álgebra en el plano de la matemática escolar, como desarrollos que nos permiten analizar el papel de las interacciones entre estudiantes y entre estudiantes y docente en procesos de construcción de conocimientos matemáticos. Todos estos aportes nos permiten, por un lado, ubicar nuestro estudio respecto de otros e ir precisándolo y, por otro, identificar herramientas de análisis con las que se aborda esta investigación.

2.1. La iniciación al trabajo algebraico en relación con las prácticas aritméticas

2.1.1. Dos tratamientos en el seno de lo numérico

En un texto ya clásico, Chevallard (1984) señaló que, en el campo de lo numérico hay una posibilidad de trabajo del orden de lo algebraico que no tiene por finalidad la resolución de las operaciones, sino que toma los cálculos como objeto de estudio. Dentro del corazón mismo de la aritmética distingue dos modos de tratamiento de lo numérico, uno "práctico" y uno "algebraico". En el primero, el análisis de lo numérico es un medio para efectuar las operaciones y se rige por el principio de finalización del cálculo; en el segundo, el *tratamiento algebraico de lo numérico* -como lo nombra Chevallard- se privilegia la información que la expresión del cálculo muestra por sobre el número que la expresión designa. Es decir, mientras que la aritmética práctica utiliza el lenguaje numérico por su poder designativo, la aritmética "algebraica", por el contrario, aprovecha el valor mostrativo de las escrituras, que constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. En su tesis doctoral, Sadovsky (2004) explica estas ideas:

> El cálculo numérico está regido por la ley de simplificación, una de cuyas cláusulas es el "principio de finalización del cálculo": la expresión 4+8, por

ejemplo, no podría ser una respuesta, sólo una forma transitoria, lábil, porque cuatro más ocho es doce. En cambio, en la aritmética algebraica, puede tener sentido analizar por ejemplo las expresiones 12 y 2^2+2^3 que designan el mismo objeto, pero no muestran la misma información. (p. 40).

Estas ideas nos permiten identificar que, en el seno del trabajo escolar con expresiones numéricas, hay una tensión entre dos modos diferentes de abordajes: el énfasis en la eficacia designativa ligada al cálculo, o bien, la valoración de la información mostrativa de las expresiones.

El análisis de una expresión numérica centrado en el valor mostrativo de la estructura del cálculo por sobre su valor designativo es un tipo de trabajo que se sitúa en la bisagra entre la aritmética y el álgebra.

Esto nos permitió enmarcar la problemática didáctica que queremos estudiar en esta tesis: el proceso de enseñanza y aprendizaje implicado al trabajar en el aula con expresiones numéricas de cálculo, sustentado en una visión de los números y de las operaciones que es más estructural que calculatoria, y con la intencionalidad didáctica de poner en juego el valor mostrativo de las expresiones numéricas.

2.1.2. Sentido y denotación de las expresiones

Diversos autores sostienen desde hace tiempo que la enseñanza del álgebra elemental debería considerar el poder del álgebra para mostrar aspectos diferentes de un mismo objeto, como un asunto central a desarrollar (Drouhard, 1992; Chevallard, 1984).

Sackur, Drouhard, Maurel y Pécal (1997) retienen la distinción establecida por Frege (1892, 1971) entre “sentido” y “denotación” de una expresión algebraica: las expresiones $2m+6$ y $2(m+3)$ denotan el mismo objeto, pero tienen distinto sentido ya que muestran aspectos diferentes del objeto. Estes autores sostienen que modificar el sentido conservando la denotación de las expresiones y de las ecuaciones es una de las características fundamentales del trabajo con el lenguaje algebraico y es lo que le otorga su potencia. El hecho de que diferentes expresiones con la misma denotación tengan significados diferentes se basa en una característica fundamental del lenguaje algebraico, como es la posibilidad de leer información en la escritura de una expresión. También mencionan que el sentido que une alumne da a una expresión es dinámico y depende del contexto en que esta aparece: tanto la lectura de información como la elección de las transformaciones a efectuar a una expresión dependen de la tarea a realizar. Es decir que el sentido tiene un componente pragmático asociado al "por qué" y "para hacer qué".

Esta distinción entre denotación y sentido de una escritura simbólica del álgebra es cercana a la que presentamos en párrafos anteriores entre valor mostrativo y designativo (Chevallard, *Op. cit.*). Nos interesa señalar que el lenguaje algebraico —debido al valor *mostrativo* de las escrituras— ofrece la posibilidad de producir información a partir de la lectura de una expresión; el núcleo central del trabajo algebraico estaría dado por la búsqueda de informaciones diferentes que se logran modificando la escritura (y por lo tanto el sentido) de los objetos y conservando su denotación.

> Drouhard (2011), al estudiar el vínculo entre las expresiones y los objetos matemáticos que se supone que ellas designan, distingue cuatro tipos de expresiones en las que identifica diferentes relaciones entre estas y los objetos denotados, relación que nunca es biunívoca: las expresiones algebraicas numéricas (que nosotras mencionamos anteriormente como expresiones numéricas), los enunciados algebraicos numéricos, las expresiones algebraicas literales y los enunciados algebraicos literales. Retenemos para nuestra investigación lo que el autor sostiene sobre las dos primeras: las expresiones algebraicas numéricas denotan un número, así diferentes expresiones numéricas podrían denotar el mismo número: 1+1 y 6:3 son dos expresiones diferentes que denotan al número "2". Al considerar los enunciados algebraicos numéricos, menciona que no denotan "un estado de hecho", sino un "valor de verdad": 2x4+3 =11 es un enunciado verdadero, mientras que 2x4+3= 10 es falso.

Estas ideas nos resultan importantes para pensar un posible trabajo matemático a desplegar en el aula de primer año de la escuela secundaria, a partir de proponer el estudio del valor de verdad de enunciados algebraicos numéricos en el contexto de la divisibilidad. En particular, queremos que les estudiantes identifiquen que diferentes expresiones algebraicas numéricas con la misma denotación ofrecen información diferente para decidir si el número denotado es o no múltiplo de un número dado.

2.1.3. La actividad aritmética desde la perspectiva de la entrada al álgebra

En su artículo publicado en 2017, Grugeon-Allys y Pilet asumen como punto de partida que los conocimientos y los razonamientos desarrollados en aritmética por alumnes de 11 a 12 años, que comienzan el nivel intermedio en Francia (equivalente al ciclo básico de la escuela secundaria en la provincia de Buenos Aires) pueden facilitar la transición desde la aritmética al álgebra, o por el contrario, generar obstáculos a este paso. Con la intención de abrir perspectivas acerca de las condiciones de una enseñanza en aritmética que facilite la entrada al álgebra, las autoras comienzan definiendo criterios para analizar la actividad aritmética de les estudiantes antes de la entrada al álgebra. Grugeon (1997) había establecido criterios para analizar respuestas y tipos de razonamientos de estudiantes de 15 -16 años en tareas de generalización. Las autoras los reformulan, teniendo en cuenta el momento anterior de escolaridad que ellas quien estudiar, y organizan criterios de análisis *a priori* de actividades, según tres ejes: los razonamientos posibles (aritmético- analítico – algebraico); el tipo de escrituras implicadas; y, por último, el estatus tanto de los objetos involucrados en la tarea (el signo igual como anticipación de un resultado o como equivalencia de expresiones) como del tipo de tratamiento a realizar (escritura paso a paso, en línea, estructural - procedural). En su trabajo presentan los criterios elaborados y los posibles valores que retienen como indicadores para analizar la relación de le estudiante con la aritmética, anterior a la entrada al álgebra. A continuación, los resumimos:

- Estatus del signo igual. Las autoras señalan que el signo igual puede indicar el anuncio de un resultado o una relación de equivalencia. En la aritmética, suele predominar el primero. En actividades de *cálculo mental*, la escritura de expresiones numéricas que tienen el mismo valor, con apoyo en las propiedades numéricas y de las operaciones, le confiere al signo igual un sentido de relación de equivalencia. Sostienen también que la falta de trabajo sobre la igualdad como una relación de equivalencia puede ser un obstáculo para la entrada al álgebra y un vector de inequidades escolares si la institución lo deja implícitamente a cargo de les alumnes. El estatus del signo igual a movilizar por les alumnes en la resolución de la tarea es un criterio pertinente para evaluar las potencialidades de la misma en una perspectiva de entrada al álgebra.

- Denotación de expresiones y reescrituras a partir de las propiedades de las operaciones. Toman la noción de denotación y sentido de expresiones algebraicas redefinidas por Drouhard (1992) -ya nos hemos referido a estas nociones en este marco teórico - para identificar que la capacidad de transformar una escritura en otra asegurando la conservación de la denotación puede ser trabajada desde la escuela primaria (las tareas de cálculo mental presentes en varias actividades de la escuela primaria se basan en la transformación de expresiones con denotación fija). Es por ello que Grugeon-Allys y Pilet formulan como criterio para la entrada al álgebra, la consideración de la conservación de la denotación de las expresiones numéricas durante el trabajo de transformación de un cálculo.

El trabajo de estas autoras nos permitió precisar algunos vínculos entre conocimientos aritméticos y el pensamiento algebraico y vemos el último criterio en particular con mucha cercanía a los asuntos estudiados en este trabajo de tesis.

- Carácter procedural y estructural de una expresión. Las autoras retoman las ideas de Sfard (1991), quien considera que las nociones matemáticas abstractas pueden ser concebidas de dos maneras diferentes: como un proceso (procedimental) o como un objeto (estructural); estos dos caracteres conviven en la actividad matemática. Grugeon-Allys y Pilet sostienen que la toma en cuenta por parte de les alumnes del carácter procedural o estructural de los objetos que manipulan es un criterio pertinente para analizar el sentido que las expresiones numéricas tienen para les estudiantes. Estas ideas nos resultan potentes para pensar las actividades que propusimos a nuestres estudiantes.

A partir de los criterios precedentes listan cinco tipos de tareas en el dominio de la aritmética para enmarcar el desarrollo de posibles conocimientos y razonamientos que podrían facilitar la entrada al álgebra. Retenemos las dos que vemos más vinculadas con nuestro trabajo:

- ✓ Hacer un cálculo reflexivo: el desafío es identificar el estatus del signo igual involucrado, en relación con la consideración de la denotación de las expresiones, el carácter procedural o estructural de las expresiones privilegiadas durante su reescritura, la consideración de las propiedades de operaciones y números, en particular la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

- ✓ Asociar expresiones numéricas de diferentes estructuras.

Las autoras realizan un trabajo experimental para lo cual negocian con profesores qué tipo de tareas considerar para evaluar el conocimiento de sus alumnes antes de entrar en un nuevo tema, especialmente para álgebra. Las respuestas por parte de les estudiantes fue analizada en la investigación. No nos detenemos en este análisis porque justamente, los dos tipos de tareas que recortamos en el párrafo anterior no fueron consideradas para la evaluación que efectivamente llevaron adelante.

Sí nos interesa resaltar algunos asuntos que aparecen en las conclusiones del artículo referidos a la importancia y relevancia, teniendo en la mira una entrada al álgebra, de una consideración estructural de los cálculos aritméticos. Es una idea que compartimos y que de alguna manera comandó el diseño de actividades[4] en el campo de lo numérico que, desde nuestra posición, merecen ser ubicadas en la vía de entrada al álgebra.

Encontramos el desarrollo de estas autoras en sintonía con las ideas que Squalli (2015) considera para caracterizar el "pensamiento algebraico". Entre estas características señala la consideración de la igualdad como relación de equivalencia y "tener una visión estructural (por ejemplo, una expresión numérica como un objeto en sí y no únicamente como una cadena de cálculo)" (Squalli, Op. cit., p. 347; la traducción es nuestra).

Nos interesa recuperar también la noción de *cuasi-variable* de Fujii (2003). Este autor refiere a que un *número* puede ser visto como *cuasi-variable* en una afirmación matemática y un *razonamiento* puede ser considerado como *cuasi-variable* en referencia al estudio, en términos de verdadero o falso, de una afirmación sobre una expresión numérica del tipo $78 - 49 + 49 = 78$. En este ejemplo, el número 49 es *cuasi-variable* si consideramos la familia de expresiones a $78 – a + a = 78$ y, a su vez, esta última afirmación es independiente del valor 78, que puede entonces ser considerado también como un número *cuasi-variable*. En estas afirmaciones se indica una relación matemática referida a una expresión numérica que permanece verdadera independientemente de uno o varios de los números de la expresión.

El autor argumenta que, ofrecer a les estudiantes afirmaciones sobre expresiones numéricas generalizables con números cuasi variables, les ayudaría a centrarse en la

[4] Ver capítulo 4 en el que presentamos y analizamos las actividades.

expresión y transformación de la estructura subyacente, lo que lleva a una lectura de la expresión sin apoyo en el cálculo. También sostiene que el trabajo con expresiones numéricas generalizables puede ayudar a les estudiantes a identificar y discutir las generalizaciones algebraicas mucho antes de que aprendan la notación algebraica formal.

Si bien Fujii (op.cit) realizó su investigación con estudiantes de primaria y nuestra propuesta se refiere a jóvenes que están iniciando su escuela secundaria, consideramos útil la noción de *cuasi-variable* para caracterizar el funcionamiento de ciertos números en las actividades ofrecidas que contienen expresiones numéricas.

2.1.4. Otorgar sentido a los símbolos

Arcavi, Drijver y Stacey (2017) señalan que "una fuerte comprensión de los números y la aritmética es fundamental para aprender álgebra, pero la transición hacia el álgebra requiere considerables reorientaciones de ideas" (p. 49, la traducción es nuestra). Sostienen que en el trabajo algebraico se opera con expresiones de cálculos y con signos (> = <) que son familiares por les estudiantes desde sus prácticas aritméticas, pero el uso de estas expresiones y de los signos incluyen sutilezas/ *subtítulos* que no son necesarios para la operatoria aritmética y no se suelen explicitar al trabajar en álgebra. Como ya mencionáramos, en las prácticas aritméticas la expresión 4+8 está "para ser resuelta" y, en consecuencia, el signo = se suele interpretar como el anuncio de un resultado. Ahora bien, esta forma de comprender las expresiones y el signo igual puede resultar inapropiada para el álgebra ya que, al trabajar también con asuntos estructurales de los números y las operaciones, el signo igual necesita ser interpretado de una manera relacional como la afirmación de una igualdad.

En nuestro estudio, estas ideas nos resultan fundamentales como marco para nuestra indagación ya que parte de asumir la posibilidad y fertilidad de que les alumnes construyan la idea de equivalencia de expresiones numéricas como un modo de otorgar otro sentido a la igualdad, aún en el campo de la aritmética.

Arcavi (2005) señala la habilidad de *leer a través de* y de *manipular* expresiones simbólicas como un componente fundamental del *sentido del símbolo*. En un texto anterior, el autor (Arcavi, 1994) caracteriza el sentido del símbolo a partir de la descripción y discusión de "conductas" que presenta como ejemplos de "tener un sentido del símbolo". Retenemos de los aportes de dicho trabajo una de las conductas que el autor denomina, "manipulaciones y más allá: leer a través de símbolos" y, en particular, dos de los aspectos específicos de la relación entre leer y manipular que el autor destaca:

- ✓ Leer en lugar de manipular;
- ✓ Manipular para leer, o la lectura como objetivo de las transformaciones.

Agregamos que la elección de la manipulación de las expresiones a la que se refiere Arcavi dependerá tanto de la pregunta a responder como del significado- para cada estudiante - de las expresiones que manipula, significados que se van transformando con el trabajo. El estudiante debe aprender a leer información de la expresión y a manipularla, sin modificar el objeto matemático que denota, para poder leer nueva información.

Nos interesa resaltar el vínculo estrecho entre la posibilidad de modificar el sentido de las escrituras algebraicas conservando su denotación (Sackur et al., 1997) y las conductas *leer en lugar de manipular* y *manipular para leer* (Arcavi, 1994). Si bien estos autores desarrollan estas ideas referidas al trabajo con expresiones algebraicas, retenemos su potencial para nuestro estudio de actividades que implican un tratamiento algebraico de expresiones numéricas.

2.1.5. El aporte de investigaciones referidas a cálculo mental

Según Grugeon y Pilet (2017) y Butlen y Pezard (2007) las actividades de cálculo mental (CM) ponen en juego algunas cuestiones del pensamiento algebraico. Nos parece importante ubicar nuestra propuesta en relación con el cálculo mental y para ello necesitamos primero precisar las ideas de algunes autores que estudiaron esta temática particular.

Según Butlen y Pézard (2000) el cálculo mental apunta a transformar ciertos cálculos en otros más económicos y eficaces a través de la reescritura de expresiones numéricas; estas transformaciones se apoyan en propiedades de los números y de las operaciones (por ejemplo, 11 x 8 = 10 x 8 + 8, cuya transformación se apoya en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma). Según estos autores, el cálculo mental es un dominio privilegiado para contrastar las concepciones numéricas de estudiantes y su disponibilidad. Para ampliar esta idea, analizan el ejemplo: *Calcular el producto 32 x 25*.

Si se solicita hacer el cálculo con el algoritmo tradicional, se puede probar la capacidad de le estudiante para implementarlo y su dominio sobre él. Si, en cambio, desde la enseñanza se propone que se haga con cálculo mental, le estudiante es inducido a abandonar el algoritmo tradicional en favor de procedimientos más económicos pero que requieren descomposiciones aditivas o multiplicativas de los factores y en relación con las propiedades de la multiplicación (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.). Por ejemplo, se podrían realizar los siguientes tipos de cálculos:

● 32 x 25 = 32 x 20 + 32 x 5 = 32 x 2 x 10 + 32 x 5 = 64 x 10 + 160 = 640+ 160 = 800

● 32 x 25 = 8 x 4 x 25 = 8 x 100 = 800

● 32 x 25 = 32 x 100 / 4 = 3200 / 4 = 800

● 32 x 25 = 32 x 50 / 2 = 1600 / 2 = 800

Los autores proponen actividades de cálculo mental en las que el tiempo que se les da les estudiantes para resolver, es limitado. Le estudiante elige algún procedimiento en aras de la economía teniendo en cuenta su práctica y su familiaridad con ciertos repertorios (por ejemplo, que al multiplicar un número por 10 "se agrega" un creo al número). Esta elección puede involucrar la memoria, la disponibilidad de descomposiciones de números, la fatiga debido a cálculos intermedios, etc. La necesidad de calcular rápidamente lleva a que les estudiantes abandonen, en muchos casos, los algoritmos tradicionales de cálculo -que son seguros, pero toman demasiado tiempo- para implementar procedimientos que revelen las concepciones que tienen de los números, estando estas concepciones obviamente ligadas a las propiedades del sistema de numeración decimal y a las propiedades de las operaciones (que funcionan, a menudo, de una manera implícita). En este sentido, mencionan que este tipo de actividades, al presentar cierta distancia de los algoritmos tradicionales, permite acceder más fácilmente a las concepciones numéricas de les estudiantes.

El trabajo con actividades de cálculo mental, según les autores, se presenta potente para el aprendizaje de les estudiantes ya que enriquece sus concepciones de los números y su dominio de disponibilidad, aumenta la familiarización de elles con números y operaciones, promueve que se apropien de propiedades de las operaciones, enriquece, diversifica y amplía procedimientos de cálculo.

En algunas de las actividades que conforman la secuencia que propusimos en el aula, que se presenta y analiza en el capítulo 4, se espera que les estudiantes desarrollen un tipo de trabajo que tiene cercanía y también ciertas diferencias con las que analizan les autores que acabamos de presentar[5]. Por ejemplo, proponemos que estudien, sin hacer la cuenta, si 48 x 30 es múltiplo de 4. Para resolver los problemas no se da un tiempo determinado ni se restringe explícitamente la posibilidad de hallar el resultado para dar la respuesta. No rigen los criterios de velocidad y economía, como sí están presentes en los que estudian Butlen y Pezard (2000) en su investigación. En nuestras actividades se tienen que analizar los números sobre los que se está estudiando la divisibilidad, las relaciones entre ellos y los involucrados en la expresión que se estudia. La transformación de la expresión dada en otra equivalente será un recurso pertinente y eficaz para hallar la respuesta, aunque las transformaciones requeridas pueden ser bien diferentes de aquellas que funcionarían eficazmente para hallar el resultado del cálculo expresado. Por ejemplo, si se quiere hallar el resultado de 49 x 6 “mentalmente”, la transformación 49 x 6 = 50 x 6 - 6 puede ser eficaz para hallar el resultado 300– 6= 294. Pero esa transformación aditiva, con la que se intenta captar la cercanía de algunos de los números involucrados en el cálculo original con “números redondos” (recurso típico del CM), no resulta eficaz ni pertinente para estudiar si es número, por ejemplo, es múltiplo de 14. Para esto último es más eficaz la transformación 49x6= 7x7x2x3= 14x 2.

En su tesis de maestría Stauffer (2018) se pregunta qué tipos de problemas son fértiles para el aprendizaje del cálculo estimativo y qué condiciones didácticas lo favorecen. En este trabajo, sostiene que el cálculo mental estimativo juega un rol importante en el aprendizaje de los conocimientos numéricos y en el desarrollo del pensamiento algebraico. Menciona las cuatro raíces del álgebra que identifican Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985) (aritmética generalizada, posibilidades y restricciones,

[5] Las actividades de cálculo mental suelen estar cada vez más presente en las escuelas primarias de la provincia de Buenos Aires; tanto en el diseño curricular como en textos escolares que circulan por las escuelas hace años se proponen actividades que promueven este trabajo. Esto lleva a que algunes estudiantes inicien su tránsito por la escuela secundaria con cierta experiencia en este tipo de trabajo, pero otres se enfrenten por primera vez a la novedad de que, por ejemplo, es posible resolver un cálculo sin acudir a los algoritmos tradicionales. Esto genera una gran diversidad en las producciones que despliegan en las aulas de primer año.

reordenamiento y manipulación y expresión de la generalidad) y señala que estos autores sostienen que la esencia de la raíz de la expresión de la generalidad está en "identificar y aprovechar aquellos momentos cuando los alumnos están realizando cálculos que pueden revelar, con un poquito de indagación, las reglas de la aritmética" (p. 90). En la secuencia que la autora elabora y pone en aula para su estudio se incluyen problemas que implican la comparación de dos cálculos sin hallar sus resultados (por ejemplo, decidir si 12 x 12600 es menor, mayor o igual a 24 x 6300). La autora sostiene que su resolución implica cálculos que permiten evidenciar algunas de estas reglas.

A diferencia de los tipos de problemas que analizan Butlen y Pezard (2000, 2007) en los que la tarea requiere hallar el resultado de cálculos apoyados en las propiedades de los números y operaciones, Stauffer (Op. cit) se detiene en problemas que implican anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado sin hallar el resultado del cálculo. Para poder comparar resultados de cálculos sin encontrarlos, les alumnes necesitan analizar las relaciones que existen entre los factores de cada uno de ellos, en el caso de las multiplicaciones, y las relaciones entre divisores y dividendos, en el caso de las divisiones. Si bien es cierto que algunas de estas relaciones implican cálculos exactos (por ejemplo, si se duplica uno de los dos factores de una multiplicación, se duplica el producto), la autora menciona que decidió incluir este tipo de problemas en la secuencia porque consideró que analizar estas relaciones ayudaría a desarrollar estrategias que puedan abarcar distintos tipos de problemas de cálculo mental. Sostiene que este tipo de problemas contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico en tanto no se exige una búsqueda de resultados numéricos, sino un análisis de relaciones entre cálculos.

Compartimos con la autora que la tarea de estimar resultados de cálculos para compararlos contribuye a iniciar un tipo de trabajo con las expresiones de cálculos que es del orden de lo algebraico. Estimar resultados de diferentes cálculos y compararlos ofrece la posibilidad de leer información de los números y operaciones involucrados en los cálculos sin necesidad de hallar sus resultados. Este es un punto en común con las actividades que forman parte de nuestra propuesta para el aula: en ambos casos se intenta movilizar un trabajo con las expresiones que se apoye en las propiedades de los números y operaciones; en nuestro caso, propiedades de divisibilidad.

En definitiva, las actividades que llevamos al aula comparten con las de cálculo estimativo de Stauffer (Op. cit.) y las de cálculo mental de Butlen y Pezard (Op. cit.) un tipo de tarea típicamente algebraica: leer información de la expresión para transformar una expresión en otra equivalente. Estas transformaciones permiten tomar decisiones sobre el resultado del cálculo: camparlo con otro, hallar su resultado, o decidir si es divisible por un número dado.

Por último, señalamos que este tipo de trabajo permite a les alumnes considerar una operación no solamente como un proceso, sino también como un objeto matemático (Kieran et al, 2016) y agregamos que nuevamente estaríamos ante la posibilidad de potenciar el enriquecimiento de la concepción estructural de los cálculos más allá de lo procedimental (Sfard, Op. cit.).

2.1.6. Condiciones didácticas para el trabajo con la noción de equivalencia de expresiones: la búsqueda de un sentido para la transformación de expresiones

Barallobres (2007) analiza, en el contexto de introducción al álgebra, algunas dificultades relativas a los significados que les estudiantes otorgan a las expresiones algebraicas producidas en actividades de *patterns*[6] donde las expresiones, en tanto fórmulas para contar elementos de una colección, expresan de manera general una cantidad de elementos. A partir de ello se propone estudiar condiciones didácticas que podrían favorecer la puesta en juego de otras significaciones relativas a las expresiones algebraicas; en este sentido piensa las expresiones algebraicas como una herramienta de cálculo. El autor retoma un trabajo de Radford (2003) en el cual se identifica que, en el contexto de actividades de *patterns*, dos expresiones simbólicas ("(n+1) + n" y "(n + n) + 1") pueden ser juzgadas de manera diferentes por les estudiantes ya que expresan un conjunto de acciones diferentes. Les estudiantes se enfocan en las relaciones entre ciertos términos de la secuencia (generalmente términos consecutivos, Radford, 2002) para identificar la forma de pasar de un término al siguiente y no ven relación, al menos al principio, entre las acciones involucradas en este pasaje y operaciones numéricas. En este sentido, las expresiones algebraicas producidas muestran diferencias que no pueden

[6] Decidimos preservar este término que usa el autor en inglés, en su artículo publicado en francés porque refiere a un tipo de actividades reconocidas en el ámbito de la enseñanza de la matemática.

resolverse numéricamente. Barallobres (Op. cit.) sostiene que, en este contexto, las expresiones producidas heredan la dimensión espacio-temporal del discurso contextual de la acción que impide a les estudiantes realizar transformaciones algebraicas. Esta herencia no es ajena a la función que adquiere la herramienta algebraica en el contexto de situaciones de escritura del término general del *pattern* en las cuales no hay objetivo que permita orientar la actividad hacia la realización de cálculos formales. Barallobres agrega,

> "No pretendemos cuestionar las actividades de *patterns*, solo queremos enfatizar el hecho de que esta actividad matemática no tiene un objetivo en sí mismo: por ejemplo, encontrar el término general de una serie numérica para estudiar su convergencia. Así, tan pronto como se produce la expresión del término general, tenemos cosas "para hacer" con esta expresión algebraica (un nuevo objetivo que controla una nueva actividad). No cuestionamos el análisis de Radford. Nosotros avanzamos hacia la idea de que si aceptamos que el significado de una expresión algebraica (de un objeto) está relacionado con "lo que hemos hecho" con dicha expresión, en el contexto de escribir el término general de un patrón, sería razonable que las expresiones permanezcan apegadas al contexto de producción." (Op. cit., p. 40, la traducción es nuestra).

En nuestra experiencia de trabajo en aulas de primer año con este tipo de actividades, anterior al inicio de esta tesis, pudimos identificar también la distancia entre producir una expresión algebraica con sentido (por ejemplo, controlando vía el contexto el significado de cada término) y operar con ella para encontrar una equivalente. Si bien el trabajo que se propone con fórmulas para contar colecciones nos resulta totalmente potente e importante para estudiantes que se están iniciando en el trabajo algebraico, al instalarlos como productores de las expresiones en sus primeros encuentros con ellas, vimos la necesidad de incluir otras en las que las transformaciones algebraicas estuvieran al servicio de resolver la tarea propuesta y se justificaran exclusivamente por el uso de propiedades de los números y las operaciones. De este modo, se estaría contribuyendo a la construcción de un sentido de las transformaciones de expresiones algebraicas en otras equivalentes.

La indagación sobre este asunto nos llevó a pensar en actividades en un contexto exclusivamente numérico que pusieran en juego transformaciones de expresiones de cálculos en otras equivalentes, como modo de abonar el trabajo futuro con expresiones algebraicas, cuyas transformaciones podrían soportarse en el trabajo con propiedades de los números y operaciones.

En una situación experimental, Barallobres (Op. cit) propone a estudiantes que están iniciando su tránsito en el trabajo algebraico, la tarea de estudiar para qué valores enteros de ***a*** y ***b***, la expresión algebraica ***b + 3a + 2b*** representa múltiplos de 3. Mediante una lectura término a término de la expresión, les estudiantes identifican que ***a*** puede ser cualquier número entero (se multiplica por 3) y que ***b*** tiene que ser un múltiplo de 3; sin embargo, la exploración numérica les permite identificar que también hay otros valores de ***b*** que producen múltiplos de 3 como resultado de toda la expresión. El juego numérico de la situación es una manera de cuestionar una primera lectura término a término de la expresión, para pasar a considerarla en su totalidad y así abrir un espacio para la transformación de la escritura original en una escritura equivalente: 3***a*** + 3***b***. El autor sostiene que centrarse en la fórmula como herramienta de cálculo, y no solamente como medio de expresión, permite dar sentido a la equivalencia de dos expresiones algebraicas que, en un principio, objetivan un conjunto de acciones distintas. La evaluación numérica de dos fórmulas que se ven diferentes –por ejemplo (n+1)+n y (n+n)+1– abre el camino para trabajar las transformaciones de las escrituras.

En otra situación similar [7] que el autor propone a les estudiantes, las transformaciones de escrituras aparecen en el aula en la instancia de validación de los métodos de cálculo y las fórmulas asociadas a cada uno. A partir de algunas fórmulas ya consideradas válidas, otras son tratadas en relación con ellas. Las transformaciones a realizar no son arbitrarias, es necesario anticiparlas y realizarlas con un objetivo. En lugar de validar una fórmula buscando las huellas de las acciones de producción en el contexto original, se la compara con otra ya validada, lo que permite identificar nuevas relaciones. Estas nuevas relaciones son la base de las equivalencias.

[7] La situación se plantea en diferentes etapas: inicialmente se solicita a les estudiantes que den el resultado de diferentes sumas de diez números consecutivos. Gana quien dé el resultado correcto. Luego les propone que elaboren un método que les permita arribar rápidamente a la respuesta cualesquiera sean los 10 números consecutivos y una explicación de la validez del método. En la última etapa se solicita la producción de una fórmula asociada al método de cálculo; métodos y fórmulas son discutidos en la clase.

Para nuestro trabajo, retenemos de este autor dos asuntos: la búsqueda de condiciones en actividades para el aula de manera que las transformaciones de expresiones resulten pertinentes para la tarea a realizar, y la fertilidad del contexto numérico para el planteo de la problemática de modo tal que las tareas de lectura y transformación de un cálculo no están condicionadas por un sentido contextual extramatemático que podrían tener esos cálculos. En nuestra propuesta para el aula, caracterizada brevemente en el capítulo anterior, la imposibilidad de obtener el resultado de los cálculos que se presentan en las expresiones, junto con el objetivo de analizar si ese resultado es múltiplo de un número, hace presente un trabajo posible con transformaciones que es necesario anticipar y que depende tanto de las características de los números involucrados como de la pregunta que se quiere responder.

2.2. El estudio de las interacciones

Tomamos la noción de contrato didáctico como un apoyo para estudiar los procesos de producción de conocimiento que emergen a propósito de las interacciones entre estudiantes y docente. La Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986), en la que se acuña esta noción, explica que la clase funciona como si existiera un contrato didáctico, es decir, una serie de expectativas entre estudiantes y docente que va regulando la relación de los primeros con los conocimientos en juego. Estas expectativas se van constituyendo en reglas (muchas veces implícitas) que, al ser inherentes a un determinado conocimiento o situación, están destinadas a cambiar. Es por eso que el contrato didáctico está sujeto a negociaciones y rupturas, aún en el mismo grupo y con el mismo docente.

Estas ideas nos resultan potentes ya que nos permiten describir y explicar la construcción de significados en relación con la actividad y los objetos matemáticos, a partir de analizar las interacciones entre el docente y sus estudiantes. En particular, nos ayuda a interpretar que respuestas correctas de les alumnes pueden no obedecer a relaciones matemáticas construidas por elles, sino a posibles pistas que le docente da de manera no del todo consciente. Del mismo modo, respuestas erróneas no necesariamente significan ausencia de conocimiento, sino que pueden responder a fenómenos relativos al contrato didáctico.

Mendoza (2018), tomando elementos de Teoría de Situaciones, pone en relieve que los significados que regulan la actividad matemática en la clase están lejos de conformar un conjunto coherente de reglas que se comparten de manera homogénea por todes les alumnes de la clase. Compartimos este señalamiento que nos lleva a considerar las diferentes posiciones de les estudiantes respecto de reglas del contrato para analizar las interacciones en una clase.

Desde el marco de la Teoría de Situaciones, Sadovsky y Sessa (2005) incorporan otras dimensiones al análisis de las interacciones sociales entre compañeres. Señalan que, proponer y sostener en el aula un trabajo en el que las producciones de compañeres sean consideradas como nuevos problemas para estudiar, genera un espacio de interacciones colectivas en el que se habilita, entre otras cosas, la formulación de nuevas preguntas que podrían no tener lugar en el trabajo autónomo de les estudiantes con un problema. Las autoras sostienen:

> El trabajo del otro cumple la función de interpelar el propio. Los límites que encuentra cada alumno para validar tanto las aceptaciones como los rechazos sobre los procedimientos de los otros generan buenas condiciones para alojar nuevas preguntas. La capa de relaciones matemáticas y normas de trabajo que se pondrán en juego en el debate colectivo se ha "engrosado". En muchos casos, la formulación de nuevas preguntas es una tarea del docente que solamente puede tener lugar en el marco de los debates que se generan como resultado de la confrontación. (p.108, traducción de las autoras).

Compartimos las reflexiones anteriores y, desde este marco, las interacciones colectivas -a propósito de las resoluciones autónomas de les estudiantes- tuvieron un lugar importante en el proceso de planificación del conjunto de problemas que se les propuso en el marco de esta tesis.

Desde otra perspectiva, pero con ideas que entendemos cercanas a las de contrato didáctico, Voigt (1995) sostiene que la interacción es más que una consecuencia de acciones y reacciones:

> Un participante de una interacción monitorea su acción de acuerdo con lo que asume que son las expectativas y comprensión de los otros, y también en función de su opinión sobre los otros y su relación con ellos. Al mismo tiempo, los otros

participantes dotan de sentido a la acción al adoptar lo que consideran que son las intenciones y comprensiones del actor. Las acciones subsecuentes de los otros participantes son interpretadas por el primer actor en relación con sus expectativas y pueden someterse a reconsideración, y así sucesivamente. (Op. cit., p. 169)

Nos identificamos con Mendoza (Op. cit.) quien, siguiendo estas ideas de Voigt, señala que en la clase circula una diversidad de significados relacionados tanto con la actividad y los contenidos matemáticos, como con las expectativas y comprensión de las acciones de quienes intercambian resoluciones, ideas y reflexiones sobre el trabajo matemático. Estos significados pueden no ser compartidos entre estudiantes; es decir, pueden ser diferentes para cada une de elles. Según este autor, sólo podrían considerarse como "significados compartidos" aquellos que fueron producidos por medio de una negociación y se los pueden evocar, aunque no todes los asuman igualmente.

Yackel y Cobb (1996), desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, plantean que el aprendizaje en matemática es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación hacia las prácticas matemáticas de una sociedad más amplia. Estos autores teorizan la producción de conocimiento en el aula distinguiendo en su modelización el plano de los conceptos, teoremas, propiedades, leyes, problemas, de aquel de las normas que regulan el trabajo (qué es lo que está o no permitido hacer en matemática, qué se considera suficiente para dar por válido un enunciado o un procedimiento, cuáles son los criterios que permiten establecer que una estrategia es "matemáticamente pertinente", etc.). El concepto de "normas sociomatemáticas" permite atrapar tanto el carácter social de estas normas en el aula como su especificidad en relación con el conocimiento matemático involucrado. Apoyados en esta noción de normas sociomatemáticas, estudian las interacciones en el aula de matemática (entre estudiantes y entre estudiantes y docentes) e identifican el juego de interrelaciones necesarias que regulan las construcciones de conocimiento. Por ejemplo, los autores incluyen como normas sociomatemáticas las que permiten a les estudiantes comprender que para dar una nueva respuesta esta debe ser diferente de las anteriores y también contornear en qué consiste la diferencia matemática entre dos repuestas.

En su trabajo de tesis, Sadovsky (Op. cit.) retoma las ideas de Yackel y Cobb (Op. cit.) ubicándolas, de un modo que compartimos, próximas a la noción de contrato didáctico: son las interacciones entre docente y estudiantes las que van construyendo las normas sociomatemáticas “habilitadas” en un aula. Esta construcción puede darse tanto entre estudiantes, como entre estudiantes y docente, en una trama en la cual les participantes se adaptan a las expectativas del otre y establecen obligaciones para su actividad.

Barallobres (Op. cit.) sostiene, apoyado en perspectivas socioculturales, que la relación entre significaciones personales y significaciones culturales no son naturales. Referenciando a Radford (2006a) señala que uno de los roles de la cultura en torno a la construcción de conocimiento es el de sugerir, a partir de categorías conceptuales y de prácticas sociales, las trazas del desarrollo conceptual. La relación entre los procesos de interiorización y el contenido externo necesita de una reorganización individual que no es una transformación automática de las herramientas dadas por la cultura. Estas herramientas no pueden tener un rol en la acción de los sujetos, si no son considerados por los sujetos concretos que actúan en situaciones específicas. Desde el punto de vista epistemológico, hay una tensión entre las normas del sistema cultural a apropiarse y la actividad individual de los sujetos dentro de este sistema -actividad que no puede ser sustituida o eliminada- y que es constitutiva de las interacciones entre los sujetos (Castorina, 1996, citado por Barallobres).

Desde el punto de vista de la enseñanza y a propósito de pensar en las prácticas de validación, Barallobres afirma que:

> Es en la interacción dialéctica entre los sujetos y el entorno creado artificialmente por la escuela, que los estudiantes pueden acceder a la comprensión del funcionamiento de la validación en matemáticas. Apoyados en Radford (2000, 2006a), afirmamos que este entorno no está construido para "ayudar" a las reconceptualizaciones del sujeto: constituye el lugar de encuentro de las racionalidades individuales y las que surgen de las confrontaciones epistemológicas dentro de las comunidades científicas. (Op. cit., p. 40)

En su investigación Barallobres (Op. cit.) diseña una situación para el aula en la que las interacciones generan buenas condiciones para la construcción con sentido de la lectura y transformación de expresiones algebraicas, expresiones entendidas como herramientas de cálculo. Crea un entorno de trabajo, en el que le docente juega un papel fundamental como mediadore que sostiene y hace avanzar tanto las escrituras simbólicas de los cálculos que realizan les estudiantes como el análisis sintáctico de las mismas.

