Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Tesis de Grado para obtener la Licenciatura en Astronomía

# Flujos Electromagnéticos en Agujeros de Gusano Rotantes

**Autor Milos Ertola Urtubey**

Director: Daniela Pérez

Firma y aclaración del Director o Codirector: Daniela Pérez

Firma y aclaración de uno de los Jurados: Daniela Pérez

La Plata
- Año 2024 –

# Resumen

El objetivo principal de la presente tesis es investigar si un agujero de gusano rotante puede emitir un flujo de Poynting en el proceso de acreción de materia y campos magnéticos. En particular, se desea establecer si el el mecanismo de Blandford-Znajek asociado con agujeros negros en rotación puede también aplicarse a esta clase particular de espacio-tiempos.

La tesis comienza con una breve introducción de los principios fundamentales de la teoría de la Relatividad General. Se presentan algunas soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros negros. Luego, se discuten las propiedades generales de un agujero de gusano y algunas soluciones estáticas y rotantes. A los fines de esta tesis, se estudiará la solución de agujero de gusano rotante de Damour-Solodukhin. Mostramos las características más relevantes de este espacio-tiempo: localización de garganta y ergósfera, análisis de los parámetros de la solución, y cálculo de órbitas circulares estables para partículas masivas.

Posteriormente, hacemos una descripción detallada del mecanismo de Blandford-Znajek. Mostramos que, independientemente del sistema de coordenadas elegido para la descripción de un agujero negro de Kerr, el valor del flujo electromágnetico extraído mediante el mecanismo de Blandford-Znajek es el mismo.

El Capítulo 4 es el central de la tesis. Aquí definimos una topología particular para el campo magnético inmerso en la ergosfera del agujero de gusano rotante de Damour-Solodukhin. Calculamos el correspondiente flujo de energía electromagnética para una rango de valores que caracterizan la geometría del agujero de gusano. Encontramos que el flujo de Poynting es de una magnitud similar al producido por un agujero negro de Kerr.

La tesis ofrece un estudio detallado de las propiedades de una clase particular de agujero de gusano rotante. Por primera vez se muestra que esta clase de objetos son capaces de producir flujos de energía electromágnetica tal como los agujeros negros; es, pues, factible que bajo ciertas condiciones, los agujeros de gusano sean capaces de producir jets astrofísicos. En esta tesis, luego, se sientan las bases para toda una línea de investigación en agujeros de gusano que todavía no ha sido explorada.

# Abstract

The main objective of this thesis is to investigate whether a rotating wormhole can emit a Poynting flux in the process of matter accretion and magnetic field interactions. In particular, we aim to establish whether the Blandford-Znajek mechanism associated with rotating black holes can also be applied to this particular class of spacetimes.

The thesis begins with a brief introduction to the fundamental principles of General Relativity theory. Some exact solutions of the Einstein field equations representing black holes are presented. Then, the general properties of a wormhole and some static and rotating solutions are discussed. For the purposes of this thesis, the rotating wormhole solution by Damour-Solodukhin will be studied. We highlight the most relevant characteristics of this spacetime: throat and ergosphere location, analysis of solution parameters, and calculation of stable circular orbits for massive particles.

Subsequently, we provide a detailed description of the Blandford-Znajek mechanism. We demonstrate that, regardless of the coordinate system chosen to describe a Kerr black hole, the value of the electromagnetic flux extracted via the Blandford-Znajek mechanism remains the same.

Chapter 4 is the core of the thesis. Here, we define a specific topology for the magnetic field immersed in the ergosphere of the Damour-Solodukhin rotating wormhole. We calculate the corresponding electromagnetic energy flux for a range of values characterizing the wormhole geometry. We find that the Poynting flux is of a magnitude similar to that produced by a Kerr black hole.

The thesis provides a detailed study of the properties of a specific class of rotating wormholes. For the first time, it is shown that this class of objects is capable of producing electromagnetic energy flows similar to black holes; thus, it is feasible that under certain conditions, wormholes can produce astrophysical jets. This thesis lays the groundwork for an entire line of research in wormholes that has yet to be explored.

# Agradecimientos


A mis padres, Maximiliano y Eleonora, por cuidarme, aconsejarme y apoyarme siempre, especialmente durante estos 6 años de carrera.

A mis hermanas, Manon y Avril, por la confidencia y el cariño que siempre me brindan.

A Dido, Chale, Toto, Pachi y Mati, por su compañía durante este último año caótico.

A La Vagancia, y en particular, a Tomi y Nico, por hacer la carrera más divertida y amena, y por aceptarme a pesar de ser astrónomo.

A Daniela, por la dedicación e iniciativa que mostró a lo largo del último año; sin ella, este trabajo no existiría.

A mi hermano, Galo, por ser la persona con quien más momentos comparto en el día a día, brindándome apoyo de forma incondicional.

A todos los perros que han sido parte de mi vida, especialmente a esta tanda de 9, por ser mi compañía fiel durante los últimos 6 años, y aún más durante la pandemia.

# Índice general

## Acrónimos

Lista de acrónimos utilizados en esta tesis (notar que las siglas usualmente corresponden a las utilizadas en el idioma inglés):

- GR: Relatividad General (*General Relativity*)
- BH: Agujero Negro (*Black Hole*)
- WH: Agujero de Gusano (*Worm Hole*)
- ISCO: Órbita circular estable más interna (*Innermost Stable Circular Orbit*)
- GRMHD: Magnetohidrodinámica en Relatividad General (*General Relativity Magneto-hidrodynamics*
- RDSWH: Agujero de Gusano Rotante de Damour-Solodukhin (*Rotating Damour-Solodukhin Worm Hole*)
- KVF: Vector de Killing (*Killing Vector Field*)
- QNM: Modos Cuasi-Normales (*Quasi-Normal Modes*)

# Índice de figuras

# Índice de tablas

# Capítulo 1

# Introducción

Los agujeros de gusano son atajos entre diferentes regiones del espacio-tiempo. Se tratan de un tipo particular de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que no presentan un horizonte de eventos y representan un espacio conectado de forma múltiple. Éstos se los puede visualizar como un "puente" entre dos eventos del espacio-tiempo; este "puente" se caracteriza por tener un radio mínimo, denominado garganta, y en sus versiones más simplificadas, presenta dos bocas, cada una en un extremo del puente, permitiendo el paso de materia en ambas direcciones.

La idea detrás del concepto de agujero de gusano se puede rastrear hasta 1916, propuesta por el austríaco Ludwig Flamm. En 1921, el matemático alemán Hermann Weyl la planteó de manera más científica usando el término "tubos unidimensionales". Luego, en el año 1935, Albert Einstein junto a Nathan Rosen proponen la solución para agujeros de gusano, conocida como puentes de Einstein-Rosen. Posteriormente, en el año 1957, Wheeler y Misner realizan un nuevo estudio de estos objetos, dándoles por primera vez el nombre de agujero de gusano.

Luego de 30 años, el estudio de agujeros de gusano resurge con el científico Kip Thorne. Thorne cuenta en el Capítulo 14 de su libro "Black holes and Time Warps" [3] que en el año 1984, recibe una carta de Carl Sagan, en la que éste le pide ayuda con su novela, pues quería que la ciencia involucrada en la historia fuese lo más apropiada posible. Leyendo, Thorne descubre que Sagan utilizaba en la historia a un agujero negro como un medio de transporte por el espacio-tiempo, lo cuál es erróneo, debido a que, dentro de un agujero negro, un objeto en caída a la singularidad, experimentaría fuerzas de marea infinitas, y sería completamente desintegrado. Luego de considerar el problema, le propone a su colega que podría reemplazar al agujero negro por un agujero de gusano. Atraído por la problemática, pero todavía escéptico respecto a la existencia de estos objetos, Thorne publica en el año 1988 con uno de sus estudiantes, Michael Morris, el trabajo seminal sobre agujeros de gusano atravesables [4].

Este trabajo reintrodujo a los agujeros de gusano en el foco científico, impulsando el estudio de soluciones de agujeros de gusano, ya sea en Relatividad General como en Teorías Modificadas de la Gravedad [5, 6]. Además, se han propuesto soluciones de agujeros de gusano cosmológicos, esto es, agujeros de gusano dinámicos acoplados al fondo cosmológico [7, 8, 9, 10, 11].

Se han investigado las posibles manifestaciones astrofísicas asociadas a los agujeros de gusano y en qué se diferenciarían con los agujeros negros, de manera que sea posible su identificación [12]: agujeros de gusano como lentes gravitacionales [13, 14]; estudios de órbitas de estrellas en las cercanías de un potencial agujero de gusano (estas estrellas deberían ser influenciadas por objetos propagándose en el otro espacio [15, 16]; el cálculo de sombras en estos objetos [17, 18, 19]; análisis de espectros de discos de acreción [20, 21, 22, 23]; estudio de modos cuasi-normales (*quasi-normal modes*, QNM) de ondas gravitacionales en agujeros de gusano [24, 25, 26, 27].

Una posible manifestación astrofísica, hasta el momento no explorada, de los agujeros de gusano, es la ejección de flujos colimados de partículas y campos electromagnéticos, conocidos en inglés como jets. Los jets astrofísicos observados en el universo parecen estar asociados con la acreción sobre un objeto compacto rotante. Otro ingrediente que parece ser esencial, al menos para los jets relativistas, es la presencia de campos magnéticos a gran escala. En la actualidad, existen varios modelos para explicar el lanzamiento, colimación y aceleración de jets, entre los cuales, uno de los más estudiados es el mecanismo de Blandford-Znajek [28], en el cual es necesario que haya presente un objeto central rotante y una magnetosfera. En este mecanismo es la ergosfera, y no el horizonte de eventos el ingrediente fundamental tal como muestran resultados analíticos y simulaciones [29, 30, 31]. Luego, espacio-tiempos en donde haya una región ergosférica, como en el caso de agujeros de gusano rotantes, podrían producir un flujo neto de Poynting, y acaso jets relativistas.

El objetivo de este trabajo es determinar bajo qué condiciones agujeros de gusano rotantes pueden producir un flujo neto de Poynting en el proceso de acreción de materia con campos magnéticos. Luego, compararemos los resultados obtenidos con los análogos para un agujero negro de Kerr de igual masa y momento angular, de forma que podamos evaluar si la producción de jets astrofísicos es un proceso viable en agujeros de gusano.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma: en el Capítulo 2 haremos un repaso de la teoría de la Relatividad General, desarrollando los conceptos de agujero negro y agujero de gusano, centrando nuestro estudio en estos últimos. Luego, en el Capítulo 3 se desarrollará el mecanismo de Blandford-Znajek y lo aplicaremos al caso particular de un agujero negro rotante sin carga. En el Capítulo 4, elegiremos un espacio-tiempo particular que describe a un agujero de gusano rotante no cargado y se replicaran los resultados del Capítulo 3. Finalmente, cerraremos el trabajo con algunas conclusiones.

# Capítulo 2

# Agujeros de Gusano

## 2.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG) es una teoría física sobre la gravitación y los sistemas físicos que interaccionan con ésta. La RG no es una teoría acerca del espacio-tiempo; todas las teorías clásicas de campos (incluida RG) toman como supuesto al concepto de espacio-tiempo. Definimos al espacio-tiempo como **la suma ontológica de todos los eventos de todas las cosas** [32]. Para poder comprender esta definición, se debe definir **cosa**, **evento** y **suma ontológica**.

**Cosa** es un individuo con propiedades físicas. Un **evento** es un cambio en las propiedades físicas de una **cosa**. Y una **suma ontológica** es el estado de agregación de cosas o propiedades físicas. Así, todo lo que haya sucedido o vaya a suceder es representado en el espacio-tiempo simplemente como un punto sobre éste.

Como toda entidad física, se puede representar al espacio-tiempo matemáticamente, con el fin de describir cuantitativamente sus propiedades. Para ello, se supone al espacio-tiempo como una variedad 4-$D$ $\mathcal{C}^{\infty}$, diferenciable, siendo una variedad 4-$D$ un conjunto que puede ser completamente cubierto por subconjuntos de éste, los cuales tienen relaciones uno a uno con subconjuntos de $\mathcal{R}^4$, el espacio 4-dimensional de los números reales. De esta forma, cada punto de la variedad representa un evento en el espacio-tiempo.

La elección de representar al espacio-tiempo con una variedad no es trivial: a partir de un conjunto de cuatro números reales, se puede representar todo evento del espacio-tiempo, de forma independiente a la geometría del mismo.

Un concepto vital para la construcción matemática de la RG es el de tensor. Un tensor es un objeto algebraico que se representa con un arreglo multidimensional que tiene un cierto número de índices superiores e inferiores, que denominaremos $r$ y $s$. Este tensor tiene rango $(r, s)$, siendo $r$ veces contravariante y $s$ veces covariante.