Estas ideas de Barallobres nos permiten poner en relieve el papel fundamental de la enseñanza como mediadora entre los procesos de construcción de conocimientos en el espacio colectivo de aula y las producciones personales que se inician en la interacción autónoma de les estudiantes con los problemas.

Finalmente, nos interesa retomar el artículo de Butlen y Pézard (Op.cit) pero con otra finalidad: compartir la mirada que aportan sobre la gestión de le docente en el aula. Estos autores señalan condiciones sobre la dinámica de trabajo en relación con actividades de cálculo mental. Sostienen que el trabajo sistemático con actividades de cálculo mental permite a les estudiantes explorar un ámbito más amplio de operaciones numéricas y obtener un mayor dominio de ellas. Las técnicas más elementales de cálculo, una vez automatizadas, pueden movilizarse para construir procedimientos más complejos. Asimismo, el uso frecuente de estas técnicas ayuda a tener un mayor control de las descomposiciones aditivas y multiplicativas que se proponen. Esto permite construir una dinámica que promueve que les estudiantes se distancien de los procedimientos que en un principio podrían haberles parecido más seguros (algoritmos convencionales). Ahora bien, para que esta dinámica sea posible se precisan contemplar ciertas condiciones. Les estudiantes necesitan saber cómo detectar los momentos en que es necesario inventar y aquellos en los que es necesario reproducir, lo que requiere por parte de le profesore institucionalizaciones "flexibles".

Una práctica regular en torno a actividades de cálculo mental debe tener el objetivo de llevar a le estudiante no solo a implementar procedimientos económicos de cálculo sino también a percibir su dominio de eficiencia. La institucionalización que describen como "flexible" se relaciona con estos dos asuntos: no debe ser demasiado rápida o demasiado "fuerte" ya que esto podría dejar poco margen para pensar en su adaptación en situaciones diferentes; no debería ser demasiado "débil" o tardía porque entonces todos los procedimientos podrían parecer equivalentes. Debe hacer que los estudiantes conozcan el rango y la jerarquía de los procedimientos movilizados en el aula.

Estas ideas de Butlen y Pézard nos resultaron importantes para ampliar nuestra sensibilidad sobre las acciones de une docente que se propone socializar e interactuar con producciones de estudiantes. El vínculo entre lo que quiere enseñar y la particularidad de las producciones de los estudiantes está lleno de tensiones que tiene que transitar.

CAPÍTULO 3

Marco metodológico de la investigación

En este capítulo presentamos el marco que fundamenta las decisiones metodológicas de este trabajo de investigación. Compartimos algunas características de la etapa de diseño y planificación colaborativa y describimos asuntos relativos a la puesta en aula de la propuesta y la recolección de la información. Finalmente, damos cuenta de la manera en que fuimos construyendo los datos con el propósito de interpretar los hechos del aula.

3.1. Elementos teóricos y fundamentación de las decisiones metodológicas consideradas en esta tesis

3.1.1. Decisiones metodológicas generales

En este trabajo, de acuerdo con el problema, las preguntas de investigación, y desde el marco teórico de referencia, proyectamos realizar un estudio de tipo cualitativo de carácter exploratorio. Una característica de los estudios cualitativos es el trabajo con pocos casos con el objetivo de profundizar en su observación y análisis. La riqueza de nuestro estudio no pretende fundamentarse en su representatividad, entendida en términos estadísticos, sino en su significatividad en términos de la capacidad de describir y entender la complejidad didáctica de los procesos que atraviesan la enseñanza y el aprendizaje. Diversos autores (Stake, 2007; Carazo, 2006) consideran el estudio de caso como estrategia de investigación cualitativa. Esta perspectiva nos ayuda a describir en qué sentido pensamos la particularidad de nuestro trabajo:

> El cometido real del estudio de caso es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. (Stake, Op. cit., p.20)

El caso que nos proponemos estudiar en profundidad en esta tesis está constituido por las interacciones efectivas que se dan cuando les estudiantes trabajan de manera autónoma, y cuando discuten en el espacio colectivo sostenido por le docente, en torno a una secuencia de actividades elaborada colaborativamente en el marco de esta investigación. Asumimos que todo proceso de producción en un aula —ese es nuestro objeto de estudio— tiene una singularidad que la justifica como caso.

Ubicamos nuestro trabajo como un estudio de caso instrumental (Stake, Op. cit.) en tanto consideramos que la comprensión de lo singular que será tratado permitirá el abordaje a futuro, y la comprensión, de problemas más generales.

A su vez, decimos que se trata de un estudio exploratorio, ya que el objetivo es examinar un problema nuevo: el trabajo de les estudiantes con expresiones numéricas a partir de una enseñanza que promueve un tratamiento algebraico de esas expresiones.

3.1.2. Elementos de Ingeniería Didáctica

Como ya hemos señalado, el trabajo de investigación en el cual se inscribe esta tesis se organiza a partir del diseño colaborativo e implementación de un conjunto de actividades para un aula de primer año de escuela secundaria y se centra en el análisis de las interacciones efectivas ocurridas durante la implementación. Nuestro estudio toma algunas características propias de la ingeniería didáctica (Artigue, 1989) en la medida en que se basa en el diseño de actividades, la implementación, la observación y el análisis de una secuencia de enseñanza. Nuestras decisiones nos colocan en las antípodas de considerar la observación naturalista de clases.

El diseño de las actividades para el aula con el primer nivel de análisis que conlleva permite el despliegue de posibles estrategias de les estudiantes en respuesta a las interacciones que pudieran establecer con los problemas, tanto en forma individual como colectiva. Ese estudio de posibles nos permite comprender mejor las relaciones matemáticas que les estudiantes podrían movilizar al trabajar con las actividades y, al mismo tiempo, identificar, explicitar y priorizar aquellas relaciones que le docente podría considerar, sostener, discutir e institucionalizar en el aula a partir de las producciones de sus estudiantes. Este despliegue se ubica en lo que la Ingeniería Didáctica denomina análisis *a priori* y tiene un lugar importante en la investigación ya que permite definir un conjunto de observables que constituirán una base para reconstruir, describir e interpretar los hechos de la clase. Según Sadovsky (2004), el análisis *a priori* resulta "*una referencia esencial para reconstruir el proceso de producción de conocimientos en la clase. El interés del análisis a priori está dado por su fertilidad para realizar tal reconstrucción*". (p. 71).

Siguiendo a Sadovsky (Op. cit.) consideramos que el análisis *a posteriori* permite reconstruir y analizar un proceso de producción de conocimientos -concretos e irrepetibles- que tiene lugar en un aula particular y, en tanto actividad que realizan sujetos particulares, incluye aspectos contextuales que son de otro orden de los contemplados en el análisis *a priori*. Según Margolinas (1992) el análisis *a posteriori* es un análisis que depende de los hechos experimentales observados; no es entonces reducible al análisis *a priori* ni a una constatación de adecuación entre el análisis *a priori* y los resultados de observación.

Se trata por ello, del estudio de algunas cuestiones de un proceso singular de producción, y de la posibilidad de aprender de él: de conocer nuevos aspectos y de plantear nuevas preguntas sobre la clase de matemática y los procesos que allí tienen lugar. En nuestro caso, esperamos que las explicaciones y caracterizaciones que pudimos elaborar a partir del análisis *a posteriori* de un recorte de la experiencia en el aula nos permitan comprender y precisar procesos de enseñanza y aprendizaje a propósito del trabajo con expresiones algebraicas numéricas, en una perspectiva de avance hacia prácticas algebraicas.

En nuestro trabajo tomamos la definición de análisis *a priori* que se propone en Margolinas, (Op. cit).

> "En el análisis a priori, le término "a priori" no significa primero temporalmente. Significa que el análisis a priori no es dependiente de los hechos de la experiencia (…) El análisis a priori puede tener lugar, entonces, luego de la observación; el pierde su sentido predictivo para tomar un sentido causal." (p. 131, la traducción es nuestra).

La experiencia permite ir reconociendo aspectos que, aunque no hayan sido considerados previamente en el análisis *a priori*, podrían haber estado incluidos en él, porque corresponden a modos posibles de abordar de les estudiantes y se explican en función de conocimientos que podrían ser movilizados por elles en el trabajo; es decir, la experiencia nos permite conocer más sobre la secuencia independientemente de la experiencia. Sadovsky (Op. cit.) explicita:

> (…) nuestro análisis *a priori* se nutre con nuestra propia experiencia, pero retiene en él, aquello que puede ser concebido de manera independiente de la experiencia. Para llegar a la conclusión de que un hecho no depende de la experiencia, es necesario hacer intervenir la experiencia. (p. 69).

Nos interesa reflexionar acerca de algunas complejidades del proceso de diseño colaborativo de las actividades. El análisis *a priori* que se puede desarrollar al pensar una secuencia para enseñar un contenido particular está impregnado, orientado, por lo que se quiere que les estudiantes movilicen y aprendan. La secuencia de actividades que se va diseñando colaborativamente está guiada por las intenciones de enseñanza; en este sentido, las anticipaciones de posibles estrategias de resolución (diferentes producciones correctas, incompletas, con algunos errores) están naturalmente sesgadas por la perspectiva de aquello que se quiere enseñar. Ahora bien, les investigadores y les docentes se enfrentan al desafío de anticipar resoluciones, producciones de les estudiantes que movilicen, o construyan, otros conocimientos no necesariamente "cercanos" a lo que se apunta. Es decir, tienen la difícil tarea de descentrarse de lo que se quiere enseñar y pensar el problema desde el punto de vista de le estudiante, "libre" de estos conocimientos y relaciones a las que se apunta desde la enseñanza.

Por otro lado, la propia experiencia en el aula, como dice Sadovsky (Op. cit), puede ofrecer "imprevistos" que ayudarían a identificar nuevos conocimientos y relaciones que les estudiantes pueden producir.

En este trabajo de investigación, una primera versión del análisis *a priori* se produjo entramado con el proceso de planificación de cada una de las actividades de la secuencia y en conjunto con la docente (volveremos sobre esta etapa en el punto 3.1.3 de este capítulo). En la medida que ese trabajo se realizó en forma colaborativa, estos análisis se constituyen en un marco de referencia fuerte para la acción de la docente en el aula. Esa versión, avanzó con los tiempos que imponía la disponibilidad de la docente y se fue reelaborando sobre la marcha de la implementación. En esa etapa de implementación, en la cual estuve[8] presente como observadora participante, varias ideas que sostenían los ajustes que realizamos quedaron en el marco de la oralidad a propósito de conversaciones "apuradas" con la docente, en relación con lo que veíamos en el aula.

Una vez realizada la experiencia, ya sin participación de la docente, reelaboramos un segundo análisis *a priori* en la que se profundizan los análisis realizados en la primera versión y se retoman algunas de las cuestiones conversadas con la docente durante el transcurso de la implementación. Este segundo análisis se presenta en el capítulo 4 de esta tesis y constituye un soporte para la reconstrucción del proceso de producción de conocimientos en la clase.

3.1.3. La planificación colaborativa de actividades

En nuestro trabajo, decidimos realizar el diseño de las actividades y su análisis en colaboración con una docente considerando esta opción entre otras. Con el objetivo de justificar esta elección presentamos una breve caracterización de otras dos opciones, realizadas en diferentes investigaciones de especialistas con las cuales compartimos nuestra concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la valoración del trabajo profesional docente:

- ✓ Investigaciones en las que, quien investiga, produce la secuencia didáctica, realiza el análisis *a priori*, y luego trabaja con le(s) docente(s) que la implementará(n), con la intención de discutir tanto la secuencia y los análisis previos como de los objetivos de la investigación (encontramos esta opción en el trabajo de tesis de Sadovsky, Op.cit.). En este tipo de trabajo, se generan tensiones para quien investiga: tiene que ofrecer a le docente los elementos necesarios para que, por un lado, pueda apropiarse de las ideas "fuertes" que subyacen a la secuencia y, por otro, preserve un margen de maniobra amplio para definir su propio trayecto de enseñanza en relación con sus opciones didácticas generales, que trascienden la interacción con le investigadore.

[8] En esta tesis usamos la primera persona del plural para referirnos a nuestro trabajo. En esta oración, sin embargo, hemos optado por la primera persona del singular para precisar que en el aula hubo sólo una observadora.

- ✓ Investigaciones en las que, quien investiga, no interviene en el diseño y planificación de la secuencia de actividades implementada, sino que selecciona une docente con cierta formación didáctica, con el objetivo de observar y estudiar los hechos del aula a partir del desarrollo de clases que le docente piensa como parte de su trabajo cotidiano (por ejemplo, Cambriglia, 2018). Esta no podía ser nuestra opción ya que necesitábamos elaborar una planificación específica para promover un tipo de trabajo que no está expresado claramente en los diseños curriculares y, desde nuestros conocimientos, no tiene presencia en las prácticas instaladas: el tratamiento algebraico de expresiones numéricas.

Desde nuestra posición, el proceso de planificar el conjunto de las actividades en colaboración con une docente del curso en el que se desarrolla el trabajo de campo se ubica en una zona de negociaciones entre investigadore y docente. En estas negociaciones, le investigadore reconfigura sus intereses de investigación según los intereses e inquietudes de le docente del curso. En particular, se contemplan las particularidades que le docente comparte sobre la institución en la que se implementa la propuesta, sobre sus alumnes, sobre la complejidades y potencialidades en la forma en que les estudiantes -y elle- trabajan en esa aula en particular. La planificación se nutre con estos elementos y también, se matiza por la experiencia, inquietudes y expectativas de le docente respecto de la enseñanza del tema particular. En este sentido, el análisis *a priori* incluye elementos que sólo la profesora que lleva adelante la propuesta puede aportar.

Para le docente, se crean condiciones de intercambio y reflexión para una tarea que, usualmente, transcurre en soledad. Quedará a su cargo la inserción del trayecto de enseñanza planificado colaborativamente en su proyecto de enseñanza más global (por ejemplo, imaginando, a propósito de otro tema el currículum, un trabajo que recupere asuntos de esta experiencia).

A su vez, los análisis elaborados colaborativamente ayudan a que le docente disponga de un amplio abanico de interpretaciones de los hechos que ocurren en el aula y, de esta manera, tenga más elementos para tomar decisiones y actuar en la inmediatez de la clase. Desde nuestra posición, estas son buenas condiciones para que las escenas que se generen y sostengan en el aula sean portadoras de procesos individuales y colectivos de elaboración de nuevas relaciones, discursos, procedimientos y escrituras, escenas muy deseables tanto para la docente con la cual trabajamos como para el desarrollo de esta investigación.

Tomando ideas de Sensevy, Forest, Quilio y Morales (2013), en el marco de la Ingeniería Cooperativa, entendemos que esta opción de planificación colaborativa nos ha permitido deshacer el dualismo clásico acerca de personas "que piensan" y personas "que actúan", dado que le/s investigadore/s y le/s docente/s tienen que implicarse juntes en un trabajo conceptual. Distintos investigadores -por ejemplo, Bernardz (2004), Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier y Couture (2011), Roditi (2010) y, en nuestro medio Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril y García (2015)- desde hace tiempo se posicionaron en el desarrollo de investigaciones "con docentes" frente a la opción de realizar estudios "sobre les docentes"[9]. De estas investigaciones, compartimos y tomamos la idea de que la colaboración favorece el intercambio entre investigador y docente, en términos de la construcción de acuerdos entre diferentes culturas, con diferentes objetivos:

> La cultura escolar alienta a que las y los docentes a buscar los medios para, por ejemplo, mejorar su calidad de sus intervenciones con las y los estudiantes. La cultura científica invita a que las investigaciones contribuyan a la producción de conocimiento en un campo determinado. El acuerdo de colaboración es asegurar que la misma actividad reflexiva construida alrededor de un proyecto de exploración negociado genera buenas condiciones para que ambas expectativas se cumplan. (Desgagné et al, Op. cit., p. 39).

Nos interesa señalar dos aspectos presentes en las Investigaciones Colaborativas -Bernardz (Op.cit), Sadovsky et al (Op.cit.), Roditi (Op.cit.)- que no formaron parte de nuestros objetivos y desarrollos:

- ✓ apuntan explícitamente a que el trabajo realizado en conjunto entre docentes e investigadores aporte al desarrollo profesional de les docentes participantes;
- ✓ la construcción de la colaboración entre docentes e investigadores es un objeto de reflexión y estudio permanente.

[9] Señalamos que la participación de la docente en nuestra investigación llegó hasta la etapa de diseño y puesta en aula; los análisis posteriores que conforman el núcleo de esta tesis fueron realizados sin su participación.

3.2. Contextualización de la experiencia

3.2.1. La profesora, la escuela, el aula

Hemos mencionado que el trabajo de indagación en el cual se inscribe esta tesis se organiza a partir de, por un lado, el diseño colaborativo con une docente de un conjunto de actividades para primer año de escuela secundaria pública y, por otro, de la implementación de la secuencia en un aula de une docente.

Para la elección de le docente tuvimos en cuenta que trabajara en un primer año de una escuela secundaria pública de la provincia de Buenos Aires; que problematizara la complejidad del aula en términos de diversidad de conocimientos que allí conviven; que su proyecto de enseñanza contemplara la tarea de asumir, sostener y apoyarse en las diversas producciones orales y escritas que realizan sus estudiantes como respuesta a un problema. Optamos por invitar a participar a una profesora que compartía con la autora de este trabajo un camino de formación, estudio y producción didáctica[10] y estaba interesada en elaborar y explorar un trayecto de enseñanza para sus estudiantes con características similares a las que nos proponíamos para este estudio. Su aceptación significó un buen punto de partida para nuestro trabajo ya que se generó un contexto potente para el intercambio de ideas didáctico- matemáticas a la hora de planificar las actividades para el aula y de llevarlas adelante en uno de sus cursos.

Entre las diferentes instituciones escolares de la ciudad de La Plata en las que la docente da clase en primer año, una albergó nuestro trabajo permitiendo el ingreso de la investigadora, el registro en audio de las clases y el registro fotográfico de carpetas y pizarrones. Si bien la escuela y la inspección permitió el ingreso de la investigadora en la escuela durante ocho clases, se pudieron concretar sólo seis[11].

La profesora da clases en un primer año de esta escuela pública desde el 2014. Esto también significó un buen punto de partida ya que conoce la idiosincrasia propia de la escuela. En particular, la etapa de planificación colaborativa del conjunto de problemas

[10] La profesora fue alumna de la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria de la UNIPE; somos co-autoras del documento "*Números y Letras. Lectura y transformación de expresiones numéricas y algebraicas*" de la colección herramientas de la UNIPE y participamos de diferentes proyectos de investigación en didáctica de la matemática.

[11] Uno de los días de implementación la escuela estuvo cerrada por falta de agua. Otro día hubo paro de auxiliares.

comenzó en el mes de febrero, antes del inicio del ciclo lectivo. Si bien la profesora no conocía a sus alumnes de primer año de esa institución, al tener varios años de experiencia como docente en la escuela podía anticipar ciertas características de les estudiantes que ingresan (varies de elles egresan de la escuela primaria asociada a la secundaria y otros de escuelas aledañas). Así, se anticipó un contexto de aula de mucha heterogeneidad de los conocimientos que podrían movilizar cada uno de los problemas planificados; es decir, al planificar sabíamos que, por ejemplo, podía haber puntos de partida diferentes y distantes unos de otro (por ejemplo, con el trabajo que proponíamos sobre la noción de división). Este contexto de gran diversidad era un asunto de preocupación para la profesora y un punto central para nuestra indagación.

El curso de primer año en el que se implementó la secuencia estaba compuesto por 38 estudiantes entre 12 y 13 años. Los pequeños grupos de trabajo eran de entre 4 y 5 estudiantes. La conformación de estos grupos fue decidida por la docente con el criterio de favorecer la interacción entre estudiantes; la constitución de los grupos, en general, se mantuvo durante las siete clases que duró la indagación.

3.2.2. La etapa de diseño y planificación colaborativo

La etapa de planificación colaborativa del conjunto de problemas se realizó durante seis encuentros con la docente, de entre dos o tres horas de trabajo entre los meses de febrero y marzo (antes que comience el ciclo escolar). En esos encuentros delineamos un pequeño trayecto de enseñanza para el curso seleccionado, de ocho clases de dos horas cada una. A grandes rasgos, cada problema moviliza diferentes aspectos del trabajo con múltiplos y divisores que promueven un tipo de trabajo algebraico sobre lo numérico. Durante esos encuentros, elaboramos un documento escrito "Planificación" que contiene la formulación de las actividades que se llevaron al aula, un primer análisis *a priori* de ella, las intenciones de enseñanza que se tiene con cada actividad, diferentes aspectos de la gestión (intervenciones que podríamos realizar en los pequeños grupos, en el espacio de discusión colectiva con todo el grupo aula). Señalamos que, a lo largo del trayecto de indagación, el documento "Planificación" se fue modificando a partir de breves encuentros informales con la profesora (al salir de la clase, en los recreos). En estos encuentros charlábamos sobre lo que iba aconteciendo en el aula y de los ajustes que necesitábamos hacer sobre lo planificado.

Una vez finalizada la experiencia, se volvió sobre el análisis *a priori* que, como hemos mencionado en el apartado 3.1.3, no significa previo a la experiencia. Esta revisita a la planificación se realizó sin compañía de la docente y se ve plasmado en el capítulo 4 de esta tesis.

Para elaborar los problemas que finalmente conforman la secuencia llevada al aula, nos apoyamos en problemas de libros de textos escolares - de nivel de primario y secundario- con los que la docente suele planificar sus clases, así como en el documento curricular elaborado con ella y textos didácticos de mutuo conocimiento. Algunos de los problemas que finalmente forman parte de la secuencia surgen de realizar modificaciones a los de los libros analizados; otros, fueron inventados junto con ella.

3.2.3. La recolección de información en el aula

Antes de comenzar con la experiencia en el aula, se acordó con la docente la forma en que la investigadora estaría presente en las clases: una "observación participante". Con esto queremos decir que la investigadora, además de observar las escenas del aula y de tomar notas de con algunas primeras impresiones, puede intervenir en el trabajo que les estudiantes desarrollan en pequeños grupos, a partir de las necesidades que elles tuvieran en relación con la tarea. Estas intervenciones también tenían la intención de, por ejemplo, pedir mayor explicitación de una idea por parte de un estudiante, ayudar a que todes les integrantes del grupo puedan involucrarse con la tarea y con la discusión grupal de la misma.

La confianza construida a partir de las experiencias compartidas con la profesora -académicas y laborales- y de la elaboración conjunta de la propuesta fue un punto importante para que ambas partes nos sintiéramos cómodas con este acuerdo.

La tarea de la recolección de la información se realizó sin colaboración de la docente. En cada una de las clases se tomaron registros de audio y fotográficos: se utilizaron cuatro grabadores para grabar audios de los momentos de trabajo en pequeños grupos, de los momentos de discusión colectiva (en estos momentos, uno de los cuatro grabadores se colocaba cerca del pizarrón, los otros continuaron grabando en los grupos). También se tomaron fotografías de los pizarrones elaborados en diferentes momentos de las discusiones colectivas, como así también de las producciones escritas de las carpetas de les estudiantes.

Se elaboraron, como mencionamos anteriormente, notas de clases con la intención de, por un lado, realizar un resumen a partir del cual se pudieran compartir e intercambiar las primeras impresiones de la clase con la docente y, por otro, realizar una primera identificación de sucesos de aula que nos parecieran interesantes para analizarlos para este trabajo.

3.3. La construcción del dato que será objeto de nuestro análisis didáctico

En el capítulo 5 nos detenemos en el análisis de algunas escenas recortadas entre los hechos de las clases que formaron parte del trabajo de campo. Recordamos que esta etapa de la investigación se realizó sin participación de la docente.

Centrar el análisis *a posteriori* en el recorte de escenas del aula es una característica de algunos trabajos de tesis en educación matemática, en particular los de las Cambriglia (Op. cit.), Sancha (2017) , Sadovsky (Op. cit.). Nos interesa detenernos en las reflexiones de Sadovsky (Op. cit.) a propósito de centrar el estudio en el análisis de escenas recortadas del aula:

> "En otros términos: podemos detenernos en el análisis de una cierta estrategia, por considerarla relevante desde la perspectiva de nuestra problemática, aún cuando la hayamos observado en un único alumno del conjunto con el que hemos trabajado. Son los procesos posibles de construcción, los que están en el centro de nuestra preocupación y no cuán representativos del conjunto son dichos procesos" (p. 117).

Para este trabajo, consideramos como episodio tanto el recorte de ciertas escenas de trabajo en el aula como el análisis que elaboramos en vínculo con los asuntos que queremos estudiar en esta tesis. Nos interesa describir nuestra manera de llegar al recorte de los episodios. Es un proceso que atravesó diferentes etapas:

- En la primera etapa, durante la implementación, se registraron audios de las interacciones orales, fotos de las producciones de les estudiantes y del pizarrón y se produjeron notas que apuntaban a sintetizar lo ocurrido en cada clase y, al mismo tiempo, contenían marca sobre algunos asuntos que llamaban la atención en relación con la problemática de estudio. Estas notas, que retienen la intensidad de la experiencia que está teniendo lugar (Rockwell, 2009), se convierten en una primera referencia para el trabajo en la segunda etapa.
- Identificamos una segunda etapa en la cual revisamos los registros de la totalidad de las clases. Fundamentalmente las producciones escritas de les estudiantes, las grabaciones de las discusiones colectivas y las fotos de los pizarrones. Este primer nivel de análisis se organizó en torno a cada problema de la secuencia. Para algunos problemas, y a propósito de algo que hubiéramos identificado en esta revisión de la totalidad, volvimos a escuchar las grabaciones de las interacciones en los pequeños grupos. Las notas tomadas durante la implementación se tuvieron en cuenta también para ir a mirar en profundidad algunos momentos de la clase. Los diferentes momentos que se van seleccionando, muestran aspectos de un proceso de construcción de conocimiento en relación con el tratamiento de las expresiones numéricas.
- En una tercera etapa se retuvieron las escenas identificadas en la etapa anterior para producir un segundo nivel de análisis, en el cual tuvimos en cuenta con mayor detenimiento el juego de las interacciones en el aula y su papel en los conocimientos que se van construyendo en la clase.
- Finalmente, en la cuarta etapa se seleccionaron algunas de estas escenas para seguir profundizando en el análisis, hasta llegar a configurar el estudio de los episodios que constituyen el capítulo 5 de esta tesis.

En la selección de las escenas fuimos sensibles a diferentes dimensiones del trabajo en el aula que, a veces, se superponían en un mismo fragmento de clase. Más precisamente, prestamos atención a:

- ✓ Momentos de trabajo que presentaron cierta complejidad para les estudiantes: tanto las dificultades anticipadas en el momento de planificar -inherentes al tipo de actividad o trabajo que proponíamos-, como aquellas imprevistas.
- ✓ Situaciones que resultaron difíciles de gestionar para la docente.
- ✓ Ambigüedades en el discurso de les estudiantes y los posibles malentendidos que de allí podrían surgir.
- ✓ Intervenciones o producciones de algunes estudiantes que resultan productivas para el trabajo de les otres y el desarrollo de la clase.

Como se verá en el capítulo 5, los episodios seleccionados se ubican en torno a las tensiones que se generan en el espacio de discusión colectiva de todo el grupo de estudiantes, cuando se trata de la construcción de un nuevo tipo de práctica para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como iguales a otros ya conocidos. Lerner (2001) retomando a Mercier (1994), en una posición que compartimos, menciona la necesidad de constituir en objeto de estudio esos momentos particulares en que la introducción de un nuevo objeto de conocimiento y los problemas que plantea su uso impone la reorganización (parcial) de ciertas relaciones con los saberes anteriores.

Como ya mencionamos, en el capítulo 4 presentamos nuestra versión del análisis *a priori* que se constituyó en un soporte para la reconstrucción del proceso de producción de conocimientos en la clase. Tanto la construcción del dato como los análisis presentados en el capítulo 5 se produjeron en el marco de tal reconstrucción.

Capítulo 4

Análisis *a priori* de la secuencia diseñada

En este capítulo presentamos un análisis matemático didáctico de la secuencia llevada al aula, en el cual consideramos tanto el estudio de los problemas propuestos, como las decisiones -tomadas en conjunto con la docente en la instancia de planificación- en torno a la organización y gestión de los diferentes espacios de discusión (en particular, la identificación de asuntos para discutir en pequeños grupos y otros con la totalidad del grupo clase). En nuestro análisis explicitamos, por un lado, aquellas intenciones y decisiones de enseñanza que la docente y la investigadora tuvimos en cuenta al anticipar la puesta en aula de la secuencia y, por otro, las posibilidades que ofrecen los problemas de movilizar ciertas relaciones matemáticas en vínculo con la problemática que queremos estudiar en esta tesis.

Desde nuestra posición, construida tomando elementos de la Teoría de las Situaciones (Brousseau, 1986; Sadovsky, 2005), estudiar los problemas y entender las relaciones matemáticas involucradas requiere anticipar posibles estrategias y acciones de les estudiantes e interpretarlas en términos de conocimientos que subyacen a cada una de ellas. En particular, en nuestra secuencia nos interesa poner el foco en la fertilidad de los problemas para albergar un tránsito desde las prácticas aritméticas esperadas al tratamiento algebraico de lo numérico que se intenta promover.

Estas consideraciones nos llevaron -en el proceso de planificación compartida- a diseñar acciones del docente, en relación tanto con el trabajo en pequeños grupos como con las instancias de discusiones colectivas, ambas tendientes a promover el avance de los conocimientos en esa dirección.

Como venimos señalando, una primera versión del análisis *a priori* se realizó en colaboración con la docente y entramado con el proceso de armado de la secuencia. La versión que presentamos en este capítulo incluye también elementos que se incorporaron luego de la implementación en el aula y permitieron un estudio más profundo del conjunto de problemas. Según explicamos en el capítulo 3, compartimos la posición de Sadovsky (2004) que formula la pertinencia de enriquecer el análisis *a priori* después de haber realizado la experiencia: el desarrollo de la secuencia en el aula nos permite entender de manera más fina la trama de relaciones y conocimientos que se pueden movilizar, con el cuidado de retener -en este segundo análisis *a priori*- sólo aquellas cuestiones que consideramos intrínsecas a los problemas y que no dependen de la contingencia ligada a experiencias particulares.

El análisis descriptivo y explicativo de nuestra secuencia que aquí presentamos nos permitió construir un universo de posibles a partir del cual emprender el proceso de análisis de los episodios que se despliegan en el capítulo 5. Si bien los episodios considerados en ese capítulo se ubican en la resolución de los problemas 5 y 6, vemos necesario compartir aquí la totalidad del análisis de la secuencia con el objeto de ir desplegando la trama de relaciones y conocimientos con los cuales se llegaría al abordaje de dichos problemas.

En toda esta propuesta, el asunto con el que tienen que lidiar les estudiantes es decidir si un número ***a*** es o no múltiplo de otro número ***b***. La secuencia que pensamos con la profesora se divide en dos grupos de problemas.

En el primer grupo de problemas esta relación de "ser múltiplo de" se estudia en referencia a los cuatro números involucrados la operación de división entera de ***a*** por ***b*** (dividendo, divisor, cociente y resto).

En el segundo grupo de problemas, la expresión numérica que representa al número ***a*** está dada por la multiplicación de varios factores. El tipo y cantidad de divisores que tienen ***a*** y ***b*** es una variable didáctica[12] en este segundo grupo de problemas.

4.1. Primer grupo de problemas

A partir de nuestra experiencia docente sabemos que, ante situaciones en las que hay que estudiar si un número es divisible por otro, les estudiantes suelen recurrir a la cuenta de dividir. La docente, sensible a este hecho, propuso que lo consideráramos al planificar los problemas que llevaríamos al aula. Así, en los problemas 2, 3 y 4 quisimos

[12] En Teoría de Situaciones se denominan variables didácticas aquellas cuyo cambio exige que le alumne modifique las relaciones que pone en juego en su interacción con el problema (Brouseau, 1986).

proponer un trabajo que permitiera identificar y recuperar las relaciones que esta cuenta permite establecer y vincularlas con el trabajo de lectura y transformación de expresiones numéricas que queríamos que les estudiantes aprendieran. Esto implica trascender las prácticas más ligadas al cálculo efectivo y construir una mirada más estructural de la operación división entera.

A continuación, presentamos el problema 1.

Problema 1[13]:

La ruta nacional 40 es una ruta argentina que se extiende desde Cabo Vírgenes, Santa Cruz hasta el límite con Bolivia, en la ciudad de la Quiaca, Jujuy. Tiene un total de 5194 km. En Cabo Vírgenes se encuentra un cartel con el km 0 y cada 6 km, y a lo largo de todo el recorrido, hay carteles que indican los km.

a-. Proponé 4 carteles indicadores de kilómetros.

b-. Sabiendo que en Chubut la ruta va desde el km 1324 al 1911, proponé cuatro carteles que estén en esa provincia.

c-. ¿Habrá algún cartel de la ruta 40 que indique el km 2744? Expliquen su respuesta.

[13] Algunos de los enunciados de los problemas que forman parte de nuestra secuencia son adaptaciones nuestras de otros que se puede encontrar en libro de texto escolar *Hacer matemática 7/1* (Sessa, C. (coord.), 2015).

Elementos de análisis del problema 1

La intención general de este problema es que les estudiantes comiencen a movilizar las ideas de múltiplos de 6 como:

- Los que están en la tabla del 6 (del 6 al 60).
- Los que se obtienen al realizar las cuentas como “6 x cualquier número”.
- Los que se pueden obtener a partir de la suma de múltiplos de 6.
- Aquellos números que al ser divididos por 6 el resto da cero.

A su vez, se pretende que comiencen a vivir las escrituras de expresiones numéricas, que serían producidas por la docente, a partir de las explicaciones orales de les estudiantes al analizar si un número dado es divisible por 6.

En relación con el ítem a se pretende que les estudiantes se involucren con el contexto del problema y con las relaciones que, en principio, se pueden establecer a partir de considerar que cada 6 km, a partir del 0, hay un cartel. Por ejemplo, podrían generar aditivamente 0, 6, 12, etc. o proponer múltiplos de 6 conocidos por elles o una combinación de ambos (proponer un múltiplo de 6 e ir sumando 6 para obtener nuevos carteles).

En la instancia de planificación compartida decidimos que, si había poca diversidad en los carteles propuestos, se iba a solicitar que encontraran algún cartel en el que figurara un kilómetro mayor que 100 o 200. Esto tiene la intención de limitar el uso de los múltiplos que se encuentran en “la tabla de 6” (que, en general, van de 6 al 60) y provocar que les estudiantes generen múltiplos apoyades en alguna otra estrategia (por ejemplo, partir del 600 que es un múltiplo reconocido y sumar 6 una o varias veces).

En el diseño de la secuencia intercalamos entre el ítem a y b del problema, un momento en el que cada uno de los grupos de estudiantes compartiera con el resto “los carteles” que encontraron, sin pedir una explicación de por qué los proponían. Una vez que todos los carteles estuvieran escritos en el pizarrón, se les pediría a les estudiantes no productores que “controlaran” si los carteles propuestos por sus compañeres eran correctos. Entendemos que producir un múltiplo de 6 o chequear si un número es múltiplo de 6 son tareas que pueden movilizar estrategias y propiedades diferentes; aún para una misma estrategia, como puede ser la descomposición aditiva en múltiplos de 6, quienes controlan no necesariamente reproducen la misma descomposición que los productores.

En la discusión colectiva sobre los valores escritos en el pizarrón se pretende recuperar tanto las estrategias de les productores como las de aquelles que controlaron los valores propuestos. Esta nueva tarea de discusión es una oportunidad para socializar diferentes estrategias, entre las que anticipamos:

- Descomponer aditivamente el número propuesto para un cartel en múltiplos de 6 que fueran sencillos. Como variante de esto, partir de un múltiplo de 6 conocido y "acercarse" al número a estudiar, sumando múltiplos de 6 conocidos.
- Encontrar el factor multiplicativo por el cual multiplicar a 6 para expresar al número propuesto para un cartel.
- Dividir el número propuesto para un cartel por 6 y considerar su resto para decidir.
- Utilizar algún criterio de divisibilidad -correcto o incorrecto-.

En la discusión colectiva, se pensaba privilegiar las dos primeras estrategias que movilizan descomposiciones (aditivas y multiplicativas) y que son objeto de estudio en las actividades siguientes. El análisis colectivo ofrece a cada estudiante la posibilidad de enfrentarse a estrategias de producción o de control que no hubieran sido utilizadas por elles en la etapa de trabajo autónomo.

Al momento de planificar esta actividad decidimos que les estudiantes explicaran oralmente porqué los números propuestos sirven como carteles. Las escrituras de las descomposiciones tendrían que ser presentadas por la docente acompañando el discurso de les jóvenes. En el pizarrón quedarían escritas las descomposiciones que se mencionaran oralmente. Vemos valioso este tipo de trabajo, ya que se comienza a instalar en el aula la posibilidad de expresar un mismo número de diferentes maneras.

El ítem b, se presenta una vez realizada la discusión colectiva del primer ítem. En ese sentido, las estrategias compartidas en el ítem a serían insumos para la producción de carteles dentro de este rango. Las estrategias que anticipamos son:

- Encontrar un múltiplo "sencillo" que esté en el intervalo (1324, 1911) y luego sumar -o restar- 6 o algún otro múltiplo de 6. En este caso, habría que controlar que la suma que se obtenga no se encuentre fuera del intervalo dado.

  El intervalo fue elegido para que incluyera al 1800, un múltiplo de 6 reconocible. Se decidió que los extremos no fueran múltiplos de 6, pero que se pudiera reconocer al 1200 como un punto de partida para adicionar múltiplos de 6. De este modo, podrían aparecer carteles que contemplaran:

  ✓ 1800+6; 1800 +12; 1800 + 60
  ✓ 1200 +120=1320; 1200 + 60 + 60 + 60

  Se anticipó que si no aparecía una descomposición por sustracción, la docente la aporte en la discusión colectiva.

- Como variante errónea de la estrategia anterior les estudiantes podrían sumar 6 o múltiplos de 6 al número 1324 para generar nuevos carteles. Esta estrategia se apoya en considerar que 1324 es múltiplo de 6 -posiblemente considerando sólo las dos últimas cifras-. La aparición de este error nos permitiría, en la discusión colectiva, precisar frases del tipo "los carteles van de 6 en 6" para completarlas con la idea de que se debe partir de un cartel/de un múltiplo de 6. Si ningún grupo utiliza esta estrategia, la docente la traerá en la discusión colectiva para analizarla.
- Elegir un número del intervalo propuesto y dividirlo por 6. El análisis del resto de esa división puede dar lugar a dos acciones diferentes:
  - ✓ Aceptar al dividendo como cartel, si el resto es 0, o rechazarlo si no lo es.
  - ✓ Ajustar el valor del dividendo, para obtener un múltiplo de 6, sumando o restando una cierta cantidad en función del resto obtenido.

Como mencionamos a propósito del trabajo colectivo en el ítem a, aquí también será necesario una acción de la docente de escribir en el pizarrón la traza de las descomposiciones que aparezcan en las explicaciones de les estudiantes. Entendemos la complejidad de esta tarea docente: cómo ser lo más fiel posible en la traza escrita a lo dicho por les estudiantes, asumiendo a la vez la imposibilidad de reflejar la totalidad de lo que expresan oralmente en un escrito.

En la secuencia, progresivamente se pide a les estudiantes hacerse cargo de un escrito que acompañe y explique sus respuestas.

El ítem c se propone para que les estudiantes recuperen estrategias explicitadas en ítems anteriores (realizar la división, intentar descomponer el 2744 como sumas de múltiplos de 6, buscar un factor por el que multiplicar a 6 para aproximarse al 2744), pero enfrentándose a un número más difícil de los que podrían haber surgido hasta este momento. La dificultad radica en que, en este caso, no hay una lectura directa del número dado en relación con los múltiplos de 6. Asumimos que esta complejidad genera buenas condiciones para que, en el aula, surja una variedad de formas de descomponer aditivamente al número.

Por un lado, se comienza a poner en juego la idea de expresiones numéricas equivalentes (por más que no fuera intención de hacer explícita la noción de equivalencia en este momento) y, por otro, la pertinencia y conveniencia de unas descomposiciones en relación con otras. Por ejemplo, si en el aula aparecen descomposiciones como 2400+300+44 y 2000+700+44 se resaltaría que, con la primera descomposición, como los dos primeros sumandos son múltiplos de 6 y el 44 no lo es- por ejemplo, porque no está en la tabla, que salta del 42 al 48- , se puede concluir que el número no es múltiplo de 6. Mientras que la otra descomposición, al ser suma de tres no múltiplos, no permite dar una respuesta. Las dos expresiones tienen distinto sentido, aunque ambas representan el mismo número, tienen la misma denotación (Drouhard, 1992).

Una vez que les alumnes finalicen el trabajo en pequeños grupos, la docente seleccionará algunas producciones y une representante de cada grupo escribirá su resolución en el pizarrón explicando cómo lo pensaron. Los criterios para seleccionar las producciones serán: una en la que aparezca una división, otra que se apoye en descomposiciones aditivas y otra en multiplicativas.

La intención que está en juego en el problema siguiente es que estos ejemplos de resoluciones se identifiquen como "tipos" diferentes de estrategias.

Problema 2: Julieta dice que, si cuenta de 8 en 8 empezando desde el 0, nombra al número 1668. Facundo dice que eso no es posible.

a-. ¿Quién tiene razón? Expliquen su respuesta.

Luego que les estudiantes resuelven el ítem a en pequeños grupos, oralmente, se les propone:

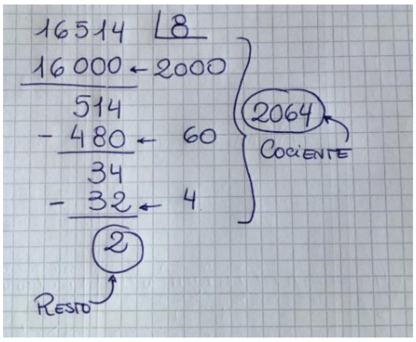
a´ -. La estrategia que usaron en este ítem, ¿se parece a alguna de las que quedaron escritas en el pizarrón sobre el ítem c del primer problema?

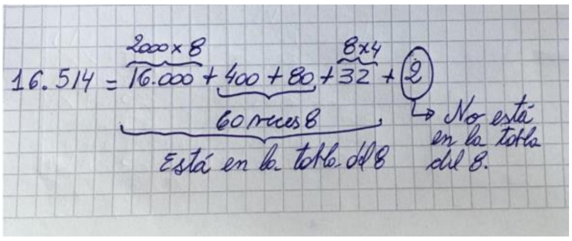
-. Resuelvan nuevamente el problema de manera individual con una estrategia diferente a la que usaron en el grupo.

A continuación, realizan el resto de los ítems.

b.- Julieta y Facundo estudiaron si es posible que, al seguir contando de 8 en 8, se nombre al 16514. En las hojas siguientes se muestra parte de los procedimientos que usaron:

-. Facundo: ***-. Julieta***





b1: Escriban una posible respuesta de Facundo y una explicación de esa respuesta.

b2: Escriban una posible respuesta de Julieta y una explicación de esa respuesta.

c-. Usá el procedimiento de Facundo o Julieta para encontrar cuál es el número que se menciona justo antes de pasarse del 16514.

d-. Usá el procedimiento de Facundo o Julieta para encontrar la cantidad de veces que se suma el número 8 justo antes de pasarse de 16514.

Elementos de análisis del problema 2

Es intención general de este problema:

- Desarrollar estrategias en un contexto intramatemático.

- Identificar similitudes entre las nuevas estrategias y aquellas movilizadas en el contexto de carteles de una ruta del primer problema.
- Interactuar con producciones escritas de otres “ficticies” (Julieta y Facundo).
- Hacer dialogar la información que se obtiene a partir de una cuenta de dividir con la que ofrece una descomposición aditiva.

El ítem a se propone para que les estudiantes recuperen algunas de las estrategias desplegadas en el problema anterior, pero esta vez a propósito de analizar múltiplos de 8 en un contexto diferente al del problema 1. Lo discutido en el problema anterior ofrecerá un conjunto de relaciones, ideas, palabras que pueden ser puestas en juego en esta nueva actividad cuando les estudiantes intenten explicar sus respuestas en forma escrita.

Decidimos no discutir colectivamente este ítem, sino pasar por los grupos para ayudar a que expliciten por escrito sus ideas. Una vez que los grupos terminen el ítem a, se les da oralmente la consigna a´.

Con esta nueva consigna, en un primer momento, les alumnes tienen que relacionar una resolución particular propia -de un problema en un contexto intramatemático y donde se estudia la divisibilidad por 8- con otra resolución particular ajena producida en el contexto de “carteles de una ruta” y estudiando la divisibilidad por 6. Los procesos de generalización y descontextualización necesarios llevarían a buscar las relaciones en términos de la operación matemática (división, multiplicación o suma) implicada en la resolución. Esto iría delineando, contorneando, diferentes tipos de estrategias de resolución. En un segundo momento, la tarea de que respondan la misma pregunta utilizando otra estrategia favorecería una mejor comprensión de cada una de ellas.

En relación con el ítem b, pensamos que el problema de decidir si el número 16514 aparecerá al contar de 8 en 8 comenzando desde el 0 no es nuevo para les alumnes y lo pueden resolver con herramientas que tienen construidas sólidamente, como la división.

¿Por qué decidimos presentar estas dos estrategias para ser estudiadas? Nuestra intención es que les estudiantes puedan leer información de una expresión algebraica numérica como “la de Julieta” y que vayan dotando de sentido a esta escritura en relación con el contexto del problema. Para ello, sabiendo que la división es una forma que les es familiar para resolver, decidimos hacerla presente. Esta familiaridad sería un punto de apoyo para comprender, y eventualmente incorporar, una nueva estrategia de resolución y una nueva escritura.

En la resolución del ítem b se pone en juego un tipo de trabajo que es importante en nuestra propuesta: interactuar con producciones escritas de otres como un medio para ir incorporando nuevas escrituras. En esta tarea, se moviliza la acción de leer información (*conducta*, en términos de Arcavi (1994) y *acción* en Arcavi et al. (2017)) de las escrituras asociadas a dos tipos de estrategias diferentes.

Anticipamos que en b1 les estudiantes no tendrán problemas para responder y explicar por qué el número no será mencionado ya que la idea de la relación entre no múltiplos de 8 y resto diferente de 0 en la división había sido movilizada antes. Otra posibilidad que anticipamos es que apelen a la cuenta de dividir utilizando otro tipo de “pasos” en el algoritmo. De este modo llegarán al mismo resto y cociente lo que les permitirá responder que el 16514 no es mencionado; esto deja pendiente la relación entre la cuenta propia y “la de Facundo”.

Respecto de la descomposición aditiva que se presenta en b2, 1600 + 400 + 80 + 32 + 2, es la primera vez que aparece una expresión de este tipo sin una explicación oral de algune estudiante que la acompañe y/o complete. Las frases y cuentas auxiliares que acompañan a la descomposición aditiva fueron agregadas para hacer más visible tanto que algunos sumandos son múltiplos de 8 como el vínculo entre esta escritura horizontal y la “cuenta de Facundo”.

Las preguntas c y d se plantean con la intención de profundizar en el sentido de cada una de estas escrituras y poder trabajar en el espacio colectivo con las relaciones entre lo que informan la cuenta de dividir y la escritura horizontal que comportan sumas y multiplicaciones.

Pensamos que nuevas preguntas sobre la situación permitirían comprender cómo obtener la respuesta en uno u otro registro, y que esto ofrecería nuevas posibilidades para que les estudiantes vincularan las informaciones de uno y otro. A veces les jóvenes pueden operar bien con el algoritmo de la división, pero tienen dificultades a la hora de obtener una repuesta para la situación, a partir de los resultados de la cuenta de dividir. Es por eso que pensamos que, tal vez, la expresión horizontal resultaría un apoyo para aquelles estudiantes que se encontraran con estas dificultades.

Las estrategias que pensamos podrían surgir para abordar el ítem c son:

- Con la estrategia de Facundo: Considerar el resto de la división (el número 2) y restárselo al dividendo para conseguir un número divisible por 8; eventualmente, hacer una nueva cuenta de dividir (16512 dividido 8) para corroborar que el resto sea cero.
- Con la estrategia de Julieta: Identificar que si le resto 2 a 16514, se obtiene una suma de múltiplos de 8, 16000+400+80+32.

Las estrategias que pensamos podrían surgir para abordar el ítem d son:

- Con la estrategia de Facundo: mirar el cociente 2064; hacer la cuenta 8 x 2064.
- Con la estrategia de Julieta: Contabilizar la cantidad de veces 8 que se indican en los sumandos (2000 + 60 + 4).

Luego que les estudiantes trabajaran autónomamente sobre estos dos ítems, diseñamos un espacio colectivo de discusión sostenido por la docente para ayudar a que les estudiantes expliciten qué se puede leer de una y otra cuenta y los vínculos entre ellas. Es decir, sería el momento en el que se podrían en diálogo ambas estrategias. Entendemos que tejer ese vínculo es un medio para enriquecer el sentido de la expresión horizontal de manera de poder leer de ella más información.

Duval (2006) sostiene el valor epistémico de las actividades cognitivas de cambio de registro de representación y conversión entre registros. Por ejemplo, afirma que

> La actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación, dos representaciones diferentes significarían dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos. (p.145)

Más adelante, en ese mismo texto, afirma que “la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados.” (p.167).

Estas ideas de Duval nos interesan porque, si bien no podemos afirmar que las dos escrituras que presentamos a les estudiantes en este ítem pertenecen a registros de representación diferentes -en el sentido de Duval-, entendemos que la tarea de coordinación entre ambas -sostenida por le docente- aporta a la construcción del sentido para cada una de ellas y, en definitiva, a una mejor comprensión de las relaciones entre la operación de multiplicación y la de división cuando esta última devuelve un resto no nulo (lo cual hace necesario también la consideración de sumas).

Queremos destacar que la estrategia de Julieta incluye expresiones verbales y cuentas adicionales que pueden ayudar a identificar relaciones entre estas y lo que se pide en el ítem d del problema. En particular, nos propusimos estar atentas a ver si les estudiantes operan sobre la estrategia de Julieta con expresiones del tipo:

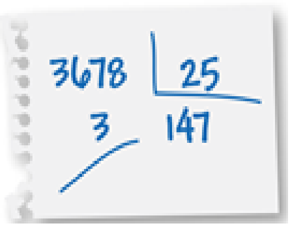
16514 = 2000 x 8 + 60 x 8 + 4 x 8 + 2 o 16514 = “2000 veces 8 + 64 veces 8” + 2

Teníamos la intención de guiar la discusión hasta que apareciera por ejemplo una transformación de la escritura de Julieta que concluyera como: 16514= 8 x 2064 + 2.

Con intención de vincular las estrategias de Julieta y Facundo apuntamos a concluir que la “cantidad de veces que se agrupan de a 8”, “que se suman 8” se puede obtener tanto como el dividendo que obtiene Facundo con su cuenta como en la reconstrucción que realizamos a partir de la escritura horizontal de Julieta.

Las dos actividades que siguen tienen la intención de profundizar sobre aquello que se puede leer en una cuenta de dividir en términos de múltiplos y en la elaboración de vínculos entre esta información y diferentes expresiones numéricas. Además, se propone movilizar conocimientos sobre cómo se modifica el resto en una división cuando se modifica solamente el dividendo.

Problema 3: Usá la información de la cuenta de división para explicar por qué estas afirmaciones son verdaderas o falsas:



a) 3678 es divisible por 25

b) 3675 es múltiplo de 25

c) Si se suma 147 veces el número 25, se obtiene 3678

d) 3679 = 25 x 147 + 4

Elementos de análisis del problema 3

A continuación, analizamos cada uno de los ítems.

a. En este ítem se intenta recuperar relaciones que fueron movilizadas en los problemas anteriores, en particular que, si el resto no es cero, el dividendo no es múltiplo del divisor (o no es divisible por él)[14].

b. Se propone con la intención de que les alumnes identifiquen la cercanía entre el 3678 y 3675 y consideren una nueva división con dividendo 3675, en particular cuál es el resto al dividir por 25. Una vez identificado que el resto cero, se pone en juego la propiedad recíproca de la movilizada en el ítem anterior: si el resto de una división es cero entonces el dividendo es múltiplo del divisor (o es divisible por él).

Pensamos también que les estudiantes podrían realizar nuevas cuentas que se apoyaran de otra manera en la cuenta que es dato. Por ejemplo: usar el valor del cociente y efectuar 25 x 147 para concluir que 3675 es múltiplo de 25.

También podría haber estrategias que no usaran los datos de la cuenta; por ejemplo, calcular la división 3675 por 25 para decir la validez de la afirmación.

Anticipamos que el espacio de discusión colectiva nos daría la oportunidad de poner en vínculo estas diferentes estrategias y, en particular, estudiar cómo se modifica el resto de la división cuando se resta un número al dividendo[15] - para un divisor fijo-. A partir de ello, apuntamos a hacer explícito con les estudiantes que no es necesario hacer nuevas cuentas de dividir o de multiplicar para responder a la pregunta, sino que se puede aprovechar la información que ofrece la cuenta de dividir que se presenta la actividad. Esto nos daría una oportunidad de seguir negociando el significado de la consigna: *Usá la información que ofrece la cuenta*.

---

[14] En una primera versión de la planificación este ítem proponía estudiar si “3678 es múltiplo de 25”; ahora bien, como en la puesta en aula de los primeros dos problemas les estudiantes usaban indistintamente las expresiones “ser múltiplo de” y “ser divisible por”, decidimos incorporar esta última en el enunciado.

[15] En esta propuesta tomamos la decisión de poner en juego esta regla solamente en el caso en que la resta -o la suma- de un número al dividendo no modifique el valor del cociente.

c. En este ítem aparece por primera vez en un enunciado la idea de "veces que se suma un número"[16]. Asumimos que les jóvenes estarían en condiciones de comprender que esa suma reiterada permite obtener el mismo resultado que el producto 25 x 147.

Para responder lo que se pregunta sería necesario también leer en la cuenta de dividir que el resto es no nulo para concluir que 25 x 147 no da 3678, apelando a una propiedad similar a la puesta en juego en el ítem a.

Otra posibilidad es que les estudiantes que en el ítem anterior hubieran establecido la igualdad 3675 = 25 x 147 se apoyen en este resultado para responder que la afirmación del ítem c es falsa. Eventualmente pueden llegar a expresar que es necesario sumar 3 al producto 25 x 147 para obtener 3678.

Pensamos también que puede haber estudiantes que realicen la multiplicación para corroborar que no es 3678 o que, apoyados en el producto de las últimas cifras de los números 25 y 147, aludieran a que el resultado sólo podía terminar en 0 o 5.

Nuevamente reservamos el espacio colectivo para que se debata la posibilidad de responder a la pregunta a partir de la lectura de la información de la cuenta propuesta, sin realizar nuevas cuentas.

d. Este ítem puede resolverse a partir de las relaciones que su fueron movilizando en los ítems anteriores:

Sí en los ítems b o c les estudiantes establecieron que 3675= 25 x 147 se pueden apoyar en esta relación para establecer que 25 x 147 + 4 = 3675 + 4.

Otra posibilidad es que en el ítem c hubieran establecido 3678 se obtiene sumando 3 a 25 x147 y que entonces concluyan 3679 se obtiene sumando 4 a 147 x 25 y que reconozcan esta relación en la escritura 3679 = 25 x147 + 4.

Finalmente, anticipamos que algune estudiante podría entrar su mirada en la cuenta de dividir que presenta la actividad, aprovechar la cercanía entre 3679 y el dividendo 3678 para anticipar que el resto en la división de 3679 por 25 será 4 y

[16] En el aula, esta idea apareció en la discusión de los dos primeros problemas.

reconstruir la información de esta nueva cuenta en términos de la escritura horizontal que se presenta (3679 = 25 x147 + 4)

El análisis colectivo planeado para todos los ítems apunta a poner en relación diferentes estrategias, algunas apoyadas en la cuenta de dividir que se presenta y otras en la información que se va generando en cada ítem. En este sentido, el problema nos permite avanzar en la construcción de uno de nuestros focos generales de enseñanza: que les estudiantes aprendan a leer información de una cuenta para dar respuesta a un asunto, apoyándose en propiedades de las operaciones y de los números involucrados.

Problema 4:

Usá que 7151 = 7 x 1000 + 140 + 11 para decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a. 7151 es divisible por 7

b. 7151 = 7 x 1000 + 7 x 21 + 4

c. 7147 es múltiplo de 7

d. $\begin{array}{r|l} \mathbf{7151} & \underline{\mathbf{7}} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1021} \end{array}$

Elementos de análisis del problema 4

Para este problema, a diferencia del anterior, el punto de partida es una expresión numérica horizontal (que involucra adiciones y multiplicaciones) que necesita ser leída para obtener información pertinente para responder cada ítem. Como en los problemas anteriores, esta escritura -que aún puede no resultar familiar para les estudiantes- se pone en relación con los elementos de una cuenta de dividir (ítem d)

La descomposición de 7151 que proponemos en el enunciado permite identificar diferentes informaciones en relación con lo que se pregunta en los ítems. Además, la igualdad puede ser verificada con poco costo, si se parte de la descomposición aditiva (7 x 1000 + 140 + 11) y se reconstruye el número.

En el ítem a, la lectura de información de la expresión 7 x 1000 + 140 + 11 permite visualizar fácilmente que los dos primeros términos son múltiplos de 7 y el último, no.

En el ítem b se propone otra descomposición aditiva del 7151.

Anticipamos varias formas de corroborar que la descomposición es correcta por comparación con la descomposición dada en el enunciado:

- ✓ Hacer las cuentas 7x21 + 4 y ver que da igual que 140 + 11.
- ✓ Transformar una expresión, o las dos, para llegar a una escritura común a ambas. Por ejemplo, transformar ambas en 7 x 1000 + 7 x 20 + 7 + 4.

También puede haber estudiantes que no tomen en cuenta la primera expresión y compongan la expresión 7 x 1000 + 7 x 21 + 4 para obtener 7151.

El objetivo que se plantea para el ítem c es que les estudiantes aprovechen la descomposición aditiva (la del enunciado o la del ítem b) para identificar que 7147 es el múltiplo de 7 más cercano a 7151.

Para esto, se necesita identificar que 7151 es cercano a 7147, lo excede en 4 unidades y luego, partir de alguna de las descomposiciones de 7151 para concluir que 7147 es múltiplo de 7.

Puede ocurrir que les alumnes no tomen en cuenta la información de las expresiones, hagan la cuenta de dividir por 7 y encuentren que encuentren el factor multiplicativo o que descompongan aditivamente 7147 en múltiplos de 7.

En el ítem d se plantea un juego inverso al ítem d del problema anterior. Les estudiantes pueden reconstruir el cociente 1021 a partir de algunas de las expresiones que se pusieron en juego en este problema.

Anticipamos que puede haber estudiantes que aún hagan cuentas de dividir para responder algunos de estos ítems. En ese caso, en el espacio de discusión colectiva se escribirá la cuenta de dividir en el pizarrón y preguntaremos por las relaciones entre los distintos elementos de esa cuenta (dividendo, divisor, cociente y resto) y la expresión dada en el enunciado. Las relaciones que les estudiantes establezcan oralmente serán representadas por la docente con flechas que vinculan los elementos entre operaciones. Pensamos que les estudiantes estarán en condiciones de encontrar y/o comprender estas relaciones apoyándose en lo trabajado en los dos problemas anteriores. La gestión de la docente se orienta a ayudar a que les alumnes avancen en la explicitación de las relaciones que van considerando.

Retomando los cuatro problemas analizados hasta ahora y teniendo en cuenta que a continuación presentamos un segundo grupo de problemas, nos interesa detenernos y realizar una pequeña caracterización en términos de las variables didácticas que hemos considerado. En toda esta propuesta, el asunto con el que tienen que lidiar les estudiantes es decidir si un número ***a*** es o no múltiplo de otro número ***b***. Las variables didácticas que consideramos al planificar los problemas son:

- El modo en que se da la información sobre ***a***:
  - ✓ Se da información sobre la división de ***a*** por ***b*** con la presentación de algún algoritmo de cálculo (problema 2), o se da una representación de la división que remite solamente a la disposición de los elementos (dividendo, divisor, cociente y resto) en la operación cuando se realiza el algoritmo (problemas 3 y 4).
  - ✓ Se da el número ***a*** y una expresión algebraica numérica que lo representa e incluye descomposiciones aditivas y, eventualmente, multiplicativas (problemas 1, 2, 3 y 4) que tienen un vínculo con el número ***b***.
  - ✓ El número ***a*** se da solamente por una descomposición multiplicativa. (problemas 5, 6 y 7 que presentamos a continuación)
- Los valores específicos de ***a*** y ***b*** que determinan, en particular, el tipo y cantidad de divisores que tendrán. Se juega con esta variable en los problemas del segundo grupo.

4.2. Segundo grupo de problemas

En los tres problemas que siguen se ponen en juego transformaciones de las escrituras que hacen necesario otro tipo de descomposición: la descomposición multiplicativa de un número ***a*** y la eventual recomposición del número ***b*** en términos de algunos factores de ***a*** para estudiar si es divisible por ***b***. Los episodios que se presentan en el capítulo 5 de este trabajo refieren a recortes de clases en las que se trabajaron dos de estos problemas.

Presentamos a continuación algunos elementos del análisis *a priori* de los problemas 5 y 6. Agregaremos nuevos elementos a este análisis en el próximo capítulo.

Problema 5: Decidan, sin hacer la cuenta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.	
a. 15 x 28 es múltiplo de 28	***b. 15 x 28 es múltiplo de 4***
c. 15 x 28 es divisible por 7	***d. 15 x 28 es múltiplo de 10***

Elementos de análisis del problema 5

Consideramos el primer ítem para que en el aula se expliciten, nuevamente, los argumentos que queremos formen parte de una explicación sobre la relación "ser múltiplo de". Es decir, esperamos argumentos que retomen ideas que se desplegaron con anterioridad: "28 x *algo* está en la tabla del 28" o "Porque es 15 veces 28" (en este último, retomando la idea de que el producto puede pensarse como una suma reiterada). Pensamos también que podrían aparecer expresiones del tipo "porque está el 28"; son frases ambiguas, usuales en el aula, que podrían ser la manifestación tanto de un conocimiento correcto como incorrecto. En este caso, la docente ayudaría a que se precise el contenido de la frase. En el espacio colectivo planeamos hacer preguntas para que identifiquen también que 15 x 28 es múltiplo de 15.

En el ítem b es necesario identificar que uno de los dos factores que interviene en el producto dado, es múltiplo de 4. Anticipamos que les estudiantes pueden dar argumentos del tipo "28 es múltiplo de 4" y no explicitar de qué múltiplo de 4 se trata.

En el momento de planificar, con la profesora, nos preguntábamos sobre los conocimientos implícitos que podían tener les estudiantes, al argumentar que 15 x 28 es múltiplo de 4, porque 28 lo es. ¿Estarían usando implícitamente la transitividad de la relación "ser múltiplo de" o creerían que en cualquier expresión la aparición de un múltiplo asegura que toda la expresión lo es?

Como parte del contrato que se viene instalando, se les invitará a precisar que 28 es 4 x7 y a usar esa información para armar una expresión que "muestre" que 15 x 28 es múltiplo de 4. La intención es arribar a las igualdades 15x 28 = 15 x 4 x 7 = 4 x 105 y 15 x 28 = 15 x 4 x 7 = 60 x 7. En el espacio colectivo planeamos que, apoyades en estas diferentes expresiones, les estudiantes puedan identificar que el número 15 x 28 es múltiplo de 4, 7, 28,105, etc. Es decir, se pretende ir instalando en el aula la idea que una expresión porta información sobre diferentes múltiplos. Es una idea nueva que aún no fue movilizada en los problemas anteriores.

El ítem d es el que presenta mayor complejidad ya que ninguno de los factores que intervienen en la representación del número 15x28 es múltiplo de 10. Anticipamos diversas respuestas, correctas e incorrectas, a este problema.

❖ Les estudiantes pueden desplegar diferentes estrategias para sostener que la expresión es múltiplo de 10:

A. Si multiplicamos un número terminado en 5 por un número par, el resultado termina en cero.

B. Si pensamos en dobles y mitades, 15 x 28 es equivalente a 30 x 14 y el resultado termina en cero porque se multiplica por 30 (que termina en cero).

C. Buscamos que aparezca el factor 10 en la expresión. Es decir, tratamos de descomponer los factores de la expresión, para hacer visibles factores más pequeños que puedan ser reagrupados en la búsqueda del factor 10. Esta es la estrategia que queríamos favorecer y pensábamos acompañarles con escrituras de esas transformaciones, por ejemplo: 15 x 28 = 3 x 5 x 2 x 14 = 3 x 10 x 14 = 10 x 42.

En las tres estrategias que anticipamos, a diferencia de lo que ocurre en los ítems anteriores, es necesario considerar ambos factores de la expresión original para reconstruir de algún modo el 10 como factor.

Sabemos que los argumentos en los que se apoyan las estrategias A y B son conocimientos que les estudiantes suelen tener disponibles. En el momento de planificar pensamos que estas estrategias pueden servir de apoyo para preguntar acerca de "qué múltiplo de 10 es". Esto iría instalando en el aula la posibilidad de expresar la cuenta de una manera diferente en la que aparezca el factor 10. Entendemos que el último tipo de estrategia (que anteriormente llamamos C), necesita de una gestión docente que genere y sostenga la necesidad de una noción implícita de equivalencia de expresiones numéricas como modo de controlar las transformaciones.

❖ Les estudiantes pueden desplegar diferentes estrategias para sostener, de manera incorrecta, que la expresión no es múltiplo de 10. ¿En qué argumentos podrían estar apoyándose para arribar a esta respuesta incorrecta?

Cómo ya mencionamos, una diferencia importante entre los primeros ítems de este problema y el ítem d es que en los primeros la respuesta se puede obtener analizando sólo uno de los factores que componen el número ***a*** dado como dato. Así, para estudiar un producto, se pone en juego una propiedad que no presenta mucha complejidad para les estudiantes:

-. Si alguno de los factores (de ***a***) es múltiplo del número (***b***) en cuestión, la expresión (***a***) también lo es[17]. (proposición verdadera)

Esta propiedad que se usa en los primeros tres ítems, puede ser una fuente de confusión para aquelles estudiantes que realicen una "extensión" falsa de esta regla, tomando por cierta la recíproca, para afirmar que al estudiar un producto:

-. Si ninguno de los factores (de ***a***) es múltiplo (de ***b***), la expresión (***a***) tampoco lo es. (proposición falsa que es en realidad, la contrarrecíproca de la recíproca de la afirmación anterior)

Apoyados en esta "propiedad" (falsa) se puede concluir que la expresión no es múltiplo de 10 ya que ninguno de los factores lo es.

Entendemos que, en la discusión colectiva, se puede generar un espacio para estudiar con les alumnes un contraejemplo para este "teorema en acto". Según nuestra experiencia en el aula, esta falsa propiedad suele ser muy resistente y se espera que colectivamente se pueda arribar a los siguientes conocimientos: Cuando ***a*** es un producto,

C1-. Si alguno de los factores de ***a*** es múltiplo del número ***b***, entonces la expresión (***a***) es múltiplo de ***b***,
C2-. Si ninguno de los factores de ***a*** es múltiplo de ***b***, **no se puede afirmar** que la expresión (***a***) no lo es; hay que realizar otro tipo de análisis para estudiar el problema.

[17] Nosotras haremos uso, en este trabajo, del lenguaje algebraico para expresar la generalidad de las propiedades, aunque sabemos que, en el juego discursivo en el aula, les estudiantes no lo incluirían y no está previsto que elles ni la docente lo hagan.

Los hechos del aula nos mostraron, por un lado, la vigencia de nuestra anticipación acerca de la propiedad falsa: uno de los episodios que analizamos nos muestra un estudiante movilizado por la contradicción que le genera asumir la propiedad falsa aun sabiendo que el número es múltiplo de 10. Por otro lado, nos encontramos con que les estudiantes generan una gama de descomposiciones aditivas y multiplicativas -con la intención de armar el 10 que se necesita hacer visible- mucho más amplia que la que anticipamos en nuestro análisis a priori.

En relación con la complejidad que presentó en el aula el ítem d, vemos ahora la conveniencia de incluir antes, un problema como "estudiar si 2 x 21 es múltiplo de 14", donde solamente es necesario descomponer el 21 para encontrar el factor 7 y reconstruir el 14, como un paso intermedio al producto que se plantea en el ítem d.

En el momento de la puesta en aula nos dimos cuenta de esta complejidad y por eso lo incluimos como un primer ítem en el problema siguiente.

En el problema 6, les estudiantes enfrentarán ejemplos que cumplen con la hipótesis de que ninguno de los factores de ***a*** es múltiplo de ***b*** pero, en algunos ítems, el producto resulta múltiplo de ***b*** y en otro no. Vemos necesario este trabajo para precisar el sentido del conocimiento 2.

Problema 6: Sin hacer las multiplicaciones que se proponen, estudien las siguientes afirmaciones

a. 423x7 es múltiplo de 21   b. 48x30 es múltiplo de 45   c. 4x15 es múltiplo de 14

Elementos de análisis del problema 6

En todos los ítems de este problema, ninguno de los factores de ***a*** aporta, por sí sólo, la información suficiente para responder si es o no múltiplo de ***b***[18]. De esta manera, se retoma la problemática que se abrió en el ítem d del problema anterior.

[18] Seguimos usando la denominación de ***a*** y ***b*** que incorporamos al analizar el problema 5.

Para resolver el ítem a, es necesario identificar los factores 3 y 7 del 21 y luego ir en la búsqueda de ellos en la expresión 423 x 7. En este caso, el factor 7 está visible por lo que resta identificar que el 423 es múltiplo de 3 para poder afirmar que 423 x 7 es múltiplo de 21. Una posibilidad sería encontrar que 423 = 141 x3 y luego reescribir la expresión 423 x 7 como 141 x 3 x 7 o 141 x 21. Anticipamos algunas estrategias de resolución:

- ✓ Hacer una descomposición aditiva del 423 (por ejemplo, 420 + 3 o 210 + 210 + 3) y asegurar que 423 es múltiplo de 3 ya que cada término lo es. Luego, concluir que 423 x 7 es "un número" x 3 x 7 y por lo tanto es múltiplo de 21.
- ✓ Armar el factor 21 a partir de multiplicar 7 con el 3 de las unidades del 423; es decir, afirmar erróneamente que 21 es un factor de 423 x 7 "porque se multiplica el 7 con el 3". Ante esta situación nos interesaba hacer visible el error de considerar que el 7 está multiplicando solamente a las unidades. Si esto surgía, pensábamos avanzar hacia la estrategia que consideramos a continuación.
- ✓ Considerar que 423 = 420+3 y, apoyades en la noción de multiplicación como sumas reiteradas y en la idea de "veces", considerar que 423 x 7 es 423 "veces" 7 y es equivalente a "420 veces 7 + 3 veces 7"; es decir 420 x 7 + 3 x 7[19]. Finalmente, argumentar que 420 es múltiplo de 3 para concluir que 423 x7 es la suma de dos múltiplos de 21 y, por lo tanto, múltiplo de 21.

Sabemos que les estudiantes, en la búsqueda de resolver este tipo de problemas, suelen proponer descomposiciones aditivas de los números que aparecen, con poco control de la manera en que esa descomposición se articula con una multiplicación. Sin que elles tuvieran un dominio cabal de la propiedad distributiva pensábamos que el sentido de la multiplicación como sumas reiteradas y el discurso de las "veces" iba a permitir discutir en el aula esta articulación, y estábamos interesadas en que eso ocurriera al discutir en torno de este problema.

Queremos detenernos en el número 423 -variable didáctica en este problema- elegido porque pensábamos que iba a ser fácil reconocerlo como múltiplo de 3. En este sentido, esperábamos afirmaciones imprecisas del tipo "423 es múltiplo de 3 y por 7 da 21" como argumentos iniciales sobre los que apoyar luego el pedido de transformación

[19] Recordamos que les estudiantes no habían trabajado aún con la propiedad distributiva en este curso.

de la expresión 423 x 7. En la puesta en aula, nos dimos cuenta de que el 423 tiene características que provocaron cierta confusión en algunes estudiantes: descomponían 423 como 420 +3, multiplicaban por 7, de manera errónea, solamente al 3 y completaban el argumento diciendo que 420 ya era múltiplo de 21 que nos dejaba la duda de que 420 también estaba multiplicado por 7. Llegaban a una respuesta correcta con un argumento que podía contener partes incorrectas. Este escenario dificultó el análisis colectivo de la última estrategia presentada. Ahora vemos necesario cambiar el 423 por, por ejemplo, el número 453 para que quede planteado más claramente que es insuficiente considerar 3 (de las unidades) x 7 para concluir.

En la discusión colectiva nos propusimos avanzar, con la intervención docente, hacia la reescritura de 423 x 7 como la expresión equivalente 141 x 3 x 7 o 141 x 21.

El ítem b presenta una complejidad similar al ítem d del problema 5: para decidir si 48 x 30 es múltiplo de 45 es necesario considerar una descomposición de los dos factores. Pero varios argumentos desplegados en aquel problema dejan de ser válidos. Anticipamos estrategias correctas e incorrectas similares a las del ítem a apoyadas en la descomposición aditiva del 48 (por ser cercano al 45):

- ✓ Incorrecta: 48 x 30 = 45 + 3 x 30 = 45 + 90 → es múltiplo de 45 porque es suma de múltiplos de 45.
- ✓ Correctas: (45 + 3) x 30 = 45 x 30 + 90. Esto puede tener apoyo en la oralidad "el primer término es 45 x algo y con los otros 3, da 90 que es múltiplo".

Anticipamos también descomposiciones multiplicativas de los factores, algunas de ellas que no permiten reconstruir fácilmente el factor 45: 2 x 24 x 15 x 2 o 3 x 16 x 5 x 6.

El producto que se propone en el ítem c no es múltiplo de 14. Con este ítem pretendíamos abordar distintas maneras en que se puede argumentar que un producto no es múltiplo de un número.

Esperábamos argumentos coloquiales del tipo: "no se puede armar el 14 como factor porque no hay un factor 7 ni en el 4 ni en el 15 y no se va a poder armar como en los ítems anteriores". Nosotras pensábamos aceptar este tipo de argumentos que podría demostrarse formalmente apoyándose en la proposición: *Si un número es primo y no* *divide a ninguno de los factores, no divide al producto*[20]. También anticipábamos que algunes estudiantes persistieran en la búsqueda del 7 como factor sin arribar a una respuesta. En la tesis de Verónica Cambriglia (2018) se estudian situaciones similares en la que algunes estudiantes creen que un producto va a resultar o no múltiplo de un número dependiendo de la descomposición particular que se realice del producto.

Por otro lado, anticipamos descomposiciones aditivas del 15 como 14+1 para expresar todo el producto como un múltiplo de 14 + 4 y por lo tanto no múltiplo de 14.

Los episodios 4 y 5 que analizaremos en el capítulo siguiente muestran escritos particulares de dos estudiantes al resolver este problema de manera autónoma, y el trabajo de la docente que va plasmando en transformaciones de las expresiones numéricas las ideas que sostienen estas producciones.

Con estos tres ítems del problema 6 se puede precisar el conocimiento C2 que comenzó a elaborarse a partir del problema 5: "Con la condición de que ninguno de los factores ***a*** es múltiplo de ***b***, hay ejemplos en que ***a*** es múltiplo de ***b*** y ejemplos en los que no lo es".

El trabajo de campo finalizó con las observaciones de los primeros 6 problemas ya que el tiempo que les autoridades de la jurisdicción habían otorgado para nuestra permanencia en la escuela había concluido. El siguiente problema formó parte de la planificación colaborativa con la profesora, pero no fueron parte de las observaciones - no se tomaron datos más allá de los comentarios de la profesora.

A continuación, presentamos con un breve análisis el último problema de la planificación que realizamos con la docente.

Problema 7: Completen las tres frases para que sean verdaderas (sin usar ninguna de las afirmaciones del problema 5). Argumenten su decisión transformando la expresión en otra equivalente.

[20] Esta afirmación aparece, en su versión contrarrecíproca, en la Proposición 30, Libro VII de los "Elementos" de Euclides (siglo IV AC): "Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen a algún (número) y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los iniciales" (según la versión de la Editorial Gredos, 1994, en la página 152 del Volumen II). Esta proposición es la clave en la demostración del Teorema Fundamental de la Aritmética, enunciado por primera vez por el físico y matemático Kamal al-Din Abul Hasan Muhammad Al-Farisi (1260-1320).

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = …..

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = ….

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = …..

Elementos de análisis del problema 7

Al resolver el problema 5 ya se habrá estudiado que 15 x 28 es múltiplo de 28, 7, 4 y 10; se trata ahora de buscar nuevos divisores. Pensamos que es una buena oportunidad para recuperar algunas de las descomposiciones ya consideradas colectivamente al resolver aquel problema; será necesario también que les estudiantes produzcan nuevas expresiones equivalentes para poder identificar otros divisores.

Incorporamos en el enunciado "Argumenten su decisión transformando la expresión en otra equivalente" y ofrecimos el formato a completar "porque 15 x 28 =…." con la intención de avanzar en el proceso de institucionalización de un conocimiento acerca de los modos de trabajar en álgebra (*las conductas* de Arcavi (1994) y el *tratamiento algebraico de lo numérico* al que se refiere Chevallard (1984)): la transformación de una expresión numérica en otra equivalente es una estrategia pertinente para conocer nuevas propiedades de la expresión y, al mismo tiempo, esa transformación permite elaborar un argumento para validar lo que se afirma. Este conocimiento de orden general acerca del tratamiento algebraico de expresiones numéricas adquiere, en este problema, una forma particular: descomponer en factores los factores de una expresión multiplicativa y reagruparlos de una nueva manera permite encontrar, de manera justificada, nuevos divisores de la expresión.

En cuanto a la gestión docente, anticipamos que, antes que les estudiantes comiencen a resolver, la docente iba a recuperar parte del trabajo del problema 5, con cuentas/ expresiones que ya fueron analizadas:

- ✓ Para explicar que 15 x 28 es múltiplo de 4 escribimos que 15 x 28 = 15 x 7 x 4.
- ✓ Para explicar que 15 x 28 es múltiplo de 10 escribimos que 15 x 28 = 3 x 5 x 2 x 14 = 3 x 10 x 14.

Retomar estas ideas podría ser un buen punto de apoyo para que les estudiantes, de manera autónoma, produjeran nuevas descomposiciones y encontraran nuevos divisores.