Los tensores pueden expresarse en distintas bases coordenadas, pero entre estos debe haber una relación. Supongamos que se tienen dos bases coordenadas, $\{x^{\mu}\}$ y $\{x'^{\mu}\}$ y un tensor $A$ de rango $(r, s)$, que en cada una de estas bases puede ser escrito como

$$A\left(x^{\mu}\right)^{a_1,\ldots,a_r}{}_{b_1,\ldots,b_s}, \tag{2.1}$$

$$A\left(x'^{\mu}\right)^{a'_1,\ldots,a'_r}{}_{b'_1,\ldots,b'_s}. \tag{2.2}$$

Si este objeto es un tensor, entonces debe satisfacer las reglas de transformación que

$$\begin{aligned} A\left(x^{\mu}\right)^{a_1,\ldots,a_r}{}_{b_1,\ldots,b_s} &= T^{a_1}{}_{a'_1}\ldots T^{a_r}_{a'_r}S^{b'_1}{}_{b_1}\ldots S^{b'_s}_{b_s}A\left(x'^{\mu}\right)^{a'_1,\ldots,a'_r}{}_{b'_1,\ldots,b'_s}, &(2.3)\\ A\left(x'^{\mu}\right)^{a'_1,\ldots,a'_r}{}_{b'_1,\ldots,b'_s} &= T^{a'_1}{}_{a_1}\ldots T^{a'_r}_{a_r}S^{b_1}{}_{b'_1}\ldots S^{b_s}_{b'_s}A\left(x^{\mu}\right)^{a_1,\ldots,a_r}{}_{b_1,\ldots,b_s}. &(2.4)\end{aligned}$$

siendo $T^{a_i}{}_{a'_i}$ la transformación de coordenadas $\{x'^{\mu}\} \rightarrow \{x^{\mu}\}$ aplicada al índice contravariante en la posición i-ésima y $S^{b'_j}{}_{b_j}$ la transformación de coordenadas $\{x'^{\mu}\} \rightarrow \{x^{\mu}\}$ aplicada al índice covariante en la posición j-ésima.

### 2.1.1. Bases coordendas y métrica

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, cuya representación en una dada base $\{\hat{e}_{\mu}\}$ está dada por

$$\vec{u} = u^{\mu}\hat{e}_{\mu}, \tag{2.5}$$
$$\vec{v} = v^{\mu}\hat{e}_{\mu}. \tag{2.6}$$

A los elementos de la base los solemos llamar tétradas, y los definimos de la siguiente forma

$$\hat{e}_{\mu} = \lim_{\delta x^{\mu}\rightarrow 0}\frac{\delta s}{\delta x^{\mu}}. \tag{2.7}$$

Consideremos dos puntos sobre la variedad, P y Q, que se encuentran infinitesimalmente separados una distancia $\delta s$, y que su separación a lo largo de una dada coordenada $x^{\mu}$ es $dx^{\mu}$. De esta forma, $\hat{e}^{\mu}$ resulta ser el vector tangente a la curva $x^{\mu}$ en el punto P sobre la variedad.

Se define la operación producto escalar, denotada $\bullet$, entre dos vectores como

$$\vec{v}\bullet\vec{u} = (v^{\mu}\hat{e}_{\mu})\bullet(u^{\nu}\hat{e}_{\nu}) = (\hat{e}_{\mu}\bullet\hat{e}_{\nu})(v^{\mu}u^{\nu}). \tag{2.8}$$

En esta igualdad se ven dos factores: por un lado, el producto de las componentes de ambos vectores, y por otro lado el producto escalar entre los distintos elementos de la base. Es éste último del que surge el tensor métrico, definiendo

$$g_{\mu\nu} = \hat{e}_{\mu}\bullet\hat{e}_{\nu}, \tag{2.9}$$

o de forma similar

$$g^{\mu\nu} = \hat{e}^{\mu}\bullet\hat{e}^{\nu}. \tag{2.10}$$

El tensor métrico es un tensor de rango 2 que caracteriza la geometría de la variedad, y permite calcular distancias sobre ésta.

La Teoría de la Relatividad Especial se construye sobre un espacio-tiempo particular, descripto por la métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Definida ésta, y utilizando la convención de suma de Einstein, la distancia entre dos eventos de este espacio-tiempo se calcula como

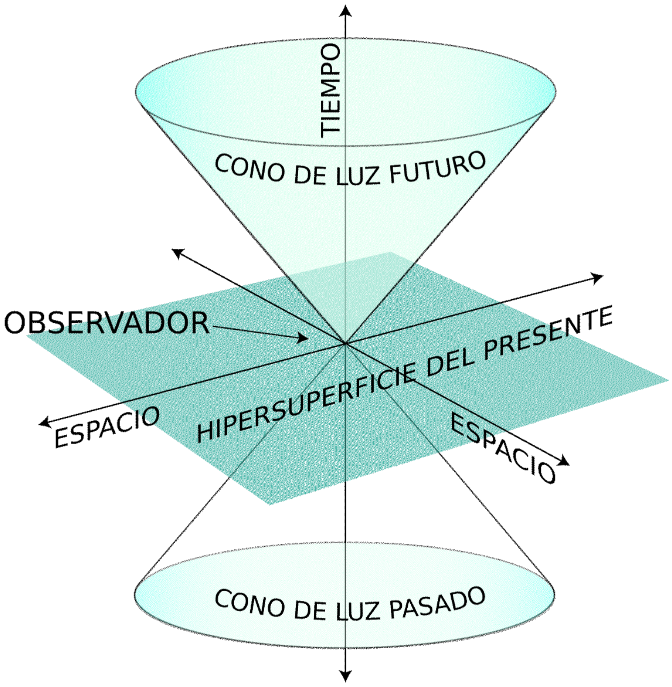



**Figura 2.1.** Cono de luz para un dado punto en el espacio-tiempo.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{2.12}$$

A las coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ se las separa en función del signo que toma el coeficiente de la métrica asociado a esa coordenada; aquellas que toman signo positivo son las coordenadas espaciales ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), mientras que la coordenada restante la asociamos a la dimensión temporal ($x^0 = ct$).

De la expresión (2.12) se infiere que $ds^2$ no es una cantidad necesariamente definida positiva, sino que esta divide al espacio-tiempo en cada punto en tres regiones: una donde se satisface $ds^2 > 0$ (región tipo espacio), otra donde se cumple $ds^2 = 0$ (región tipo luz), y una última en que $ds^2 < 0$ (región tipo tiempo), las cuales corresponden al exterior, superficie e interior del cono de 45° de apertura de la Figura 2.1. La dirección vertical se asocia a la dimensión temporal y las direcciones del plano a las espaciales. Sobre el cono de luz, sólo podrán encontrarse partículas que se muevan a la velocidad de la luz, como es el caso de los fotones. En cambio, partículas materiales que pasen por el origen del cono (observador) sólo podrán alcanzar regiones tipo tiempo, por dentro del cono.

De esta manera se establece una relación causal entre eventos; podemos hablar del "futuro" o "pasado" de un dado evento $A$, que van a ser todos los eventos que se encuentren por dentro del cono de luz superior o inferior con origen en $A$.

Una característica del espacio de Minkowski es que es *plano*: todos los conos de luz apuntan en la misma dirección, es decir, la dirección del futuro local es independiente de los coeficientes de la métrica, pues éstos son constantes. Entonces, para poder describir a la gravedad debemos introducir un espacio-tiempo pseudo-Riemanniano, donde la métrica dependa de las propiedades materiales de los sistemas físicos.

Supongamos que la variedad en cualquier punto $P$ es plana, entonces

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \tag{2.13}$$

Entonces la variedad es lo que llamamos pseudo-Riemanniana. En cambio, si $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, entonces la variedad es Riemanniana.

Si tomamos nuestra base coordenada vectorial ortonormal,

$$\hat{e}^{\mu} \bullet \hat{e}^{\nu} = \eta^{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

entonces se puede demostrar que la métrica puede usarse para subir o bajar índices,

$$g_{\mu\nu} v^{\nu} = v_{\mu}, \tag{2.15}$$
$$g^{\mu\nu} v_{\nu} = v^{\mu}; \tag{2.16}$$

y similarmente

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{2.17}$$

### 2.1.2. Principio de equivalencia

En el año 1907, Einstein introdujo el Principio de Equivalencia, el cual fue fundamental para la construcción de la RG. En [33] se lo formula de la siguiente manera:

***En todo punto de un espacio-tiempo influenciado por un campo gravitacional es posible elegir de forma local un sistema coordenado inercial tal que en una región lo suficientemente pequeña en torno al punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema coordenado cartesiano, no acelerado y sin influencia gravitacional***. Esto es equivalente al supuesto de que en todo punto $P$ de la variedad, existe una superficie tangente *plana*.

Sean dos bases coordenadas, $\{x^{\mu}\}\, y\, \{\zeta^{\mu}\}$, elegidas de tal forma que el elemento de línea queda representado como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^{\alpha} d\zeta^{\beta}, \tag{2.18}$$
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{2.19}$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski, y $g_{\mu\nu}$ una métrica arbitraria.

En caso de no haber gravedad, se puede encontrar una transformación de coordenadas global $\{x^{\nu}\} \longrightarrow \{\zeta^{\mu}\}$, y por ende, se puede representar a la métrica del espacio-tiempo como (2.12); mientras que si hay gravedad, esta transformación de coordenadas sólo puede ser definida en una región cercana al punto P en cuestión, siendo este punto uno arbitrario sobre la variedad. De esta manera, si el espacio-tiempo presenta curvatura, no se pueden encontrar coordenadas tales que sobre toda la variedad valga que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, pero siempre podemos representar al evento P en un sistema de coordenadas tal que

$$g_{\mu\nu}\Big|_{P} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \delta g_{\mu\nu}/dx^{\sigma} = 0.$$

Veamos ahora qué ecuaciones satisface una partícula libre, sólo influenciada por gravedad, en un espacio tiempo caracterizado por una métrica $g_{\mu\nu}$, considerando un sistema coordenado $\xi^{\alpha}$. Bajo estas condiciones, el movimiento de la partícula satisface

$$\frac{d^2\xi^{\alpha}}{ds^2} = 0. \tag{2.20}$$

Considerando un sistema de coordenadas arbitrario, se puede demostrar que el movimiento de una partícula libre sólo bajo los efectos de la gravitación satisface la ecuación

$$\frac{d^2x^\lambda}{dx^\mu dx^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \tag{2.21}$$

denominada ecuación de la geodésica, y donde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ es la condición afín. Se define como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{2.22}$$

La Ecuación (2.22) nos deja cierta libertad a la hora de determinar completamente a la conexión afín. En RG, se la define de forma que presente simetría en sus dos índices covariantes,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \tag{2.23}$$

En términos del tensor métrico tiene la forma

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right). \tag{2.24}$$

La condición de simetría (2.23) puede ser escrita como

$$T_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0, \tag{2.25}$$

siendo $T_{\mu\nu}$ el tensor de torsión. Que el espacio-tiempo no tenga torsión es algo fundamental en RG.

Como su nombre indica, la conexión afín vincula los espacios tangentes en distintos puntos sobre la variedad, conectando un vector del espacio tangente en el punto $P$ con el vector paralelo a éste que pertenezca al espacio tangente en el punto $Q$. La conexión afín, pesar de estar definida a partir de un tensor de rango 2, no transforma como un tensor bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$.

La definición usual de derivada parcial no es útil en RG, pues esta no cumple con la regla de transformación de un tensor

$$A'^\mu_{,\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}A^\sigma\right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}A^\sigma. \tag{2.26}$$

Por ende, se debe definir un operador tensorial análogo a la derivada parcial. A este objeto se lo bautiza como derivada covariante, y se lo define como

$$A_{\mu;\nu} = \nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda. \tag{2.27}$$

Otra noción importante en RG es la de simetría. Hablamos de simetría cuando al aplicar una transformación sobre un tensor, este permanece invariante. Es de utilidad el conocer si el espacio-tiempo presenta simetrías , pues la existencia de estas simplifican mucho su estudio.

Es fácil de demostrar que la métrica de Minkowski tiene simetría temporal ($t \to -t$), pero es usual que existan simetrías que no sean facilmente visibles, y que para se hagan manifiestas es necesario una transformación de coordenadas muy específica.

Por ello, es de interés encontrar una herramienta que nos permita encontrar simetrías para un dado espacio-tiempo sin importar la base coordenada que estemos usando para la representación de la métrica.

Un vector tangente satisface $V^\nu V_{\nu;\mu} = 0$. Si tomamos un vector $\zeta^\alpha$ en una dirección de simetría del espacio, entonces podemos demostrar que

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu = 0. \tag{2.28}$$

Esta ecuación se denomina ecuación de Killing y a vectores $\zeta^\mu$ que la satisfacen vectores de Killing (KVF); precisamiente son estos vectores los que indican la existencia de simetrías en un dado espacio-tiempo.

### 2.1.3. Curvatura de una variedad

La noción de curvatura es fundamental en RG. En un espacio-tiempo *plano*, la curvatura es nula. De manera equivalente, un espacio-tiempo es *plano* si existe una transformación de coordenadas $\zeta^\mu$ tal que el elemento de línea adopta la forma

$$ds^2 = \varepsilon_\alpha (d\zeta^\alpha)^2, \tag{2.29}$$

con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. En muchos casos, encontrar esta transformación de coordenadas no resulta para nada sencillo. Por ende, resultaría útil poder encontrar una forma de determinar si el espacio es *plano* a partir de la misma $g_{ab}$, sin importar el sistema de coordenadas.

Es interesante ver que, en caso de que se pueda reducir el elemento de línea $ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$ a la forma de Minkowski, entonces el espacio-tiempo resulta *plano*, y por ende, hay ausencia de gravedad.