Anticipamos que algunes estudiantes podrían encontrar nuevos divisores de 15 x 28 apoyándose en algunas propiedades de divisibilidad y luego producir una transformación que muestre el divisor que encontraron; mientras que otres, sin una anticipación, podrían transformar la expresión para encontrarse con nuevos divisores.

Teníamos en mente que, al final de la discusión colectiva quedara un pizarrón con diferentes expresiones equivalentes a 15 x 28 y, en cada una, se mostraría un divisor diferente del producto. Concluido este trabajo se pensaba presentar en el aula una definición de expresiones numéricas equivalentes del estilo de: "En las actividades anteriores se expresó una cuenta o un número de diferentes maneras, cuando esto ocurre se dice que las expresiones son equivalentes."

La planificación en conjunto con la docente finalizó con el problema 7. Luego la profesora incluyó otros problemas, algunos más centrados en lectura de expresiones numéricas y otros en su transformación. Por ejemplo,

Problema 8: Decidí, sin hacer las cuentas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. 14 x 35 es múltiplo de 14
b. 14 x 35 es múltiplo de 7
c. 15 x 12 es múltiplo de 10
d. 15 x 12 es múltiplo de 30
e. 15 x 12 es múltiplo de 24

Problema 9: Sin hallar los resultados de los siguientes cálculos, decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

a. 2 x 15673 + 4 da como resultado un número par
b. 3 x 15673 + 6 da como resultado un múltiplo de 2
c. 374 × 15 + 21 es múltiplo de 3
d. 374 x 15 + 12 es múltiplo de 6
e. 7 × 174 + 132 es múltiplo de 7

Si bien con la profesora conversamos sobre las ideas que estos problemas movilizan, no participamos del detalle de la planificación.

En el siguiente capítulo, nuestro foco está puesto en comprender las ideas, conocimientos, relaciones que les estudiantes ponen en juego al resolver los problemas 5 y 6 y atrapar la complejidad de las interacciones en el aula cuando estas ideas son valoradas y sostenidas por la docente. Desde nuestra posición los análisis que hemos desarrollado en este capítulo nos permiten construir una red de relaciones a partir de la cual emprender el proceso de interpretación de los hechos del aula.

CAPITÍULO 5

Trabajo con episodios: análisis de escenas del aula

En este capítulo nos detenemos en el análisis de algunos hechos que tuvieron lugar en las discusiones colectivas generadas y sostenidas por la docente a partir de las resoluciones autónomas de les estudiantes de los problemas 5 y 6. Nos propusimos entender la intimidad del trabajo de les estudiantes -no necesariamente visible para une docente en el momento de la clase- con el objetivo de comprender sus producciones (la manera en que las expresan, los razonamientos que ponen en juego, la lógica con que los articulan), los problemas didácticos que aparecen y la acción de la docente en el espacio colectivo a propósito de lo que les estudiantes comparten.

Presentamos cinco episodios, separados en dos partes, cuyo estudio constituye el cuerpo central de esta tesis.

La primera parte, apartado 5.1, tiene tres episodios que se ubican en el momento del primer encuentro de les estudiantes con una nueva tarea (ítem d del problema 5). El tipo de práctica y la novedad que comporta será desarrollado al inicio del apartado.

En la segunda parte, tratada en el apartado 5.2, recortamos dos episodios cada uno referido a la discusión colectiva que tiene lugar luego de que una estudiante produjo de manera autónoma una resolución escrita del problema 6 y la comparte con el resto de la clase.

En ambas partes analizamos las tensiones que se generan en el espacio de discusión colectiva de todo el grupo de estudiantes, cuando se trata de la construcción de un nuevo tipo de práctica para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como iguales a otros ya conocidos.

5.1. Transformar la escritura de un cálculo para leer nueva información: desafíos en el primer encuentro con una tarea nueva

En esta primera parte del capítulo estudiamos algunas tensiones que se generan en el espacio colectivo de trabajo en el aula cuando las técnicas ya constituidas son insuficientes para abordar un nuevo problema. Se trata de la construcción de un nuevo tipo de práctica para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como iguales a otros ya conocidos. Hasta aquí les estudiantes han desarrollado una técnica para responder, sin hacer la cuenta, si un cierto producto de dos factores es múltiplo o no de un cierto número ***a***. Esta técnica se apoya en una propiedad de la divisibilidad: si un número es múltiplo de ***a*** cualquier múltiplo del número también lo es. En el último ítem del problema 5, les estudiantes deben estudiar un producto de dos factores, ninguno de ellos múltiplo de ***a***. La propiedad puesta en juego hasta ahora resulta insuficiente para abordar el nuevo problema. Se trata de un momento de ruptura respecto del tipo de trabajo que les estudiantes venían desplegando. Es necesario, entonces, redefinir los conocimientos, las propiedades y las técnicas recién constituidas, encontrar sus límites, construir nuevas. ¿Qué información leer de una expresión numérica dada, en relación con el objetivo del problema?, ¿qué transformación realizar?, ¿para qué realizarla?

Para profundizar en los desafíos inherentes a este primer encuentro, recortamos tres episodios que se ubican en la instancia de discusión colectiva en la clase en torno a la resolución del último ítem del problema 5 que, como ya dijimos, introduce la novedad de estudiar si un producto de dos números es múltiplo de ***a***, cuando ninguno de los factores lo es.

Antes de presentar y analizar los episodios, recordamos que el enunciado este problema que fue presentado y analizado en el capítulo 4. Nos interesa contextualizar y profundizar el análisis didáctico realizado sobre el problema, bajo la luz que arrojó el estudio de los tres episodios que constituyen esta primera parte del capítulo.

Problema 5: Decidan, sin hacer la cuenta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

a. 15 x 28 es múltiplo de 28	***b. 15 x 28 es múltiplo de 4***
c. 15 x 28 es divisible por 7	***d. 15 x 28 es múltiplo de 10***

Señalemos que, durante las clases precedentes al trabajo con este problema, en el aula se fue acordando que al argumentar porqué un número ***a*** es múltiplo de otro, se tenía que identificar por qué número había que multiplicar al número candidato[21] a divisor para obtener ***a.*** Como ya mencionamos, este requerimiento abonaba al objetivo de ir estableciendo una manera de leer y de transformar las expresiones numéricas en relación con preguntas sobre divisibilidad. Sin embargo, cuando los múltiplos eran reconocidos para la mayoría del grupo (por ejemplo, 400 es múltiplo de 4, 180 es múltiplo de 6), se aceptaba la afirmación sin recurrir a especificar de qué múltiplo se trataba. La demanda, de parte de la docente o de les estudiantes, tenía lugar cuando se trataba de múltiplos que no fueran "evidentes" para la mayoría del grupo. Con estas ideas sobrevolando la escena del aula, el momento de análisis colectivo del problema 5 transcurrió confirmando que las afirmaciones de los tres primeros ítems eran verdaderas.

En el capítulo anterior ya hemos señalado que una de las novedades que traía el ítem d respecto de los anteriores es que para responderlo no alcanza con estudiar si alguno de los factores que ofrece la cuenta es múltiplo del candidato a divisor (10 en este caso). Es la primera vez que les estudiantes se enfrentan a un producto expresado como ***b · c,*** en el que *ni **c** ni **b** son múltiplo de **a** pero **b · c** si lo es*. La propiedad "Si ***a*** | ***b*** **o** ***a*** | ***c*** entonces ***a*** | ***b · c***", en la que se apoyaban implícitamente para resolver los ítems anteriores, deja de ser una herramienta útil para abordar el ítem d. Así, les estudiantes se enfrentaron a la necesidad de apoyarse en otras propiedades conocidas -o construir nuevas- para estudiar este ítem. Fue la primera vez, al menos en este trayecto de aprendizaje, que se enfrentaron con la necesidad de descomponer en factores ***b*** y ***c*** para luego combinarlos de modo de obtener ***a*** (o un múltiplo de ***a***).

Más precisamente, en los primeros tres ítems de esta actividad alcanza con identificar que uno de los dos números de la expresión 15 x 28 es múltiplo del candidato a divisor (28, 4 o 7) para responder si el resultado lo es. En estos casos, alcanza con identificar una característica (o propiedad) de uno de los factores para extender esa misma característica al "resultado" de la operación, el producto de la multiplicación. Por ejemplo, para demostrar que el producto es múltiplo de 28 o de 4, les estudiantes elaboraron frases del estilo "es verdadero porque el 28 está multiplicando" o "es

[21] Optamos por esta manera de llamar al número sobre el cual se está estudiando si una expresión dada ese múltiplo de él ya que retiene que todavía hay que decidir si es o no divisor. En el aula no usamos esta terminología sino que siempre nos referimos a la condición de múltiplo.

verdadero porque 28 es múltiplo de 4". Estas afirmaciones no incluyen en su formulación que lo que se está estudiando es el producto 15 x 28. De hecho, en las discusiones colectivas sobre estos ítems fue la docente quien insistió en que se completaran las justificaciones; por ejemplo, enunciando "**el resultado** de 15 x 28 es múltiplo de 4 porque 28 lo es". Si bien les estudiantes aceptaban completar sus justificaciones con estas frases, no lo consideraban como necesario para dar respuesta a lo que se pedía. Entendemos que en estos ítems se compromete de una manera muy débil la idea de que el número que se está estudiando es el producto, el resultado de la operación, y no cada uno de los factores. Al responder, puede ser que algunes estudiantes pierdan de vista la totalidad de la expresión 15 x 28, mientras que otres - por algo inherente a la comunicación en la que todos les actores involucrades sobreentienden de qué se está hablando - podrían considerar innecesario completar su discurso. Les estudiantes que pensaran en esa totalidad - el resultado de 15 x 28- podrían haber razonado que, como 28 es múltiplo de 4, cuando lo multiplique por otro número (por ejemplo, el 15) seguirá siendo múltiplo de 4 sin que importe el resultado de la multiplicación. Este es efectivamente uno de los argumentos que se puso en juego en el aula.

Destaquemos que, para responder que 15 x 28 es múltiplo de 4 no es necesario considerar alguna particularidad del número 15 en el razonamiento; el 15 podría cambiarse por cualquier otro número (entero) y el resultado de "(cualquier número) x 28" seguiría siendo múltiplo de 4. Entendemos que este tipo de argumento conlleva la consideración del número 15 x 28 como miembro de una familia de números: "(cualquier número) x 28". Así, el número 15, jugaría un rol de cuasi variable, noción introducida por Fujii, 2003, y referenciada en nuestro marco teórico. Este tipo de razonamiento incluiría un movimiento de ver lo general a través de lo particular (Mason, 1996).

El hecho de que:

a) se requiere una mirada más estructural que procedimental de las expresiones numéricas
b) algunos números involucrados en la expresiones numéricas que se estudian jueguen un rol de cuasi variable,
c) se trabaja implícitamente con familias de números,

nos remiten a ubicar esta actividad entre aquellas que Squalli (2015) -referenciado en nuestro marco teórico- ubica en la promoción del desarrollo del pensamiento algebraico de les estudiantes.

En el pasaje del ítem c al ítem d, con el cambio de la variable didáctica del candidato a divisor, se complejiza la posibilidad de identificar a la expresión 15 x 28 como miembro de una familia de números pertinente para responder. Ahora no resulta tan evidente "mirar a través" de ese producto para pensarlo como miembro de la familia "(cualquier) múltiplo de 5 x (cualquier) múltiplo de 2" cuyos miembros son todos múltiplos de 10.

Ahora bien, la expresión 15 x 28 podría verse como miembro de muchas otras familias, de muchos "generales". La elección de en qué familia incluir al 15x28, qué generalidad es la apropiada para resolver el problema, está orientada por el número particular que se considere como candidato a divisor, hay que mirar "a través del 15x 28" teniendo en la mira el número 10, y más aún, sus factores. En cambio, si la pregunta remitiera a otro número habría que incluir a la expresión dentro de otra familia.

Por todo lo anterior entendíamos que este ítem d resultaría una tarea compleja y costosa para les estudiantes, y que esta complejidad ayudaría a promover la necesidad de una transformación escrita de la expresión. Al momento de planificar, pensamos que el estudio de la afirmación "15 x 28 es múltiplo de 10" generaría buenas condiciones para que se realizaran transformaciones sobre la expresión escrita en la búsqueda de una justificación. Sabíamos que, probablemente, la profesora tendría que intervenir para presentar esas transformaciones, pero la complejidad antes mencionada parecía una buena excusa para hacerlo. Ahora se nos hace evidente que en aquel momento no tuvimos plenamente en cuenta las resistencias que podrían surgir para cambiar el juego que se estaba jugando. De eso trata este apartado 5.1.

Los diferentes recortes y análisis que configuran cada uno de los tres episodios que presentamos a continuación documentan aspectos de la complejidad que supone instalar en el aula una nueva forma de analizar si un producto es o no divisible por un número dado. Hay una fuerte tensión para les estudiantes cuando tratan de comprender y aceptar que, en algunos casos, no es suficiente analizar cada factor por separado, que es necesario identificar simultáneamente algunas características de cada uno de los factores de la multiplicación para luego "combinarlas" y construir el candidato a divisor. Nos instalamos en la intimidad del proceso de cómo se aprende y enseña a adquirir la conducta de transformar una expresión con el objetivo de leer nueva información (Arcavi, 1995). En el marco teórico hemos desarrollado estas y otras conductas que Abraham Arcavi identificó para caracterizar lo que él denomina "tener sentido del símbolo".

Cada uno de los tres episodios nos permiten iluminar diferentes aristas implicadas en el movimiento que se pide a les estudiantes.

En el Episodio 1, que tratamos en el apartado 5.1.1, les estudiantes ponen en juego, de manera implícita, una propiedad falsa que deriva de tomar por verdadera -cuando no lo es- la recíproca de una propiedad verdadera. Y cómo esto genera un dilema para algunes estudiantes que se resisten a abandonar la técnica que venían utilizando.

En el Episodio 2, presentado en el apartado 5.1.2, recortamos la complejidad de la tarea docente para intentar que les estudiantes transformen la expresión original en una equivalente que revele información pertinente para resolver el problema. La profesora ofrece pistas para que les estudiantes avancen en la nueva tarea y algunes de elles alojan esas pistas en torno a cuestiones y prácticas que ya conocen. De ese modo, les resulta complejo interpretar la dirección del trabajo que la profesora intenta impulsar.

En el Episodio 3, presentado en el apartado 5.1.3, identificamos las resistencias de algunes estudiantes en aceptar y comprender la transformación de un producto en otro equivalente. La búsqueda de una relación "factor a factor" hace evidente la fuerza de las prácticas anteriores y el costo del cambio de mirada que es necesario.

5.1.1. Episodio 1: El dilema que plantea Atilio

Retuvimos este episodio por que muestra la fuerza que puede tener una propiedad errónea, cuando es el contrarrecíproco del recíproco de una verdadera; aun cuando genera una contradicción, se plantea como dilema y no se pone en duda la propiedad incorrecta. También nos interesa detenernos en el estatuto de una condición externa que se impone a la tarea: "sin hacer la cuenta".

Antes de comenzar el momento de discusión colectiva, les estudiantes trabajaron con los cuatro ítems de esta actividad en pequeños grupos. Luego la profesora propone analizar colectivamente diferentes estrategias que se utilizaron para responder los primeros tres ítems.

En los intercambios que se dieron a partir de estos primeros ítems se sostuvieron discusiones sobre la condición que impone la consigna: “sin hacer la cuenta”. Por ejemplo, ante la estrategia de Almendra que afirmó que 15 x 28 es múltiplo de 4 porque descompuso el 420 como 400 + 20, aparecieron expresiones del tipo “La respuesta de Almendra es correcta pero no respeta la consigna porque usa 420”. Se negoció qué significaba “sin hacer la cuenta” en este problema y se consensuó que les estudiantes podían hacer algunas cuentas pero que sus explicaciones no se podían apoyar en el resultado de 15 x 28 (420). Como veremos en este episodio, la discusión sobre qué significa “no hacer la cuenta” toma cierto protagonismo cuando se inicia el análisis colectiva del ítem d. (en el que hay que decidir si 15 x 28 es múltiplo de 10)

Al comenzar la discusión colectiva del ítem d, Atilio comparte con toda la clase un “dilema” que tuvo con Francisco, su compañero de grupo. Atilio sostiene que la afirmación “15 x 28 es múltiplo de 10 es verdadera porque cualquier número que termine en cero es múltiplo de 10” (así quedó escrito en su carpeta) y Francisco sostiene que es falsa porque ninguno de los factores es múltiplo de 10. Con este relato, comienza el siguiente intercambio en el espacio colectivo[22]:

1 Atilio: *Francisco y yo tenemos un dilema de que no sabíamos qué poner, porque uno pensaba que era falsa y… o sea, pensamos que estaba mal la del otro… y tuvimos cierto dilema porque yo puse, bah, el grupo puso, cualquier número que termine en cero es múltiplo de 10, pero esta respuesta no sería válida porque no cumple con las consignas… o sea el resultado termina en cero, por lo tanto, es múltiplo de 10.*

2 Profesora: *Hasta ahí ¿entienden? Presten atención, porque varias y varios pusieron exactamente esto que dice Atilio. Muches pusieron que es verdadero porque termina en cero y eso significa que es múltiplo de 10. Pero ¿por qué tenés un “pero” para esa respuesta?*

3 Francisco: *Porque el número que termina en cero es 420 que es el resultado de 15 x 28 y la consigna dice que no hagamos la cuenta.*

4 Atilio: *Claro, mi respuesta de por sí ya no es válida, mi consigna es correcta pero no es válida… porque usé el 420.*

[22] En los fragmentos de clase que presentamos se numeran correlativamente las intervenciones de les participantes para poder hacer referencia a ellas en el análisis. Entre paréntesis y sin cursiva incorporamos aclaraciones que creemos necesarias para que se comprenda el contexto de la intervención. Cuando se consideran diferentes fragmentos de una discusión, se continua con la numeración de las intervenciones que se tenía en el registro completo de la clase.

5 Profesora: *¿Y entonces?*

6 Atilio: *En cambio él puso que es falsa porque ni 15, ni 28 es múltiplo de 10… nosotros la duda que teníamos es saber cuál de las dos es la correcta.*

7 Paloma: *En teoría las dos son correctas depende de si… rompés la regla …*

8 Profesora: P*ero un número no puede ser múltiplo de 10 y no múltiplo de 10. O es múltiplo de 10, o no es múltiplo de 10. Atilio, lo que dice es "termina en 0 aunque no cumpla con la consigna… termina en cero y es múltiplo de 10" y también dice estos, el 28 y el 15, no son múltiplos de 10 entonces el resultado no va a ser múltiplo de 10.*

9 Paloma: *En realidad como 15 x 2 es 30 y termina en 0, y 28 es número par, entonces tiene razón Atilio… haciendo la cuenta o no. Eso es como yo lo veo ahora que…*

10 Profesora: *¿Entendieron lo que dice Paloma? Otra vez Palo.*

11 Paloma: *Que 15 x 2 es 30 y como 28 es un número par … va a haber un número que… va a terminar en 0… eh.. .la multiplicación. Entonces tiene razón Atilio sin hacer la cuenta y haciendo la cuenta.*

12 Profesora: *Cuando dice sin hacer la cuenta es sin hacer 15x28, no se puede usar el resultado total de la cuenta, pero se pueden hacer cuentas más parciales, pequeñas.*

13 Atilio: *O sea que los dos tenemos una parte, una respuesta un poco errónea, una respuesta más o menos errónea, la mía no cumple con la consigna, no sería válida y la otra...*

14 Profesora: *¿Y entonces qué pongo? Es verdadera o falsa… ¿Santi?* (dándole la palabra a Santi que levantaba la mano)

15 Santiago: *Verdadera… Pero yo también por ejemplo puse que da como resultado 0, o sea si termina en cero sería múltiplo y también puse que otra razón y descompuse el número 420, pero como no se puede utilizar, ya que 420 es 15 x 28…* (si bien no termina, por el tono de la voz pareciera que finalizaría con "no cumple con la consigna")

16 Profesora: *¿Podemos hacer entre todos una manera de descomponer los números como hicimos en esta* (señalando en el pizarrón la descomposición multiplicativa del número 28 realizada en el ítem anterior)*, una manera que demuestre que es múltiplo de 10?*

Como puede observarse en el fragmento anterior, la profesora decide no abordar frontalmente la afirmación de Francisco (expresada por Atilio en la intervención 6) ni indagar en la propiedad falsa que la estaría fundamentando. Recién en la intervención 16 propone un giro en los intercambios en torno al dilema de Francisco y Atilio y orienta la discusión hacia la búsqueda de una manera de abordar la expresión (en el episodio 2 analizaremos las pistas que va ofreciendo para orientar a la clase en esta búsqueda).

En las primeras líneas del fragmento que presentamos recién, Atilio explicita dos formas de abordar el análisis de la afirmación que llevan a respuestas contradictorias, con una se concluye que la afirmación es verdadera y con la otra que es falsa. Estas contradicciones dan lugar al dilema planteado por Atilio. Detengámonos un momento en el análisis de las ideas desplegadas detrás de ambas formas de abordar la afirmación:

- ✓ Estrategia A: apoyándose en el argumento "cualquier número terminado en cero es múltiplo de 10" saben que el resultado de la multiplicación (420) es múltiplo de 10. Esta propiedad había sido explicitada y usada como argumento en la resolución de problemas anteriores. Entienden también que la forma de arribar a la respuesta -calculando 15 x 28- se encuentra invalidada como procedimiento porque "no cumple con la consigna" (intervenciones 1, 3 y 4).
- ✓ Estrategia B: afirman que ni 15 ni 28 es múltiplo de 10 y concluyen que como ningún factor lo es, el producto tampoco lo será. Estas ideas se apoyan en una propiedad falsa que podemos formular del siguiente modo: "Si ***c*** no es múltiplo de ***a*** y ***b*** no es múltiplo de ***a*** entonces ***c . b*** no es múltiplo de ***a***". Es decir, analizan correctamente que cada uno de los factores no es múltiplo de un número (10) para concluir erróneamente que el producto de los factores no lo es. Nos es importante volver a destacar que esta forma de analizar cada factor para decidir si el producto es múltiplo de algún candidato a divisor fue el apoyo fundamental de las estrategias desplegadas en los ítems anteriores; este es el primer ítem en el que no sirve. Por otro lado, por lo discutido en ítems anteriores, la clase entiende que esta manera de proceder estaría cumpliendo la condición impuesta por el enunciado del problema: "sin hacer las cuentas".

Esta contradicción que identifican lleva a Atilio a explicitar en la intervención 6: "queremos saber cuál es la correcta". La pregunta que estos estudiantes plantean a la clase parecería dejar en plano de igualdad a ambas posibilidades de respuesta; es decir, si bien entienden que ambas respuestas son contradictorias, esto no los lleva a cuestionar ninguna de ellas, ven ambos caminos como posibles. Están claras las razones de por qué los estudiantes no aceptan la estrategia A (no cumple con la consigna) y está claro que la estrategia B no les cierra -sino no tendrían un dilema- porque contradice la respuesta que tienen a partir de la estrategia A. Pero hay algo que los estudiantes piensan que no los lleva a descartar la estrategia B; creemos que el hecho de no conocer las razones de por qué no funciona, junto con el hecho de que mirar cada factor alcanzaba para responder en los ítems anteriores, podría llevar a que estos estudiantes no la descarten. Lo que no está claro de los intercambios es si encuentran algo más en la estrategia B que los satisface.

Paloma y Santiago, que no son del grupo de Atilio y Francisco, no comparten el dilema. Santiago, pareciera no tener dudas de que la respuesta es que 15 x 28 es múltiplo de 10. Reconoce que se apoya en el procedimiento “no habilitado” de hacer la cuenta, pero está seguro del valor de verdad de su respuesta. Dice tener dos razones que lo llevaron a la conclusión de que es múltiplo de 10: la primera, la estrategia que anteriormente llamamos A y la segunda, descomponiendo el 420 en 400 + 20 (descomposición analizada en el ítem b para decidir que era múltiplo de 4). Pensamos que tener dos razones diferentes que derivan en la misma respuesta (28 x 15 es múltiplo de 10) lo pone en un lugar diferente al de Atilio en relación con la confianza en las respuestas obtenidas. A diferencia de Atilio, Santiago no duda de que la respuesta de Francisco es incorrecta aunque sabe que la manera en que él llegó a la respuesta no es válida.

Paloma comienza afirmando (en la intervención 7) que ambas respuestas son correctas; ella toma la parte que “serviría” de cada una de las afirmaciones. La profesora intenta dejar en claro que no puede haber dos respuestas contradictorias para el problema (intervención 8); de esta manera sostiene la duda de Atilio y relativiza la idea de Paloma (intervención 7) en la que, desde una posición diferente a la de Atilio, menciona que ambas afirmaciones son verdaderas.

En la intervención 11, Paloma trata de ayudar a sus compañeros explicando que cumpliendo con la consigna (tanto como lo hace la estrategia B) puede concluir que es múltiplo de 10 (tanto como se plantea en la estrategia A). Se apoya en una tercera estrategia, que llamaremos C, y que es próxima a aquella que la profesora quiere instalar en el aula. En la línea 9 expresa: *15 x 2 es 30 y como 28 es un número par… va a haber un número que… va a terminar en 0… eh… la multiplicación*. Entendemos que está queriendo expresar que “como 28 es par”, aporta un dos para multiplicar (esto no lo dice) por 15, y como sabe que 15 x 2 es 30 y que el resultado de multiplicar por 30 (esto tampoco lo dice) termina en 0. Pareciera que tiene claro que lo que propone es válido y cumple con la consigna “sin hacer la cuenta”. Adelantamos que este tipo de estrategia será analizada en la segunda parte de este capítulo a propósito de un nuevo problema.

A continuación, nos detendremos a analizar el segundo procedimiento que enuncia Atilio. Trataremos de entender primero qué es lo que está bien en la estrategia B que despliega Francisco, para luego detenernos en el error que conlleva su razonamiento.

Según Panizza (2005) *Un razonamiento es válido si a partir de ciertos enunciados (las premisas) se deriva otro (la conclusión) de manera tal que siempre que las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera* (p. 24). En el caso que estamos analizando les estudiantes desarrollan una forma de razonamiento válido, *modus ponens,* que se despliega a partir de dos premisas. En la forma *modus ponens* la primera premisa (P1) es un condicional (en el que p es el enunciado antecedente y q es el consecuente) y la segunda premisa (P2) afirma que el antecedente p es verdadero.

En nuestro caso, la primera premisa es falsa (P1´, en el Cuadro Nº1) pero el antecedente del condicional que expresa esta premisa (p´, en el cuadro) es verdadera para los números que se están considerando en el problema (P2´, en el Cuadro Nº1). Si bien se arriba a una conclusión falsa, el razonamiento sigue siendo válido. Veamos el siguiente cuadro:

CUADRO Nº1	
Forma válida de razonar: *Modus Ponens*	En nuestro caso:
P1: p entonces q	P1´: p´ entonces q´ (falso) p´: *b* no es múltiplo de *a* y *c* no es múltiplo de *a* q´ *b·c* no es múltiplo de *a*
P2: p	P2´: p´ (15,28,10) = 15 no es múltiplo de 10 y 28 no es múltiplo de 10 (verdadero)
Conclusión: q	Conclusión: q´ (15,28,10) = 15 x 28 no es múltiplo de10 (falso)

Señalamos que en P1´, p´ enuncia una condición que determina un dominio para los elementos que la cumplan. En P1´ se afirma que aquellos elementos que cumplan p´, también cumplen q´ (afirmación falsa). En nuestro caso, P2´ es un particular del p´ de P1´

y es comprobado fácilmente por les estudiantes. La conclusión a la que arriban es falsa, a pesar de que el razonamiento es válido, porque la premisa P1´ es falsa (Panizza, op. cit).

Queremos destacar dos cuestiones de los intercambios analizados en este episodio a propósito de la estrategia B:

- Los estudiantes que explicitan al grupo su dilema no identifican que esta conclusión es falsa, sólo detectan una contradicción entre las dos respuestas obtenidas. Esto nos lleva a preguntarnos porqué este razonamiento tiene tanta fuerza para ellos como el desplegado en la estrategia A. Pareciera similar la confianza en que tanto P1´ como P2´ son verdaderas: P2´ es directamente comprobable y P1´ se percibe como verdadera al ser el contrarrecíproco del recíproco de una propiedad verdadera puesta en juego de modo exitoso por les estudiantes en los ítems anteriores[23]. Todo esto, unido a la certeza de estar bajo las condiciones que demanda la consigna del problema (sin hacer cuentas), otorga credibilidad y fuerza a este procedimiento. El único elemento que "falla" en este razonamiento es que P1´ es falsa, pero la contradicción que genera no lleva a estos estudiantes a desestimarla; quizás porque hay "algo" de verdad en la propiedad P1´. Más precisamente, la propiedad P1´ no es válida sobre el conjunto de los números enteros, pero sí sobre un subconjunto infinito ya que la afirmación "Si ***a*** no divide ***b*** y a no divide a ***c***, entonces a no divide a ***b. c***" es verdadera si a es un número primo[24]. Este es un conocimiento que les estudiantes involucrades en esta discusión no movilizaron en estos intercambios y que posiblemente no conozcan de experiencias anteriores.

-. En el trabajo autónomo previo a esta discusión, otro grupo de estudiantes también desplegó las estrategias A y B para analizar el valor de verdad de la afirmación. Sin embargo, a diferencia de Atilio y Francisco, rápidamente descartaron la estrategia B ya que identificaron que los conducía a una conclusión falsa. La diferencia a la que arribaron con una y otra estrategia no conformó una contradicción para este grupo. Entendemos que la convicción de la validez de la respuesta obtenida con la estrategia A (15 x 28 es 420, y es múltiplo de 10) invalidó, implícitamente, la propiedad P1´; es decir, la convicción de que 15 x 28 es múltiplo de 10 operó como una herramienta de control sobre la estrategia B. Esto funcionó diferente en Atilio y Francisco quienes a partir de

[23] Más adelante nos ocuparemos en detalle del tipo de razonamiento involucrado en la premisa P1´.

[24] Como mencionamos en el capítulo 4, esta afirmación es el contrarrecíproca de la Proposición 30, Libro VII de los "Elementos" de Euclides (siglo IV AC).

contrastar las conclusiones no movilizan ninguna herramienta de control y otorgan la misma jerarquía a ambas respuestas. Creemos, sin embargo, que aquelles que encontraron falsa la conclusión a la que arribaron por la estrategia B no fueron en la búsqueda de las razones por las que eso ocurría; es decir, este grupo de estudiantes no se preguntó por la falsedad de regla P1´. Así, el dilema planteado por Atilio en el espacio público de la clase ofrece una oportunidad de volver sobre aquella estrategia desestimada por un buen número de estudiantes y abordar el cuestionamiento de la propiedad P1´.

Nos resulta un aporte evocar la idea de "valor epistémico" de una proposición establecida por Raymond Duval (2016) para entender el grado de confianza o convicción con la que les estudiantes aceptan, dudan o rechazan la proposición P1´. Este autor caracteriza el valor epistémico de una proposición en relación con aquello que un sujeto comprende de su contenido, y lo distingue de su valor de verdad:

> El significado de una proposición está determinado con respecto a varias dimensiones: una dimensión semántica a través de su contenido, una dimensión de conocimiento a través de su valor epistémico (obvio, probable, absurdo, irreal, posible, necesario, etc.) y una dimensión lógica a través de su valor de verdad (verdadero, falso, indecidible, etc.). El valor epistémico está conectado estrechamente a la manera en que alguien comprende el contenido de una proposición: depende de la base de conocimiento del sujeto. (p. 97)

En nuestro episodio, identificamos que la forma en que les estudiantes se relacionaron con el tipo de tarea, con la forma de operar "sin hacer la cuenta", con los procedimientos movilizados en los ítems anteriores, con su comprensión de lo que enuncia la propiedad verdadera (recíproca de P1), conforma una base de conocimientos sobre la que apoyan -o no- su confianza en P1´.

El plano de igualdad que parecerían tener ambas respuestas podría estar relacionado también con que estes estudiantes aún no distinguen la diferencia y no ven la equivalencia numérica entre "*el producto en tanto resultado de una multiplicación"* y la "*multiplicación expresada*" (expresión numérica que presenta los factores del producto). Con esto último queremos decir que el hecho que les estudiantes crean que por un camino -15 x 28 es 420 – es múltiplo de 10 y por el otro no es múltiplo de 10, podría estar relacionado con la idea de que el *producto* (resultado de la multiplicación) y la *multiplicación expresada* podrían no tener las mismas propiedades. Es probable que aún no estén aceptando o no tengan del todo construido que se trata del mismo objeto, que denotan el mismo número. En cambio, pensamos que los grupos que descartaron la estrategia B como posibilidad tendrían más armada la relación entre “resultado de la cuenta” y “multiplicación expresada” (sin calcular). Señalamos estas ideas ya que un objetivo central de este trayecto de enseñanza es que les estudiantes puedan ir precisando y fortaleciendo los vínculos entre lo que se considera el resultado del cálculo y la expresión numérica que lo representa. Detrás de estas ideas, estaría la noción de equivalencia y la posibilidad de modificar el sentido de la escritura conservando la denotación.

Nos interesa ahora detenernos en el tipo de razonamiento que conlleva la premisa P1´ (Si $\boldsymbol{b}$ no es múltiplo de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ no es múltiplo de a entonces $\boldsymbol{b \cdot c}$ no es múltiplo de $\boldsymbol{a}$), propiedad falsa no cuestionada por les estudiantes.

Panizza (Op. cit.), afirma: *“Los saberes de los que dispone el alumno guían la “elección” de la regla, y en particular su anticipación de que la misma le permite resolver el problema”* (p. 84). En nuestro caso, la experiencia de les estudiantes con el tipo de tarea y con los procedimientos movilizados en los ítems anteriores seguramente forman parte o nutren los saberes que guían la “elección” de la regla.

En el trabajo que les estudiantes desplegaron en los ítems anteriores de esta actividad se puso en juego la técnica de analizar si uno de los factores de la cuenta original es múltiplo del candidato a divisor para decidir si este número divide al producto. Estas ideas se apoyan en la propiedad verdadera que llamaremos P0: “Si $\boldsymbol{a \mid b}$ **o** $\boldsymbol{a \mid c}$ entonces $\boldsymbol{a \mid b \cdot c}$” que guió, implícitamente, las validaciones de las respuestas dadas a los primeros ítems. El funcionamiento de esta propiedad se encuentra dentro de las herramientas identificadas y “aceptadas” para abordar los problemas sin hacer la cuenta. Es decir, pusieron en juego una condición suficiente para garantizar que un número $\boldsymbol{a}$ divide al producto $\boldsymbol{b \cdot c}$.

Ahora bien, el condicional falso P1´ en el que se apoyan estos estudiantes – “Si a no divide $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ no divide a c entonces a no divide a $\boldsymbol{b \cdot c}$”- es el contrarrecíproco del recíproco de la propiedad verdadera P3 (ver Cuadro Nº2) usada en estos ítems anteriores. Es decir, los estudiantes consideran como necesarias a las condiciones suficientes. Así, entendemos que los estudiantes intentan hacer una extensión de la propiedad P3 considerando, de manera errónea que negando la hipótesis se obtiene la negación de la conclusión; decimos extensión porque se concluye para "no múltiplos" del mismo modo que antes se hizo para "múltiplos".

Si consideramos el razonamiento que estaría en juego, resulta ahora inválido ya que con premisas verdaderas se llega a una conclusión falsa (Panizza, Op. cit.):

CUADRO Nº2	
Forma inválida de razonar: Falacia por negación del antecedente	En nuestro caso:
P3: p entonces q	P3´: p´ entonces q´ (verdadera) p´: *a* divide a *b* o *a* divide a *c* q´: *a* divide a *b·c*
P4: -p	P4´: - p´ (15,28,10) = 10 no divide a 15 y 10 no divide a 28 (verdadero)
Conclusión: -q	Conclusión´: 10 no divide a 15 x 28 (falso)

Según Panizza (Op. cit) es bastante frecuente que les estudiantes identifiquen como válida esta forma de razonamiento. Al percibir este razonamiento como lógicamente correcto, les estudiantes confieren a la conclusión un "valor de verdad verdadero", cuando P3´ y P4´ son verdaderas, como es nuestro caso.

En resumen, podemos entender que en el despliegue de la estrategia B estarían en juego dos tipos diferentes de razonamiento:

- Un razonamiento válido, con una premisa P1´ que se toma como verdadera, pero en realidad es falsa.
- Un razonamiento inválido, con premisas P3´ y P4´ verdaderas, que lleva a considerar como verdadera una conclusión falsa.

En Cambriglia (2018) se analiza un episodio en el que se discute en torno al razonamiento que les estudiantes ponen en juego cuando tienen que decidir si 2640 es múltiplo de 9, sabiendo que es igual a 66 x 40. En ese caso, les estudiantes concluyen que 2640 no es divisible por 9 ya que ninguno de los factores lo es; es decir, al igual que Atilio y Francisco, se apoyan en la misma "propiedad" (falsa). Nuevamente, lo que guía su razonamiento es el análisis de la divisibilidad de cada factor por el candidato a divisor. La autora estudia la tensión de racionalidades que operan cuando la profesora intenta instalar en el espacio colectivo la discusión sobre el razonamiento y la propiedad falsa subyacente. En este caso, se vuelve muy difícil para el grupo de estudiantes aceptar que la relación utilizada no es válida cuando la respuesta obtenida por ese medio es verdadera (2640 no es divisible por 9). En su tesis, Cambriglia pone de relieve el desafío que enfrenta la profesora al instalar como objeto de análisis un asunto que trasciende el problema y que se ubica en los mecanismos de pensamiento propios de la disciplina: "el razonamiento *En el conjunto de los números enteros, si P = A x B y A y B no son divisibles por C, entonces P no es divisible por C*", es inválido" (p. 121).

En nuestro episodio, por un lado, les estudiantes arriban a una conclusión falsa, que en principio se la considera solamente como contradictoria con otra. Por otro, la profesora no apunta a cuestionar el tipo de razonamiento subyacente sino que va en la búsqueda de una descomposición de 15 x 28 que permita identificar al número 10 (o un múltiplo de 10) como factor de ese producto, a partir de combinar algunos factores de la descomposición. Las discusiones colectivas que tienen lugar en esta búsqueda serán analizadas en el siguiente episodio.

Al trabajar con la docente en la planificación habíamos anticipado que estas dos posibles respuestas iban a aparecer y convivir por un corto período de tiempo en el trabajo en el pequeño grupo. Creíamos que la confianza en que el resultado de la cuenta 15 x 28 termina en 0, por un lado, ayudaría a que les estudiantes no cuestionaran la divisibilidad por 10 y por otro, traccionaría hacia la búsqueda de razones que involucraran descomposiciones de los factores. Es decir, creíamos que reconocer que 420 es múltiplo de 10 tendría la fuerza suficiente como para desestimar la otra estrategia. Pero los sucesos del aula mostraron algo diferente; no anticipamos que podría generarse un dilema que dejara en un plano de "igualdad" a ambas formas de abordar el ítem. El episodio que analizamos, en el que Atilio y Francisco comparten con toda la clase el "dilema" que enfrentan, nos ayuda a dimensionar la fuerza que tiene para ellos la propiedad -falsa- en la que se apoyan; tanta fuerza como el hecho de que 420 es múltiplo de 10. Entendemos que el grado de confianza -o desconfianza en cada una de las posibilidades que explicitan- se encuentra en equilibrio, una no logra tener más peso que la otra como para ser aceptada o descartada.

Panizza (2005) destaca "que la capacidad de revisar las reglas a partir de una contradicción es lo que les permitiría [a les estudiantes] modificar o enriquecer dichas reglas" (p. 84). En los episodios siguientes veremos que, en clase, no se revisó la regla P1´ a partir de la contradicción, sino que se avanzó en la búsqueda del factor 10 como combinación de factores del 15 y del 28. Es decir, se hizo un trabajo explícito sobre el conocimiento que se pretendía instalar: la posibilidad de descomponer los factores ***a*** y ***b*** de un producto para componer un nuevo divisor de ***a · b***. De algún modo, y lo veremos a continuación, en el desarrollo de la clase van a quedar "solapados" estos nuevos conocimientos (en términos de proceder, como una manera de trabajar) con la regla falsa (P1´) que lleva a una conclusión falsa. En clase, una vez que se concluye que el producto es múltiplo de 10, a partir de construirlo como factor, la profesora advierte sobre el uso de la regla P1´, haciendo hincapié en que "lo mismo puede ocurrir en otros casos, con otros números".

5.1.2. Episodio 2: La relación viejo - nuevo tensionando las interacciones entre la docente y sus estudiantes

En este episodio analizaremos los intercambios que tienen lugar después de la intervención 16 de la profesora quien, con esa pregunta, redirecciona la discusión, con la intención de incluir a todes en la búsqueda de una validación de lo que ya se sabe verdadero. En los intercambios que analizamos a continuación, les estudiantes intentan de diversas maneras responder al requerimiento de la docente y ella propone nuevas pistas, relaciones que supone cercanas a las ideas de sus estudiantes, que ayudarían a orientar o reorientar las maneras de pensar que fueron desplegando y los números que fueron proponiendo. *¿Qué es lo que interpreta cada estudiante de estas afirmaciones de la profesora?, ¿qué respuesta da en relación con su interpretación?, ¿cómo lee la docente las producciones que van surgiendo para decidir una nueva intervención*? Nuestra mirada sobre los intercambios que tuvieron lugar en el aula nos permite formular que las relaciones construidas por les estudiantes al resolver los problemas anteriores (lo viejo) operan para dar un significado a las intervenciones docentes, a veces lejano al que pretende la profesora, con la mira puesta en lo nuevo que hay que aprender.

Presentemos el registro del fragmento de clase a partir de la intervención 16:

16. Profesora: *¿Podemos hacer entre todos una manera de descomponer los números como hicimos en esta* (señalando en el pizarrón la descomposición multiplicativa del número 28 realizada en el ítem anterior), *una manera que demuestre que es múltiplo de 10?*
17. Federico: *Yo había pensado una cosa que, básicamente, me acabo de dar cuenta,… no sé si será o no… pero en el 15 quizás lo podríamos descomponer entre un 5 y un 10 y ahí podría entrar el múltiplo de 10… pero de alguna forma no la tengo… hecha.*
18. Profesora: *Eso sería 5 + 10 pero nosotres estamos trabajando con multiplicaciones.*
19. Santiago: *Sería esto… 5 x 3 sería con multiplicaciones, el 15.*
20. Profesora: *¿Cómo es?*
21. Santiago: *El 15 es 5x3.*

La profesora escribe en el pizarrón: *5 x 3 x*

22. Profesora: *Bien, ese es el 15… ¿Y el 28?*
23. Santiago: *4x7*
24. Atilio: *2x9*
25. Francisco: *3x 9*
26. Varios: *7x4*
27. Profesora: *Para saber que es múltiplo de 10 ¿qué número necesito que aparezca en la cuenta?*
28. Federico: *El cero*
29. Lucas, Almendra y varies: *El 10*
30. Profesora: *El 10, si aparece un cero y multiplico por cero, chau… se va todo porque da cero. Necesitamos que aparezca un 10, tengo un 5 y un 3 porque tengo el 15, cómo descompongo el 28…*
31. Almendra: *2 x 10 + 8*
32. Valentina: *No porque aparece sumando…*
33. Paloma: *Lo podés descomponer como 14 x 2*
34. Profesora: *Este 14 x 2 ¿y ahora?... ¿Valen?*

La profesora escribe 14 x 2 a continuación de lo que ya estaba escrito y finalmente queda escrita la expresión *5 x 3 x 14 x 2*.

35. Valentina: *En vez de tener 14 x 2, yo tenía 10 x 2 + 4 x 2.*
36. Santiago: *Claro, 10 x 2 da 20 y 4x2 da 8*
37. Valentina: *O sea, hacés 5 x 3 más 10 x 2 + 4x2*
38. Profesora: *No entiendo*
39. Valentina: *El 28 lo divido en 10 x 2 + 4 x 2*

40. Profesora: *Igual hice otra pregunta Valen… fijate yo pregunté otra cosa. Una vez que descompuse el 15 como 5x3 y el 28 como 14 x2… sigo insistiendo en lo que dice Lucas, necesitamos encontrar un 10 en esta cuenta… ¿cómo hago para encontrar acá* (señalando la cuenta 5 x 3 x 14 x 2) *el número 10 que es lo que necesitamos?*

Silencio…

En el fragmento de clase que recién presentamos, la profesora fue recortando y resaltando elementos que creía que podrían ser reutilizados por sus estudiantes para arribar a una respuesta. Distinguimos diferentes intencionalidades en el contenido de sus intervenciones:

- ✓ La invitación a que se apoyen en lo realizado en el ítem anterior: "*¿podemos (…) descomponer los números* ***como hicimos en esta****, una manera que demuestre que es múltiplo de 10?*" (intervención 16)
- ✓ La propuesta de descomponer los números y usar multiplicaciones: "*¿podemos (…)* ***descomponer los números*** *como hicimos en esta, una manera que demuestre que es múltiplo de 10?*" (intervención 16), "*estamos trabajando con multiplicaciones*" (intervención 18) y *"… ¿cómo descompongo al 28?*" (intervención 30)
- ✓ La mención a la necesidad de mostrar un 10: en las intervenciones 16, 27 y 40 ("*necesitamos que* ***aparezca un 10***")

Si bien la pregunta inicial que la profesora formula en la intervención 16 abarca los tres aspectos anteriores, luego los va repitiendo y/o reformulando de manera separada a medida que el intercambio lo demanda. La frase "como hicimos en esta" refiere al trabajo desplegado a propósito del ítem c (y de los ítems anteriores también) en el que se logró hacer visible el factor 7 (candidato a divisor) transformando la expresión original 15 x 28 en una equivalente, 15 x 4 x 7. La frase "descomponer los números… de una manera que demuestre que es múltiplo de 10" tiene la intención de ayudar a que les estudiantes descompongan en factores los números 15 y 28 de manera que, a partir de la descomposición, se pueda componer el 10 como factor.

Con la información que va ofreciendo a medida que avanza el intercambio, la profesora intenta dar pistas para que sus estudiantes emprendan una forma de hacer, una forma de validar/explicar que la expresión es múltiplo de 10, totalmente novedosa para elles. Pero vemos que estas frases incluyen ideas, algunas de ellas implícitas, que les estudiantes interpretan de otra forma. Por ejemplo, Federico descompone aditivamente al 15 para obtener el 10; al hacer esto, efectivamente se apoya en actividades anteriores en las que se trataba de descomponer aditivamente a un número para decidir si era o no múltiplo de otro. La profesora opera para que les estudiantes descarten este camino-estrategia: en la intervención 18, intentando dar una pista, comunica: "estamos trabajando con multiplicaciones". Esto es tomado sin problemas por varies estudiantes para descomponer el 15 como 5x3. Cuando en la intervención 22 la docente pregunta por el número 28, las respuestas dadas permiten entrever que "trabajar con multiplicaciones" puede alojar significados diferentes para cada estudiante y lejanos a aquel que intentó traer a escena la docente. Veamos algunos ejemplos de esto último:

- ✓ Santiago y algunes estudiantes más: "4 x 7" (intervenciones 23 y 26). Entendemos que esta descomposición podría responder a diferentes posturas: por un lado, quienes sólo busquen descomponer al 28 en multiplicaciones y, por otro, quienes ya anticipen -o al menos tengan alguna sospecha de- que esa descomposición les permitiría encontrar el 10 como factor de 15 x 28.
- ✓ Paloma: "14 x 2" (en la intervención 33). En este caso, la alumna aporta una descomposición que se relaciona con la estrategia que ella misma comparte en los primeros momentos del fragmento que presentamos en el episodio anterior[25]. Esta descomposición, la toma la docente para escribirla en el pizarrón.
- ✓ Atilio: "2x9" (en la intervención 24). Entendemos que podría estar haciendo implícitamente la descomposición del 28 como 18 + 10, para luego ocuparse del 18 siguiendo las pistas de la profesora de trabajar con multiplicaciones y de hacer aparecer un 10.
- ✓ Estudiante: "3x9" (en la intervención 25). Entendemos que podría tratarse de una aproximación al 28 involucrando una multiplicación; es decir, 28 = 3x9 + 1.
- ✓ Almendra: "2 x 10 + 8" (en la intervención 31). En este caso, vemos que encuentran al 10 como factor de un producto que a su vez es un término de la descomposición aditiva del 28, y lo hace considerando el mayor múltiplo de 10 menor que 28.

[25] En la intervención 11, Paloma había mencionado "*en realidad como 15 x 2 es 30 y termina en 0, y 28 es número par…*"

- ✓ Valentina: “10 x 2 + 4 x 2” (intervención 34). El cálculo que propone es muy parecido al de Almendra, con la exigencia de hacer multiplicaciones en todos los términos. Quizás esta estudiante podría, además, estar buscando el factor 2 que el 28 debería aportar, a partir de mostrarlo en cada sumando de la descomposición.

Muchas de estas estrategias se alojan en diferentes interpretaciones que hicieron les estudiantes de las pistas que ofreció la profesora. Por ejemplo, todas las descomposiciones anteriores involucran multiplicaciones y, en varias descomposiciones, el 10 aparece sumando o como factor en unos de los sumandos de una expresión combinada. Otras descomposiciones, como las primeras dos que mostramos, se acercan más a las intenciones que la profesora tenía al dar las pistas.

Nos interesa detenernos en las interpretaciones que pudieron realizar algunes estudiantes en relación con las referencias de la profesora al ítem anterior. La profesora intenta que les estudiantes tengan como meta hacer aparecer el 10 como factor, en un nuevo producto equivalente a 15 x 28. Sin embargo, parece bastante difícil que, a partir de la simple evocación a los ítems anteriores, les estudiantes busquen primero factores de los números 15 y 28 para luego construir, con esos nuevos factores, el número 10. En los hechos, la referencia “como hacíamos antes” es tomada por les estudiantes de una manera casi literal: algunes entienden que hay que buscar el 10 “entero” en alguno de los factores 15 y/o 28, tal como ocurrió en los ítems anteriores con el factor 7 o 4. Creemos que varies estudiantes que participan de estos intercambios tienen clara la imposibilidad de lograr esto, pero, a pesar de esto, intentan ir cumpliendo lo que interpretan que la docente va demandando de manera parcial: hay que descomponer, hay que buscar un 10, pero multiplicando. Les estudiantes se mueven - cumpliendo reglas de contrato- respondiendo lo que profesora va formulando y pierden de vista lo que se pregunta en el problema.

Como dijimos en la introducción de 5.1, el ítem d -que estamos analizando- trae una novedad en cuanto a la técnica necesaria para responder: por primera vez hay que identificar una característica diferente en cada uno de los factores -que 15 sea múltiplo de $\boldsymbol{a}$ y 28 múltiplo de $\boldsymbol{b}$- para poder concluir que el producto es múltiplo de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Estas cuestiones no están dichas- ni podrían estarlo asumiendo que la profesora quiere dejar un margen de maniobra a les estudiantes[26]- en la demanda inicial de la docente. Son les

[26] Retomaremos este asunto en las reflexiones finales que se presentan en el capítulo 6.

estudiantes les que deben asumir que ahora se necesita considerar la totalidad de la expresión para poder analizar la divisibilidad, que no alcanza con considerar un solo factor (del producto dado). Y que hay que componer el candidato a divisor como un producto de dos factores nuevos. En los hechos, la idea de operar con un único factor en la búsqueda del candidato a divisor que se movilizó en los primeros ítems -y que probablemente haya sido transitada en experiencias de aprendizajes anteriores- pareciera ser bastante resistente en algunes estudiantes; estas experiencias previas podrían haber generado una adhesión a seguir operando solamente con cada factor. Aún Atilio, quien pareciera tener claro que ninguno de los dos factores es múltiplo de 10 (ver episodio 1 en 5.1.1), va en la búsqueda del 10 en uno de ellos. Desde esta posición, las pistas que ofrece la profesora no pueden ser atrapadas en la dirección que ella pretende; no se trata de estudiar la divisibilidad de un producto por un número de la misma manera que antes, hay que encontrar una nueva manera. Será necesario entonces, que les estudiantes cambien de posición respecto de aquello que los guía para dar la respuesta.

Este cambio de posición requiere de dos movimientos con respecto a las relaciones ya construidas en los problemas anteriores. El primero, relacionado con concebir el producto, y no solamente cada factor, como el objeto sobre el cual hay que estudiar si es divisible por un número ***a***. El segundo, que la tarea de encontrar un número ***a*** como factor del producto, no se puede lograr en un solo paso y se necesita concebir búsquedas intermedias por descomposición y composición. Será necesario confiar de antemano que el último paso (la composición) puede ser funcional en relación con la tarea, para llevar adelante el primero (la descomposición).

Transformar una expresión implica tomar diferentes decisiones: ¿qué parte de la expresión transformar, por qué debería transformarse y qué tipo de transformación se necesita? (Borsani y Sessa, 2020). Cuáles son los pasos intermedios y qué se busca en cada uno son asuntos que habrá que inventar para cada ejemplo y no quedan totalmente definidos por la pregunta inicial. En el ejemplo que estamos estudiando, *¿conviene comenzar por el 15 y buscar en una descomposición multiplicativa de él, factores del 10? ¿O descomponer el 10 multiplicativamente y buscar sus factores en los factores del producto inicial*[27]*? ¿Cómo se muestra finalmente que el producto es múltiplo de 10?*

[27] Señalemos que si el candidato a divisor, en vez del 10, fuera un número con tres o más factores primos en su descomposición habrá muchas más decisiones a tomar.

En toda la escena del aula que analizamos, fue la profesora quien aportó respuestas a los interrogantes que recién planteamos. En la medida en que la docente formula preguntas que intentan preservar un margen de decisiones para les estudiantes, las respuestas de elles encajan completamente en el abanico de interpretaciones posibles, pero se alejan de las intenciones de las preguntas. Y la manera en que la profesora descarta respuestas erróneas y va guiando el trabajo termina reduciendo el espacio de decisiones de les estudiantes. Entendemos el silencio que se produce en el aula, ante la pregunta que ella hace al final del fragmento, como un indicio de que les estudiantes no pueden atrapar aún la totalidad. Seguir las ideas que, paso a paso, propone la profesora hasta llegar a una cierta descomposición, no garantiza la composición necesaria en el último paso. Pensamos que cuando les estudiantes logren mayor autonomía en la toma decisiones para realizar una descomposición pertinente tendrán más presente, en el último paso, la recomposición necesaria para resolver el problema.

5.1.3. Episodio 3: ¿En dónde quedó el 15? La mirada factor a factor en conflicto con la transformación de un producto en otro equivalente

En este episodio nos interesa detenernos a analizar el conflicto que se genera en el aula después de que en el pizarrón queda escrita la igualdad tal: 5 x 3 x 14 x 2 = 10 x 3 x 14. Los intercambios que analizaremos en este episodio comienzan a partir de la intervención 67 del registro de clase. Para llegar allí, comenzamos por sintetizar los sucesos del aula entre las intervenciones 41 y 67.

El silencio que se genera luego de la intervención 40 impulsa a la docente a mostrar que en la expresión 5 x 3 x 14 x 2 hay un 5 x 2 que permite obtener el 10 que se estaba buscando. En el pizarrón finalmente queda expresado: "*15 x 28* es $\dot{1}0$ → *5 x 3 x 14 x 2 = 10 x 3 x* ___*"* y varies estudiantes proponen el 14 para completar la expresión[28]. (Ver Figura 1)

[28] En el aula se usa la escritura $\dot{1}0$ para indicar que un número es múltiplo de 10.

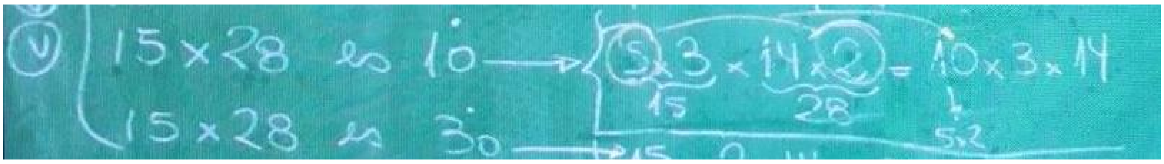


Figura 1: Pizarrón que muestra la resolución final del ítem d. Los círculos, flechas y llaves que se encuentran en las expresiones del ítem d fueron incorporadas por la docente durante los intercambios que presentaremos en este episodio 3.

A partir de este pizarrón, la docente hace una síntesis de lo hecho en vínculo con la tarea y retoma el dilema que planteó Atilio (estudiado en el episodio 1): "(…) *lo que hicimos fue descomponer el 15 y el 28 en multiplicaciones y después armamos el 10. Porque necesitamos que aparezca un 10 para demostrar que es múltiplo de 10. Se acuerdan que Fran había dicho: "como el 28 y el 15 no son múltiplos de 10, el resultado no es múltiplo de 10", pero ahora vemos que no es así, descomponiendo y armando el 10, logramos demostrar que sí era múltiplo de 10, como había afirmado Atilio. Atilio sabía de antemano que daba múltiplo de 10, ahora, ¿cómo lo demuestro? Descompongo y armo".*

Rápidamente interviene Paloma quien vincula este trabajo con la estrategia que ella ya había compartido (intervención 11 del episodio 1). Ahora la docente sí toma sus ideas y va escribiendo en el pizarrón las relaciones que Paloma expresa oralmente. (Ver recuadro en Figura 2).

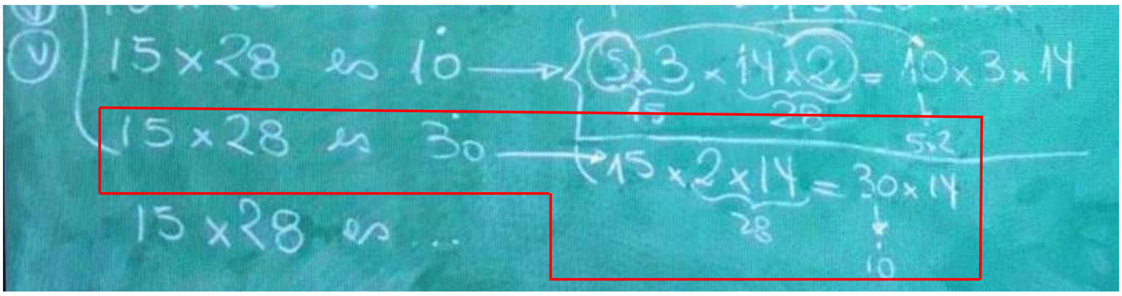


Figura 2: En el recuadro rojo, escritura de la docente en el pizarrón cuando retoma la estrategia de Paloma.

Finalmente, en este pizarrón quedan escritas cuatro descomposiciones del 15 x 28.

Si bien la escritura que finalmente propone la docente "*15 x 28 es* $\dot{1}0 \rightarrow$ *5 x 3 x 14 x 2 = 10 x 3 x 14*" es aceptada por la mayoría de les estudiantes, nuevos cuestionamientos tendrán lugar. Serán necesarios contenidos aportados por otres compañeres a los intercambios, para que les estudiantes que cuestionan logren abandonar lo viejo y entrar en el nuevo juego que demanda la tarea. De eso se trata este tercer episodio.

El episodio se ubica en los intercambios que tuvieron lugar luego de que las cuatro expresiones equivalentes a 15 x 28 quedan escritas en el pizarrón (ver Figura 2). Estos intercambios nos revelan la desconfianza que genera en algunes estudiantes que dos multiplicaciones -con todos sus factores diferentes- denoten el mismo número. Con nuestro análisis apuntamos a interpretar la acción de la docente y las diferentes posiciones frente al planteo de esa desconfianza.

Organizamos el análisis dividiendo el episodio en tres escenas porque entendemos que cada una de ellas muestra un aspecto diferente de la extrañeza de algunes estudiantes frente a la nueva tarea.

Para simplificar nuestra escritura[29], llamaremos:

expresión A: 15 x 28

expresión B: 5 x 3 x 14 x 2

expresión C: 10 x 3 x 14

expresión D: 15 x 2 x 14

expresión E: 30 x 14

El primer cuestionamiento lo hace Federico que pone en duda la expresión C (10 x 3 x 14). Veamos el registro de las interacciones en el aula[30] .

67. Federico: *Si. El 10 x 3 es 30, pero ¿el 15 en dónde quedó en la cuenta del resultado? Porque no… o me perdí o no entendí…*
68. Paloma: *Porque te quedan unos 5 que no los pusiste en ningún lado…*
69. Federico: *¿Dónde quedan los 15 para que la cuenta sea…?*
70. Profesora: *El 15 lo escribimos como… como 5 x 3 y el 28 como 14 x 2, ¿si?*
71. Federico: *Ajá…*
72. Paloma: *Pero ¿en dónde te queda ese 5?…*
73. Atilio: *El 5 faltante…*

[29] Volveremos a explicitar el contenido de cada producto cuando lo creamos necesario para facilitar la lectura.

[30] El número 67 de la primera intervención de este fragmento refiere a la numeración de las intervenciones en el registro completo de la clase.

74. Profesora: *El 5 queda adentro de este 10 que lo multipliqué con el 2.* (la docente, a medida que habla, va señalando los factores 5 y 2 de la expresión B. El pizarrón queda como se muestra en la Figura 1)
75. Santiago: *Sí.*
76. Paloma: *No, pero te queda un 5…*
77. Atilio: *Dos 5 están en el 10, pero falta un 5 del primer 15*.
78. Profesora: *No, no. No armamos el 10 con dos cincos, lo armamos con un 5 x 2.*
79. Atilio: *5 x 2… que sería el 5 dos veces.*
80. Paloma: *Pero como el número era 15, te queda un 5… que, ¿en dónde quedó?*
81. Lucas*: No quedó ningún 5, el 3… onda… es 5 x 3 para formar 15, el 3 lo multiplica cuando ya es 10.*
82. Federico: *¿y cómo formo el 15?*
83. Lucas: *No formó el 15, formó el 10.*
84. Paloma: *Te queda un 5 del 15… al formar el 10 te sobran unos 5 que no los metiste en ningún lado.*
85. Lucas: *Está haciendo otra cuenta… no está haciendo…*
86. Catalina: *No está haciendo la misma cuenta… está haciendo otra cuenta para llegar al mismo resultado.*
87. Profesora: *Es otra cuenta que da el mismo resultado, sí*
88. Catalina: *Por eso no tenés que mostrar el 15 porque es otra cuenta diferente*
89. Atilio: *El 5 se desvanece, se va volando…*
90. Lucas: *No… el 5 no…*
91. Profesora: *A ver… acá pusimos un igual, pero ahora, por lo que estamos charlando, empezamos a dudar si esto es igual o no…* (señala el igual entre la expresión B y la C)

Este fragmento comienza con Federico explicitando que perdió de vista el 15 en “la cuenta del resultado”. Entendemos que por “cuenta del resultado” se podría referir tanto a la expresión C como a la E. Atilio y Paloma pareciera que comparten esta inquietud y, señalando que en la expresión C hay un 10, increpan a la docente por la falta de un 5 (que sumado al 10 permitiría obtener el 15 reclamado por Federico). Es decir, preocupades por el 15 (primer factor del producto inicial) les estudiantes intentan “recuperarlo” a partir del primer factor 10 de la expresión C, sin todavía vislumbrar que hay que considerar toda la expresión 10 x 3 x 14 y no sólo una parte. La ausencia del 15 o del 5 en la expresión C genera desconfianza en que el resultado de esa cuenta sea el mismo que el de la expresión original.

Es posible que Paloma y Atilio vean el 5 x 3 de la expresión B, como 3 veces 5 y piensen que se cambió en la expresión C, por 2 veces 5. Estes estudiantes estarían pensando al 15 y al 10 como sumas de 5; en su reclamo se estarían apoyando en una comparación aditiva de estos números. Con el surgimiento en el aula de esta comparación entre el 10 y el 15, la pregunta de Federico se transforma y la discusión se reorienta hacia "el 5 faltante" (intervención 73). La profesora intenta mover a les estudiantes de la mirada aditiva que están teniendo de los números con la intención de recuperar las relaciones multiplicativas necesarias para hacer avanzar la discusión. A partir de las frases "*el 5 me queda adentro de este 10 que lo multipliqué con el 2"* (intervención 74) y "*...No armamos el 10 con dos cincos, lo armamos con el 5 x 2*" (intervención 78) interpretamos que ofrece pistas para que identifiquen que se trata de trabajar con el 5 como factor y no como sumando. Ahora bien, la interpretación que Paloma y Atilio hacen de estas pistas pareciera ratificar la idea aditiva que ponen en juego; esto lo podemos identificar en las intervenciones 77, 79, y 80 cuando Atilio menciona que "*dos 5 están en el 10, pero falta un 5 para formar un 15*" y "(5 x 2) *sería el 5 dos veces*" y Paloma pregunta, "*pero como el número era 15, te queda un 5 ¿en dónde quedó?.*

Nos encontramos frente a una situación en la que pareciera haber una falta de concordancia de sentidos en relación con el número 10. Les diferentes actores (Paloma, Atilio y la profesora) están mirando la misma expresión 5 x 2 pero ven cosas diferentes:

- ✓ Para la docente 5 + 5 y 5 x 2 son dos escrituras del número 10 que tienen distinto sentido: una denota una descomposición aditiva y la otra una multiplicativa.
- ✓ Para les estudiantes, 5 + 5 y 5 x 2 son dos escrituras de lo mismo, del 10 pensado como sumas de dos cincos.

En el capítulo 2 hemos señalado las categorías teóricas de "valor mostrativo y designativo" de una escritura (Chevallard, 1984) y las de sentido y denotación de una expresión (distinción establecida por Frege en1892 y recuperada por Drouhard en su tesis, en 1992). Estas nociones están formuladas por los autores dejando expresamente fuera de ellas los fenómenos que involucran a un sujeto que interactúa con las representaciones de los objetos. En este pequeño intercambio que recortamos, Paloma y Atilio leen dos expresiones diferentes 5 +5 y 5 x 2 que para elles tienen un sentido muy cercano, apelando a idea de multiplicación como suma reiterada del mismo número. Para elles el 2 que está multiplicando proviene el de la cantidad de cincos que se están sumando. La profesora lee un sentido diferente en cada una de estas expresiones; por cómo se construyó, el factor 2 proviene del 28 y no está asociado al 15.

Esto nos advierte que las expresiones *muestran* algo para *alguien*. Así, vemos necesario incluir a los sujetos como protagonistas del “valor mostrativo” de una expresión, del sentido que se le asocia a una escritura. Por esta razón, para analizar esta falta de concordancia en la clase, nos vamos a apoyar en la noción de connotación (Drouhard, 2011) que pone a los sujetos en el centro de esa construcción de sentido o de aquello que se “ve”.

Drouhard, en su texto Semántica de las Expresiones Simbólicas Algebraicas (2011) señala que:

> (…) Frege mismo se ha preocupado por distinguir la parte subjetiva de la significación (la idea que yo me hago del significado de “ x + 3”, que depende de mi propia historia y de las enseñanzas que he recibido) y que él llama representación personal (y que nosotros preferimos llamar “connotación”, dado que “representación” ha sido ya utilizada según todo tipo de acepciones) de la parte interpersonal, compartida por los hablantes, cosa que es indispensable para la comunicación (sentido y denotación). (p. 8)

Con esta idea de connotación, Drouhard considera el punto de vista de une estudiante cuando se enfrenta con una expresión algebraica. Sostiene que la forma en que le estudiante percibe e interpreta una expresión algebraica es absolutamente personal, subjetiva y depende de su experiencia escolar, de las situaciones en las cuales ha manipulado esa expresión u otras expresiones. Agregamos nosotras que no se trata solamente de las experiencias anteriores, sino de la tarea a la que se enfrenta en el presente y en la cual aparece inmersa la expresión. Aprender, desde nuestro punto de vista, trae consigo el enriquecimiento tanto de las connotaciones de las escrituras, como de la comprensión del tipo de tareas en las que estas están inmersas. Al mismo tiempo, se enriquecen también los sentidos compartidos por los hablantes, la comunidad clase. En su tesis de doctorado, Bardini (2003), refiriéndose a la noción de *representación personal* de Frege señala que la misma es subjetiva y está *fechada*. Entendemos que con la idea de *fechada* recupera la historia del sujeto con un tipo de expresiones algebraicas y el presente en términos de la situación que enfrenta y en la cual aparecen ese tipo de expresiones.

Si bien Drouhard (2011) menciona esta noción de connotación referida a expresiones algebraicas, nos resulta pertinente también para pensar los significados de una expresión numérica en relación con la subjetividad de les estudiantes que interactúan con ella.

En nuestro caso, 5+5, 5x2 y 10 denotan el mismo objeto y todes les que participan del intercambio lo entienden como distintas representaciones de la misma cantidad. Pero, la falta de concordancia en lo que les diferentes participantes ven en la expresión 5 x 2 nos ayuda a precisar que no se trata del sentido de una escritura, sino de la connotación que ella tiene para cada une.

En el aula, la profesora se enfrenta con una tarea compleja: ¿cómo hacer para que mirando lo mismo, les estudiantes dejen de ver lo que ven para que comiencen a ver otra cosa? En particular, ¿cómo lograr que mirando el 5x2 puedan evocar diferentes ideas y seleccionar una pertinente para resolver el problema?

Para que les estudiantes puedan modificar la mirada aditiva de la relación entre el 10 y el 15 y dejen de buscar el 15 en "la totalidad" del 10, será necesario, en forma conjunta, que:

- ✓ Puedan pensar ambos números, el 10 y el 15, multiplicativamente como 5 x 2 y 5 x 3.
- ✓ Al mirar el 10 de la expresión C como 5 x 2, entiendan que solamente el factor 5 aportará para reconstruir el número 15 (los dos factores del 10 no tienen el mismo estatuto en relación con el 15).
- ✓ Busquen el factor 3 (necesario para terminar de armar el 15) en otro "lado", en un "lugar" diferente al 10.

Estas ideas quedan ocultas en las frases que la profesora enuncia en el aula. Notemos que poner en juego la segunda idea necesita una anticipación de la tercera. Varies estudiantes aún no logran hacerlo. Esto es parte de lo que se pretende que aprendan.

Al igual que lo que identificamos en el episodio del apartado anterior, la profesora enfrenta el problema de elegir qué información ofrecer a sus estudiantes para que avancen en la construcción de un nuevo conocimiento. Ahora bien, como no quiere explicitar todas las relaciones necesarias va dando informaciones parciales -*el 10 lo armamos como 5 x 2*- que se alojan en los conocimientos que les estudiantes ya tienen construidos y que pueden conducirlos a caminos erróneos o, como en este caso, no conducirlos a ningún lugar (que a 10 le falta 5 para llegar a 15, que 5x2 es lo mismo que 5+5, son relaciones verdaderas, pero no ayudan a resolver el problema).

En la escena del aula no sólo están presentes las ideas que ofrece la profesora, sino que también están los aportes del resto de les estudiantes. A partir de la intervención 81, vemos que las dudas de Atilio, Paloma y Federico son confrontadas y refutadas por Lucas y Catalina quienes afirman que no es necesario buscar el 15 -en la expresión C[31]- ya que se trata de otra cuenta. Catalina no sólo refuta, sino que también explica claramente que se trata de otra cuenta que llega al mismo resultado (intervención 86). La profesora apoya esta idea. Sin embargo, estos argumentos no son tomados por Atilio y Paloma, quienes insisten en el que "el 5 se desvanece, se va volando" (intervención 89). Las preguntas persistentes sobre el 15 o el 5 faltantes en la expresión C nos estarían mostrando sus dudas sobre la equivalencia de las expresiones. Para este grupo de estudiantes, encontrar el 15 en la expresión C colaboraría para que tomen por verdadero que el resultado de esa expresión es el mismo que 15 x 28.

Destacamos que en todo este intercambio no se cuestiona que en la expresión C "no está el 28". Es posible que el grupo de estudiantes que busca el 15 hayan reparado en esto y no lo expliciten ya que con cuestionar la ausencia del 15 les alcanza para sospechar que se trata de cuentas que darían un resultado diferente. En lo que sí habría acuerdo en la totalidad de la clase es en que el número representado por la expresión C es múltiplo de 10 por la presencia de un factor 10.

La profesora hace extensiva la duda sobre la igualdad entre la expresión B y la expresión C: "*a ver… acá pusimos un igual, pero ahora, por lo que estamos charlando creo que empezamos a dudar si esto es igual o no…*" (intervención 91) y ~~a~~ va a aprovechar las intervenciones de Catalina y Lucas (84, 85 y 88) para dejar de discutir sobre el 15 o 5 faltante en la expresión C con la intención de analizar si las expresiones son o no equivalentes. Es un movimiento necesario que obliga a discutir sobre la totalidad de las expresiones y permite modificar la posición de algunes estudiantes de la búsqueda de una relación "factor a factor".

[31] Recordamos la expresión C: 10 x 3 x 14

La profesora comienza orientando la lectura de la expresión B, agrega las llaves debajo del 5x3 y del 14x2 (ver Figura 2) con el objetivo de hacer visible el 15 y el 28 y reforzar el vínculo con la expresión A. La igualdad entre estas expresiones (A y B) pareciera no presentar un problema para les estudiantes. Si bien no hay un signo igual que las vincule, la igualdad no es puesta en duda en el aula por la posibilidad de reconstruir fácilmente la expresión A a partir de la expresión B; es decir, el 15 y el 28 de la expresión A se pueden conseguir en orden y por separado al asociar el producto 5 x 3 en un caso, y el 14 x 2 en el otro (se pone en juego la propiedad asociativa del producto, pero no se pone en juego la conmutativa). Por otro lado, se llegó a la expresión B a partir de la A, descomponiendo por separado cada factor de esta última. Hay una "reversibilidad" en el proceso que está garantizada por el reconocimiento de cada uno de los factores (15 y 28) en una y otra expresión.

La situación es diferente cuando lo que está en juego es la equivalencia entre la expresión C y la A. Ninguno de los factores del producto representado por la expresión A se pueden construir multiplicando factores presentes en la expresión C; ni tampoco los factores de A son divisores de alguno de los factores de C. No se puede pasar de A a C ni sólo componiendo, ni sólo descomponiendo factores.

La idea de congruencia entre las representaciones Duval (2004) nos ha resultado fértil para comprender la dificultad que tienen algunes estudiantes para aceptar la equivalencia entre las expresiones A y C. En el texto mencionado, el autor formula tres criterios de congruencia entre dos representaciones; la correspondencia semántica entre las unidades significantes, la univocidad semántica terminal e igual orden de aprehensión entre las unidades significantes[32]. Este autor caracteriza la correspondencia semántica, enunciando que "a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental de la otra representación" (p. 53). Para definir la univocidad semántica terminal, enuncia que "a cada unidad significante elemental de la representación de partida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de llegada" (p.53). Finalmente, se refiere al tercer criterio -igual orden de aprehensión de las unidades significantes- afirmando que "Conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden

[32] Duval entiende por unidad significante, el valor que pueden tomar las diferentes variables en una representación.

en las dos representaciones" (p. 53). El autor señala que la presencia, o ausencia, de estas características en dos representaciones de un mismo objeto en diferentes registros puede favorecer, o dificultar, la tarea de conversión entre ellas.

Si bien Duval considera estos criterios para estudiar la complejidad cognitiva de la conversión entre registros, nos resultaron fértiles para entender algunos problemas que vimos en el aula cuando les estudiantes tuvieron que realizar o aceptar transformaciones de expresiones numéricas. En nuestro caso, entendemos que no hay correspondencia semántica uno a uno entre los factores que intervienen en las expresiones A y C. Más aún, cada factor de A necesita asociarse con dos de los factores de la otra, lo mismo ocurre con el factor 10 en la expresión C, que necesita ser asociado con los dos factores de la expresión A.

Probablemente debido a esta complejidad de coordinar la escritura de la expresión A con la de la expresión C, la profesora había presentado la expresión B como "intermediaria". Una vez que se consensuó que la expresión B es equivalente a la expresión A[33], los intercambios continúan de la siguiente manera:

97. Profesora: *Y esto que está acá* (señala la expresión C, 10 x 3 x 14) *¿es lo mismo que 15 x 28? Porque acá pusimos un igual, pero ahora aparentemente estamos diciendo que no serían iguales porque no da 15… ¿Es igual esto (expresión B) con esto (expresión C)?*
98. Santiago: *Profe, pero… o sea…*
99. Valentina: *no es igual pero sí da el mismo resultado.*
100. Lucas: *yo creo que en un principio habíamos tomado como que 5 x 3 era 15, x 14 x2, 28 pero… pero después, esa cuenta base, que habíamos hecho, la desarmamos toda.*
101. Profesora: *¿y después qué hicimos?*
102. Lucas: *la volvimos a armar, pero de diferente manera.*
103. Profesora: *Bien!*
104. Santiago: *Profe, agarrando el 5 y el 2 que dijimos que 5 x 2 da 10 y después sobra el 3 y el 14 que, justamente al multiplicar esos dos números, da 420. No es que tenemos que poner un resultado que de 15 sino que de 420. ¿No?*
105. Profesora: *Bien! Acá adentro hay un 5 x 2* (señala el 10 de la expresión C). *Entonces en esta cuenta, ¿hay un 15?* (señalando toda la expresión C)
106. Varies: *Nooo.*
107. Profesora: *¿lo podemos armar al 15?*
108. Varies: *Si.*
109. Profesora: *¿Cómo lo podemos armar? ¿Con qué?*
110. Atilio: *Descomponés el 10.*
111. Profesora: *¿y cómo lo descompongo?*
112. Varies: *5x2.*

[33] Esto ocurre entre las intervenciones 92 y 96 que no incorporamos en los fragmentos que presentamos.

113. Profesora: *5x2 están de acuerdo que este 5 de este 10 se junta con este 3 y qué arma* (señalando los factores de la expresión C)
114. Varies: *15.*
115. Santiago: *Estamos volviendo para atrás porque…*
116. Profe: *Exactamente, estamos tratando de ver que se puede armar el 15 acá, siempre y cuando desarmemos de nuevo este 10… Claro lo estamos haciendo al revés, si al 10 lo armamos con el 5 x 2, para armar el 15 tengo que desarmar el 10 como 5 x 2 …*

En la intervención 97 la profesora sigue sosteniendo la duda que todavía manifiestan algunes estudiantes, a pesar de que otres ya ofrecieron públicamente elementos para despejarla (se trata de otra cuenta con el mismo resultado, intervenciones 85, 86, 88). Creemos que, al proponer comparar las expresiones C (10 x 3 x 14) y B (5x3 x 14 x2), quiere apoyarse en la transitividad de la relación de equivalencia: como ya se sabe que la expresión B es equivalente ("igual") a la A, para asegurar que la expresión C también es equivalente a 15 x 28 habría que analizar si la expresión B es equivalente a la C. De alguna manera está utilizando la expresión B como bisagra entre las expresiones A y C porque entiende que la expresión B está más próxima a la C que la A: cada factor de la expresión C se puede obtener como producto de algunos factores de la expresión B y cada factor de la expresión B tiene asociado un único factor de la expresión C.