Cómo se verá a continuación, el concepto de derivada covariante es vital para cuantificar la curvatura del espacio-tiempo. Sea un vector sobre la variedad con componentes covariantes $v_a$. La expresión para la derivada dos veces covariante de $v_a$ es

$$\begin{aligned}
\nabla_b v_a &= \partial_b v_a - \Gamma^d_{ab} v_d, && (2.30)\\
\nabla_c \nabla_b v_a &= \partial_c \nabla_b v_a - \Gamma^e_{ac} \nabla_b v_e - \Gamma^e_{bc} \nabla_e v_a && (2.31)\\
&= \partial_c \partial_b v_a - \left(\partial_c \Gamma^d_{ab}\right) v_d - \Gamma^d_{ab} \partial_c v_d && (2.32)\\
&\quad -\Gamma^e_{ac}\left(\partial_b v_e - \Gamma^d_{eb} v_d\right) - \Gamma^e_{bc}\left(\partial_e v_a - \Gamma^d_{ae} v_d\right).
\end{aligned}$$

La diferencia de (2.32) consigo misma salvo una permutación de sus índices $b$ y $c$ resulta en

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R^d_{abc} v_d, \tag{2.33}$$

con $R^d_{abc}$ un tensor de orden 4 denominado tensor de curvatura (tensor de Riemann), y que es de la forma

$$R^d_{abc} \equiv \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ec}. \tag{2.34}$$

Para ver la relación que tiene este tensor con la curvatura, supongamos que tenemos una región de la variedad que es *plana*. En esta región, existe una transformación de coordenadas tal que la métrica tiene coeficientes constantes. De esta forma, tanto la conexión afín como sus derivadas se anulan en todo punto P de la región, y por ende

$$R^d_{abc} = 0 \tag{2.35}$$

en todo punto de la región. Siendo (2.35) una igualdad tensorial, no depende del sistema de coordenadas elegido. También se puede demostrar que si se tiene una región donde el tensor de Riemann se anula en todo punto de ella, entonces la variedad en esa región es *plana*(ver [34]).

A partir de las propiedades del tensor métrico para bajar índices de tensores, el tensor de curvatura puede escribirse de forma equivalente como

$$R_{abcd} = g_{ae}R^{e}_{bcd} = \frac{1}{2}\left(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}\right) - g^{ef}\left(\Gamma_{eac}\Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead}\Gamma_{fbc}\right). \tag{2.36}$$

En un espacio-tiempo de dimensión $N$, el tensor de Riemann tiene $N^4$ componentes. Sin embargo, no todas son independientes. Si tomamos un punto P de la variedad, y construimos un sistema de coordenadas geodésicos tal que la conexión afín se anula, $(\Gamma^a_{bc})_P = 0$, el tensor de curvatura puede ser escrito como

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\left(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}\right)_P. \tag{2.37}$$

A partir de esta expresión, se pueden establecer las siguientes relaciones de simetría:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{bacd}, \\ R_{abcd} &= -R_{abdc}, \\ R_{abcd} &= R_{cdab}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Por otro lado, se cumple la identidad cíclica

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = R_{a[bcd]} = 0. \tag{2.39}$$

Si bien estas expresiones se obtuvieron para un sistema de coordenadas particular, las relaciones son tensoriales, siendo luego válidas para todo sistema coordenado. Dado que el punto P es arbirtrario, estos resultados son válidos sobre toda la variedad.

A partir de estas identidades, se puede demostrar que en un espacio-tiempo de dimensión $N$, el tensor de Riemann tiene sólo $N^2\left(N^2-1\right)/12$ componentes independientes; en el caso de un espacio-tiempo 4-$D$, el tensor tiene 20 componentes independientes .

Usando este mismo procedimiento, se puede demostrar que el tensor de Riemann satisface una identidad diferencial, llamada Identidad de Bianchi,

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_d R_{abec} = 0, \tag{2.40}$$

cuya forma más compacta es

$$\nabla_{[e} R_{ab]cd} = 0. \tag{2.41}$$

La contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann, resulta en un nuevo tensor de rango 2 llamado tensor de Ricci

$$R_{ac} \equiv R^{b}_{abc}. \tag{2.42}$$

Usando la definición del tensor de curvatura (2.27), se puede demostrar que este tensor satisface la relación de simetría

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{ba}, \\ R^{a}{}_{b} &= R^{b}{}_{a}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

De la contracción de ambos índices, se obtiene un escalar denominado escalar de Ricci,

$$R \equiv g^{ab}R_{ab} = R^{a}_{a} \tag{2.44}$$

el cual, junto al tensor de Ricci, tendrá una importancia vital para la RG como se verá en el siguiente apartado.

Por último, en [35] se demuestra que el tensor de Ricci y su escalar asociado satisfacen la relación

$$\nabla_b \left( R^{bc} - \frac{1}{2} g^{bc} R \right) = 0, \tag{2.45}$$

donde a la cantidad entre paréntesis se conoce como Tensor de Einstein

$$G^{ab} \equiv R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R. \tag{2.46}$$

siendo un tensor simétrico ante una permutación de índices y cuya derivada covariante es nula por construcción.

### 2.1.4. Ecuaciones de campo

Hasta este punto se han determinado cantidades que cuantifican propiedades del espacio-tiempo; éstas surgen del conocimiento de la métrica que define la geometría del espacio-tiempo. Pero en general, lo que se conoce no es la métrica, sino la fuente de gravedad presente en una región del espacio-tiempo. Luego, es necesario determinar la ley física que fije la métrica para una cierta distribución de energía-momento.

Esta es la motivación detrás del trabajo [36], y la relación que se propone es de la forma

$$K_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.47}$$

con $K_{\mu\nu}$ un tensor de rango 2 que contiene toda la información de la curvatura del espacio-tiempo, y que por ende, debe estar definido en función del tensor de curvatura $R^d_{abc}$ y en última instancia, de la métrica $g_{ab}$. El tensor de energía-momento, denotado $T_{\mu\nu}$, describe las propiedades físicas de los objetos materiales, como son la energía y el momento.

Como se muestra en [35], partiendo de la Identidad de Bianchi, la conservación del tensor de energía-momento

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \tag{2.48}$$

y utilizando las relaciones (2.38), podemos encontrar que la ley que buscábamos es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

con $\kappa = 8\pi G/c^4$, de forma que la ecuación se ajuste al límite Newtoniano $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Es importante notar que el miembro izquierdo de la igualdad resulta ser el Tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ definido en (2.46). Otra forma equivalente de la Ecuación (2.49) es

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \tag{2.50}$$

siendo $T$ la traza del tensor energía-momento, $T = T^\mu_\mu$. Las ecuaciones de campo de la RG son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no acopladas de segundo orden para el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

En una región del espacio-tiempo con ausencia de materia, momento y radiación, $T_{\mu\nu} = 0$. Luego, la Ecuación (2.50) se reduce a la forma

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.51}$$

A partir de las pripiedades de simetría de $R_{\mu\nu}$ se desprende que en un espacio-tiempo de dimensión $N$ se tienen $N(N+1)/2$ ecuaciones independientes. Por otro lado, dado que el tensor de Riemann tiene $N^2\left(N^2-1\right)/12$ componentes independientes; para el caso de 2 y 3 dimensiones ($N=2,3$), se tiene la misma cantidad de ecuaciones que de componentes del tensor de curvatura; esto implica que las soluciones de campo en el vacío imponen que el tensor de curvatura sea completamente nulo (ausencia de gravedad), mientras que en dimensiones mayores ($N\geq 4$), la curvatura es siempre distinta de cero.

## 2.2. Soluciones de las ecuaciones de campo: agujeros negros

### 2.2.1. Solución de Schwarzschild

Karl Schwarzschild fue quien obtuve la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein [37]. Esta solución describe la geometría del espacio-tiempo por fuera de una distribución de materia esféricamente simétrica.

La forma más general de una métrica esféricamente simétrica es

$$ds^2 = A\left(r,t\right)dt^2 - B\left(r,t\right)dr^2 - C\left(r,t\right)d\theta^2 - C\left(r,t\right)\sin^2\theta d\phi^2 - D\left(r,t\right)drdt. \tag{2.52}$$

Si se considera, además, que la métrica es estática (los coeficientes de la métrica no evolucionan con el tiempo), que sea invariante frente a inversiones temporales ($D\left(r,t\right)=0$) y por último que $C\left(r,t\right)=r^2$, el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = A\left(r\right)dt^2 - B\left(r\right)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{2.53}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, usando el elemento de línea (2.53) resultan en 3 ecuaciones diferenciales acopladas, cuyas soluciones serán las funciones $A\left(r\right)$ y $B\left(r\right)$:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0, &(2.54)\\
R_{11} &= \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB} = 0, &(2.55)\\
R_{22} &= \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A}-\frac{B'}{B}\right) = 0. &(2.56)
\end{aligned}$$

Imponiendo como condición que estas soluciones cumplan el límite clásico, se encuentra que la métrica, representada en las coordenadas $(t,r,\theta,\phi)$, es de la forma

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.57}$$

Este elemento de línea describe la región de vacío por fuera de la distribución de masa $M$. Dentro de ésta, el espacio-tiempo va a depender de las propiedades físicas que tenga el cuerpo.

El elemento de línea presenta dos singularidades en la coordenada radial: uno de ellas es $r=0$, y otra en

$$r_{\mathrm{Schw}} = 2GM/c^2, \tag{2.58}$$

denominada radio de Schwarzschild. Usualmente, $r_{\mathrm{Schw}}$ se encuentra dentro de la distribución de masa, y por lo tanto, el elemento de línea (2.57) sólo es válido en el exterior del objeto; pero en caso de considerar que la distribución de masa se encuentra por dentro de su correspondiente radio de Schwarzschild, el espacio-tiempo representado por el elemento de línea (2.57) corresponde al de un agujero negro.

Un agujero negro es esencialmente una región del espacio-tiempo con una curvatura específica, la cual está desconectada causalmente del resto del universo. La superficie límite que separa el interior del agujero negro del exterior se denomina horizonte de eventos. Para un agujero negro de Schwarzschild, el radio del horizonte de eventos corresponde precisamente al radio de Schwarzschild.

Las singularidades pueden ser esenciales o un mero artefacto de las coordenadas en que se está representando la métrica. Para determinar la naturaleza de las singularidades es útil analizar el comportamiento de escalares construidos a partir del tensor de Riemann. Dado que un escalar es un invariante, su comportamiento es el mismo independientemente del sistema de coordenadas en que se calcula.

El escalar de Kretschmann se define como

$$K = R^{abcd}R_{abcd}. \tag{2.59}$$

Para el caso de la métrica dado por (2.57), resulta

$$K = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}. \tag{2.60}$$

De aquí se observa que la única singularidad esencial de la métrica de Schwarzschild se encuentra en $r = 0$.

Para comprender la naturaleza de la superficie $r = r_{\mathrm{Schw}}$, se puede analizar la relación entre el tiempo propio de un sistema, denotado $\tau$, y el tiempo coordenado $t$

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \tag{2.61}$$

$$dt = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \tag{2.62}$$

A distancias muy lejanas, ambos tiempos coinciden, y por ende, decimos que la coordenada temporal $t$ es el tiempo propio medido por un observador en el infinito.

Por otro lado, en el límite $r \to r_{\mathrm{Schw}}$, el tiempo $t$ se hace infinitamente grande. El significado físico de este límite es que para un observador en el infinito, un cuerpo en caída hacia el objeto compacto, le toma cada vez más tiempo acercarse a esta superficie, de forma tal que pareciera nunca alcanzarla.

Esta diferencia en los tiempos medidos localmente y en el infinito tiene como efecto un corrimiento al rojo de la radiación emitida en una región cercana al horizonte de eventos ($r > r_{\mathrm{Schw}}$). A partir de a Ecuación (2.62) se puede encontrar la relación entre la frecuencia de un fotón $\nu$ emitido en $r > r_{\mathrm{Schw}}$ y la frecuencia del mismo fotón en el infinito $\nu_\infty$

$$\nu_\infty = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{\frac{1}{2}} \nu \tag{2.63}$$

Como el corrimiento al rojo se define $z = (\nu_\infty - \nu)/\nu$, este puede ser calculado como

$$1 + z = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.64}$$

De esta expresión se desprende que, si el fotón es emitido cerca de la supericie del horizonte de eventos ($r \to r_{\text{Schw}}$), (2.64) crece de forma no acotada. Por ende, concluimos que para que un fotón pueda escapar de la región contenida por la superficie, este debe tener energía infinita.

A continuación se analizará la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild. Sea una geodésica nula, a valores de $\theta = cte, \phi = cte$. El elemento de línea resulta

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 = 0. \tag{2.65}$$

Despejando de esta expresión, la pendiente de los conos de luz siguen la forma

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right). \tag{2.66}$$

En el límite de $r \to \infty$, $dr/dt \to \pm 1$, es decir, los conos de luz tienden a los del espacio-tiempo de Minkowski: la solución de Schwarzschild es asintóticamente *plana*; en el límite $r \to GM/c^2$, $dr/dt \to 0$. Esto implica que los conos de luz se van cerrando conforme cuánto más cerca se encuentren del horizonte de eventos y coinciden con este en $r = r_{\text{Schw}}$. Una vez atravesado el horizonte, los conos cambian su pendiente.

Se puede definir una coordenada radial $r^*$ tal que las curvas radiales nulas satisfacen

$$d(ct \pm r^*) = 0. \tag{2.67}$$

A partir del elemento de línea (2.57), se encuentra que la coordenada $r^*$ se define como

$$r^* = r + \frac{2GM}{c^2} \ln \frac{r - 2GM/c^2}{2GM/c^2} \text{ (fotones salientes)}, \tag{2.68}$$

$$r^* = -r - \frac{2GM}{c^2} \ln \frac{r - 2GM/c^2}{2GM/c^2} \text{ (fotones entrantes)}. \tag{2.69}$$

$$\tag{2.70}$$

Luego, se define una nueva coordenada temporal $v = ct + r^*$, y el elemento de línea se puede reescribir en las coordenadas $(v, r, \theta, \phi)$, obteniendo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\right). \tag{2.71}$$

En estas coordenadas, una geodésica radial nula debe satisfacer la ecuación

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 - 2\left(\frac{dv}{dr}\right) = 0. \tag{2.72}$$

Hay dos posibles valores para $dv/dr$:

$$\frac{dv}{dr} = 0 \implies v = cte, \tag{2.73}$$

$$\frac{dv}{dr} = 2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \implies v = 2r + \frac{4GM}{c^2} \ln \frac{r - 2GM/c^2}{2GM/c^2} + cte. \tag{2.74}$$

De (2.73) y (2.74) y definiendo la nueva coordenada $ct' = v - r$ se puede ver que

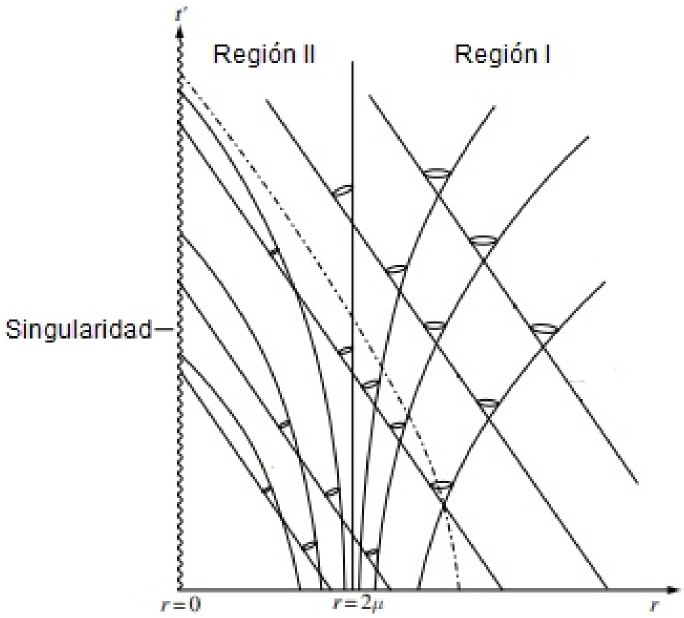



**Figura 2.2.** Conos de luz del espacio-tiempo de Schwarzschild representados en coordenadas $(t, r, \theta, \phi)$.

$$ct' = -r + cte, \tag{2.75}$$

$$ct' = r + \frac{4GM}{c^2} \ln \frac{r - 2GM/c^2}{2GM/c^2} + cte, \tag{2.76}$$

siendo la primera ecuación para fotones entrantes, mientras que la segunda es para fotones salientes.

Las coordenadas $(t', r, \theta, \phi)$ se denominan de Eddington-Finkelstein avanzadas; en estas coordenadas el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt'^2 - \frac{4GM}{c^2 r} dt' dr - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) - r^2 \left(d\theta^2 + d\phi^2\right), \tag{2.77}$$

De aquí se observa que el elemento de línea es regular en $r = 2GM/c^2$.

Utizaremos estas coordenadas para representar los conos de luz en el espacio-tiempo de Schwarzschild como en la Figura 2.2, fijando $\theta = cte, \phi = cte$. En la Figura 2.2 se observa que todo fotón dentro de la superficie nula (horizonte de eventos) tiene a la singularidad en su futuro. Nada que se encuentra por dentro del horizonte de eventos puede escapar de él; siempre terminará cayendo hacia la singularidad en $r = 0$ (la curva punteada en la Figura 2.2 representa una partícula en caída radial).

### 2.2.2. Solución de Kerr

La solución de las ecuaciones de campo para una distribución de masa $M$ con momento angular $J = Mac$ fue descubierta por Roy Kerr y publicada en [38]. El correspondiente elemento de línea en coordenadas de Boyer-Lindquist $(t, r, \theta, \phi)$ es

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi - \Sigma\Delta^{-1}dr^2 - \Sigma d\theta^2 - g_{\phi\phi}d\phi^2, \\
g_{tt} &= c^2\left(1 - 2GMrc^{-2}\Sigma^{-1}\right), \\
g_{t\phi} &= -2GMac^{-2}r\sin^2\theta\Sigma^{-1}, \\
g_{\phi\phi} &= \left[\left(r^2 + a^2c^{-2}\right)^2 - a^2c^{-2}\Delta\sin^2\theta\right]\Sigma^{-1}\sin^2\theta, \\
\Sigma &\equiv r^2 + a^2c^{-2}\cos^2\theta, \\
\Delta &\equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2c^{-2}.
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

En el límite $a \to 0$, la métrica de Kerr se reduce a la métrica de Schwarzschild.

La primera diferencia entre estas dos métricas es que en el caso de Kerr, la componente $g_{t\phi}$ es no nula, siendo este término el que rompe la simetría esférica del espacio-tiempo; sin embargo, se mantiene la simetría alrededor del eje polar desde donde se mide el ángulo $\theta$, razón por la que la métrica se bautiza como axisimétrica.

Al igual que en la sección anterior, se puede ver que la singularidad presente en la componente $g_{rr}$ es una singularidad de coordenadas. Esta describirá al horizonte de eventos del agujero negro, es decir, una superficie que separa dos regiones del espacio-tiempo no relacionadas causalmente. Entonces, la forma de esta superficie va a estar dada por la solución de

$$\Delta = 0.$$

Resolviendo, se hallan 2 raíces denotadas $r_+$ y $r_-$. La primera corresponde al horizonte de eventos externo

$$r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2}{c^2}}, \tag{2.79}$$

y la otra al interno

$$r_- = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \frac{a^2}{c^2}}. \tag{2.80}$$

Es importante notar que tanto en (2.79) y (2.80), el término que está dentro de la raíz cuadrada nos impone una cota para el valor de spin que puede tomar el agujero negro, pues si

$$
\begin{aligned}
ac &> GM, \\
a_* &= \frac{ac}{GM} > 1,
\end{aligned}
$$

entonces el argumento de la raíz cuadrada se hace negativo: el horizonte de eventos desaparece y la solución de Kerr representa una "singularidad desnuda", la cual se ha descartado como una solución física. También se ve que en el límite de un agujero negro extremo ($a_* = 1$, y la rotación es máxima), ambos horizontes coinciden en $r = GMc^{-2}$; muentras que en el límite $a = 0$, el horizonte externo toma el valor $r_+ = r_{\mathrm{Schw}}$ y el interno $r_- = 0$, es decir, estos tienden al horizonte de eventos y a la singularidad esencial de un agujero negro de Schwarzschild.

Al tener dos horizontes de eventos, el espacio-tiempo se encuentra separado a primer instancia en tres regiones casualmente desconectadas una de otra.

Supongamos que desde un observador lejano se lanza una partícula sin momento angular, en caída radial hacia el agujero negro. Vemos que a medida que la partícula se acerca al objeto, ésta gana momento angular en la dirección de rotación del agujero negro, de forma que, si quisieramos que la partícula se mantenga en reposo relativo al observador, se tendría que ejercer una fuerza en oposición a la rotación. Pero sucede que a partir de un punto en su caída, independientemente de la fuerza que se ejerza, la partícula de ve arrastrada por el agujero negro, forzada a rotar con él. Existe, luego, una superficie alrededor del agujero negro, denominada límite estático, dentro de la cual toda partícula corrota con el agujero negro, pues es el espacio-tiempo mismo el que se encuentra en rotación.

A la región que se encuentra delimitada por el límite estático y el horizonte de eventos externo se denomina ergósfera: región donde toda partícula esta forzada a rotar, pero de la cual todavía se puede escapar, pues no se ha cruzado el horizonte de eventos.

La superficie ergosférica puede determinarse considerando una partícula que se encuentra estacionaria ($r = cte, \theta = cte, \phi = cte$); entonces, por conservación del tetra-momento,

$$c^2 = g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Si $g_{tt} < 0$, entonces esta condición no se satisface, y por lo tanto, la partícula no puede encontrarse en estado estacionario. Entonces, la superficie del límite estático puede determinarse pidiendo

$$g_{tt} = 0.$$

La superficie ergosférica no tiene simetría esférica, sino que presenta una dependencia con la latitud $\theta$

$$r_{S^+} = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{c^4} - \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta}. \tag{2.81}$$

Esta superficie envuelve al horizonte de eventos $r_+$, salvo en los polos, donde ambas coinciden.

La métrica de Kerr presenta una singularidad esencial o insalvable en aquellos puntos donde la componente $g_{tt}$ diverge, o lo que es lo mismo,

$$r^2 + a^2\cos^2\theta = 0, \tag{2.82}$$

que se satisface para las coordenadas de Boyer-Lindquist $r = 0$, $\theta = \pi/2$. En coordenadas cartesianas, obtenemos que la singularidad esencial esta definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2}{c^2}, \\ z &= 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

que es una circunferencia de radio $a/c$ y que se encuentra en el plano ecuatorial.

### 2.2.3. Solución de Kerr-Newman

La solución más general de agujero negro de la RG fue desarrollada por Ezra Newman y otros en base al trabajo de Roy Kerr, publicada en dos papers, [39] y [40]. La solución representa un agujero negro de masa $M$, rotante y cargado, por lo que no se trata de una solución de las ecuaciones de campo de la RG en el vacío.

La métrica de esta solución representa, entonces, la solución estacionaria, axisimétrica, asintóticamente *plana* más general de las ecuaciones de campo de la RG en presencia de un campo electromagnético. La expresión que lo describe se puede obtener simplemente a partir la métrica de un agujero negro de Kerr, en la cual hacemos el reemplazo

$$\frac{2GM}{c^2}r \longrightarrow \frac{2GM}{c^2}r - q^2,$$

siendo

$$q = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}, \tag{2.84}$$

y $Q$ es la carga eléctrica. El elemento de línea se escribe como

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{tt}dt^2 - 2g_{t\phi}dtd\phi - g_{\phi\phi}d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \\
g_{tt} &= c^2\left[1 - \left(2GMc^{-2}r - q^2\right)\right]\Sigma^{-1}, \\
g_{t\phi} &= a\sin^2\theta\Sigma^{-1}\left(2GMc^{-2}r - q^2\right), \\
g_{\phi\phi} &= \left[\left(r^2 + a^2c^{-2}\right)^2 - a^2c^{-2}\Delta\sin^2\theta\right]\Sigma^{-1}\sin^2\theta, \\
\Sigma &\equiv r^2 + a^2c^{-2}\cos^2\theta, \\
\Delta &\equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2 + q^2.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Esta solución, al igual que la de Kerr, presenta un desdoblamiento del horizonte de eventos, uno interno y otro externo, que se encuentran en

$$r_{EH} = GMc^{-2} \pm \sqrt{(GMc^{-2})^2 - a^2c^{-2} - q^2}, \tag{2.86}$$

siendo el horizonte de eventos externo el valor con signo positivo, y el interno con signo negativo.

Dado que el agujero negro de Kerr-Newman tiene momento angular, existe una región ergósferica, cuya la coordenada radial es una función de la coordenada angular $\theta$

$$r_S = GMc^{-2} + \sqrt{(GMc^{-2})^2 - a^2c^{-2}\cos^2\theta - q^2} \tag{2.87}$$

## 2.3. Agujeros de gusano

### 2.3.1. Definición

La primera vez que se hizo referencia a la existencia de los agujeros de gusano fue en el año 1935, en un trabajo desarrollado por Albert Einstein y Nathan Rosen, aunque todavía no se los había bautizado de esa forma, sino que se conocieron como puentes de Einstein-Rosen. Es más, no fue hasta el año 1957 que el nombre agujero de gusano fuera concebido por el físico John Wheeler.

El concepto de agujero de gusano es curioso pues, a pesar de que son soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, y que bajo ciertas consideraciones, son físicamente plausibles, a día de hoy no se han detectado: siguen siendo objetos teóricos. Se puede imaginar a los agujeros de gusano de la siguiente manera: sean dos regiones lejanas de un mismo

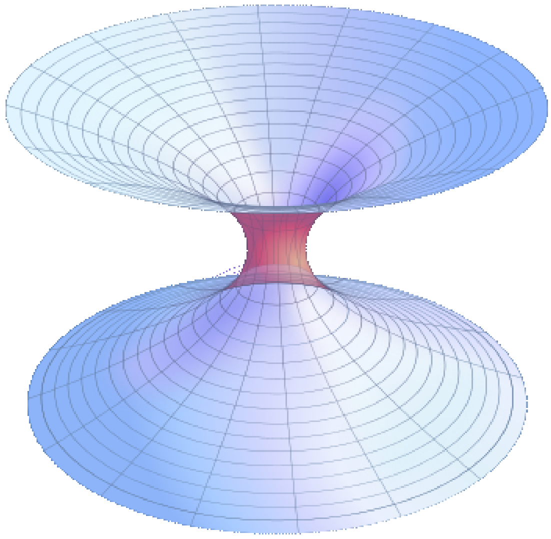


**Figura 2.3.** Diagrama esquemático de un agujero de gusano.

universo o de dos distintos.[(i)]. Es posible que debido a la presencia de campos gravitacionales muy intensos, el espacio-tiempo se deforme sobre sí mismo, creando una especie de pasadizo entre ambas regiones. Estos pasadizos pueden ser incluso tales que una partícula material llegue de un punto a otro a través de este *atajo* antes que un fotón recorriendo la distancia que originalmente las separaba. Vemos entonces que el concepto de agujero de gusano está intrínsecamente relacionado con la idea de *spacewarps*, o saltos espaciales, formas de moverse a traves del universo en períodos cortos de tiempo.

De manera más formal un agujero de gusano es una región del espacio-tiempo con una topología no trivial. Posee dos bocas conectadas por una garganta. Las bocas, a diferencia del caso de los agujeros negros, no se encuentran ocultas detrás de un horizonte de eventos. Además, no presentan una singularidad esencial que pueda impedir el pasaje de materia de un lado hacia el otro [32].

Los agujeros de gusano se clasifican generalmente según qué tipo de regiones del espacio-tiempo conectan: se dividen en inter-universo, agujeros de gusano que conectan dos regiones lejanas del mismo universo, o intra-universo, donde las regiones del espacio-tiempo conectadas pertenecen a dos universos distintos.

Incluso, se ha propuesto que estos objetos podrían conectar dos regiones temporales distintas, de forma que permitirían el viaje en el tiempo [5].