En los intercambios vemos que Lucas y Santiago (intervenciones 100, 102 y 104) recuperan el proceso de construcción de la expresión C (10 x 3 x 14) a partir de operar con la expresión B (5 x 3 x 14 x 2). A diferencia de Lucas, Santiago menciona el resultado de ambas cuentas -420- aunque explicita claramente cómo hay que operar con los factores de la expresión B para obtener la C. Estos estudiantes parecieran tener claro que no es necesario visualizar el 15 en la expresión C para asegurar la equivalencia entre A y C.

La lectura y transformación de la expresión B que sería necesario hacer para obtener la C conlleva una dificultad mayor en relación con la necesaria para pasar de la expresión B a la expresión A. En este caso, de la expresión B a la C, la transformación se apoya de manera implícita en el uso de las propiedades conmutativa y asociativas del producto (por ejemplo, primero se puede conmutar los productos 5x3 y 14x2, luego asociar 5x2 para considerar su producto y finalmente conmutar dos de los tres factores resultantes para llegar a 10 x 3 x 14). En la intervención 104, Santiago hace uso implícito de estas transformaciones intermedias cuando explica cómo operar con los números de la expresión B para llegar a la C y concluye que "no hay que poner un resultado que de 15" (en la expresión C) sino garantizar la igualdad de los resultados de las operaciones expresadas en B y C.

Nos detendremos ahora a analizar la intervención 105 de la profesora: *Bien! Acá adentro hay un 5 x 2* (señala el 10 de la expresión C). *Entonces en esta cuenta, ¿hay un 15?* (señalando la expresión C)

La aprobación de la profesora a la explicación de Santiago, muy sostenida también por Lucas, Catalina y Valentina, podría haber dado por concluido el debate sobre la igualdad de los productos expresados en B y en C. Sin embargo, elige retomar la inquietud inicial por la ausencia el 15 en la expresión C. Interpretamos que repone la pregunta por el 15 con, al menos, alguno de los siguientes objetivos:

- Ayudar a que Federico, Atilio y Paloma puedan desistir de la búsqueda "aditiva" del 15 en la expresión C y reorientar la mirada hacia la identificación del factor 5 en el número 10 y el factor 3 "por fuera" del 10, en las otras componentes multiplicativas de la expresión C.
- Realizar el movimiento de transformación de la expresión C hacia la expresión A. Santiago identifica este movimiento en la intervención 115.
- En otro plano, intentar dejar en evidencia que el tipo de transformaciones que es necesario realizar para ir de la expresión C a la A son un espejo de la ya realizadas para ir de la expresión A a la C: descomponer cada componente multiplicativa en factores (o sea, pasar por la expresión B) y luego combinarlos para obtener las componentes multiplicativas de la otra expresión.

La pregunta que formula en las intervenciones 103, (*En esta cuenta, ¿hay un 15?*) podría ser interpretada por les estudiantes de diferentes maneras. Por ejemplo, podrían entender que se pregunta si hay un 15 escrito (como en la expresión original) que podría ser esta la explicación del silencio que se produce ante esta primera pregunta, o si se puede obtener un 15 multiplicando algunos de los factores de la expresión (como ocurre en la expresión B). Les estudiantes podrían interpretar la primera pregunta que la profesora formula en la intervención 103 como que se está preguntando por la presencia del número 15 escrito (como en la expresión original). Esta interpretación explicaría el silencio que se produce. Las siguientes preguntas *(¿lo podemos armar?, ¿cómo lo podemos armar?*)

habilitan que algunes estudiantes entren totalmente en el juego de descomponer-componer, como lo evidencia el intercambio:

109. Profesora: ¿Cómo lo podemos armar? ¿Con qué?
110. Atilio: Descomponés el 10

A pesar de que la mayoría de les estudiantes adhirió a las reconstrucciones que se hicieron y acordaron con el trayecto y la conclusión, a pocos minutos de que la clase termine, Federico vuelve a expresar confusiones con la totalidad de lo hecho y persiste su desconfianza en la expresión C. La profesora lo atiende particularmente, le pide que se focalice en la expresión B y señala que la expresión C se obtuvo a partir de ella. Para ayudarlo a entender, le pregunta:

122. Profesora: *A ver Fede. ¿De dónde sacamos el 10 que necesitábamos?*
123. Federico: *¿del 5x3?*
124. Varies: *No.*
125. Federico: *¿del 5?*
126. Alumno: *Del 15.*
127. Profesora: *Del 5 ¿por quién?, por este 2 de acá* (señala el 5 y el 2 de la expresión B) *Estos dos números, si los multiplico, da 10.*
128. Federico: *Ahhhh!! Entendí!! Básicamente usaste el 5 del 15 por el 2 del 28 y después te quedó el 3 x 14 y ahí da la cuenta…*
129. Profesora: *..que tenemos que seguir multiplicando para que te de 420 …*
130. Santiago: *Y los números fueron sacados de la multiplicación inicial.*
131. Profesora: *exacto.*

Finalmente, Federico entiende. Para les estudiantes que pudieron seguir el intercambio que se detalla en este episodio, es probable que Federico dijera con otras palabras algo que ya estaba dicho, que ya se había acordado. Para otres, puede ser que esta manera de decir de Federico, volviendo a poner en escena la expresión A, aclare algo que estaba poco claro: para llegar a la expresión C se multiplica el 5 de un factor por el 2 del otro factor de la expresión A y se agrega lo que queda de cada factor.

Nos interesa resaltar que lo que entiende Federico es el mecanismo productor, el juego de descomponer y volver a componer de otra manera. Y a partir de comprender el mecanismo acepta la nueva expresión y las relaciones que se ponen en juego para validar la equivalencia de las expresiones. De algún modo él no sabía que se podía "usar" un factor del 15 y combinarlo con uno de 28. Una vez que lo entiende, que lo acepta, comprende la totalidad de lo que se está haciendo.

En varios momentos de los intercambios, tanto les estudiantes como la profesora explicitan cómo se obtiene el 10 de la expresión C. Al hacerlo, acompañan sus explicaciones con gestos (señalan con los dedos a la distancia, o sobre el pizarrón) que indican algunos números o relaciones entre ellos. A su vez, la profesora trata de "traducir" esos gestos con flechas, círculos, llaves, con el objetivo de que queden representadas estas ideas en el pizarrón y para todo el grupo. Pero posiblemente cuando algunes estudiantes, entre elles Federico, miran el pizarrón, lo que vean sea muy complejo y no logren reconstruir lo que se estuvo discutiendo. En los primeros intercambios de este episodio veíamos a Federico y otres estudiantes centrar la mirada sobre algunos números (el 10 y el 15) sin ninguna reconstrucción del proceso de cómo se llegó de la expresión que contenía el 15 a la que contiene el 10. Fue necesario recorrer el camino inverso, desandar lo hecho, para que pudiera entenderse una técnica nueva que implica una descomposición en factores, un reordenamiento (propiedad conmutativa y/o asociativa) y una nueva composición. La elección de qué descomposiciones, reordenamientos y nuevas composiciones realizar está condicionada por la pregunta que se quiere responder y, por el momento, requiere de una participación docente.

En estos tres episodios del apartado 5.1 analizamos los conflictos que les estudiantes enfrentan cuando trabajan por primera vez con un problema que requiere modificar -y complejizar- una técnica empleada hasta el momento. Si bien nuestro análisis *a-priori* contempló la novedad de la técnica requerida como un asunto con el que les estudiantes se tenían que enfrentar en este ítem, el dilema de Atilio y las dudas de Federico fueron emergentes que nos ayudaron a comprender el grado de novedad y complejidad que ella trae aparejada. La tensión entre lo viejo y lo nuevo estuvo presente en los tres episodios y se manifestó de manera diferente en cada uno. En el episodio 1, la adhesión a una regla verdadera en un cierto dominio conduce a una generalización falsa que es resistente aún frente a evidencias que la contradicen. En el episodio 2, la fuerza de las prácticas ya constituidas se nos hace visible cuando les estudiantes interpretan de maneras tan diversas las preguntas y ayudas que formula la docente en pos de la conformación de una técnica nueva. Por último, en el episodio 3, vemos estudiantes que, en principio, no logran atrapar la totalidad del número expresado como un producto, permaneciendo todavía en una mirada "factor a factor".

5.2 Las escrituras de cálculo que ofrece la docente en colaboración y tensión con las explicaciones orales y escritas que producen les estudiantes

El trabajo algebraico que se despliega a lo largo de toda la escuela secundaria va a transcurrir, necesariamente, con una fuerte impronta de lo escrito, de la escritura de los cálculos, las ecuaciones, las expresiones algebraicas. El álgebra *es* transformación sobre las escrituras; ella tiene su esencia en la posibilidad de transformar una expresión en otra que conserve su denotación. En el trabajo algebraico de lo numérico que se quiere instalar en el aula de primer año con nuestra propuesta, la escritura va a jugar también un papel muy importante, un papel diferente al que tenía en las experiencias anteriores de les estudiantes.

En esta segunda parte del capítulo 5 analizamos dos episodios que nos permiten comprender maneras bien diferentes de enfrentar la tarea y, en ambos casos, la acción de la docente que trabaja en tensión y en colaboración con las ideas de les estudiantes. Mostraremos cómo, bajo qué circunstancias, en qué medida, la profesora toma las ideas de les estudiantes que comparten sus estrategias con el grupo y cómo, finalmente, las convierte en una cadena de expresiones equivalentes. Las interacciones en el espacio colectivo colaboran en el avance de la escritura y la escritura es, al mismo tiempo, un soporte para la comprensión de todes les estudiantes.

Los dos episodios que presentamos a continuación se alojan en el transcurso del trabajo con el problema 6 y luego de los sucesos del aula que estudiamos en los tres episodios de la primera parte de este capítulo.

Para cada episodio desarrollamos nuestro análisis en dos etapas:

- En primer lugar, analizamos el escrito que una estudiante produce en su carpeta antes de compartirlo con el resto de la clase.
- En segundo término, estudiamos las interacciones que se generan en el espacio colectivo a propósito del análisis grupal de esta producción que se comparte oralmente. Si bien sabemos que en las interacciones colectivas les protagonistas son estudiantes y docente, a los efectos del análisis de cada fragmento que presentamos, en algunos momentos nos centraremos en las

interacciones entre estudiantes y en otros pondremos la lupa en el trabajo docente. En particular, reflexionamos en torno a:

- ✓ el papel de la autora y les no autores de la producción en esas interacciones, sus intervenciones y el "efecto" que producen, y el contenido matemático explícito e implícito de los intercambios;
- ✓ las tensiones con las que se enfrenta la docente quien, por un lado, necesita seguir dándole consistencia a la técnica que quiere enseñar (lograr expresiones numéricas equivalentes a la original que estén "mejor" adaptadas para responder una pregunta) y, por otro, no quiere separarse mucho de las palabras e ideas de sus estudiantes para que sean estas las que den sentido a las escrituras que aparecen en el aula. Es nuestra intención, identificar y entender diferentes criterios que pueden estar implícitos en las intervenciones de la docente: en qué momentos propone ella una escritura, en qué momentos las promueve, cuál es el objetivo que subyace a cada una de esas posibles decisiones.

5.2.1 Las escrituras de la profesora como motor de avance en los conocimientos de sus estudiantes. La estrategia de Paloma.

Este cuarto episodio su ubica en un momento en que una estudiante comunica su producción al resto de la clase. Los cálculos, las expresiones, las marcas que va produciendo la profesora en el pizarrón, a partir de preguntas que hace a todo el grupo, permiten a la estudiante encontrar palabras e ideas nuevas que le ayudan a precisar su respuesta al problema. Estaremos en presencia de un ambiente dinámico en el que se van traccionando, unos a otros, las ideas de les estudiantes- expresadas oralmente y en lenguaje natural- y los escritos de la profesora, que son fundamentalmente cálculos.

Una estudiante, Paloma, comparte oralmente con toda la clase su estrategia para resolver el ítem a del problema 6.

Presentamos nuevamente el enunciado del problema[34]:

Problema 6: Sin hacer las multiplicaciones que se proponen, estudien las siguientes afirmaciones
a -.423 x 7 es múltiplo de 21 b-.48 x 30 es múltiplo de 45 c-. 4 x 15 es múltiplo de 14

Comencemos analizando la producción escrita de la estudiante que fue elaborada en el momento de trabajo autónomo. Las ideas que intentó plasmar en este texto fueron luego reorganizadas en la formulación oral que ella misma hace en el espacio de discusión colectiva de este ítem.

El texto que Paloma produjo en su carpeta antes de los intercambios en la discusión colectiva es el siguiente:

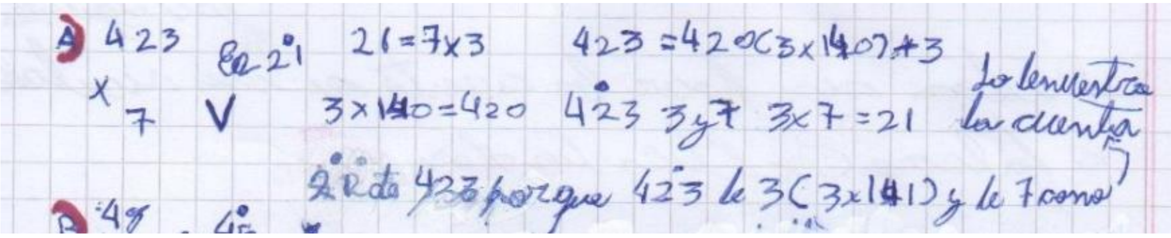


Figura 3: Resolución del ítem a del problema 6, escrita por Paloma en su carpeta, antes de las discusiones colectivas.

El ejercicio de interpretación que realizamos a continuación nos lleva a suponer una temporalidad particular en la producción de este escrito, que se aleja de la escritura convencional de izquierda a derecha, renglón por renglón:

- ✓ Arriba a la izquierda comienza con una escritura vertical del producto que tiene que estudiar,
- ✓ A continuación, en el primer renglón señala que 21 (candidato a divisor) es 7 x 3. Esto pareciera orientar la decisión de estudiar si 423 es múltiplo de 3.
- ✓ La producción del texto parece seguir en el segundo renglón donde expresa el producto que demuestra que 420 es múltiplo de 3,

[34] Recordamos que el análisis de este problema en el capítulo cuatro, en el que compartimos la planificación de las actividades que fueron llevadas al aula.

- ✓ Continua luego en el costado derecho del primer renglón, en donde reconstruye el número 423 con una escritura muy personal, *423 = 420 (3x140) + 3*, usando el paréntesis como se usa en la escritura verbal -como aclaración - y no teniendo en cuenta su uso matemático. La alumna se apoya en una estrategia bastante usada en los primeros cuatro problemas de la secuencia: descomponer aditivamente al número que se quiere estudiar, en múltiplos del candidato a divisor cercanos o fáciles de reconocer (en este caso 420) de manera que quede un sumando pequeño sobre el que decidir si es múltiplo o no (en este caso 3). Entendemos que con esta forma de escribir al 423 quiere **mostrar** que es múltiplo de 3.
- ✓ La producción del escrito parece continuar debajo de esa cuenta, en el segundo renglón. La expresión que allí aparece *"*$4\dot{2}3$ *3 y 7"* es también una manera muy personal de anotar las conclusiones a la que ella llega. Se apoya en la notación del punto sobre un número que había sido utilizada en clases anteriores como una forma de indicar la relación "es múltiplo de"[35]. Vemos que Paloma usa esta notación con sentidos diferentes en distintos sectores de su escrito. Por un lado, en la expresión que recién indicamos parece que modifica el destinatario del punto, ahora no será el divisor sino el propio múltiplo quien lo lleva. No nos queda claro qué relación establece con el 7 en esa parte del escrito.
- ✓ En el tercer renglón, cuando escribe "$\dot{2}1$ de 423", entendemos que quiere expresar que "423 es $\dot{2}1$" (423 es múltiplo de 21). Por otro lado, en la segunda parte del tercer renglón, vuelve a usar el "punto" al revés: cuando escribe "$4\dot{2}3$ de 3" entendemos que quiere decir que "423 es $\dot{3}$" (423 es múltiplo de 3). Toda esta notación que despliega Paloma, contradictoria por momentos, parece ser un modo artesanal de expresar sus ideas. Veremos que cuando ella comparte oralmente su estrategia en el espacio colectivo, señala de un modo preciso qué número es múltiplo de qué número en cada uno de los pasos.
- ✓ Nos interesa detenernos nuevamente en el tercer renglón; según lo que interpretamos, Paloma expresa: "*423 es múltiplo de 21 porque 423 es múltiplo de 3 (3x141) y de 7 como lo demuestra la cuenta"* (esto último aparece arriba, ligado por una flecha, aparentemente por un problema de espacio). En la escritura 3 x 141 reescribe la descomposición aditiva del primer renglón, para hacer visible que el 3 es factor de 423. Por otro lado, vemos que podría haber una confusión respecto

[35] La notación suele usarse también en la escuela primaria. Por ejemplo, para indicar que "60 es múltiplo de 6" se había anotado "60 es $\dot{6}$".

de qué número es el múltiplo de 21 ya que pareciera concluir que 423 es múltiplo de 3 y 7, o sea, de 21. Aunque pensamos que el escrito "como lo demuestra la cuenta" estaría indicando que se está refiriendo al producto inicial 423 x 7, número que representado así, muestra explícitamente la multiplicidad por 7.

En este escrito Paloma busca otras formas de expresar los números involucrados de manera que la ayuden a mostrar que el producto es múltiplo de 21; es decir, transforma los números buscando equivalencias. Sin embargo, en el escrito no queda claro si está controlando que el producto 423 x 7 es el que es múltiplo de 21; no hay mención a este producto más que en la reescritura inicial de la consigna. Pareciera perder de vista la totalidad de la expresión. Esta totalidad será objeto de cuestionamiento y análisis en el espacio colectivo, cuando la profesora intenta que el grupo de estudiantes la recupere.

Nos centraremos ahora en el análisis de las discusiones que tienen lugar en el espacio colectivo a propósito de la presentación de esta alumna. Dividimos el episodio en dos escenas. En la primera, Paloma comparte con sus compañeres sus intenciones y hace explicitas relaciones que nos permiten comprender mejor su escrito; en la segunda escena, la docente interviene con la intención de que les estudiantes encuentren una expresión equivalente a 423x7 en la que se muestre el factor 21.

El fragmento que compartimos a continuación corresponde a la inauguración del análisis colectivo sobre el ítem a del problema 6, a propósito de la resolución de Paloma. Veremos cómo la estudiante, al momento de tener que comunicar sus ideas a sus compañeres y a la docente, ofrece una versión mucho más pulida que la que dejó plasmada en su carpeta, aunque en estrecha relación con lo que escribió.

1. Profesora: *Palo, ¿Querés contar cómo hiciste el problema?*
2. Paloma: *21 es 7 x 3. Como ya vemos el 7, como ya estaba ese 7 en el…bueno… el factor … el..*
3. Profesora: *Uno de los factores de la cuenta es el 7* (la profesora escribe en el pizarrón 21=7x3)
4. Paloma: *Ese, el 7, tenía que encontrar el 3. Y como uno de los factores ya era 7, el otro factor tendría que tener escondido, por así decir, el 3. No por el último número del 423 que es el 3* (refiriéndose a las unidades) *sino si 423 es múltiplo de 3.*
5. Profesora: *O sea del 423, lo que hay que analizar es ¿será múltiplo de 3 o no será múltiplo de 3? Lo escribo así…* (la profesora escribe en el pizarrón "423 ¿será $\dot{3}$?")
6. Paloma: *Y sí es múltiplo de 3. Yo hice 3 x 140 me da 420. Después con esos 420, me quedaba un 3 y le sumé un 1. O sea me quedó 3 x 141 me da 423.* (la profesora intenta ir escribiendo las cuentas que Paloma relata)

7. Profesora: *Esperá, qué rápido. Quisiera saber si les chiques entienden. Por ejemplo, Morena, ¿lo entendiste?*
8. Morena*: Sí, es lo mismo que hicimos nosotras, ¿te lo digo?*
9. Profesora: *Sí, dale. Sería como una segunda oportunidad por si hay alguien que no entendió.*
10. Morena: *Lo que hizo fue, primero pensó que 21 es 7 x 3… y después lo que buscó fue… o sea, ya se dio cuenta que el 7 y el 21 ya estaban vinculados, lo que tenía que encontrar ahora era un 3. Entonces lo que hizo fue averiguar si el 423 era múltiplo de 3.*
11. Profesora: *Bien, lo que ella dice sobre que el 423 tiene que tener un 3 escondido, es lo que trabajamos ayer. Eso de agarrar un número y descomponerlo en multiplicaciones de otros números. Y a lo que llega Palo es a que 3 x 140 da 420, 3 x 141, una vez más el 3, va a dar 423. Entonces eso es múltiplo de 3.*
12. Morena: *Claro.*
13. Profesora: *¿Y esto qué tiene que ver con 423 x 7? Me pierdo ahora…*

El intercambio continuó con la profesora invitando a todo el grupo a elaborar una respuesta al problema a partir de las ideas desplegadas hasta acá. Este intercambio configura la segunda escena que analizaremos más adelante.

En el fragmento que recién presentamos, la profesora decide comenzar la discusión colectiva del ítem a con la estrategia de Paloma porque, según nos comentó en ese momento, la encontró fértil para difundir en la clase el tipo de transformación en producto del número 423 que aparece en el escrito.

Ahora bien, la docente no pide que la alumna comparta con sus compañeres su escrito sino que relate la forma en que lo pensó, en que lo hizo. Como mencionamos al analizarlo, este escrito es muy personal y si hubiera sido socializado tal cual lo escribió Paloma, probablemente, habría resultado muy complejo de comprender para estudiantes que recién están comenzando a identificar qué tipo de transformación es necesaria realizar a la expresión para resolver la tarea.

La primera intervención de Paloma ya nos muestra que tiene claro que el factor 7 que se necesita para componer el 21, lo aporta “la cuenta” (como lo indicó en su texto a través de una flecha). A continuación, explica que el factor 3 lo va a buscar en el 423; o sea que de este número sólo le interesa analizar que sea múltiplo de 3. En su escrito, no quedaba claro si consideraba también que 423 fuera múltiplo de 7, en lo oral queda claro que no.

Al igual que en su escrito, oralmente compartió la forma en que justificó que 423 es múltiplo de 3: piensa al 420 como 3 x 140 y, apoyada en la noción de producto como sumas sucesivas, reconstruye que 423= 3 x 141. Tomando las ideas de Yackel y Cobb (1996) podríamos decir que en las discusiones colectivas de los problemas anteriores se fue negociando una norma sociomatemática: para mostrar que un número es múltiplo de 3 hay que escribirlo como 3 x "algo". A esta norma parece responder Paloma al querer determinar de qué múltiplo se trata. Señalamos que la expresión numérica 3 x 141 es usada por ella como un apoyo para validar que 423 es múltiplo de 3, atendiendo a la norma negociada en el aula con anterioridad. De esa expresión sólo le interesa el 3; el 141 pareciera no ser un número "importante" en su resolución del problema.

El texto que Paloma produce en su carpeta puede aparecer, a los ojos de otre, como desorganizado, confuso en la notación, con algunos errores y omisiones. Las explicaciones que comparte en el espacio colectivo nos permiten comprender más las ideas que ella expresa en su escrito.

Cuando Paloma comparte sus ideas oralmente, lo hace de manera organizada y elige contar su forma de abordar el problema. Comparte qué preguntas se hizo y el paso a paso que la ayudó a arribar a la respuesta. Hasta parece dirigirse muy especialmente a sus compañeres (intervención 4) cuando advierte sobre una posible confusión: el 3 que busca no es el de las unidades sino factor de 423. Esta forma de compartir su resolución le viene muy bien a la profesora que va escribiendo algunos de esos pasos en el pizarrón. Pero las explicaciones de Paloma son muy rápidas y la profesora opta por incluir la voz de otra estudiante (intervención 7) con la intención de dar más tiempo y habilitar nuevas palabras en la escena, como una nueva oportunidad para que el resto de la clase pueda involucrarse en la resolución de Paloma. Recién con estas nuevas interacciones termina de producir el escrito del pizarrón. (Ver Figura 4)

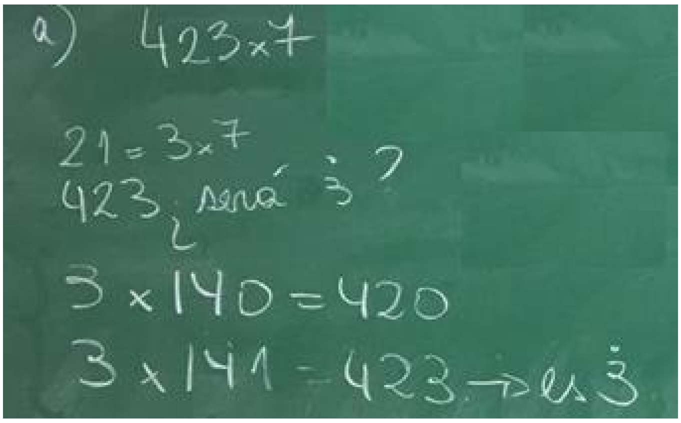


Figura 4: Pizarrón que escribe la profesora a medida que transcurren los intercambios presentados en el fragmento anterior.

Finalmente, nos detendremos a analizar las decisiones que tomó la docente en relación con lo que eligió escribir en el pizarrón -y lo que no- a propósito de lo que expresa oralmente Paloma. Ya hemos señalado que la estudiante comparte los pasos que tuvo en cuenta para construir su respuesta. La profesora intentó recuperar en el pizarrón algunos de estos pasos en los que se apoyó; pero no todos. Veamos, por ejemplo:

- ✓ Deja planteada como pregunta la intención de la estudiante de encontrar un "3 escondido en el 423", de mostrar que 423 es múltiplo de 3.
- ✓ Escribe el cálculo auxiliar en el que se apoya Paloma para justificar que 423 múltiplo de 3 (escribe 3 x 140 = 420) y, alineada, la cuenta 3 x 141= 423.
- ✓ Elige no compartir con el grupo la forma en que la estudiante desarma el 423 como suma de dos múltiplos de 3; es decir, no escribe la cuenta auxiliar "423 = 420 + 3" en que se apoya Paloma para llegar a que 423 = 3x 141.

El hecho de que la profesora deje un registro escrito en el pizarrón de la pregunta que se hizo Paloma y que registre algunos cálculos intermedios (como el 420 = 3 x 140), ayuda a que el resto de la clase pueda ir identificando cuáles son los elementos que consideró la alumna para arribar a una repuesta y cuáles son los que la profesora considera importantes de recuperar.

Interpretamos que la profesora no escribe el proceso completo por el cual se arriba a que 423 = 3 x 141 por varias razones. Pensamos que los dichos de Paloma en la intervención 6 podrían parecer un poco confusos para sus compañeres: "*Después con esos 420, me quedaba un 3 y le sumé un 1"*. Sus palabras se podrían completar/reformuar del siguiente modo: Quedan 3 después de hacer 423 – 420 y por ese 3, le sumo uno al factor 140 para concluir que 423 es 3 x 141.

La formulación de Paloma, con muchos implícitos, retoma ideas que están escritas en su carpeta. (ver Figura 5)

y


Figura 5: Fragmentos del escrito de Paloma.

En la intervención 11 la profesora aporta la idea de "veces" que remite a la relación entre la multiplicación y las sumas reiteradas. Esta forma de pensar la relación entre multiplicación y sumas reiteradas fue un recurso utilizado en algunos de los problemas anteriores (ver, por ejemplo, problemas 2 y 3 de la planificación en el capítulo 4). Suponemos que la profesora pensó que esta referencia a "una vez más el 3" era suficiente para que sus estudiantes recuperan los vínculos entre las dos últimas cuentas escritas en el pizarrón. La manera en que las alinea invita también a que se pueda ver una como consecuencia de la otra.

Por último, interpretamos que la profesora buscó que no aparecieran sumas en la descomposición de uno de los factores -no escribe que 423=420+3- y que sólo se explicitaran multiplicaciones[36]. De hecho, la expresión equivalente que estaría en juego con la estrategia de Paloma es (3 x 140 + 3) x 7 que involucra una combinación de sumas y productos que pueden ser complejas y poco atrapables para muches estudiantes, en este momento.

La profesora estaría comunicando que si se descompone un número ***a*** como suma de múltiplos de ***b***, ***a*** se puede expresar también como un producto en el que uno de los factores es ***b***. Para llegar a esta última expresión les estudiantes tendrían disponible el recurso de pensar a la multiplicación como sumas reiteradas. Notemos que este recurso permitiría, en este nivel de la escolaridad, validar/dar una explicación a la propiedad distributiva.

[36] Encontraremos una maniobra similar de la profesora, en el próximo episodio.

En la última intervención del fragmento anterior, cuando en el pizarrón (Figura 4) aparecen escritas varias relaciones explicitadas por Paloma y el grupo, la profesora deja a cargo de les estudiantes la reunión de la información y la elaboración de una respuesta. En el fragmento siguiente, veremos que intenta que sean les estudiantes quienes encuentren una expresión equivalente a 423x7 en la que se muestre el factor 21. El intercambio se da de la siguiente manera:

13. Profesora: *¿Y esto qué tiene que ver con 423 x 7? Me pierdo ahora…*
14. Morena: *Claro, lo que pensó era que si 7 es multiplicado por un múltiplo de 3 va a dar múltiplo de 21. Bueno, no sé si ella pensó eso… pero yo lo pensé así.*
15. Profesora: *Ok, pero ¿cómo cerramos? Porque ustedes hablan del 423… pero lo que pide la actividad es saber si 423* ***x*** *7 es múltiplo de 21, ¿cómo cierra esta conclusión?, ¿cómo se termina la actividad?*
16. Paloma: *Que sí o sí va a ser múltiplo de 21 ya que están los dos números… ¿Cómo se podría decir?…*
17. Profesora: *¿Cómo quedaría escrita la cuenta original? A ver, ¿Lucas?*
18. Lucas: *423 x 7 ya comprobamos que es múltiplo de 3 y 21 también es múltiplo de 3*
19. Profesora: *Ojo que lo que comprobamos que es múltiplo de 3, es 423.*
20. Lucas: *Ah… claro… pero si es múltiplo de 3 va a ser múltiplo de 21, porque 21 es múltiplo de 3.*
21. Catalina: *Y al ser múltiplo de 21 también va a ser múltiplo de 7.*
22. Paloma: *No, es al revés si es múltiplo de 21 va a ser múltiplo de 3 porque el 6 es múltiplo de 3 pero no al revés.*
23. Profesora: *¿Entendiste?*
24. Lucas: *Sí, es lo mismo.*
25. Almendra: *No es lo mismo.*

Se escuchan muchas voces superpuestas que tratan de explicitar la propiedad que afirma que los múltiplos de un número son múltiplos de alguno de los factores de ese número. Si bien esto había sido analizado en clases anteriores, algunes estudiantes expresan frases imprecisas y parecieran perderse en un juego de palabras. Les estudiantes proponen ejemplos y contraejemplos a las frases generales que se enuncian. Finalmente, la profesora cierra la discusión afirmando que si un número es múltiplo de 21, también será múltiplo de 7, pero un múltiplo de 7 puede que no sea múltiplo de 21.

Luego, la interacción continúa:

36. Profesora: *Lo que quiero saber es ¿cómo podemos escribir la cuenta después de haber hecho todo esto que hicimos acá? Ese 423, ¿cómo lo puedo escribir?*
37. Paloma: *423 sería 3x141 y el 7, después x 7.* (La profesora escribe en el pizarrón 3 x 141 x 7 y una flecha que une la expresión con 423x7, ver Figura 6)
38. Profesora: *¿Están de acuerdo que esa flecha sería un igual? O sea 423 x 7 ¿es lo mismo que 3 x 141 x 7?*
39. Varies: *Sí.*
40. Almendra: *No es la misma cuenta, pero da el mismo resultado.*
41. Profesora: *Los números de las multiplicaciones son diferentes, pero…*
42. Valentina: *Como ayer, que lo dije mal, pero quería decir eso.*
43. Profesora: *…Da el mismo resultado. Bien, entonces ahora ¿quién queremos que aparezca en esta cuenta?*
44. Varies: *El 21.*

45. Profesora: *¡El 21! Hagamos un pasito más para poner el 21, ¿y cómo hago para ver el 21?*
46. Catalina: *3 x 7 x 20… no 3 x 7 x 141.*
47. Profesora: *Bien, buscamos al 21 como el 3x7 … y acá está el 3 x 141 x 7* (señalando el pizarrón, ver Figura 6). *Simplemente cambiamos de lugar a estos dos, los juntamos y pusimos 3 x 7, 21. Si ustedes miran esto* (última expresión escrita en el pizarrón), *¿está en la tabla del 21 el resultado?*
48. Varies: *Sí porque hay un x21.*

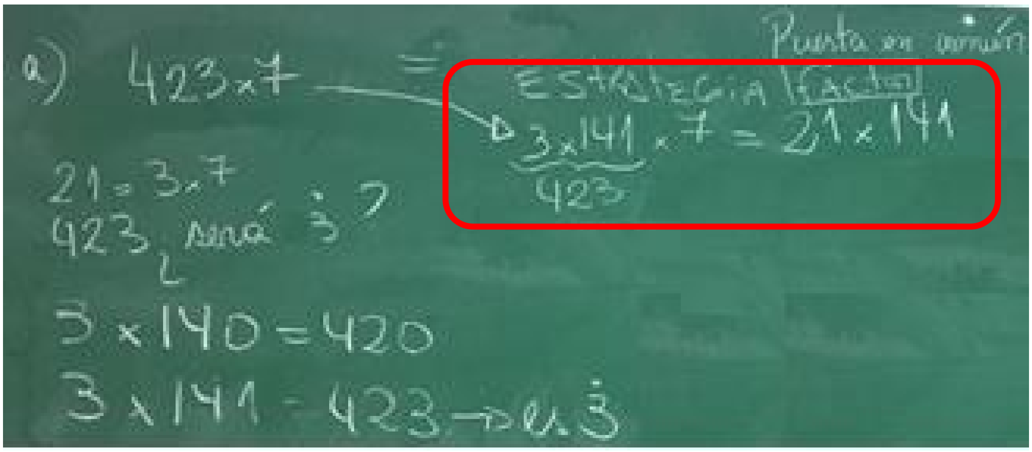


Figura 6: Pizarrón que queda luego de la discusión colectiva presentada en los dos fragmentos anteriores. El recuadro corresponde a la escritura de la docente luego de la intervención 37. El resto ya está escrito cuando la profesora hace la pregunta que se presenta en la intervención 13.

En las primeras líneas de este fragmento, la profesora invita a relacionar los cálculos que están en la columna de la izquierda del pizarrón con la expresión original (ver Figura 6):

"¿y qué tiene que ver esto con 423 x 7?" (intervención 13)*; "¿cómo cerramos? Porque ustedes hablan del 423… pero lo que pide la actividad es saber si 423* ***x*** *7 es múltiplo de 21 ¿Cómo se termina la actividad?"* (intervención 15)

Con estas preguntas comunica al grupo de estudiantes que la respuesta al problema aún no está en el pizarrón, que se necesitan explicitar relaciones que involucren a la totalidad de la expresión original. Interpretamos que la profesora entiende que puede haber estudiantes que han seguido paso a paso todos los cálculos pero que aún no sepan cómo articular las ideas para encontrar la respuesta. Y asume que el vínculo entre esta respuesta y las ideas ya compartidas -algunas de ellas escritas en el pizarrón- necesita de mayor explicitación en el aula. Al mismo tiempo, quiere avanzar hacia una forma particular de reunir la información de los cálculos parciales en uno solo. Así, en la intervención 17 (*¿cómo quedaría escrita la cuenta original?*) la profesora modifica su forma de preguntar, la especifica, reorientando la tarea hacia la reescritura de la cuenta original en otra equivalente que muestre a 21 como factor.

Para algunes estudiantes estas preguntas podrían carecer de sentido ya que, por las ideas desplegadas en el aula, la respuesta podría parecerles obvia. Por ejemplo, para Morena, quien comparte con el grupo una relación que, en vínculo con lo escrito en el pizarrón, confirma que el producto original es múltiplo de 21: "*…lo que pensó era que si 7 es multiplicado por un múltiplo de 3 va a dar múltiplo de 21…*" (intervención 14). Morena trata de explicar lo que hizo su compañera y aporta una relación que esta no había explicitado. De hecho, Paloma intenta dar respuesta a las preguntas de la profesora de una manera ambigua, poco precisa y que no retoma los dichos de Morena (intervención 16: "*Sí o sí va a ser múltiplo de 21 ya que están los dos números* (3 y 7)*… ¿Cómo se podría decir?*").

Señalamos que la relación desplegada por Morena es suficiente para validar la respuesta y cerrar la discusión[37], mientras que las expresiones de Paloma necesitan mayores precisiones en relación con el significado de "están los dos números", expresión, esta última, libre de operaciones.

A partir de la intervención 18, algunes estudiantes parecen apoyarse de manera confusa en la noción de múltiplo y/o en propiedades falsas que derivan de ella. Por ejemplo, Lucas

18. Lucas: *423 x 7 ya comprobamos que es múltiplo de 3 y 21 también es múltiplo de 3.*
19. Profesora: *Ojo que lo que comprobamos que es múltiplo de 3, es 423.*
20. Lucas: *Ah… claro… pero si es múltiplo de 3 va a ser múltiplo de 21, porque 21 es múltiplo de 3.*
21. Catalina: *Y al ser múltiplo de 21 también va a ser múltiplo de 7.*
22. Paloma: *No, es al revés si es múltiplo de 21 va a ser múltiplo de 3 porque el 6 es múltiplo de 3 pero no al revés.*

Lucas, en su afán de concluir que el producto es múltiplo de 21, recurre a un razonamiento no válido: como 423 es múltiplo de 3 y 21 es múltiplo de 3 *entonces* 423 es múltiplo de 21. Este "fenómeno" de confundir las relaciones que hay entre dos números

[37] En el episodio siguiente analizaremos una estrategia similar que desarrolla Morena para responder al ítem b.

que son múltiplos de un tercero es un asunto que reconocemos como frecuente en les estudiantes[38]. En el pizarrón hay cuentas de multiplicar que involucran varios números (entre ellos 423, 7, 21 y 3) por lo que hay varias relaciones de múltiplos que se están jugando a la vez: cuáles son las pertinentes -y correctas- para resolver el problema es un asunto que no está claro aún para un gran número de estudiantes, como lo muestran las discusiones desordenadas que se dan entre las intervenciones 25 y 36.