### 2.3.2. Punto de partida: Puentes de Einstein-Rosen

En la física hay una dualidad en las nociones de teoría de campos y de partículas, y el como se relacionan estas dos fue el motivo fundamental detrás del trabajo de [41], pues Einstein se negaba a aceptar la idea establecida en ese entonces, que estipulaba que las partículas consistían en singularidades de campos. Por ello, la finalidad del trabajo era intentar desarrollar un sistema físico elemental que fuese finito en todas partes y sin singularidades.

Los puentes de Einstein-Rosen son la solución a la que llegaron estos dos científicos. Para esto, consideraron dos secciones de espacio conectadas por un puente, el cual representaría esta partícula que estaban buscando.

[(i)] Universo hace referencia a una región del espacio-tiempo de grandes dimensiones y razonablemente *plana* -ver por ejemplo [5]-.

El modelo más sencillo que consideraron para estos puentes lo denominaron *neutral bridge*, puente neutro, haciendo referencia a que éste no se encuentra cargado eléctricamente. Básicamente su trabajo consistió en tomar la métrica de Schwarzschild

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1-2M/r\right)dt^2 + \left(1-2M/r\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ G = c = 1, \\ d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{2.88}$$

y aplicar la transformación de coordenadas

$$u^2 = r - 2M, \tag{2.89}$$

siendo $r_H = 2M$ la ubicación del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild. El elemento de línea que obtuvieron es

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2+2M}dt^2 + 4\left(u^2+2M\right)du^2 + \left(u^2+2M\right)d\Omega^2. \tag{2.90}$$

La nueva variable $u$ se mueve en el rango $(-\infty, \infty)$, y el elemento de línea (2.90) no presenta ninguna singularidad. Esto se debe a que al aplicar la transformación de coordenadas (2.89), el elemento de línea no incluye a la región del espacio-tiempo $r \in [0, 2M)$, que contiene la singularidad esencial $r = 0$, sino que barre la región asintóticamente *plana* por fuera del horizonte de eventos $r \in [2M, \infty)$ dos veces. La condición $u = 0$ demarca la transición de una región asintóticamente *plana* a la otra, y entonces, es aquí donde se encuentra la garganta del agujero de gusano, mientras que la región cercana que conecta las regiones asintóticamente *planas* es lo que bautizaron como *puente*, que no es más que el agujero de gusano.

Se demuestra que este tipo de agujero de gusano resulta no ser atravesable, pues toda partícula moviéndose a lo largo de la coordenada $u$ experimentaría fuerzas de marea infinita.[ii]

### 2.3.3. Agujero de Gusano de Wheeler

Luego de la publicación de [41], tuvieron que pasar más de 20 años para que volviera a hacerse referencia a los agujeros de gusano en un trabajo científico.

Fue en el año 1957 cuando Wheeler y Misner publicaron el trabajo “Classical physics as geometry” [42], y aquí fue dónde por primera vez se utilizó el término “Wormhole” (de ahora en adelante, lo denotaremos como WH) para describir regiones del espacio-tiempo con una topología no trivial.

Wheeler y Misner consideraron WH transitorios, esto es, objetos que aparecen y desaparecen en el espacio-tiempo, microscópicos que surgen debido a fluctuaciones que se dan en el espacio-tiempo; desarrollaron la geometrodinámica, un intento de describir al espacio-tiempo y todo fenómeno asociado a este en términos geométricos.

El problema que tienen esta clase de WH es que estos no son estables, sino que terminan colapsando en dos agujeros negros.

### 2.3.4. Agujeros de Gusano de Morris-Thorne

Hasta aquí, los agujeros de gusano considerados resultaron ser no atravesables. En el caso de los puentes de Einstein-Rosen, si una partícula tratase de atravesarlo, esta experimentaría fuerzas de mares infinitas, mientras que en el el caso de los agujeros de gusano de Wheeler, son necesariamente microscópicos.

[ii] Ver por ejemplo [5].

Luego, es razonable preguntarse si es posible la existencia de agujeros de gusano atravesables, o como se los denominará de aquí en adelante, *transversable WH*. De acuerdo a los teoremas de censura topológica, si en un dado espacio-tiempo se satisface la condición de energía nula media, entonces en este espacio-tiempo no puede existir un *transversable WH*, pues éstos se cierran. La condición de energía nula media, ANEC (del inglés *Average Null Energy Condition*) se satisface si

$$\int_\Gamma T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda = 0. \tag{2.91}$$

Aquí, $\Gamma$ denota una curva nula cuyo vector tangente es $k^\mu$ y el parámetro afín sobre la curva es $\lambda$.

Hacia finales de la década de 1980, Morris y Thorne a partir de la publicación del trabajo sobre agujeros de gusano atravesables y viajes interestelares, reavivaron la investigacion en el tema [4] [43]. Sin embargo, cabe destacar, que en la década anterior Homer Ellis y Bronikov, de manera independiente, habían sido los primeros en encontrar soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros de gusano atravesables [44] [45] [46]. Esta solución se discutirá brevemente más adelante.

Para estudiar las características de un agujero de gusano atravesable, consideremos el elemento de línea estático y esféricamente simétrico

$$ds^2 = e^{2\Phi(l)} c^2 dt^2 - dl^2 - r(l)^2 d\Omega^2. \tag{2.92}$$

Aquí $l$ es la distancia radial propia, que se mueve en el rango $(-\infty, \infty)$; barre dos regiones del espacio-tiempo asintóticamente planas.

Para que el elemento de línea dado por (2.92) represente un *transversable WH*, como mínimo se debe satisfacer que:

a. $\Phi(l)$ sea finita en todas partes, para evitar la presencia de horizontes de eventos.

b. Ambas regiones del espacio-tiempo deben ser asintóticamente planas. Luego, es necesario que

$$\begin{aligned} \lim_{l \to \pm\infty} \frac{r(l)}{|l|} &= 1, \\ \lim_{l \to \pm\infty} \Phi(l) &= \Phi_0 < \infty. \end{aligned}$$

Se define el radio de la garganta como $r_0 = r(l = 0)$.

El problema se simplifica si las dos regiones asintóticamente *planas* son similares, ya que ésto permite barrer sólo uno de los dos parches con la coordenada $l$. En términos de la coordenada $r$, el elemento de línea estático resulta

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - e^{2\Lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{2.93}$$

donde $\Phi(r)$ se denomina función de corrimiento al rojo (*red-shift function*), mientras que $\Lambda(r)$ es la función de forma (*shape function*), y ambas describen la topología del WH. Ambas funciones deben satisfacer ciertas condiciones para que describan propiamente a un *transversable WH*:

a. $e^{2\Lambda} \geq 0$, en todo punto del espacio-tiempo, para asegurar que la distancia radial propia, definida como $dl = \pm e^{\Lambda} dr$, sea finita.

b. Dada la definición de la garganta (mínimo valor de $r$), se requiere tener una pendiente vertical en la superficie embebida

$$\lim_{r\to r_0} \frac{dz}{dr} = \lim_{r\to r_0} \sqrt{e^{2\Lambda}-1} = \infty$$

c. El espacio-tiempo del agujero de gusano tiene que ser asintóticamente *plano*,

$$\lim_{r\to\infty} e^{2\Lambda} = \lim_{r\to\infty} e^{2\Phi} = 1. \tag{2.94}$$

d. Para que no haya ni singularidades ni horizonte de eventos, $\Phi(r)$ debe finita en todo el espacio.

e. Condición de *flaring out*, que establece que $d^2r/dz^2 > 0$ en la región cercana a la garganta, que por ende implica que la función $r(l)$ presenta un mínimo. Esto puede escribirse como

$$-\frac{\Lambda' e^{-2\Lambda}}{\left(1-e^{-2\Lambda}\right)^2} > 0. \tag{2.95}$$

Esta descripción de agujero de gusano requiere que se viole la condición (2.91) en la garganta para que represente un *transversable WH*. Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, esta condición se traduce en

$$T_{rr} + T_{tt} < 0. \tag{2.96}$$

La ecuación (2.96) también implica la violación de la condición de energía débil. Físicamente, esta ecuación impone que la materia presente en la garganta del agujero de gusano, la cual es bautizada como materia exótica, ejerza repulsión gravitacional para impedir el colapso del agujero de gusano.

### 2.3.5. Ellis Drainhole

En el año 1973, dos científicos, Homer G. Ellis y Kirill A. Bronikov desarrollaron de forma independiente la primera solución de las ecuaciones de campo que describe un *transversable WH* (ver [44] y [46]). Se trata de una solución estática, esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo en el vacío acoplada a un campo escalar $\phi$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -2\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\phi^k\phi_k g_{\mu\nu}\right). \tag{2.97}$$

El elemento de línea es de la forma

$$ds^2 = c^2dt^2 - (d\rho - f(\rho)cdt)^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2, \tag{2.98}$$

con $f(\rho) = \sqrt{1-e^{-2\frac{m}{n}\phi}}$, $r(\rho) = \sqrt{(\rho-m)^2 + a^2 e^{\frac{m}{n}\phi}}$, siendo $m$ y $n$ parámetros tales que $0 \leq m < n$, los cuales definen al escalar $\phi$

$$\begin{gathered} \phi = \frac{n}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\rho-m}{a}\right), \\ a = \sqrt{n^2-m^2}. \end{gathered} \tag{2.99}$$

Esta métrica describe un WH sin singularidades, sin horizontes de eventos, que conecta dos regiones del espacio-tiempo asintóticamente *planas* mediante una 2-esfera (drainnhole). La solución es curiosa, pues de uno de los dos lados del drainhole, la "entrada", presenta atracción gravitatoria, mientras que en la "salida", genera una repulsión gravitatoria más fuerte. Además, esta solución presenta un KVF de la forma

$$\partial_t + cf(\rho)\partial_\rho, \tag{2.100}$$

que Ellis interpretó como un flujo de éter que acelera a las partículas a lo largo de una geodésica radial que atraviesa el drainhole.

De esta solución se deriva un caso particular, llamado Ellis WH, en los cuales el flujo de éter desaparece, lo que permite que partículas masivas atraviesen libremente el drainhole en cualquier sentido, y la métrica para esta solución es la descripta en (2.98) con el reemplazo $f(\rho) = 0$.

Se ha mostrado que el Ellis drainhole no es estable: para distintas clases de perturbaciones iniciales, el agujero de gusano colapsa en un agujero negro de Scahwarzschild o se expande exponencialmente [47, 48, 49].

## 2.4. Agujeros de Gusano rotantes

Los agujeros de gusano hasta aquí descriptos son todos estáticos. Sin embargo, los objetos astrofísicos poseen momento angular. Afortunadamente existen en la literatura soluciones de agujero de gusano rotante. A continuación describiremos sólo 3: el llamado agujero de gusano de Ellis rotante [50], la solución de Teo [51], y finalmente la solución de agujero de gusano rotante de Damour-Solodhukin [52]. Es éste último el que será objeto de estudio en esta tesis.

### 2.4.1. Agujero de Gusano de Ellis rotante

Kleihaus y Kunz [50] proponen una familia de soluciones estacionarias y globalmente regulares de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros de gusano rotantes; éstos resultan la generalización del Ellis WH definido en 2.3.5. El elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -e^f c^2 dt^2 + p^2 e^{-f}\left(e^v\left[d\eta^2 + h d\theta^2\right] + h\sin^2\theta\,(d\phi - \omega dt)^2\right) \tag{2.101}$$

con $f$, $p$, $v$ y $\omega$ funciones únicamente de las coordenadas $\eta$ y $\theta$, y $h = \eta^2 + \eta_0^2$ una función auxiliar. La garganta del agujero de gusano se encuentra en $\eta = 0$, y en el límite $\eta \to \infty$, la métrica describe dos regiones del espacio-tiempo asintóticamente *planas*.

La naturaleza rotante del objeto se materializa en la función $\omega$, que representa la frecuencia angular del WH. Al igual que en el caso del Kerr BH, este agujero de gusano presenta una superficie ergósferica (en general, todo agujero de gusano rotante la tendrá), y se determina de igual forma, imponiendo la condición

$$g_{tt} = 0. \tag{2.102}$$

Tomando el elemento de línea (2.101), la superficie ergosférica queda determinada por

$$-e^f c^2 + e^{-f} h \sin^2\theta = 0. \tag{2.103}$$

Una característica importante de esta solución es que a medida que el momento angular del WH se incrementa, la violación de la condición de energía nula (NEC) es en proporción menor. Para el valor máximo del momento angular, el agujero de gusano se convierte en un agujero negro de Kerr extremo.

### 2.4.2. Agujero de Gusano de Teo

En el año 1998 Edward Teo publica un trabajo donde propone una clase de agujeros de gusano rotantes que generaliza a los considerados por Morris y Thorne [51].

En dicho trabajo, Teo propone un elemento de línea de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2(r,\theta)dt^2 + \left(1 - \frac{b(r,\theta)}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &\quad + r^2 K^2(r,\theta)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,(d\phi - \omega(r,\theta)dt)^2\right). \end{aligned} \tag{2.104}$$

siendo $N$, $K$ y $\omega$ funciones de $r$ y $\theta$, y que son regulares sobre el eje de simetría $\theta = 0, \pi$. Este elemento de línea describe un espacio-tiempo con dos regiones asintóticamente *planas* unidas por la garganta del agujero de gusano en $r = b > 0$. La función $N$ es análoga a la función de corrimiento al rojo del elemento de línea (2.91), y al igual que ésta, debe ser finita y no nula de forma que no existan singularidades de curvatura o esenciales. La función de forma del elemento de línea (2.91) es $b$, y debe cumplir la condición $b < r$ sobre todo el espacio-tiempo. Sobre la garganta, debe ser independiente de la coordenada angular $\theta$ ($b_\theta = 0$), y satisfacer la condición de *flaring out* $b_r < 1$. $K$ es una función postiva, no decreciente que define la distancia propia sobre el espacio-tiempo $R$, $R \equiv rK$. $\omega$ representa la velocidad angular del agujero de gusano.

Como esta propuesta de métrica debe reducirse a la dada por Morris y Thorne en el límite de rotación cero y simetría esférica, las funciones se reducen

$$N(r,\theta) \to e^{\Phi(r)}, \quad b(r,\theta) \to b(r), \quad K(r,\theta) \to 1, \quad \omega(r,\theta) \to 0, \tag{2.105}$$

Además, se pide que la métrica sea asintóticamente plana, lo que implica que

$$N \to 1, \quad \frac{b}{r} \to 0, \quad K \to 1, \quad \omega \to 0 \tag{2.106}$$

con $r \to \infty$.

Para estudiar con más profundidad, se adoptará la propuesta de [53], que adopta las funciones

$$N = K = 1 + \frac{(4a\cos\theta)^2}{r}, \quad b = \frac{b_0^2}{r}, \quad \omega = \frac{2J}{r^3}. \tag{2.107}$$

siendo $a$ el momento angular total del agujero de gusano, y se las representa en unidades naturales ($c = G = 1$) y tomando la masa del agujero de gusano $M = 1$.

Si se recuperan todas estas cantidades, el elemento de línea toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &- N^2(r,\theta)\left(1 - r^2\frac{\omega(r,\theta)^2}{c^2}\sin^2\theta\right)c^2dt^2 - 2r^2N^2(r,\theta)^2\frac{\omega(r,\theta)}{c}\sin^2\theta cdtd\phi \\ &+ \left(1 - \frac{b_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2N^2(r,\theta)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \end{aligned} \tag{2.108}$$

con

$$N = 1 + \frac{(4ac\cos\theta)^2}{GMr}, \tag{2.109}$$

$$\omega = \frac{2GMa}{cr^3}. \tag{2.110}$$

Una vez definido esto, se pueden definir la ergo-región (esta presenta la misma topología que la ergo-región de un agujero negro de Kerr) y la garganta del agujero de gusano.

En la sección 2.2.2, se definió la ergoregión como $r(\theta)$ tal que $g_{tt} \leq 0$. Para esta métrica particular, la condición toma la forma

$$1 - \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{2GMa}{cr^3}\right)^2 \sin^2\theta \leq 0, \tag{2.111}$$

$$r^2 \leq \frac{2GMa}{c^2}|\sin\theta|, \tag{2.112}$$

siendo la igualdad la ergosuperficie.

Por otro lado, previamente establecimos que la garganta del agujero de gusano está dada por la ecuación $r = b(r,\theta)$. En el modelo considerado, esto resulta en

$$r = b_0. \tag{2.113}$$

Que la garganta se encuentre a $r$ constante no implica que la garganta tenga simetría esférica, pues antes aclaramos que la distancia propia radial estaba dada por $r_{\rm g} = rK(r,\theta)|_{r=b_0}$, $r_{\rm g} = b_0\left(1 + (4ac\cos\theta)^2/(GMb_0)\right)$, y por ende, vemos que la garganta del agujero de gusano presenta una dependencia con la variable angular $\theta$.

## 2.5. Agujero de Gusano Rotante de Damour-Solodhukin

Sea la métrica de tipo Kerr para representar a un agujero de gusano rotante ([22], [27]), la cual generaliza la expresión estática de Damour-Solodukhin [52]. La misma puede ser escrita en coordenadas de Boyer-Lindquist $(t, r, \theta, \phi)$ $(c = 1, G = 1)$ como

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - 4\frac{Mar\sin\theta^2}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\hat{\Delta}}dr^2 \\ &+ \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r\sin\theta^2}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{2.114}$$

donde $a$ y $M$ son el spin y la masa del agujero de gusano respectivamente (ambos con dimensión de longitud). Las funciones $\Sigma$ y $\hat{\Delta}$ se expresan como

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{2.115}$$

$$\hat{\Delta} \equiv r^2 - 2M(1+\lambda^2)r + a^2. \tag{2.116}$$

Aquí, $\lambda$ denota el parámetro de deformación, que describe cuan diferente es este espacio-tiempo respecto al espacio-tiempo de Kerr. En el límite $\lambda \to 0$, se recupera la métrica de Kerr. De aquí en adelante nos referiremos a este espacio-tiempo mediante la sigla RDSWH (Rotating Damour-Solodukhin Worm Hole).

Es de interés notar que el tensor de Ricci para este espacio-tiempo, a diferencia del caso de un Kerr BH, no resulta idénticamente nulo, sino que presenta 6 componentes no nulas (recordar que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) que se escriben de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} = \lambda^2 f_{\mu\nu}(r,\theta), \quad \mu = \nu = t, r, \theta, \phi \quad \text{o} \quad \mu = t,\, \nu = \phi, \tag{2.117}$$

siendo $f_{\mu\nu}(r,\theta)$ una función que depende únicamente de la masa $M$, el spin $a$ y las coordenadas r y $\theta$.

Si recordamos la ecuación (2.49), vemos que al tener un tensor de Ricci no nulo, el tensor de energía-momento es no nulo, y por ende, esta solución no es una solución de vacío, sino que hay una distribución de materia-energía que es la que determina la métrica del espacio-tiempo. Notemos, que en el límite $\lambda = 0$, recuperamos la ecuación $R_{\mu\nu} = 0$, que se corresponde a la solución de Kerr.

El elemento de línea (2.114) presenta dos singularidades para aquellos valores de $r$ y $\theta$ tales que $\Sigma = 0$ y $\hat{\Delta} = 0$. A continuación, mostraremos mediante una transformación de coordenadas que ambas singularidades son aparentes.

La transformación que propondremos es $r = r_+ + \rho^2/M$, $dr = 2\rho/M d\rho$, con $\rho \in (-\infty, \infty)$. Luego, las funciones $\Sigma$ y $\hat{\Delta}$ transforman como

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ &= \left(\frac{\rho^2}{M} + r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{2.118}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= r^2 - 2M\left(1+\lambda^2\right) r + a^2, \\ &= \left(\frac{\rho^2}{M} + r_+\right)^2 - 2M\left(1+\lambda^2\right)\left(\frac{\rho^2}{M} + r_+\right) + a^2, \\ &= \frac{\rho^4}{M^2} + \frac{2\rho^2}{M}\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right) + r_+^2 - 2M\left(1+\lambda^2\right) r_+ + a^2, \\ &= \frac{\rho^4}{M^2} + \frac{2\rho^2}{M}\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right) + \left(\left(1+\lambda^2\right) M + \sqrt{M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2}\right)^2 + a^2 \\ &\quad -2M\left(1+\lambda^2\right)\left(\left(1+\lambda^2\right) M + \sqrt{M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2}\right), \\ &= \frac{\rho^4}{M^2} + \frac{2\rho^2}{M}\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right) \\ &\quad + \left(1+\lambda^2\right)^2 M^2 + 2M\left(1+\lambda^2\right)\sqrt{M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2} + M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2 \\ &\quad + a^2 - 2M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - 2M\left(1+\lambda^2\right)\sqrt{M^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Cancelando términos, (2.119) se reduce a

$$\hat{\Delta} = \frac{\rho^2}{M}\left(\frac{\rho^2}{M} + 2\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right)\right) \tag{2.120}$$

Tomando (2.118) y (2.119), la cantidad $g_{rr}dr^2$ en esta nueva coordenada se escribe como

$$\frac{\Sigma}{\hat{\Delta}}dr^2 = \frac{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}{\frac{\rho^2}{M}\left(\frac{\rho^2}{M}+2\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right)\right)}\frac{4\rho^2}{M^2}d\rho^2, \tag{2.121}$$

$$= 4\frac{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}{M\left(\frac{\rho^2}{M}+2\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right)\right)}d\rho^2. \tag{2.122}$$

Introduciendo la expresión (2.122) en el elemento de línea (2.114), obtenemos en coordenadas $(t, \rho, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2M\left(r_+ + \frac{\rho^2}{M}\right)}{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}\right)dt^2 - 4\frac{Ma\left(r_+ + \frac{\rho^2}{M}\right)\sin\theta^2}{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}dtd\phi \\ &+ 4\frac{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}{M\left(\frac{\rho^2}{M}+2\left(r_+ - M\left(1+\lambda^2\right)\right)\right)}d\rho^2 + \left(\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 \\ &+ \left(\left(r_+ + \frac{\rho^2}{M}\right)^2 + a^2 + \frac{2Ma^2\left(r_+ + \frac{\rho^2}{M}\right)\sin\theta^2}{\left(\frac{\rho^2}{M}+r_+\right)^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \tag{2.123}$$

En esta representación, la métrica resulta no singular $\forall\rho$, por lo que está definida en la garganta del agujero de gusano, $\rho = 0$; si se toma el límite $\rho \longrightarrow \pm\infty$, se observa que (2.123) describe dos espacio-tiempo asintóticamente *planos* unidos por la garganta.

### 2.5.1. Ergoregión y garganta

Como se muestra en la sección 2.2.2, si una partícula que se encuentra en la región del espacio-tiempo donde el coeficiente $g_{tt} < 0$ (esta región se denomina ergoregión, mientras que la superficie límite definida por la condición $g_{tt} = 0$ se la llama ergósfera o límite estático), no puede permanecer con coordenadas $(r, \theta, \phi)$ fijas, sino que rota alrededor de la fuente en el mismo sentido que ella. Entonces, es de nuestro interés determinar si existe esta ergoregión para la métrica definida en (2.114).

Debemos notar que el coeficiente $g_{tt}$ no depende del parámetro $\lambda$, y por consiguiente, este coeficiente es igual al de la métrica del espacio-tiempo de un Kerr BH. Por lo tanto, la ergósfera del RDSWH coincide con la del Kerr BH, y se obtiene como la solución de la ecuación $1 - 2Mr/\Sigma = 0$, o $r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta = 0$. Esta ecuación presenta dos soluciones, las cuales describen dos superficies, $S^{\pm}$, con radios correspondientes

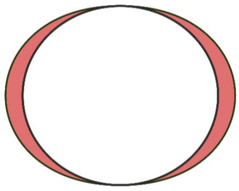
$$r_{S^{\pm}} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}. \tag{2.124}$$

Por otro lado, para determinar la forma de la garganta de agujero de gusano, se puede emplear el procedimiento análogo para encontrar el horizonte de eventos del Kerr BH. Luego,

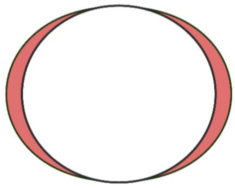
$$g^{rr} = 0 \longrightarrow \hat{\Delta} = 0. \tag{2.125}$$

De esta ecuación obtenemos dos soluciones, que son de la forma

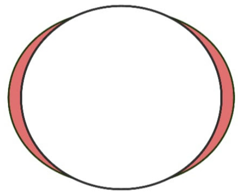
$$r_{\pm} = M(1+\lambda^2) \pm \sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2}. \tag{2.126}$$



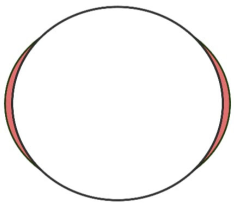
**(a)** $\lambda = 0$.



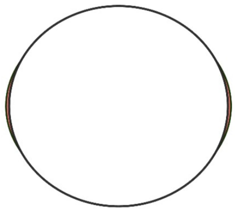
**(b)** $\lambda = 1/4\lambda_{\text{crit}}$.



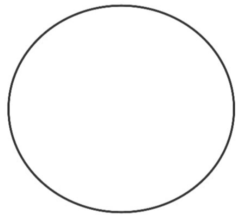
**(c)** $\lambda = 1/2\lambda_{\text{crit}}$.



**(d)** $\lambda = 3/4\lambda_{\text{crit}}$.



**(e)** $\lambda = 9/10\lambda_{\text{crit}}$.



**(f)** $\lambda = \lambda_{\text{crit}}$.

**Figura 2.4.** Diagrama esquemático de un agujero de gusano con variaciones del parámetro de deformación. La garganta es la región blanca con reborde negro y la ergoregión es la sección roja con reborde negro.

En la Figura 2.4 mostramos una representación de la ergosuperficie y garganta del agujero de gusano para valores fijos de $a$ y $M$, variando el parámetro $\lambda$. Para el caso $\lambda = 0$, el elemento de línea del agujero de gusano coincide con el elemento de línea de Kerr, y se observa que la totalidad de la garganta está contenida por la ergosuperficie; ambas superficies coinciden en los polos.

Si aumentamos el valor del parámetro $\lambda$, se observa que mientras la ergósfera del agujero de gusano no sufre cambios, la garganta aumenta de tamaño. El incremento de sus dimensiones hace que la ergósfera ya no la contenga completamente.

Llamamos $\theta_{\text{crit}}$ al ángulo de intersección entre la superficie de la garganta y la ergosuperficie. Luego, para un agujero negro de Kerr, $\lambda = 0 \longrightarrow \theta_{\text{crit}} = 0$. Observamos de la Figura 2.4 que a medida que $\lambda$ aumenta, el valor de $\theta_{\text{crit}}$ crece.

También podemos observar que existe una cantidad, tal que si el parámetro de deformación es mayor o igual que esta (la denominamos $\lambda_{\text{crit}}$), entonces la garganta contiene completamente a la ergósfera, y el agujero de gusano no presenta una ergoregión.