Entendemos que la profesora eligió no detenerse en la explicación de Morena porque está basada en propiedades y no en una transformación de la escritura que es a lo que ella apunta. Si bien no es el caso de Morena ni de Paloma, la intervención de Lucas con el acuerdo implícito de Catalina, y en el momento posterior entre las intervenciones 25 y 36, muestra que varies estudiantes no controlan la validez de las propiedades que ponen en juego. La opción de la profesora por la transformación de las escrituras puede estar guiada, también, por la búsqueda de un terreno "más seguro" para que todes les estudiantes encuentren un fundamento a la respuesta que se da al problema.

En la intervención 36 (*Lo que quiero saber es, ¿cómo podemos escribir la cuenta después de haber hecho todo esto que hicimos acá? Ese 423, ¿cómo lo puedo escribir?*) la profesora precisa aún más su intención de trabajar en torno a la reescritura del número 423 en la cuenta original y en vínculo con lo analizado. Paloma, comprendiendo rápidamente la intención de la profesora, plantea en la intervención 37 la reescritura del 423 como 3 x 141 (que estaba escrita en el pizarrón). De este modo, queda plasmada en el pizarrón la expresión: 3 x 141 x 7 (Ver el recuadro de la Figura 6).

Queremos destacar que si bien para elaborar la respuesta escrita en su carpeta, Paloma no tuvo necesidad de transformar la expresión original 423 x 7 en otra equivalente, responde rápidamente y sin problemas al pedido de la profesora. La transformación que la alumna realizó en su carpeta sobre el 423, y que quedó escrita en el pizarrón, tenía la intención de mostrar – demostrar- que ese número es múltiplo de 3; para nosotras, no encontró el factor 141 para armar una nueva expresión del 423 x 7, lo encontró para demostrar que el 423 es múltiplo de 3. Sin embargo, el pedido de la profesora aporta al grupo, y en particular a Paloma, una nueva intención para esa

[38] La relación correcta "si ***a*** es múltiplo de ***b*** y ***c*** es múltiplo de ***a*** entonces ***c*** es múltiplo de ***b"*** la ven como equivalente a una incorrecta "si ***b*** es múltiplo de ***a*** y ***c*** es múltiplo de ***a*** entonces ***c*** es múltiplo de ***b***.

descomposición del 423: transformar la multiplicación original en otra equivalente en la que 3 y 7 sean factores.

Hacia el final del intercambio, la profesora avanza aún más hacia el armado de una expresión equivalente en la que aparezca el factor 21. Es probable que quienes produjeron una estrategia similar a la analizada, o quienes fueron acompañando y entendiendo el intercambio, comprendan que la expresión 3 x 141 x 7 ya explica que el producto es múltiplo de 21 y, por lo tanto, no necesiten de otra cuenta para concluir. Es decir, partieron de pensar que el 21 se obtiene como 7 (que es un factor de la cuenta original) multiplicado por 3 y, para responder, basta con estudiar si 423 es múltiplo de 3. Sin embargo, y a pesar de que las preguntas que realiza la docente de manera coloquial podrían dar a lugar a diferentes interpretaciones (*¿quién queremos que aparezca en esta cuenta?*, intervención 33 y *¿cómo hacemos para ver el 21?* en la intervención 35), el grupo las reconoce, les da el sentido que la profesora espera, y las responden sin problemas. Se restituye en el aula, con el impulso de la profesora, la regla (norma socio-matemática, Yackel y Cobb, 1996) que había sido explicitada en clases anteriores.

Si nos detenemos en la productora de la estrategia analizada, Paloma, podemos ver que la búsqueda de la escritura de una expresión equivalente funcionó como un motor de avance en la comprensión y precisión de las ideas que ella misma compartió. En la intervención 16, ella menciona sobre el producto 423 x 7: "*que sí o sí va a ser múltiplo de 21 ya que están los dos números…",* y agrega "*¿cómo se podría decir…?*". Vemos por un lado una fuerte convicción y por otro el reconocimiento de que el argumento "*ya que están los dos números*" no es suficiente. Creemos que el escrito producido finalmente en el pizarrón, a partir del intercambio con el grupo y la profesora, le permitiría encontrar "cómo decir" aquello que ni en su producción escrita ni en la oralidad de sus explicaciones posteriores, había logrado expresar bien. Las interacciones en el espacio colectivo colaboran en el avance de la escritura y la escritura es, al mismo tiempo, un soporte para la comprensión de les estudiantes.

El pizarrón puede ser para muches estudiantes un conjunto de cuentas verdaderas, "elementos sueltos", cálculos parciales, desordenados, incompletos que resulta necesarios articular de alguna forma para armar la respuesta al problema. Entendemos que la expresión 21 x 141, intencionalmente escrita por la profesora en el pizarrón, puede haber jugado un papel importante para quienes estuvieron siguiendo paso a paso los intercambios pero quizás habían perdido de vista la pregunta que se estaba tratando de responder. Interpretamos que la profesora no quiso dejar en manos de les estudiantes la construcción final de una respuesta al problema y trabajó con elles hasta llegar a escribir la transformación – 473 x 7 = 3 x 141 x 7 - 21 x 141- restituyendo de este modo la pregunta.

Señalamos ya que durante los intercambios orales de la segunda escena se hace visible la confusión que se produce cuando les estudiantes ponen en juego propiedades de la relación de múltiplo. Al acercarse a nuevos objetos, se elaboran conjeturas verdaderas y falas, se evocan conocimientos y se los adapta, a veces erróneamente, a lo nuevo que hay que enfrentar. En su afán de dar una respuesta y con la velocidad de los intercambios orales, con frecuencia las relaciones se invierten, se aplican razonamientos no válidos sobre propiedades verdaderas y se producen propiedades falsas. Las acciones de la docente de involucrar a les estudiantes en la tarea de transformar una expresión en otra equivalente, que muestre como factor el número del cual se está estudiando si la expresión es múltiplo, permitió dar una respuesta y argumentos para validarla apoyados en esas transformaciones y sin necesidad de apelar a propiedades de la relación de múltiplos.

5.2.2. Episodio 5: Un discurso teórico apoyado en propiedades de la aritmética en tensión con un tratamiento algebraico de las expresiones numéricas. La estrategia de Morena.

La entrada al álgebra es la entrada a un mundo en el que la escritura comienza a tomar un papel nuevo, que no tiene antecedentes en la práctica calculatoria de les estudiantes. La escritura simbólica (numérica o algebraica) se convierte en una herramienta de trabajo: se trabaja sobre la escritura transformándola según ciertas reglas y de acuerdo con la tarea a resolver.

Como ya hemos formulado en este trabajo, nuestra propuesta apunta a cambiar el estatuto que la escritura de los cálculos tiene para les estudiantes. Para algunes de elles, que la tarea no sea hallar el resultado de un cálculo sino transformarlo para dar una respuesta, es un asunto nuevo dada su experiencia operatoria. Adquirir esta nueva práctica puede ser costoso y, frente a una tarea, los argumentos -mayormente orales- apoyados en propiedades de los números y las operaciones, pueden resultar más eficientes o económicos que el trabajo algebraico con las expresiones numéricas al que apuntamos. De la tensión entre estos modos de argumentar trata este episodio.

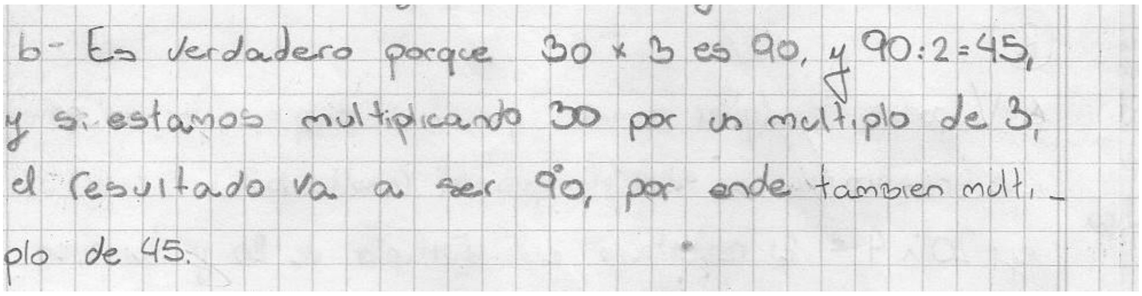
Analizamos la producción de una alumna, Morena, cuya producción se apoya en un razonamiento -implícito en su escrito- que parecería acercarse a una demostración lógico – deductiva, similar a las que podemos encontrar en algunos libros de Euclides (libros VII y IX de los "Elementos"): organiza una serie de afirmaciones/enunciados - considerando los datos del problema - de manera tal que algunos son verdaderos y otros los deduce a partir de afirmaciones anteriores.

El grupo de estudiantes y la docente intentan tomar las ideas subyacentes en las distintas partes de la argumentación de Morena para plasmarlas en una transformación de la cuenta original, de forma tal de producir una expresión equivalente que informe aquello que se quiere mostrar.

La escena que presentamos a continuación se sitúa cuando el grupo de estudiantes analiza colectivamente la producción que Morena compartió sobre el ítem b del problema 6. En este inciso se proponía estudiar si 48 x 30 es múltiplo de 45. Al igual que en el problema 5, ningún factor de 45 está "a la vista" en la expresión 48 x 30[39]. Así, este ítem es el segundo que les estudiantes abordan con estas características. Se agrega ahora el hecho de que el 45 puede pensarse como varios productos: 9x5, 3x15, 3x3x5, a diferencia del 10 de aquel problema que admitía una única descomposición.

Comenzamos analizando la producción que Morena escribió en su carpeta para justificar que 30 x 48 es múltiplo de 45 (Figura 7).

[39] En los tres primeros episodios de este capítulo estudiamos lo complejo que resultó para algunes estudiantes enfrentar por primera vez -problema 5- la necesidad de descomponer los dos factores de una multiplicación para expresarla como otro producto, uno en el que aparezca el candidato a divisor como factor.



b- Es verdadero porque 30 x 3 es 90, y 90:2=45,
y si estamos multiplicando 30 por un multiplo de 3,
el resultado va a ser 90, por ende tambien multi-
plo de 45.

Figura 7: Texto que Morena escribió en su carpeta, para el ítem b del problema 6

Una primera impresión cuando miramos este texto es el contraste que tiene con el de Paloma que analizamos en el episodio 4. Espacialmente, el texto de Morena se despliega de izquierda a derecha e incluye cuentas que se pueden leer en la linealidad que propone. En una oración, atrapa todas las relaciones que puso en juego para responder, aunque la totalidad de su argumento no está explicitado. El texto de Paloma, por el contrario, se desarrolla espacialmente en dos dimensiones y con un orden que requería una fuerte interpretación de les lectores.

En el primer renglón del texto, Morena propone dos cuentas, una de multiplicar y otra de dividir, que contienen solamente dos números del enunciado (30 y 45) y también algunos otros números (2, 3) que ella agrega. Estas cuentas le permiten, en los renglones siguientes, formular argumentos para fundamentar la respuesta que da al iniciar el escrito.

En el segundo y tercer renglón, se centra en el producto inicial e invoca propiedades que le permiten articular una fundamentación de su respuesta, aunque vemos que en su escrito, la alumna no hace mención explícita al número 48. Al enunciar que 30 x "un múltiplo de 3" es múltiplo de 90, sin hacer mención explícita al 48, pensamos que toma a la expresión numérica 30 x 48 como un miembro de una familia más amplia de expresiones -30 x "múltiplos de 3" – y logra atrapar una característica de esa familia. Al mirar al 48 como un representante de "los múltiplos de 3", Morena estaría considerando la generalidad a través de un particular (Mason, 1996).

Identificamos que, en sus argumentos, Morena produce afirmaciones que asume como verdaderas. Los argumentos, que aparecen implícitos en su resolución, son propiedades de la relación de divisibilidad que no enuncia:

1. Si ***a* · *b*** = c entonces "***a*** · múltiplo de ***b***" es múltiplo de ***c*** (Como 30 x 3 = 90 y 48 es múltiplo de 3 entonces 30 x 48 es múltiplo de 90)

2. Si ***a*** es múltiplo de ***b*** y ***b*** es múltiplo de ***S***, entonces ***a*** es múltiplo de ***S*** (como 30 x 48 es múltiplo de 90 y 90 es múltiplo de 45, entonces 30 x48 es múltiplo de 45)

Aclaramos que Morena pone en juego estas propiedades generales particularizándolas sobre los números vinculados con la tarea que necesita resolver.

Interpretamos que el razonamiento matemático completo e implícito en esta producción podría enunciarse de la siguiente manera: *Como 30 x 3 es 90 y 48 es múltiplo de 3* (esto último no lo menciona en su escrito) *entonces 30 x 48 es múltiplo de 90. Además, como 90 es múltiplo de 45 entonces 30 x 48 es múltiplo de 45.*

Al igual que Paloma en el apartado anterior, vemos que Morena no busca una transformación de la expresión original para "rearmar" el 45. No sabemos bien cómo llega a considerar el 90 como punto de partida, pero interpretamos que encuentra en él un múltiplo de los dos números que necesita "vincular" en relación con la tarea, el 30 (dato) y el 45 (candidato a divisor). En términos generales, podemos describir la técnica que estaría detrás de la fundamentación de la divisibilidad de un producto por un número ***S***:

*Encontrar un divisor de uno de los factores del producto original de manera que al multiplicarlo por el otro factor se obtenga un múltiplo de **S** reconocible.*

Esta técnica es correcta y eficiente en la medida que se pueda encontrar ese múltiplo de S reconocible (el 90 en la producción de Morena).

Hasta aquí hemos intentado comprender la trama del procedimiento de Morena, las propiedades en las que se apoya implícitamente, la generalización subyacente a su técnica. Este desarrollo nos ofrece un marco para analizar los intercambios colectivos que se dieron en el momento que Morena comparte esta producción con el grupo, donde esta forma de argumentación entrará en tensión con la práctica de transformación de la escritura que se quiere instalar.

Les estudiantes habían trabajado de manera autónoma resolviendo todos los ítems del problema 6. En el aula se discute el ítem a (423 x 7 es múltiplo de 21) y luego, la profesora propone que revisen lo hecho autónomamente en los ítems b y c.

Nuestro interés en este episodio se centra en la discusión colectiva que se da en torno a la producción de Morena con el ítem b. Para contextualizar ese momento de trabajo colectivo, relatamos a continuación lo que ocurrió en la discusión colectiva del ítem a, anterior al que vamos a analizar. En ese momento, se analizaron las estrategias de tres estudiantes: Paloma (fragmento que analizamos en el episodio anterior), Valentina y Leandro. Luego de trabajar con cada una de las tres resoluciones, la profesora, apoyada en frases e ideas que les estudiantes pusieron en juego al resolver, propuso nombres para dos de las estrategias: "la estrategia del factor", la de Paloma, y "la estrategia de las veces"[40], la de Leandro.

Muy sintéticamente, diremos que "la estrategia del factor" se identificó a partir de la estrategia de Paloma. Se tomó la expresión que quedó escrita en el pizarrón (ver la parte superior de la Figura 6, en la página 114) como un ejemplo de esta estrategia y, diferenciándola de otras que también se analizaron, se la identificó como una que "sólo tiene multiplicaciones, factores". En forma general, podríamos precisarla como la estrategia de descomponer en factores a los componentes multiplicativos de un producto, para luego multiplicar convenientemente los nuevos factores y armar el candidato a divisor.

En cambio, "la estrategia de las veces" se identificó a partir de la resolución de Leandro, quien propuso pensar 423 x 7 como la suma de 423 veces el 7, lo que lo habilitó a escribir la expresión equivalente 420 x 7 +3 x 7. El alumno se apoyó luego en que 420 = 140 x 3 para concluir que ambos sumandos de la última expresión son múltiplos de 21. Esta estrategia se caracterizaría por la descomposición aditiva de uno de los factores del producto original, para luego distribuir el otro factor con los dos sumandos. Aclaramos que les estudiantes no conocían formalmente la propiedad distributiva[41] del producto respecto de la suma o resta, pero recurrieron a pensar la multiplicación como sumas reiteradas (el producto "$\boldsymbol{m \cdot n}$" se piensa como "la suma de ***m*** veces el número ***n***" o "***n*** veces el número ***m***").

[40] Al momento de planificar con la docente habíamos anticipado la aparición de estas estrategias y la confusión que podrían generarse en algunos estudiantes entre descomponer aditiva o multiplicativamente. La decisión de ponerles nombres a estas estrategias fue tomada en el momento por la docente, teniendo en cuenta estas dificultades anticipadas.

[41] En el algoritmo tradicional de la multiplicación se pone en juego la propiedad distributiva al realizar por separado la multiplicación por la unidad, las decenas, etc. Sin embargo, no necesariamente les estudiantes la tienen presente al replicar el algoritmo.

Una vez que se analizaron las producciones del ítem a y se les puso nombre a dos de las estrategias utilizadas, la docente propuso que los ítems b y c del problema 6, se resolvieran usando alguna de estas dos estrategias. La tarea de resolver una actividad apoyándose en una estrategia desarrollada por une compañere y analizada por todo el grupo se había ido instalando a lo largo de las primeras actividades tal como habíamos planificado (ver, por ejemplo, problema 2 en el capítulo 4, p. 47); esto generó un buen escenario para que les estudiantes se involucraran en la nueva tarea dada por la profesora para los ítems b y c del problema 6.

Ahora bien, qué es lo que caracteriza a cada estrategia y qué la diferencia de la otra es aún difuso para les estudiantes. La tarea colectiva de ir precisando de qué se trata cada estrategia y de cómo apoyarse en relaciones y propiedades -que permiten resolver el problema- para acercarse a alguna de esas estrategias, se constituye como un motor de avance de las prácticas de transformar la expresión original en otra que "muestre" nueva información. Este asunto está presente en el fragmento que vamos a considerar en este episodio.

En el fragmento que recortamos y compartimos a continuación veremos cómo los intercambios entre estudiantes y entre elles y la docente juega un papel importante en la organización de las ideas de cada une y permite avanzar desde el texto argumentativo de Morena hacia una transformación de expresiones numéricas.

1. **Profesora:** *Vamos a hacer la puesta en común del b. Vamos a usar las dos estrategias para ver si es múltiplo de 45. La del factor que tienen que aparecer solo multiplicaciones y la de Leandro que es la estrategia de las veces donde puede haber multiplicaciones y sumas… y a veces restas también. ¿Quién me dice la del factor?*
2. **Morena:** *¿Factor es como lo hizo Paloma?* (se refiere a la estrategia de Paloma que analizamos en el apartado anterior)
3. **Atilio:** *Solo multiplicación…*
4. **Profesora:** *Sí la del factor es la que hizo Paloma, dale More…*
5. **Morena:** *Nosotros pusimos, es verdadero porque 30 x 3 es 90 y 90 dividido 2 es 45…* (lee lo que tiene escrito en su carpeta)
6. **Santiago:** *Pero son solamente multiplicaciones…*
7. **Morena:** *Ah no entonces no…* (piensa y reformula) *o 45 x 2 es 90* (la profesora escribe en el pizarrón)
8. **Profesora:** *Claro, vamos a ponerlo así… ¿Y ahora?* (ver Figura 8)

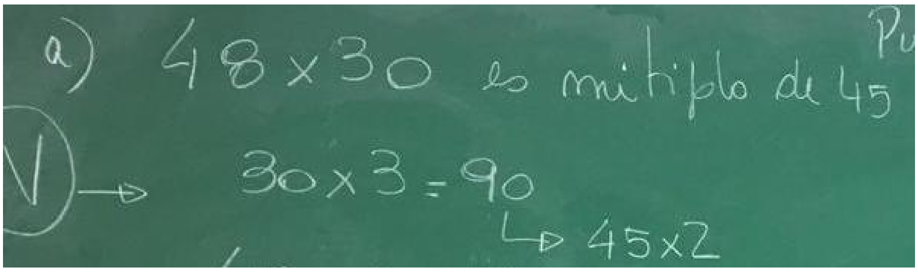


Figura 8: Pizarrón parcial que recupera algunas cuentas que se proponen en el intercambio. (en el pizarrón figura ítem a, pero es el ítem b).

9. **Morena:** *Y si estamos multiplicando 30 x un múltiplo de 3 el resultado va a ser múltiplo de 90.*
10. **Atilio:** *¿Y el 48?*
11. **Profesora:** *Y acá, ¿en dónde está el múltiplo de 3?*
12. **Lucas:** *¿Y el 48?*
13. **Profesora:** *¿Y el múltiplo de 3?*
14. **Morena:** *En el 48.*
15. **Lucas:** *¿Y cómo sabés que es múltiplo de 3?*
16. **Morena:** *Porque sabemos que es múltiplo de 3…*
17. **Lucas:** *¿Cómo?*
18. **Profesora:** *…Y escribámoslo More.*
19. **Morena:** *Lo pensé, pero no lo escribí… emmm… igual no es una multiplicación… yo lo pensé 30 que es un múltiplo y 18 también es otro múltiplo….*
20. **Profesora:** *¿30 es 3 x cuánto?*
21. **Morena y otres:** *Por 10.*
22. **Profesora:** *¿Y 18 es 3 x cuánto?*
23. **Morena y otres:** *6.*
24. **Profesora:** *Chiques, 48 es… 3 x 16.*
25. **Algunes chiques:** *Es 3 x 16.* (casi al mismo tiempo que lo dice la profesora)
26. **Profesora**: *Es 3 x 16,* (escribe en el pizarrón 48 = 3 x 16), *10 del 30 y 6 del 18… 48 es 3x16. Bien. Fijensé que acá Morena escribió todas multiplicaciones hasta ahora… pero no sabemos cómo unir todo esto… todavía no terminamos… pero sabemos que tenemos todas multiplicaciones. ¿Cómo reúno todo esto para afirmar que es múltiplo de 45?*

En el pizarrón quedaron escritas tres multiplicaciones: 30 x 3 = 90

45 x 2;

48 = 3 x 16

En la primera intervención del fragmento, la profesora propone considerar resoluciones que estuvieran apoyadas en la “estrategia del factor”. Con un poco de dudas acerca del vínculo entre su procedimiento y la “estrategia del factor”, Morena comunica su respuesta al grupo leyendo lo que escribió en su carpeta (intervenciones 5 y 9). Ya hemos analizado que detrás de sus cuentas y afirmaciones hay un razonamiento y varias propiedades que quedan implícitas en esta formulación. Esta forma de compartir su producción oculta también las intenciones que la motivaron a hacer las primeras cuentas.

Para quienes no participaron de la construcción de la respuesta de Morena, sus dichos podrían parecer un laberinto de afirmaciones verdaderas que involucran los números (no todos) del problema, pero con pocas pistas de cómo esas operaciones y afirmaciones se vinculan entre sí y permiten dar una respuesta. En lo que comparte oralmente, Morena no agrega ninguna de estas pistas y su relato queda muy apegado a su producción escrita. Vemos aquí algunas diferencias importantes con la forma en que Paloma (ver episodio 4) compartió su producción del ítem a al grupo: ella no se limitó a leer su texto escrito, sino que agregó palabras e ideas que lo completaban y compartió preguntas que se había hecho que ayudaron a entender la forma en que abordó la tarea. Estamos en un escenario muy diferente cuando Morena comparte su producción con el grupo.

En los intercambios que siguen aparecen cuestionamientos por parte de otres estudiantes y de la docente:

- ✓ Atilio y Santiago: *pero son solamente multiplicaciones…* (intervenciones 3y 6)
- ✓ Atilio y Lucas: *¿y el 48?* (intervenciones 10 y 12)
- ✓ Profesora: *¿y el múltiplo de 3?* (intervenciones 11 y 13)

Con su intervención Santiago pareciera resaltar que la estrategia de su compañera, al proponer una división, no cumple con lo "acordado" y recordado al iniciar la discusión colectiva: *en la estrategia del factor sólo pueden aparecer multiplicaciones*. Ante este cuestionamiento Morena reformula rápidamente y señala que 90 es 45 x 2. La exigencia de escribir "solo multiplicaciones" obliga a les estudiantes a transformar otras operaciones en multiplicaciones (la división, en este caso o alguna combinación que implique sumas, como veremos más adelante). Esas otras operaciones quedarían como cálculos "privados" o auxiliares que se pueden hacer "oficiales" si se transforman en multiplicaciones.

Atilio y Lucas, en cambio, parecen estar atentos a que la justificación que aporta Morena no incluye a uno de los factores (48) de la expresión original. Estos estudiantes movilizan una idea que se fue construyendo a partir del trabajo con ítems anteriores y con el problema anterior (ver apartado 5.1): para estudiar si un producto (expresado con dos factores) es múltiplo de un número, es necesario considerar los dos factores. Así, pareciera que para ellos los argumentos tienen que hacer explícita esta idea.

En las intervenciones 11 y 13 la profesora pregunta por el múltiplo de 3 al que Morena hace referencia y que no está mencionando. En la interacción, esta pregunta se solapa con la pregunta de Atilio y Lucas sobre el factor 48. Si bien son dos preguntas diferentes, la estudiante responde a ambas en la línea 14: el múltiplo de 3 lo encuentra en el 48. Ante la demanda de Lucas de por qué ocurre esto, Morena anticipa que no lo pensó con una multiplicación (intervención 19).

Vemos en esta escena dos asuntos que nos parecen importantes en el proceso de construcción de esta “estrategia del factor”.

Por un lado, es la interacción con sus compañeres y la docente la que ayuda a que Morena explicite algunas relaciones que quedaban implícitas en su resolución; es probable que para ella fuera evidente que se refería al 48 al mencionar “un múltiplo de 3”. Son sus compañeres quienes además llaman la atención de que esto último necesita una justificación.

Por otro, creemos que el “aviso” de Morena sobre que su justificación de que el 48 es múltiplo de 3, no contempla una multiplicación es también producto de los acuerdos colectivos que se fueron negociando (la estrategia del factor tiene sólo multiplicaciones). A partir de la intervención 19 de la profesora, la alumna cuenta que pensó que 30 y 18 son múltiplos de 3. Esto permite a la docente, acompañada por algunes estudiantes, reconstruir rápidamente (hasta la intervención 26) al 48 como 3x16 y escribe esta última cuenta en el pizarrón. Nos interesa recortar dos asuntos en relación con la escritura sobre los cuales vamos a profundizar a continuación:

A-. La descomposición que propone la profesora no es necesaria según la estrategia que desarrolla Morena.

B-. La profesora no escribe parte del proceso de reconstrucción y comunica que el razonamiento de Morena, que incluye descomposiciones aditivas, se puede transformar en una descomposición multiplicativa.

A- La descomposición que propone la profesora no es necesaria según la estrategia que desarrolla Morena.

El análisis que realizamos sobre el razonamiento de Morena nos muestra que para ella sólo es necesario explicar que 48 es múltiplo de 3 para concluir que el producto es múltiplo de 90 y “por ende también de 45”. Apoyándose en un cálculo auxiliar (30 + 18=48) Morena justifica que 48 es múltiplo de 3 con un argumento discursivo que se promovió y sostuvo durante las clases anteriores: la suma de múltiplos de 3 da múltiplo de 3. Para esta argumentación no es necesario identificar de qué múltiplo de 3 se trata. El factor 16 no forma parte de su argumentación.

Ahora bien, la profesora toma esa descomposición aditiva para cambiarla por una descomposición que muestre el factor 3. Desde el punto de vista de la profesora, el objetivo de ese cambio está claro: usar ambos factores del 48 (el 3 y el 16) para transformar la expresión original en otra equivalente que muestre el factor 90 (y hacia el final, el factor 45). En cambio, Morena o alguien que hubiera trabajado con una estrategia similar a la de ella, podría no comprender las razones por las que el argumento de sumar múltiplos de 3 no es tomado como suficiente por la docente: ¿por qué no alcanza con mostrar que 48 es suma de dos múltiplos de 3?, ¿por qué se necesita otro tipo de argumento?, ¿por qué es necesario escribir al 48 como 3 x “algo”? Más en general: ¿cuándo se puede usar la propiedad de que la suma de dos múltiplos de un número también es múltiplo de ese número sin necesidad de encontrar de qué múltiplo se trata? ¿en qué casos es suficiente argumentar que un número es múltiplo de otro?, ¿cuál es el criterio que determina qué hay que seguir haciendo cuentas?, etc. Son preguntas que seguramente están en el ambiente y no serán respondidas explícitamente; cada estudiante va a ir encontrando, en diferentes momentos del trabajo en la secuencia, elementos para arribar a unas respuestas.

Si bien Morena acepta que, en este momento, se trata de expresar las relaciones con productos, entendemos que esta exigencia puede resultar arbitraria para ella en la medida en que para su razonamiento no son necesarias.

Si se hubiera tomado la idea general de Morena (48 es múltiplo de 3) y se hubiera intentado plasmarla en la escritura de cálculos en el pizarrón, partiendo de la cuenta original, hubiera quedado escrito algo como lo siguiente:

48 x 30 = 3 x "algún número" x 30 = 90 x "algún número"

y como 90 = 2 x 45,

entonces 48 x 30 = 2x45 x "algún número",

entonces 48 x 30 es múltiplo de 45.

Estas menciones a "*algún número*", que aparecen como factores en el medio de las cuentas, implican un grado de generalidad que podría resultar complejo para algunes estudiantes y exceder el tratamiento que la profesora contemplaba en su proyecto de enseñanza.

B - La profesora no escribe parte del proceso de reconstrucción y comunica que el razonamiento de Morena, que incluye descomposiciones aditivas, se puede transformar en una descomposición multiplicativa

El proceso que va desde la descomposición aditiva que propone Morena del 48 (30+18) hasta lo que escribe la profesora (48 = 3 x 16) requiere de varios pasos que quedan en el intercambio oral. No queda registro escrito de las igualdades intermedias 48 = 30 + 18 = 3 x 10 + 3 x 6 = 3 x 16.

La docente propuso poner nombre a las estrategias "de las veces y del factor" con la intencionalidad didáctica de ofrecer a sus estudiantes palabras e ideas que los ayudaran a identificar y distinguir ambas formas de abordar el problema que se apoyan en distintos sentidos de la multiplicación. Tomar la descomposición aditiva de Morena como parte de la producción escrita, hubiera acercado la resolución a la "estrategia de las veces". Es probable que la decisión de la docente de no escribir todo el proceso se relacione con la intención de que quedaran claras las diferencias entre ambas estrategias.

Nuevamente, la noción de Yackel y Cobb (1996) de normas sociomatemáticas, nos parece fértil para comprender mejor la trama en la cual se tejen los intercambios en el espacio colectivo que consideramos en este episodio. Entendemos que las normas sociomatemáticas que regulan el trabajo son sostenidas por les interlocutores cuando intentan interactuar con una producción ajena y exigen su cumplimiento; como vimos en este fragmento, varies estudiantes reclaman el cumplimiento de la norma "que haya sólo multiplicaciones en el procedimiento" (Morena expresa 90: 2 = 45 y, ante el reclamo de sus compañeres, la cambia por 90 = 45 x 2, ajustándose a la norma). Otras veces, puede ser le autore quien advierte que su producción está por fuera de una norma (Morena informa que no pensó con multiplicaciones que 48 es múltiplo de 3). Las normas no son claras y el propio uso las va regulando y delineando. ¿Qué significa que hay que trabajar sólo con multiplicaciones? En este episodio, los intercambios colectivos ayudan a les estudiantes a vislumbrar que se puede llegar a la escritura de una multiplicación partiendo de cálculos “no permitidos”. El no cumplimiento de la norma puede ser un buen punto de partida.

Volviendo a la escena del aula, luego de varios intercambios que van de las intervenciones 27 hasta la 44, Morena y otres estudiantes van respondiendo a preguntas parciales de la profesora, gracias a las cuales, partiendo del producto inicial 48 x 30 se escriben en el pizarrón cálculos equivalentes hasta hacer aparecer el 45 como factor (ver última línea de la Figura 9). Para hacer esto la profesora toma las cuentas ya escritas en el pizarrón que recogen las ideas originales de Morena. No analizaremos estos intercambios porque los encontramos similares a los que encontramos en el episodio 4, a partir de la producción de Paloma.

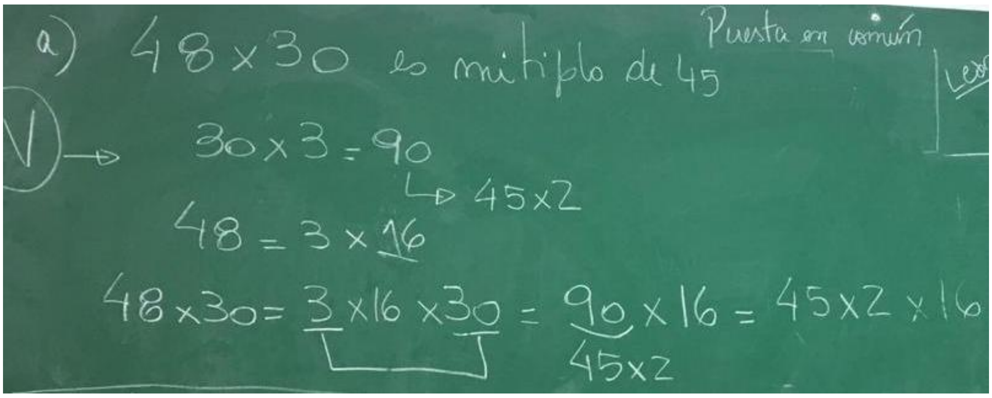


Figura 9: Pizarrón donde queda plasmada la equivalencia de cálculos.

Nos interesa detenernos en los últimos intercambios en el espacio colectivo a partir de esta producción.

44. **Profesora:** *entonces vamos a terminar 45 x 2 x 16…* (Ver Figura 9) *Fijensé las vueltas que dimos… todo escrito con multiplicaciones, sin escribir sumas. More, lo que se dio cuenta es que era fácil obtener el 90, entonces puso 3 x 30 igual 90. Esta misma cuenta*

(señalando la primera expresión del último renglón) *la escribimos así* (señalando la última expresión del último renglón). *Y ahora esta cuenta contiene al 45…. Miren todo esto, eh… esta expresión, esta expresión, esta expresión* (señalando las expresiones intermedias). *¿En cuál leen que es múltiplo de 45?*

45. **Algunes:** *En todas*
46. **Profesora:** *¿En todas? ¿en esta?* (señalando la segunda)
47. **Lucas:** *¡No, en esa no! Y… en la última*
48. **Profesora:** *En esta* (señalando la última), *eso significa que todas son múltiplos de 45, pero se deja leer en esta. Sin saber el resultado sabemos que todas dan el mismo resultado y que es múltiplo de 45.*

En estos intercambios, vemos una intención de la profesora de hacer explícito que los cálculos equivalentes muestran diferente información entre sí. Diríamos nosotras que está poniendo en juego la diferencia entre sentido y denotación de una escritura, categorías originales de Frege y retomadas por Drouhard (1992) para las expresiones algebraicas. Seguramente habrá alumnes que, como Morena, pueden leer que 48 x 30 es múltiplo de 45 ya en la primera o segunda expresión de la cadena de igualdades, pero puede haber otres que no. Interpretamos que la docente quiere consensuar un criterio que permita a todes les estudiantes del grupo leer de una expresión que el resultado es múltiplo de un número dado (el criterio sería que el número aparezca como factor en la expresión). Busca que todes tengan una meta clara, construida grupalmente, que podría orientar las transformaciones necesarias para responder. El hecho de que tener clara esta meta podría orientar a les estudiantes en la elección de transformaciones pertinentes es una hipótesis de trabajo de esta tesis desde el momento de la planificación colaborativa.

Los episodios 4 y 5 nos permitieron comprender la complejidad del trabajo de la profesora cuando apunta a instalar un tipo de práctica nueva (partir de la escritura original y realizar transformaciones conservando la equivalencia, para hacer aparecer el candidato a divisor como factor). El desafío para la docente es hacer esto en diálogo con las formas de trabajo que vayan desplegando sus estudiantes. En cada episodio tomamos contacto con producciones organizadas y comunicadas con lógicas diferentes; entendemos que, en ambos casos, la profesora propone la escritura de expresiones equivalentes intentando entrelazar los aportes más recortados de les estudiantes.

CAPITÍULO 6

Reflexiones finales

En el desarrollo de esta tesis diseñamos e implementamos una propuesta de enseñanza para un aula de primer año de escuela secundaria que considere la experiencia aritmética de les estudiantes como punto de apoyo para el desarrollo de prácticas que son del orden de lo algebraico. Nuestra propuesta gira en torno a estudiar la divisibilidad de un número, dado como la expresión numérica de un cálculo que combina varias operaciones. Más precisamente, a lo largo de la secuencia y en los episodios que analizamos, se promovió la lectura de información de expresiones numéricas y, eventualmente, su transformación para obtener nueva información.

Los episodios presentados documentan la intimidad del trabajo de un grupo de estudiantes con su docente, en espacios de discusión colectiva; estudiamos la construcción en el aula de un nuevo tipo de práctica necesaria para abordar objetos y problemas que, en principio, aparecen como similares a otros ya conocidos.

Profundizar en la trama de las interacciones que se dieron en el aula nos permitió por un lado, comprender procesos de producción particulares donde se conjugan la dimensión individual y la colectiva. Por otro, pudimos entender algunas dificultades de les estudiantes ante la ruptura involucrada en la nueva tarea. Finalmente, en el estudio de las interacciones identificamos tensiones entre las producciones que les estudiantes comparten -mediadas por sus conocimientos y experiencias previas- y las intenciones de enseñanza de la docente. En este capítulo final nos proponemos poner en relieve estos asuntos que, para nosotras, emergen de los episodios estudiados. En el apartado 6.1, nos centramos en aquellos que atrapan relaciones y preguntas relativas al hacer matemático de les estudiantes. En el apartado 6.2 presentamos reflexiones centradas en la docente, la complejidad de su gestión y la comprensión de las decisiones que toma. Incluimos además, en el apartado 6.3, otras reflexiones producto de toda nuestra experiencia de campo, nuestra inmersión en el aula durante tantas clases, asuntos que trascienden los análisis desplegados en nuestros episodios.

Finalmente, en los últimos apartados reflexionamos sobre posibles contribuciones a otras investigaciones, así como sobre los interrogantes que quedan abiertos al concluir esta indagación. Incorporamos también reflexiones más personales en torno a nuestro trabajo con la docente y al trabajo docente en general.

6.1. Acerca de los conocimientos matemáticos y de las formas de hacer en matemática que emergen en los episodios estudiados

6.1.1. Un nuevo conocimiento sobre la relación de divisibilidad

En nuestra planificación, el ítem d del problema 5 estaba pensado para que les estudiantes tuvieran que trascender, al estudiar si un producto $\boldsymbol{a \cdot b}$ era divisible por un número c, la consideración de cada factor de manera separada. El hecho de identificar factores de $\boldsymbol{a}$ y factores de $\boldsymbol{b}$, para multiplicarlos y producir un múltiplo de c, se presentó como algo complejo de abordar para algunes estudiantes. Estos asuntos estuvieron presentes en los episodios 1, 2 y 3 – presentados en el apartado 5. 1 -, que involucran discusiones en torno a este ítem. En esos episodios analizamos el modo en que, en el espacio colectivo, se llega a identificar el siguiente conocimiento, nuevo para algunes estudiantes:

“puede ser que ni $\boldsymbol{a}$ ni $\boldsymbol{b}$ sea múltiplos de c, pero $\boldsymbol{a \cdot b}$ sí lo sea”

Un refinamiento de este conocimiento aparece en el aula inmerso implícitamente en la resolución de una estudiante del ítem b del problema 6 -episodio 5, presentado en el apartado 5.2.2- :

“si $\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$ es múltiplo de $\boldsymbol{d}$ entonces $\boldsymbol{a \cdot b}$ es múltiplo de $\boldsymbol{c \cdot d}$”.