### 2.5.2. Recopilación

A pesar de que la solución de RDSWH fue encontrada recientemente [27], a la fecha hay varios trabajos que analizan distintas manifestaciones astrofísicas de estos objetos. Se han calculado la distribución de temperatura y flujo de radiación medio de discos de acreción, siguiendo el modelo *steady-state* de Page-Thorne, alrededor de estos WH [22]; se han generado imagenes de los mismos considerando discos de acreción en ambos extremos del agujero de gusano [23]; se han investigado las diferencias en la deflexión gravitacional de partículas masivas (modeladas como paquetes de ondas de De Broglie) en agujeros de gusano y singularidades desnudas [54].

El concepto de la sombra de un agujero negro rotante fue sugerido por Bardeen en [55], donde por sombra se refiera a la imagen óptica del agujero negro que aparece debido a un fuerte efecto de lentes gravitacionales; se espera que los agujeros negros proyecten sombras sobre el fondo brillante.

En [1], Amir y otros proponen que un agujero de gusano rotante presenta una sombra, de

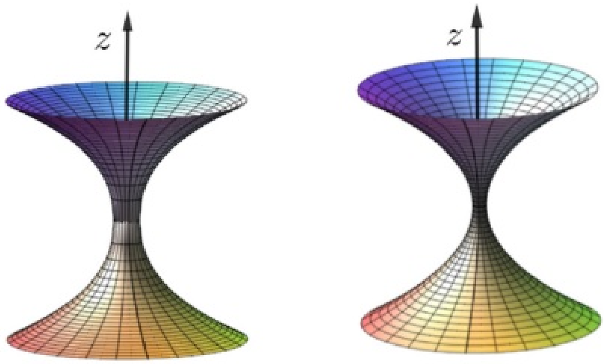



**Figura 2.5.** Gráfico con dos diagramas de *embedding* para agujeros de gusano de tipo Kerr. Adaptado de [1].

forma similar a como lo haría un agujero negro, y realizan un análisis completo de la topología de estas sombras, variando los parámetros que describen al agujero de gusano, comparándolo con el caso de un agujero negro de Kerr. Previo a este estudio, los autores buscaron generar diagramas de embedding para un agujero de gusano RDSWH; para ello, estudiaron el corte ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en un momento fijo en el tiempo ($t = cte$). Bajo estas suposiciones, la métrica adopta la forma

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + R^2 d\phi^2 \tag{2.127}$$

con

$$b(r) = 2M(1+\lambda^2) - \frac{a^2}{r},\; R^2 = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}. \tag{2.128}$$

Así, se puede generar un embedding de este espacio 2-dimensional en uno 3-dimensional euclídeo, que en coordenadas cilíndricas se escribe

$$ds^2 = dz^2 + dR^2 + R^2 d\phi^2 = \left(\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) dr^2 + R^2 d\phi^2. \tag{2.129}$$

Combinando (2.127) y (2.129), se obtiene

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{r}{r-b(r)} - \left(\frac{dR}{dr}\right)^2}, \tag{2.130}$$

en donde podemos reemplazar por (2.128), lo que finalmente resulta en

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{M\left[2r^7\lambda_1 + 2a^2r^3\left(2r^2+a^2\right) - 4Ma^2\lambda_1 r^4 - Ma^4\left(r^2+a^2\right) + 2M^2a^4\lambda_1 r\right]}{r^3\left(r^3+a^2r+2Ma^2\right)\left(r^2+a^2-2M\lambda_1 r\right)}}, \tag{2.131}$$

siendo $\lambda_1 = 1+\lambda^2$. Por último, si se integra (2.131), se obtiene el diagrama de *embedding* 2.5.

La investigación sobre las sombras de un RDSWH, como se ve en [1], no es única en la literatura; existen otros estudios, como [56], pero ambos concluyen que las sombras de estos objetos se diferencian claramente de las sombras de un agujero negro de Kerr. Esto se debe a la presencia de la garganta, que altera considerablemente la forma de la sombra.

### 2.5.3. Valores críticos del parámetro de deformación y del spin

A partir de los gráficos de la Figura 2.4, nos percatamos de dos cuestiones:

- Existe un valor de $\lambda$, el cual llamamos $\lambda_{\text{crit}}$ tal que la ergósfera queda completamente contenida en la garganta del agujero de gusano. Luego, para todo valor del parámetro de deformación $\lambda > \lambda_{\text{crit}}$, el agujero de gusano no presenta una ergoregión (si $\lambda = \lambda_{\text{crit}}$, la ergoregión y la garganta coinciden únicamente en el plano ecuatorial del agujero de gusano). Matemáticamente, esto se traduce como

$$r_+(\lambda_{\text{crit}}) = M(1+\lambda_{\text{crit}}^2) + \sqrt{M^2(1+\lambda_{\text{crit}}^2)^2 - a^2} \geq M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} = r_{S+}, \forall\theta. \tag{2.132}$$

Dado que la expresión (2.132) tiene que ser válida $\forall\theta$, también tiene que cumplirse para el valor máximo de $r_{S\pm}$; ésto ocurre para $\theta = \pi/2$ y $r_{S+}(\theta=\pi/2) = 2M$

$$\begin{aligned} r_+(\lambda_{\text{crit}}) = M(1+\lambda_{\text{crit}}^2) + \sqrt{M^2(1+\lambda_{\text{crit}}^2)^2 - a^2} &= 2M, \\ \sqrt{M^2(1+\lambda_{\text{crit}}^2)^2 - a^2} &= M(1-\lambda_{\text{crit}}^2), \\ M^2(1+\lambda_{\text{crit}}^2)^2 - a^2 &= M^2(1-\lambda_{\text{crit}}^2)^2, \\ 4M^2\lambda_{\text{crit}}^2 &= a^2, \\ \lambda_{\text{crit}} &= \frac{a}{2M}. \end{aligned} \tag{2.133}$$

- También es de nuestro interés encontrar el ángulo $\theta_{\text{crit}}$, que es el ángulo de intersección de ambas superficies, y que existe siempre y cuando el parámetro de deformación no supere al parámetro de deformación $\lambda_{\text{crit}} = a/(2M)$. Para encontrarlo, igualamos (2.124) y (2.126)

$$\begin{aligned} r_+ &= r_{S+}, \\ M(1+\lambda^2) + \sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2} &= M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta_{\text{crit}}}, \\ \left(M\lambda^2 + \sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2}\right)^2 &= M^2 - a^2\cos^2\theta_{\text{crit}}, \\ M^2\lambda^4 + 2M\lambda^2\sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2} + M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2 &= M^2 - a^2\cos^2\theta_{\text{crit}}. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\cos^2\theta_{\text{crit}} = 1 - \frac{2M}{a^2}\left(\lambda^2\sqrt{M^2(1+\lambda^2)^2 - a^2} + M\lambda^2(1+\lambda^2)\right). \tag{2.134}$$

A partir de la expresión anterior, se recuperan los dos casos límites: $\lambda = 0 \Longrightarrow \theta_{\text{crit}} = 0$ (Kerr BH); $\lambda = \lambda_{\text{crit}} = a/(2M) \Longrightarrow \theta_{\text{crit}} = \pi/2$ (agujero de gusano sin ergoregión).

### 2.5.4. Órbitas circulares estables

Karimov y colaboradores [22] mostraron que el espacio-tiempo de RDSWH posee órbitas circulares estables para partículas masivas. En particular, existe una última órbita circular estable (que denominaremos ISCO por sus siglas en inglés *Innermost Stable Circular Orbit*). A continuación, mostraremos en forma sintética como pueden ser derivados estos resultados (los cuales son relevantes para desarrollos posteriores de la tesis).

Se propone una métrica con simetría axial,

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \tag{2.135}$$

y se la estudia en un entorno pequeño del ecuador ($|\theta - \pi/2| \ll 1$) bajo la suposición que los elementos de la métrica dependen únicamente de la coordenada $r$.

El tetra-momento de una partícula masiva se escribe como

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \tag{2.136}$$

Para facilitar el desarrollo, definimos $p_t$ y $p_\phi$ como

$$p_t = -g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = -\tilde{E}, \tag{2.137}$$

$$p_\phi = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = \tilde{L}, \tag{2.138}$$

siendo $\tilde{E}$ y $\tilde{L}$ dos constantes asociadas las simetrías del espacio-tiempo. Las ecuaciones (2.137) y (2.138) conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$. Si se toman combinaciones lineales de estas dos ecuaciones,

$$p_t g_{\phi\phi} - p_\phi g_{t\phi} = -\dot{t}(g_{tt}g_{\phi\phi} + g_{t\phi}^2) = -\tilde{E}g_{\phi\phi} - \tilde{L}g_{t\phi}, \tag{2.139}$$

$$p_t g_{t\phi} + p_\phi g_{tt} = \dot{\phi}(g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}) = -\tilde{E}g_{t\phi} + \tilde{L}g_{tt}, \tag{2.140}$$

se obtiene que

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}g_{\phi\phi} + \tilde{L}g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}} \tag{2.141}$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{E\tilde{g}_{t\phi} - \tilde{L}g_{tt}}{g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}} \tag{2.142}$$

Por otro lado, a partir de la conservación del tetra-momento, ($g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -1$), es posible calcular $\dot{r}$,

$$g_{rr}\dot{r}^2 = g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -1 + \frac{\tilde{E}^2 g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi} - \tilde{L}^2 g_{tt}}{g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}}, \tag{2.143}$$

que se puede reescribir como

$$g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = V_{\text{eff}}(r) \tag{2.144}$$

siendo $V_{\text{eff}} = -1 + \left(\tilde{E}^2 g_{\phi\phi} + 2\tilde{E}\tilde{L}g_{t\phi} - \tilde{L}^2 g_{tt}\right) / \left(g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}\right)$ el potencial efectivo asociado a la partícula. A éste se le imponen dos condiciones de borde,

$$V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad \frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0, \tag{2.145}$$

de forma que las partículas masivas describan órbitas circulares.

Además, resulta útil definir la cantidad $\Omega$, que representa la frecuencia angular de la partícula en su órbita, y se define como $\Omega = d\phi/dt$. Luego, reemplazando las ecuaciones (2.137) y (2.138), esta se escribe como

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\tilde{E}g_{t\phi} - \tilde{L}g_{tt}}{\tilde{E}g_{\phi\phi} + \tilde{L}g_{t\phi}}. \tag{2.146}$$

Por lo tanto, combinando la primer condición de la Ecuación (2.145) y la Ecuación (2.146), se pueden escribir a las cantidades $\tilde{E}$ y $\tilde{L}$ en función de los elementos de la métrica y la frecuencia angular $\Omega$, obteniendo

$$\tilde{E} = \frac{g_{tt} - \Omega g_{t\phi}}{\sqrt{g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \tag{2.147}$$

$$\tilde{L} = \frac{g_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi}}{\sqrt{g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}. \tag{2.148}$$

Por último, a partir de la segunda condición de la Ecuación (2.145), se encuentra una expresión para la frecuencia angular del movimiento de la partícula,

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} + \sqrt{g_{t\phi,r}^2 + g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}, \tag{2.149}$$

donde denominamos $dX/dr = X, r$, para $X$ una cantidad cualquiera.

Teniendo todas estas cantidades ya definidas para una métrica general con simetría axial (los elementos de la métrica nunca fueron especificados), ahora determinaremos las correspondeintes expresiones para la métrica del RSDWH. El potencial efectivo adopta la forma

$$V_{\text{eff}} = -1 + \frac{2M(\tilde{L} - a\tilde{E})^2 + r(a\tilde{E} - \tilde{L})(a\tilde{E} + \tilde{L}) + \tilde{E}^2 r^3}{r(a^2 + r(r - 2M))}. \tag{2.150}$$

Se observa que (2.150) no presenta ningún tipo de dependencia con el parámetro de deformación $\lambda$. Luego, el potencial efectivo del elemento de línea (2.114) con $\lambda \neq 0$ es igual que al que se obtendría considerando el elemento de línea (2.78). Además, las cantidades $\tilde{E}$, $\tilde{L}$ y $\Omega$ coinciden con las obtenidas para la métrica de Kerr, siendo

$$\tilde{E} = \frac{r^2(r - 2M) + aM(2\sqrt{Mr} - a)}{r\sqrt{r^3(r - 3M) + 6a(Mr)^{\frac{3}{2}} - 3a^2M(r + M) + 2a^3\sqrt{Mr}}}, \tag{2.151}$$

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{Mr^7} - 3aMr^2 + a^2\sqrt{Mr}(r + 2M) - a^3M}{r\sqrt{r^3(r - 3M) + 6a(Mr)^{\frac{3}{2}} - 3a^2M(r + M) + 2a^3\sqrt{Mr}}}, \tag{2.152}$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{Mr^3} - aM}{r^3 - a^2M}. \tag{2.153}$$

Por último, las métricas de Kerr y RDSWH coinciden en el radio de la última órbita circular estable o ISCO, el cual se calcula mediante la condición $d^2V_{\text{eff}}(r)/dr^2 = 0$, obteniendo una expresión algo más compleja que las anteriores

$$
\begin{aligned}
r_{\text{ISCO}} &= 3M + \sqrt{3M^2 + a^2 + P} \\
&- \frac{1}{2}\left[72M^2 - 8(6M^2 - a^2) - 4P + 64a^2M(3M^2 + a^2 + P)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \\
P &= \frac{9M^4 - 10a^2M^2 + a^4}{K^{\frac{1}{3}}} + K^{\frac{1}{3}}, \\
K &= 27M^6 - 45a^2M^4 - 8a^3M^3 + 17a^4M^2 + 8a^5M + a^6.
\end{aligned}
\tag{2.154}
$$

# Capítulo 3

# Flujos electromagnéticos en agujeros negros

En este capítulo presentaremos el mecanismo de Blandford-Znajek, un mecanismo teórico que describe la extracción de energía rotacional de un Kerr BH en forma de energía electromagnética.

Con esta finalidad, primero definiremos la *masa irreducible* de un BH, una cantidad física relacionada con la entropía del agujero negro.