En el aula no se formula esta propiedad, ni aún para los números particulares involucrados. Como hemos visto al estudiar ese episodio, la profesora realiza transformaciones del producto $\boldsymbol{a \cdot b}$ en otro equivalente en el que les estudiantes puedan identificar que es múltiplo de $\boldsymbol{c \cdot d}$, evitando un uso explícito de la propiedad. En el punto 3 de este capítulo volveremos a la relación entre argumentar con apoyo en propiedades de la divisibilidad y transformar las expresiones en otras equivalentes que permitan responder.

6.1.2. La racionalidad matemática de les estudiantes, un proceso en construcción

El cambio de posición respecto a la forma de pensar el producto ***a* · *b*** se va desplegando contra otras ideas (erróneas) que circulan también en el aula. Como vimos en el episodio 1 -apartado 5.1.1- algunes estudiantes toman por cierto el recíproco de una propiedad ya validada como verdadera (si alguno de los factores de un producto es múltiplo de un número, el producto es múltiplo de este número). A lo largo de los siguientes dos episodios rastreamos cómo llegan a aprender que esta extensión puede producir una propiedad falsa.

Nos interesa detenernos en el mecanismo productor de esa extensión:

Regla 1 de la forma: Sí ***p*** entonces ***q*,**

Regla 2 (extensión por la negativa de la regla 1) de la forma: si no ***p*** entonces no ***q***

Con ciertos contenidos para ***p*** y ***q*** cada regla puede ser verdadera o falsa. Lo que no es válido es el razonamiento que lleva a afirmar que la regla 2 es verdadera bajo la hipótesis de que la regla 1 lo es.

En el aula, por el contenido particular que tuvieron ***p*** y ***q*** (ver episodio 5.1.1) la regla 1 resulta verdadera y la 2 falsa, lo cual se configura como un contraejemplo que permite, desde la lógica matemática, invalidar el mecanismo productor de la regla 2 a la regla 1.

Ahora bien, nos interesa reflexionar sobre cómo vivieron estas cuestiones en el aula. Allí, se considera la regla 2, con el contenido particular del problema que resuelven les estudiantes (15 y 28 no son múltiplos de 10 entonces 15x28 no es múltiplo de 10). El tratamiento de este ejemplo permitió que la profesora señalara la no validez de la conclusión (15x28 no es múltiplo de 10) a partir de la hipótesis (15 y 28 no son múltiplos de 10) y al hacerlo aludió explícitamente a que lo mismo puede pasar con otros números.

Señalamos que el mecanismo productor de la regla 2 a partir de la regla 1, y el hecho de que el razonamiento que vincula la regla 1 y 2 no es válido, no fue considerado por la profesora. Al no trabajar explícitamente sobre el mecanismo productor, les estudiantes podrían volver a apelar a él y producir propiedades falsas en pos de resolver algún problema referido a otro tema del currículo. Quizás sea necesario que el mecanismo inválido vuelva a aparecer en el aula para que pueda discutirse explícitamente sobre él.

6.1.3. Cómo hacer visible *a* como factor, transformando una expresión numérica que se sabe que es divisible por *a*

En las primeras actividades que llevamos al aula en esta experiencia se movilizaron diferentes conocimientos:

- ✓ Sumas de múltiplos de ***a*** da múltiplo de ***a***.
- ✓ La relación entre la operación de multiplicación y las sumas reiteradas de un número; más precisamente, en el aula se asocia el producto $\boldsymbol{m \cdot n}$ con la suma de ***m*** veces el número ***n*** o ***n*** veces el número ***m***.

Estos conocimientos se pusieron en juego, algunas veces implícitamente y otras no tanto, en los primeros cinco problemas de la secuencia llevada al aula. De estos dos conocimientos se deduce un tercero:

- ✓ Una suma de múltiplos de un número ***a*** se puede transformar en una multiplicación que tenga a ***a*** como factor.

Para les estudiantes, que no conocen aún la propiedad distributiva, puede no resultar tan directa la relación entre estos tres conocimientos.

En el episodio 4 –apartado 5.2.1- pudimos ver una estudiante, Paloma, que en su escrito realiza esta transformación de suma de múltiplos en un producto pero la explicación oral que da a sus compañeres es confusa y es necesaria una intervención docente que ofrezca escrituras de los cálculos que ella va nombrando.

Algo diferente ocurre en el episodio 5 -apartado 5.2.2- donde identificamos que la transformación de una suma de múltiplos 3 en una multiplicación -en la que aparezca explícito el factor 3- pareciera no estar disponible para Morena que comparte su producción apelando al primer conocimiento para fundamentar que obtendrá un múltiplo. Es la profesora quien produce la transformación apoyándose en el segundo conocimiento.

Las dificultades de Paloma para expresar la suma de múltiplos de ***a*** como un producto que tenga a ***a*** como factor, y la no disponibilidad de Morena de este recurso dan cuenta de que esta estrategia está en proceso de elaboración. Como vimos, fue necesaria la participación de la docente para que este tipo de transformación fuera atrapable por todo el grupo de estudiantes. Señalemos sin embargo que, en ambos casos, hubo una buena aceptación del grupo que entendemos puede estar relacionado con el trabajo realizado en los primeros problemas de la secuencia en los que estas ideas habían comenzado a movilizarse.

Si bien este tercer conocimiento puede verse como una aplicación de la propiedad distributiva al leer de derecha a izquierda los dos términos de la igualdad $\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$, los episodios analizados nos permiten conjeturar que el trabajo realizado hasta acá puede ser un buen punto de apoyo para la comprensión y formulación de esta propiedad en el campo de los números naturales.

6.1.4. "Ser múltiplo de", una relación entre números que no depende de las representaciones

En el primer episodio analizado -apartado 5.1.1- documentamos las ideas de dos estudiantes que plantean un *dilema* frente afirmaciones contradictorias a las que llegaban con dos representaciones diferentes de un número: los estudiantes, en relación con una multiplicación, afirman que haciendo la cuenta es múltiplo de 10 pero sin hacerla, no lo es.

¿Estarían pensando que la relación de que un número ***a*** sea múltiplo de otro depende de la representación particular que se tenga de ***a***? Si bien les estudiantes mencionan un "dilema" porque hay algo que no termina de cerrarles, esta incomodidad no los lleva a analizar si las afirmaciones que enuncian son verdaderas y dejan el asunto en manos de la docente y de sus compañeres.

De hecho, hay propiedades que sí dependen de las representaciones. Un número puede ser capicúa escrito en el sistema decimal de representaciones, pero dejar de serlo si lo escribimos en otra base. Y el criterio de divisibilidad por 3 - "un número es divisible por 3 si y solamente si la suma de sus cifras lo es" - es un condicional que liga una propiedad del número con una propiedad de la representación en el sistema decimal del mismo.

Señalamos estas ideas ya que un objetivo central de este trayecto de enseñanza es que les estudiantes aprendan que la relación de divisibilidad es inherente al número y no depende de la representación. Por eso puede estudiarse a partir de cualquier representación de él. Detrás de estas ideas, estaría la noción de equivalencia de expresiones numéricas y la posibilidad de modificar el sentido de la escritura conservando la denotación (Drouhard, 1992)

6.1.5. Nuevos significados para la equivalencia de expresiones numéricas

Les estudiantes entran al trabajo con estos problemas con algunas ideas acerca de la posibilidad de descomponer (en sumas o productos) un número. Y también de componer multiplicaciones y sumas para obtener un resultado. De hecho, los primeros problemas de la secuencia mueven estas ideas. Lo que enfrentan les estudiantes en los episodios que analizamos es, ante una tarea determinada, la posibilidad y la necesidad de hacer encadenadamente los dos movimientos: la descomposición de una multiplicación y la composición en una nueva multiplicación. Pero no para todes les estudiantes está habilitado ese doble movimiento. En el episodio 3 -apartado 5.1.3- varies estudiantes se comprometen en la "búsqueda del 15 faltante" en una expresión numérica igual a otra que lo tiene como factor: necesitan ver el 15 como divisor de alguno de los nuevos factores o ver un 3 y un 5 como factores para componer el 15. En los intercambios algunes estudiantes explicitan y comparten una idea "*No está haciendo la misma cuenta… está haciendo otra cuenta para llegar al mismo resultado*" que instala en el aula una definición de expresiones numéricas equivalentes. En los episodios 4 y 5 -apartados 5.2.1 y 5.2.2- la profesora enriquece esta noción al proponer a les estudiantes que identifiquen diferentes informaciones en expresiones equivalentes.

6.1.6. Aprender a leer lo pertinente

En el capítulo 4, al presentar la planificación, hemos dicho que las actividades de nuestra propuesta tenían como uno de sus objetivos que les estudiantes aprendieran a transformar una expresión en otra equivalente para leer nueva información. Ahora bien, en los episodios 2 y 3 vemos que la docente tiene que ayudar a sus estudiantes a mirar una expresión de cierta manera y descartar otros modos también correctos de mirarla. Es decir, tienen que enseñar a leer “información pertinente”. No se trata solamente de enseñar a transformar una expresión en otra equivalente para leer diferente información en cada una de estas expresiones que denotan el mismo objeto, sino que se trata también de enseñar a seleccionar, entre las diferentes informaciones que se pueden leer de una misma expresión aquellas pertinentes para resolver el problema.

Arcavi (1994) en su conducta 2 incluye la habilidad de realizar una transformación teniendo como meta la lectura. Se trata de aprender a ver qué modelo sirve, qué se tiene que transformar para lograr -entre todas las posibles expresiones equivalentes- una que resulte pertinente para la tarea que hay que abordar, para la pregunta que hay que responder. Las transformaciones se realizan en pos de lo que se quiere leer. Al enunciar esto Arcavi se refiere a un sujeto que produce una transformación para leer algo. En otro escenario, cuando la escritura viene dada como dato o cuando la produjo une compañere, se trata de aprender a leer, qué leer y cómo leerlo en vínculo con un problema.

La escritura aloja la posibilidad de leer diferentes informaciones, pero no todos los sujetos leen lo mismo. Dos estudiantes frente a la misma escritura y ante la misma tarea pueden leer informaciones diferentes. La idea de que distintas escrituras equivalentes cada una aporta información diferente oculta el hecho de que una sola expresión, ya ella misma, porta diferente información.

Así vemos que a las preguntas que teníamos originalmente sobre la transformación de expresiones, - “qué transformar” “para qué transformar” y “cómo transformar” - se suman también aquellas relacionadas a la lectura de información de expresiones: ¿qué información leer de una expresión? ¿qué información posible de leer de una expresión será un aporte para resolver un problema? Se trata de un aprendizaje que se va transitando en vínculo con las tareas a resolver. Los episodios que consideramos en nuestro estudio nos muestran un trecho de ese tránsito.

6.1.7. La transformación de expresiones numéricas en la construcción de una respuesta y de un argumento para validarla

En los dos problemas que consideramos en los cinco episodios, el uso de algunas propiedades aritméticas permite tanto arribar a una respuesta como validarla. Es el caso de la producción de Morena en el episodio 5 (apartado 5.2.2). En ese episodio identificamos que ella tiene un buen manejo de varias propiedades que vinculan la relación de "ser múltiplo de" con las operaciones aritméticas - por ejemplo, "Si $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ entonces "$\boldsymbol{a}\cdot$múltiplo de $\boldsymbol{b}$" es múltiplo de $\boldsymbol{c}$" *y* "Si $\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es múltiplo de $\boldsymbol{S}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es múltiplo de $\boldsymbol{S}$"- y que, posiblemente, no son manejadas por la mayoría de les estudiantes.

"Ser múltiplo de" es una relación entre dos números que no es simétrica. Les estudiantes conocen que hay una direccionalidad en la relación pero, muchas veces, no la tienen en cuenta cuando intentan argumentar su resolución. Este tipo de dificultad se hace más compleja frente a estrategias como la de Morena que tejen de manera implícita diferentes propiedades de divisibilidad.

Los escritos de la docente, de acuerdo con su proyecto de enseñanza, van plasmando las ideas de Morena en transformaciones de la expresión numérica dada, de modo de arribar a la respuesta leyendo información de la última expresión numérica producida (ver Figura 9, p. 129). Las propiedades que utiliza Morena en su escrito argumentativo ya no son necesarias para validar la respuesta a la que se arriba. Las transformaciones de las expresiones numéricas sólo se apoyan en las propiedades conmutativa y asociativa del producto y la descomposición - y recomposición - de un número en dos factores. El trabajo algebraico de transformación de una expresión numérica en otra equivalente, que está en el corazón de nuestra propuesta, se va constituyendo en un modo sistemático de trabajo más allá de la falta de control de algunes estudiantes en relación con propiedades relativas a la divisibilidad.

6.2. Le docente en sus encrucijadas

En esta tesis documentamos distintas tensiones que atraviesa una docente que, en pos de promover la autonomía en el trabajo de sus estudiantes, busca alejarse de escenas en las que explicite lo que hay que hacer.

6.2.1. Tensión entre dejar margen de maniobra para les alumnes y precisar lo que se pide/se pregunta

Las escenas analizadas en el apartado 5.1 -episodios 1, 2 y 3- nos muestran estudiantes que tienen que abordar, de una nueva manera, un problema que aparentemente es como otros ya resueltos: su enunciado se presenta similar, pero las técnicas desarrolladas en problemas anteriores son ahora insuficientes. En particular, en el episodio 2, analizamos las intervenciones de la profesora y las tensiones que la atraviesan para decidir el contenido de estas.

En sus intervenciones, la docente formula preguntas que intentan preservar un margen de decisiones para les estudiantes al resolver el problema. Ofrece ayudas - por ejemplo, las referencias a "como se hizo en el problema anterior", o a que "se están usando multiplicaciones"- que muchos estudiantes interpretan en un sentido diferente al que la docente espera, cercano a lo que elles ya conocen. Las respuestas de elles encajan completamente en el abanico de interpretaciones posibles, pero se alejan de las intenciones de las preguntas.

Si la profesora precisa el contenido de sus pistas, si ofrece relaciones más claras para sus estudiantes, puede estar cerca de decir lo que hay que hacer y, en ese sentido, dejar poco margen de decisión y autonomía para elles.

Señalamos que, a pesar de su intención de trabajar con lo que sus estudiantes proponen, ante la dispersión de respuestas, la profesora tiene la necesidad de elegir qué ideas va a analizar colectivamente y cuáles no. La selección cuidadosa de estrategias se le hace necesaria por tratarse de un primer problema que demanda un cambio en el tipo de práctica en el cual quiere involucrar a todes sus estudiantes. Las repreguntas que realiza a partir de las respuestas que selecciona van achicando el margen de maniobra de sus alumnes para responder y guiando la resolución (ver episodio 2, apartado 5.1.2).

Nos preguntamos acerca de las respuestas no consideradas por la profesora. Tomar las respuestas erróneas para trabajarlas demandaría un tiempo que la dinámica escolar no permite. Además, considerarlas como objeto colectivo de discusión abriría un paréntesis, una bifurcación en relación con aquello que quiere que sus alumnes aprendan y podría ser confuso para muches estudiantes. Entendemos que la profesora elige pensando que habrá otras instancias para ir tratando paulatinamente las estrategias que no toma de les estudiantes (algunas correctas pero muy complejas de ser tratadas en un primer momento).

Ahora bien, seguir las ideas que paso a paso se van consensuando hasta llegar a una cierta descomposición multiplicativa de la expresión no garantiza que les estudiantes puedan realizar la recomposición necesaria para finalizar; de hecho no logran hacerlo como puede verse en el episodio 3 -apartado 5.1.3-. Pensamos que cuando les estudiantes logren mayor protagonismo en la toma decisiones para realizar una descomposición tendrán más presente, en ese momento, la composición a la que se apunta.

6.2.2. El desafío de instalar una nueva práctica a partir de producciones con rasgos muy personales de algunes estudiantes

En los episodios 4 y 5 -apartado 5.2- consideramos producciones escritas e interacciones colectivas que tienen lugar cuando les estudiantes se enfrentan a un nuevo problema que plantea un desafío similar al analizado en los episodios anteriores. El estudio que realizamos en estos episodios nos permitió comprender la complejidad del trabajo de la profesora cuando apunta a instalar un tipo de práctica nueva: partir de la escritura de una expresión numérica y realizar transformaciones conservando la equivalencia, para hacer aparecer el candidato a divisor como factor.

En cada uno de estos episodios tomamos contacto con producciones muy personales, organizadas y comunicadas con lógicas diferentes. El desafío para la docente es instalar la nueva práctica en diálogo con las formas de trabajo que desplegaron sus estudiantes. Entendemos que, en ambos casos, la escritura de expresiones equivalentes que ella propone va tejiendo una red de relaciones en la cual las ideas que sostienen cada producción analizada se hacen más comprensibles para todes.

6.2.3. La toma de decisión docente frente a escritos particulares de estudiantes, asumiendo el valor intrínseco de compartirlas en el espacio público

En la propuesta de enseñanza, los escritos juegan un lugar central. Queremos que les estudiantes se involucren en un proceso de transformación de la escritura de la expresión en otra equivalente. Sabemos que los primeros pasos de les estudiantes en este proceso serán personales, imprecisos, complejos de comprender para les otres. Se pretende que los escritos se vayan precisando, mejorando a medida que la propuesta avanza. En este sentido aparece un problema para le docente: cada vez deberá tomar la decisión de hasta qué punto socializar un escrito, trabajarlo con todo el grupo de estudiantes, pensando si eso será productivo para los fines que quiere lograr. En particular, en el episodio de Paloma (apartado 5.2.1), si la docente hubiera socializado su texto tal cual lo escribió Paloma, probablemente, habría resultado muy complejo de comprender para estudiantes que recién están comenzando a identificar qué tipo de transformación es necesaria para resolver la tarea. La profesora eligió no hacerlo y dar la palabra a Paloma; y el escrito con el interactúan les estudiantes, si bien recoge las ideas de la alumna, está mediado por la intervención docente.

6.3. Otras reflexiones sobre la clase de matemática

En este apartado compartimos reflexiones generales sobre el trabajo en el aula de matemática. Son reflexiones producto de nuestra inmersión en el aula durante todo el desarrollo de la secuencia de actividades y no se desprenden solamente de los episodios presentados en el capítulo 5.

6.3.1. Asuntos del orden de lo normativo que regularon el trabajo matemático de les estudiantes

En el trabajo de les estudiantes con las actividades se fueron estableciendo algunas normas socio-matemáticas, en el sentido de Yackel y Cobb (1996), algunas concernientes al trabajo matemático en general y otras de carácter muy local referidas a reglas de juego que establecía la docente para resolver ciertos problemas. Por ejemplo:

-. La condición de no realizar “la cuenta” indicada para arribar a una respuesta.

-. Resolver un problema usando una determinada estrategia (la “del factor” o la “de las veces”, ver apartado 5.2).

Como vimos en los episodios presentados y también en el desarrollo en el aula de los primeros problemas de la secuencia -que presenciamos-, la defensa de algunes estudiantes de aspectos normativos -aún los de carácter muy local- resultó fértil para la producción de conocimientos por partes de otres estudiantes. Estos hechos nos permiten interpelar una cierta dicotomía que podría pensarse entre responder a ciertas reglas -externas- impuestas por la enseñanza y producir matemática con autonomía.

6.3.2. Acerca de las maneras de hablar en el aula como asunto a tener en cuenta desde una enseñanza que busca incluir

En el aula, pensada como una comunidad de producción matemática, se va construyendo un lenguaje, un modo de hablar, propio de esa comunidad y también de cada zona de trabajo que se aborda (con su tipo de problemas, sus técnicas y los objetos y propiedades matemáticas involucradas).

En nuestra experiencia, la forma en la que la docente expresa ciertas ideas, teniendo como mira la inclusión, retoma a menudo las formas más coloquiales de sus estudiantes (*agarramos el 5 y lo juntamos con el 2*) y se distancia del uso de un lenguaje más formal (no explicita, por ejemplo, las propiedades asociativa y conmutativa que están implícitas en la frase recién referida), entendiendo que con eso podría dejar afuera a parte de su clase. Ahora bien, observamos en muchos momentos que estas formas tan coloquiales pueden alojar interpretaciones muy variadas y también dejar afuera a estudiantes que no terminan de comprender el significado preciso de esas afirmaciones.

La experiencia y los casos analizados nos muestran la complejidad de la gestión docente con relación al lenguaje que se va desplegando. Un asunto relevante refiere a la necesidad de poner atención en las ambigüedades que pueden contener las maneras de hablar de les estudiantes y, eventualmente, pedir mayor explicitación a les autores con la intención de precisar el sentido que van construyendo les interlocutores. En particular, para une docente, ajustar su interpretación en relación con el discurso de une estudiante resulta necesario para producir como respuesta una acción pertinente para el avance del trabajo de le estudiante y de les otres.

6.4. Perspectivas a futuro

En el trabajo que desarrollamos en esta tesis nos propusimos documentar y analizar algunos hechos del aula cuando estudiantes de primer año de escuela secundaria resuelven problemas que por un lado, movilizan conocimientos y prácticas aritméticas anteriores, y por otro, promueven un tipo de trabajo que consideramos del orden de lo algebraico.

En este desarrollo produjimos los resultados expuestos anteriormente que se inscriben en un particular: una docente particular, con estudiantes particulares, dentro de una institución concreta. Sin embargo, creemos que las cuestiones identificadas ofrecen elementos para pensar tanto las maneras en que el trabajo algebraico puede comenzar a vivir en las aulas, como cuestiones relativas de modo más general a la clase de matemática. Esperamos que lo desarrollado en esta tesis pueda contribuir a la formación de docentes y al desarrollo de nuevas investigaciones. Al respecto, identificamos diferentes planos en los que se ubican asuntos que quedan pendientes de estudio y que podrían ser abordados a futuro.

- En relación con la planificación elaborada en conjunto con la profesora que desarrollamos en el capítulo 4, los problemas 2, 3 y 4 apuntan a promover un trabajo que vincule lo que informa la cuenta de dividir (el algoritmo tradicional) y diferentes relaciones de divisibilidad entre sus elementos, formuladas algunas verbalmente y otras apoyadas en expresiones de cálculos que comportan sumas y multiplicaciones. El trabajo con este tipo de problemas fue incorporado en la propuesta a partir de una inquietud de la profesora quien, basándose en su experiencia, anticipaba que sus estudiantes se apoyarían principalmente en la división -y el algoritmo para obtener su resultado- para estudiar algunos problemas de divisibilidad. La intención era que les estudiantes pudieran aprender a leer información en torno a múltiplos y divisores cuando esta viene dada en diferentes formatos o registros de representación. En el desarrollo de esta tesis no abordamos hechos del aula que recogieran momentos de trabajo con estos problemas y quedan pendientes como una zona potente para seguir siendo estudiada.

- Por otro lado, la entrada al trabajo algebraico que proponemos en esta tesis se puede continuar con un abordaje de las expresiones algebraicas en el contexto de estudiar para qué valores de la variable una expresión resulta múltiplo de un número dado. Encontramos que no sería pertinente incorporar el trabajo con expresiones algebraicas para un primer año de escuela secundaria de la provincia de Buenos Aires. Un grupo colaborativo conformado por docentes de escuela secundaria y docentes universitarios, el Grupo Lunes (GL), del cual formo parte, elaboró una propuesta[42] para abordar esta totalidad. La desarrolló en diferentes aulas de segundo y tercer año y estamos actualmente estudiando su funcionamiento. Los asuntos que identificamos en el análisis del campo de esta tesis y las reflexiones que fuimos elaborando alimentaron la producción de esa propuesta diseñada por el grupo colaborativo, que consta de una primera parte de trabajo con expresiones numéricas- bastante diferente al que presentamos en esta tesis- y una segunda parte que plantea un trabajo con expresiones algebraicas. En la propuesta del GL no se presentan situaciones, como los problemas 5 y 6 de este trabajo, en las que les estudiantes necesiten decidir si un producto es múltiplo de un número cuando ninguno de sus factores lo sea.

- Un tercer plano por abordar en el futuro es el vínculo entre esta propuesta y otras vías de entrada al álgebra. Hay un tipo de actividad, con cierta vigencia en parte del sistema educativo de nuestro país[43], que toma a la generalización como vía de entrada al álgebra: la producción de fórmulas para contar colecciones. Este tipo de propuesta se apoya en la noción de fórmula concebida tanto como el modelo de una situación como así también el reflejo de un proceso de cálculo (Sessa, 2005). En las actividades presentes en los diseños curriculares y algunos textos escolares, les estudiantes tienen que encontrar estrategias generales de cálculos que les permitan contar la cantidad de elementos de una colección y producir expresiones numéricas y fórmulas (expresiones

[42] La propuesta del GL se encuentra sucintamente presentada en el artículo “Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética” del volumen 12, de la Revista Urania.
https://drive.google.com/file/d/11IZKDOR9tKsLb6cJNm8Y9tAU1GvlYfKB/view
[43] Propuestas editoriales, Diseños curriculares de algunas jurisdicciones del país.

algebraicas) que sean modelo de esa estrategia. Vemos algunos puntos en común entre este tipo de actividades, las que se diseñaron en el contexto de esta tesis y las que estudia el GL: las expresiones numéricas y la noción de equivalencia de expresiones son un objeto de trabajo central en los tres estudios. En las expresiones algebraicas -que no abordamos en nuestro trabajo de tesis, pero sí las actividades de fórmulas para contar colecciones y en la propuesta del GL- la letra es considerada una variable. Queda pendiente estudiar el vínculo entre estas zonas: ¿qué diferentes sentidos del trabajo algebraico con expresiones equivalentes -numéricas y algebraicas- se construyen en cada una? ¿qué aspectos diferentes de la noción de variable se ponen en juego, y como se vinculan, entre las actividades de fórmulas para contar colecciones y las de la propuesta del GL?

Asumiendo que ambas zonas son potentes y necesarias de ser trabajadas en el aula, nos preguntamos cuáles serían las implicancias de comenzar por una u otra y cuáles serían los puntos de apoyo que puede ofrecer una zona para abordar el trabajo en la otra.

Acerca del trabajo colaborativo que pudimos sostener en el proceso de producción de esta tesis

Al final de este camino quiero volver a destacar el valor que tuvieron, para mi estudio y mi formación, los momentos de producción en conjunto con la profesora que llevó al aula la propuesta de enseñanza. Planificar con ella y compartir, en esa instancia, sus inquietudes y preocupaciones por los aprendizajes de sus estudiantes; estar en el aula, observando cómo se desarrollaba aquello que se había planificado con minuciosidad y colaborando de manera cómplice en la toma de decisiones que imponía la marcha de los acontecimientos en el aula, fueron instancias que aportaron a mi formación didáctica, a mi escucha y sensibilidad en el trabajo con docentes, mucho más allá de la producción de esta tesis.

Pero es necesario mencionar las limitaciones que tuvo el espacio de trabajo compartido. Nos hubiera gustado compartir momentos de trabajo fuera del aula mientras transcurría la experiencia y en la etapa posterior. Sin embargo, las condiciones que impone el trabajo docente, las muchas cuestiones que ella tenía que atender, limitaron nuestras interacciones a comentarios "de pasillo" antes o después de cada clase y nos resultó imposible sostener la colaboración - para incluir su mirada en el análisis realizado- una vez finalizada la experiencia. La docente no participó de las decisiones sobre los recortes y la elaboración de los episodios, pero sí compartimos con ella -de manera informal y en otros ámbitos de trabajo común- los análisis realizados.

Estas limitaciones que encontramos para sostener la interacción nos llevan a pensar en las difíciles condiciones del trabajo docente y la soledad en el que generalmente transcurre. En el contexto de esta tesis queremos reafirmar que la enseñanza es algo que debe ser pensado colectivamente, que se necesitan cambios en las políticas para entender que la tarea docente no se circunscribe a las acciones individuales de planificar y llevar adelante la enseñanza, sino que resulta urgente concebir, como parte de la tarea, momentos de estudio, de experimentación y de análisis con otres. Está urgencia está dada por la necesidad de mejora que muchos actores reclamamos para el sistema educativo en general y la enseñanza de la matemática en particular.

Referencias Bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol sense : Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.

Arcavi, A.; Drijvers, P. et Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities*. Londres : Routledge.

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques,* vol 9/3, 281- 308. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Barallobres, G. (2007). Introduction à l´algèbre par la généralisation: problèmes didactiques soulevés. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 39-44.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. Recuperado de : ⟨tel-00011697⟩

Bednarz, N. (2004.) Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics, In M. Niss, E. Emborg (eds.) *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematics Education (ICMI10*), Copenhagen, Denmark, Cédérom.

Borsani, V. y Sessa, C. (2020). Le travail sur des calculs arithmétiques comme une voie d'entrée dans l'algèbre. En Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (coords.). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* (p. 96-111). Québec : Livres en ligne du CRIRES. Recuperado de: https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-penseealgebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Brousseau, G.; (1986) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Butlen y Pezard (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du College, *Reperes – Irem,* n° 41.

Butlen y Pezard (2007) Conceptualisation en Mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand n,* n° 79, 7 - 32.

Cambriglia, Verónica. (2018). *Emergentes colectivos de generalización en la entrada al álgebra*. (Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.) Recuperado de http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n6582_Cambriglia

Carazo, P. C. M. (2006). El método de estudio de caso. *Pensamiento y gestión,* nº20.

Chevallard Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Desgagné, S. ; Bednarz, N. ; Lebuis, P. ; Poirier, L. y Couture, C. (2011). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 27, Nº 1, 33-64. Recuperado de http://id.erudit .org/iderudit/000305ar

Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

Drouhard, J.P. (2011). Semántica de las Expresiones Simbólicas Algebraicas. Notas de curso dictado en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA) en abril de 2011.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano Registros Semióticos y Apendizajes Intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang S.A.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.

Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* Énfasis. (p. 95-125). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of variable so difficult for students to understand? En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, et J. T. Zilliox (dir.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of the PME and PMENA*, vol. 1, 49- 65. Honolulu, HI

Grimaldi, V. & Itzcovich, H. (2013), Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En C. Broitman (Comp.). *Matemáticas en la escuela primaria*. Buenos aires: Paidós.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques*, 17(2), 167-210.

Grugeon-Allys, B. & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20 (3), 106–130. https://doi.org/10.7202/1055730ar

Herrera, Diego (2019) La Educación en Debate revista ¿Qué pasa con el lenguaje inclusivo en la escuela? La educación en debate nº68, Le Monde Diplomatique. Recuperado de https://editorial.unipe.edu.ar/la-educacion-en-debate/numeros-68-al-77-ano-2019

Kieran C. (1992). The learning of school algebra. In D. A. Grouws (dir.) *The Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., Ng, S.F. (2016). Survey of the State of the Art. In: Early Algebra. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2_2

Lerner, D. (2001). Didáctica y psicología: una perspectiva epistemológica. En J.A. Castorina (comp). *Desarrollos y problemas en Psicología Genética*. (p. 273 – p. 290) Buenos Aires. EUDEBA.

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mendoza, T. (2018). Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 133-154.

Mercier, A. (1994). L´approche biographique : un révélateur de la dimension a-didactique dans la relation didactique classique. En Artigue, Gras, Laborde, Tavignor y Balacheff (Eds.) *Perspectives pour la didactique des mathématiques. Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La pensée sauvage.

Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). The First Algebraic Learning: the faillure of success. En L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume IV p.107-114. Valencia: PME.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 453-461.

Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica. Historia y Cultura en los procesos educativos*. Buenos Aires: Paidós.

Roditi, E (2010). Une collaboration entre chercheurs et enseignants dans le contexte français de la didactique des mathématiques. *Education & Formation*, Université de Mons, 2010, 293, p.199-210. Recuperado de ⟨halshs-00609629⟩

Sackur, C., Drouhard, J.P., Maurel, M. et Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire. *Repères IREM*, 28, 37-68.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. Tesis de doctorado. Argentina: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras

Sadovsky, P.; Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a millieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics Education*, Vol 59, 1-3, p. 85-112. Kluwer Academic Publisher.

Sadovsky, P., Quaranta, M., Itzcovich, H., Becerril, M. y García, P. (2015). Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, & D. Fridman, *Prácticas Pedagógicas y Políticas Educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense* (p. 221-250). Gonnet: Unipe: Editorial Universitaria.

Sensevy, G; Forest, D.; Quilio, S. y Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM Mathematics Education*. Vol. 45, number 7, p. 1031–1043. Recuperado de https:/DOI 10.1007/s11858-013-0532-4

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del algebra. Orígenes y Perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Squalli, H. (2015). *La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels*. In L. Theis (dir.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque de l'espace mathématique francophone (p. 346-356). Alger, Algérie.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4a ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Stauffer (2018). *Cálculo estimativo en quinto grado de la escuela primaria. Implementación de una secuencia didáctica*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Querétaro Facultad de Psicología Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas.

Vergnaud G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique. Paris: La Pensée Sauvage.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb, y H. Bauersfeld (eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (p. 163-201). Nueva York: Psychology Press.

Wertsch, J. V. (1988). Vygotsky y la formación social de la mente. Buenos Aires: Ediciones Paidós.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 390-408.

Diseños curriculares de

Pcia. De Buenos Aires

http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/secundaria1.pdf

Pcia de Córdoba

https://documentos.cordoba.gob.ar/MUNCBA/AreasGob/Edu/DOCS/Seguimos%20con%20vos%20aprendiendo%20en%20casa/Recursos/Repositorio%20digital/Aprendizajes%20y%20contenidos%20fundamentales/nivel-secundario-y-modalidades.pdf

Pcia. De Mendoza

https://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2016/02/DCP-SECUNDARIO-BACHILLER-EN-INFORM%C3%81TICA.pdf

Ciudad de Buenos Aires:

https://buenosaires.gob.ar/sites/default/files/media/document/2017/10/26/ad4a5c873f97638ecdfa20ccb54bf6ddb7551cfe.pdf

NAP Matemática, Educación Secundaria, Ciclo Básico

https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-basico

Anexo I

En este Anexo compartimos el conjunto completo de problemas que fueron llevados al aula.

Problema 1[44]:

La ruta nacional 40 es una ruta argentina que se extiende desde Cabo Vírgenes, Santa Cruz hasta el límite con Bolivia, en la ciudad de la Quiaca, Jujuy. Tiene un total de 5194 km. En Cabo Vírgenes se encuentra un cartel con el km 0 y cada 6 km, y a lo largo de todo el recorrido, hay carteles que indican los km.

a-. Proponé 4 carteles indicadores de kilómetros.

b-. Sabiendo que en Chubut la ruta va desde el km 1324 al 1911, proponé cuatro carteles que estén en esa provincia.

c-. ¿Habrá algún cartel de la ruta 40 que indique el km 2744? Expliquen su respuesta.

Problema 2: Julieta dice que, si cuenta de 8 en 8 empezando desde el 0, nombra al número 1668. Facundo dice que eso no es posible.

a-. ¿Quién tiene razón? Expliquen su respuesta.

---

[44] Algunos de los enunciados de los problemas que forman parte de nuestra secuencia son adaptaciones nuestras de otros que se puede encontrar en libro de texto escolar *Hacer matemática 7/1* (Sessa, C. (coord.), 2015).

Luego que les estudiantes resuelven el ítem a en pequeños grupos, oralmente, se les propone:

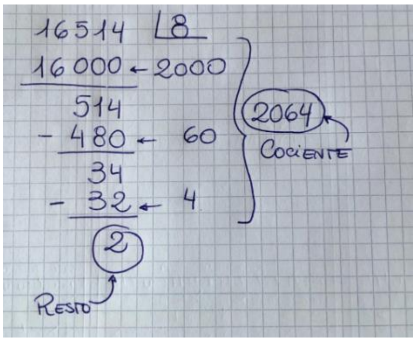
a´ -. La estrategia que usaron en este ítem, ¿se parece a alguna de las que quedaron escritas en el pizarrón sobre el ítem c del primer problema?

-. Resuelvan nuevamente el problema de manera individual con una estrategia diferente a la que usaron en el grupo.

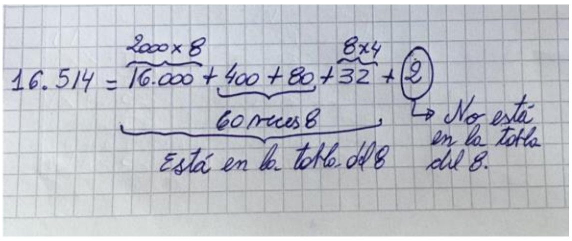
A continuación, realizan el resto de los ítems.

b.- Julieta y Facundo estudiaron si es posible que, al seguir contando de 8 en 8, se nombre al 16514. En las hojas siguientes se muestra parte de los procedimientos que usaron:

-. Facundo:



-. Julieta



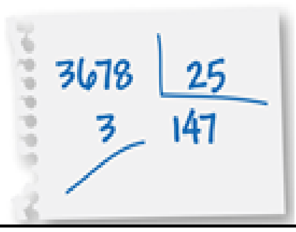
b1: Escriban una posible respuesta de Facundo y una explicación de esa respuesta.

b2: Escriban una posible respuesta de Julieta y una explicación de esa respuesta.

c-. Usá el procedimiento de Facundo o Julieta para encontrar cuál es el número que se menciona justo antes de pasarse del 16514.

d-. Usá el procedimiento de Facundo o Julieta para encontrar la cantidad de veces que se suma el número 8 justo antes de pasarse de 16514.

Problema 3: Usá la información de la cuenta de división para explicar por qué estas afirmaciones son verdaderas o falsas:



a) 3678 es divisible por 25
b) 3675 es múltiplo de 25
c) Si se suma 147 veces el número 25, se obtiene 3678
d) 3679 = 25 x 147 + 4

Problema 4:
Usá que 7151 = 7 x 1000 + 140 + 11 para decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas
a. 7151 es divisible por 7
b. 7151 = 7 x 1000 + 7 x 21 + 4
c. 7147 es múltiplo de 7
d. $\begin{array}{r|l} 7151 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 1021 \end{array}$

Problema 5: Decidan, sin hacer la cuenta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

a. 15 x 28 es múltiplo de 28

b. 15 x 28 es múltiplo de 4

c. 15 x 28 es divisible por 7

d. 15 x 28 es múltiplo de 10

Problema 6: Sin hacer las multiplicaciones que se proponen, estudien las siguientes afirmaciones

a. 423x7 es múltiplo de 21
b. 48x30 es múltiplo de 45
c. 4x15 es múltiplo de 14

Problema 7: Completen las tres frases para que sean verdaderas (sin usar ninguna de las afirmaciones del problema 5). Argumenten su decisión transformando la expresión en otra equivalente.

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = …..

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = ….

15 x 28 es múltiplo de …. porque 15 x 28 = …..

Problema 8: Decidí, sin hacer las cuentas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. ***14 x 35 es múltiplo de 14***
b. ***14 x 35 es múltiplo de 7***
c. ***15 x 12 es múltiplo de 10***
d. ***15 x 12 es múltiplo de 30***
e. ***15 x 12 es múltiplo de 24***

Problema 9: Sin hallar los resultados de los siguientes cálculos, decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

__a. 2 x 15673 + 4 da como resultado un número par__

__b. 3 x 15673 + 6 da como resultado un múltiplo de 2__

__c. 374 × 15 + 21 es múltiplo de 3__

__d. 374 x 15 + 12 es múltiplo de 6__

__e. 7 × 174 + 132 es múltiplo de 7__