Luego, procederemos directamente con el desarrollo del mecanismo de Blandford-Znajek, donde veremos que debido a la presencia de una magnetósfera, la energía rotacional de BH puede ser transferida al campo electromagnético, y extraerse del agujero negro como un flujo de Poynting.

Por último, calcularemos el flujo electromagnético producido por un BH rotante, y lo aplicaremos al caso particular de Kerr BH.

## 3.1. Masa Irreducible

Sea un Kerr-Newman BH que interactúa con la materia y campos a su alrededor. Se puede demostrar que, para un dado instante, la superficie del horizonte de eventos depende únicamente de la masa $M$, carga $Q$ y del momento angular $J$, y que la dependencia esta dada por

$$A = 4\pi\left(r_+^2 + \left(\frac{J}{Mc}\right)^2\right) = 4\pi\left(\left(\frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{GM}{c^2} - \frac{Q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4} - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{J}{Mc}\right)^2\right). \tag{3.1}$$

De la Segunda Ley de la Termodinámica de los Agujeros Negros se sabe que el área del horizonte de eventos de estos objetos puede permanecer constante o crecer, pero nunca puede disminuir. Luego, se puede mostrar que, debido a la interacción del agujero negro con el medio, la masa $M$ puede decrecer de forma tal que el área no decrezca, lo que demuestra que existen ciertos procesos que permiten la extracción de energía rotacional del agujero negro.

Se pueden definir dos tipos de procesos:

- Procesos reversibles, donde los cambios en la masa, carga y momento angular del agujero negro para un dado proceso son tales que no hay un incremento de la superficie, y por lo tanto, existe un proceso inverso que devuelve al agujero negro a su estado original.

- Procesos irreversibles, los cuales conllevan a un incremento de la superficie (incremento en la entropía del agujero negro), y entonces el objeto compacto no puede recuperar su estado original.

Considerése un proceso reversible que extrae parte de la carga $Q$ y del momento angular por unidad de masa por unidad de velocidad $a = J/Mc$ del agujero negro. Esta extracción tiene como efecto una disminución de la masa del objeto compacto, de forma tal que la superficie del BH se mantenga constante. Así, considerando una sucesión de procesos reversibles que extraigan completamente la carga y el momento angular, [57] y [58] muestran que la masa del agujero negro alcanza un valor mínimo, y a ésta se la *masa irreducible*, que queda descripta simplemente como

$$M_{\rm ir} = \frac{c^2}{G}\left(\frac{A}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Luego, comparando las Ecuaciones (3.1) y (3.2), se puede representar la masa $M$ del agujero negro a partir de su masa irreducible $M_{\rm ir}$, su carga $Q$ y su momento angular $J$,

$$\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{GM_{\rm ir}}{c^2} + \frac{Q^2G}{16\pi\varepsilon_0 c^4 M_{\rm ir}}\right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\rm ir}^2c^2}. \tag{3.3}$$

De la Ecuación (3.3), se puede decir que la masa del BH está compuesta por tres tipos de masa-energía: la masa irreducible, una masa-energía electromagnética y una energía rotacional.

Una forma alternativa de expresar la masa irreducible en términos de la masa total del BH y el radio de horizonte de eventos es [59]

$$\left(\frac{GM_{\rm ir}}{c^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{GM}{c^2}r_+, \tag{3.4}$$

siendo $r_+ = GM/c^2\left(1 + \sqrt{1-(ac^2/GM)^2}\right)$.

## 3.2. Mecanismo de Blandford-Znajek

De lo discutido anteriormente, se puede inferir que si el agujero negro rotante está embebido en una magnetósfera, entonces la energía rotacional podría ser transferida al campo electromagnético, para luego emitirse en forma de un flujo de Poynting. El proceso que describe este fenómeno fue estudiado por Roger Blandford y Roman Znajek [28].

A continuación, se describirá cualitativamente este proceso, basándose en [2]. Debido a los campos gravitacionales extremos de los agujeros negros, es usual que estos acreten el gas que los rodea, y se observa que estos producen flujos salientes relativistas de radiación colimados, a los cuales se los denomina *jets*.

En la actualidad, se cree que uno de los principales responsables de la producción de *jets* astrofísicos es el campo magnético entorno al agujero negro. Una esquematización sencilla se muestra en la figura 3.1. Se tiene una agujero negro rotando con una frecuencia angular $\Omega$, una línea de campo magnético puramente poloidal ($B^\phi = 0$) que en un extremo se encuentra unida al objeto compacto, y en el otro se encuentra adherida a una especie de "techo", que representa el medio material que rodea al objeto compacto. Conforme el sistema evoluciona, el BH rota, y debido a esto, la línea de campo se va enroscando sobre sí misma, desarrollando una componente toroidal, en forma múltiples bucles comprimidos, generando una presión

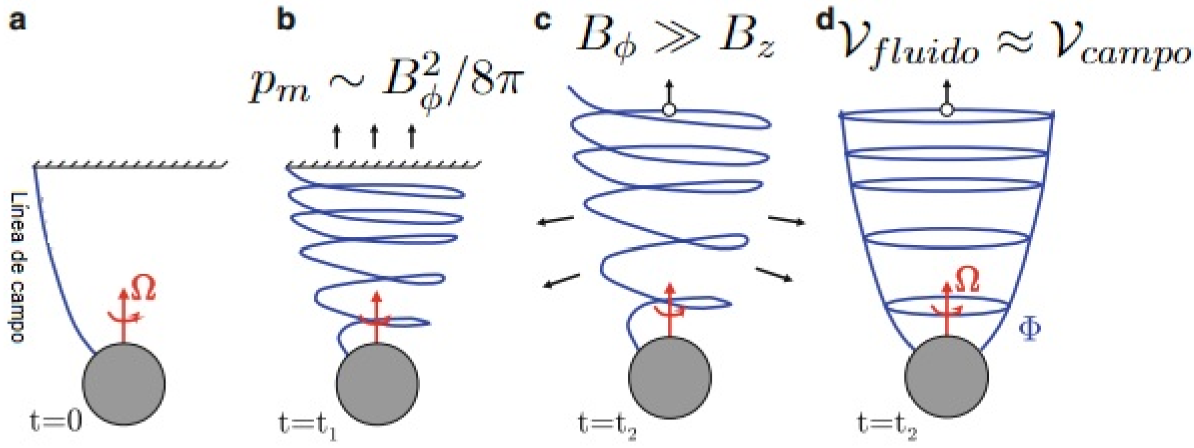



**Figura 3.1.** Esquematización de la formación de *jets* astrofísicos. Adaptada de [2]

magnética $p_\mathrm{m} \sim {B^\phi}^2/(8\pi)$. Conforme el sistema rota, las líneas de campo se comprimen aún más, produciendo un incremento en la intensidad de la presión magnética. Luego, se alcanza un punto donde el material, que se encontraba estático, ya no soporta la presión y es expulsado, de forma que el plasma que se encuentra en este se ve acelerado en la dirección del eje de rotación, formando así un *jet*. Se puede pensar al jet como bucles de campo toroidales que son expulsados por las líneas de campo toroidales, que se encuentran aceleradas debido a la presión magnética.

### 3.2.1. Electrodinámica Force-Free: Stream equation

La geometría de un agujero negro de masa $M$ rotante está descripta por la métrica de Kerr ($G = c = 1$), con elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma} d\phi^2, \tag{3.5}$$

habiendo adoptado

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = (r - r_+)(r - r_-) .$$

Como se indicó anteriormente, si el agujero negro se encuentra embebido en una magnetósfera, se puede extraer energía rotacional del mismo en forma de energía electromagnética. En [28] se considera que el Kerr BH está rodeado por una magnetósfera producto del flujo de corrientes en un disco de acreción sobre el ecuador del objeto compacto. Suponen, además, que la magnetósfera se encuentra bajo el régimen *force-free*: se desprecia la inercia de la materia fuera del disco de acreción, pero la densidad de carga es lo suficientemente alta para apantallar la componente del campo eléctrico paralela al campo magnético.

Luego, se considera que el BH se encuentra embebido en una magnetósfera dónde la fuerza de Lorentz es nula y la presión magnética domina frente a la presión del plasma astrofísico. La dinámica de la magnetósfera se describe a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \nabla_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0, \tag{3.6}$$

bajo la condición *force-free*

$$F_{\mu\nu}j^{\nu} = 0, \quad j^{\nu} \neq 0, \tag{3.7}$$

siendo $\nabla_{\mu}$ la derivada covariante definida en la sección 2.1.2, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ el tensor electromagnético, definido a partir del potencial cuadrivector $A_{\mu}$, y $j^{\mu}$ la tetra-corriente.

Las Ecuaciones (3.6) y (3.7) pueden acoplarse en una única ecuación, obteniéndose

$$F_{\mu\nu}\nabla_{\rho}F^{\rho\nu} = 0. \tag{3.8}$$

Debido a la naturaleza estacionaria y axisimétrica del espacio-tiempo, además se impone que la magnetósfera se comporte de igual forma, y se busca resolver (3.8). Bajo estas condiciones, se puede elegir un gauge tal que el potencial cuadrivector es independiente de las coordenadas temporal y azimutal

$$\partial_t A_{\mu} = 0,$$
$$\partial_{\phi} A_{\mu} = 0.$$

Se define una función $\Psi$,

$$\Psi(r,\theta) \equiv A_{\phi}(r,\theta), \tag{3.9}$$

que representa el flujo magnético a través de un bucle circular de radio $r\sin\theta$ que rodea al eje polar del BH.

Por otro lado se definen $\Omega$, que denota la velocidad angular de las líneas de campo magnético

$$\Omega(r,\theta) = -\frac{\partial_r A_t}{\partial_r \Psi} = -\frac{\partial_{\theta} A_t}{\partial_{\theta}\Psi}, \tag{3.10}$$

e $I$, que se le llama corriente poloidal,

$$I = \sqrt{-g}F^{\theta r}, \tag{3.11}$$

con $g = -\Sigma^2 \sin^2\theta$ el determinante del elemento de línea (3.5). Se demuestra en [60] que $\Omega$ e $I$ son funciones que dependen únicamente del flujo magnético $\Psi$,

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega(\Psi), \\ I &= I(\Psi). \end{aligned}$$

Tomando las componentes $r$ y $\theta$ de la Ecuación (3.8), se puede derivar la siguiente expresión

$$\Omega\partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}F^{t\rho}\right) - \partial_{\rho}\left(\sqrt{-g}F^{\phi\rho}\right) + F_{r\theta}\frac{dI}{d\Psi} = 0, \tag{3.12}$$

denominada *stream equation*, cuya incógnita es el flujo magnético $\Psi(r,\theta)$.

Es útil definir la uno-forma

$$\eta = d\phi - \Omega(\Psi)dt, \tag{3.13}$$

ya que permite reescribir la Ecuación (3.12) como

$$\eta_\mu \partial_\nu \left( \eta^\mu \sqrt{-g} g^{\nu\rho} \partial_\rho \Psi \right) = F_{r\theta} \frac{dI}{d\Psi}. \tag{3.14}$$

En [61] se muestra que cualquier tensor electromagnético estacionario y axialmente simétrico bajo la condición force-free puede ser escrito como

$$F = -I(\Psi) \sqrt{-\frac{g_P}{g_T}} dr \wedge d\theta + d\Psi \wedge \eta. \tag{3.15}$$

con $g_T = g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2$, $g_P = g_{rr} g_{\theta\theta}$.

Para la métrica de Kerr, la *stream equation* resulta

$$\eta_\mu \partial_r \left( \eta^\mu \Delta \sin\theta \partial_r \Psi \right) + \eta_\mu \partial_\theta \left( \eta^\mu \sin\theta \partial_\theta \Psi \right) + \frac{\Sigma}{\Delta \sin\theta} I \frac{dI}{d\Psi} = 0. \tag{3.16}$$

La Ecuación (3.16) es una ecuación diferencial parcial (EDP) cuasi-lineal de segundo orden para el flujo magnético $\Psi$. La dificultad a la hora de resolver esta ecuación se debe a la presencia de las dos integrales de movimiento $\Omega(\Psi)$ e $I(\Psi)$, las cuales actúan como funciones libres que deben ser determinadas. La forma de estas integrales de movimiento no sólo depende de la naturaleza del objeto, sino también de la topología del campo magnético que se propone estudiar (modelo monopolar, dipolar, entre otros).

Considerando la forma canónica de una EDP de segundo orden,

$$A \partial_r^2 \Psi + 2B \partial_r \partial_\theta \Psi + C \partial_\theta^2 \Psi + ... = 0, \tag{3.17}$$

se puede analizar el comportamiento de (3.16). Cuando el discriminante es no negativo,

$$AC - B^2 = \sin^2\theta (\eta^\mu \eta_\mu)^2 \Delta \geq 0, \tag{3.18}$$

la *stream equation* es elíptica en todo punto del espacio salvo en las superficies críticas, regiones del espacio-tiempo que contienen puntos singulares regulares de una EDP de segundo orden. Entre estas superficies regulares, se encuentra el horizonte de eventos ([60]).

### 3.2.2. Soluciones pertubativas

Anteriormente se explicó que encontrar soluciones para la Ecuación (3.16) es muy complicado debido a la presencia de las integrales de movimiento $\Omega(\Psi)$ e $I(\Psi)$. Por esto, en [28] se propone un desarrollo perturbativo de la solución de la *stream equation* para la métrica de Kerr en potencias del momento angular específico $\alpha = Jc/GM^2 = 2a/r_{\text{Schw}}$, en el régimen de spin bajo dado por la condición $\alpha \ll 1$. El elemento de línea de Kerr se reduce entonces a

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_{\text{Schw}}}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_{\text{Schw}}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\right) + \mathcal{O}(\alpha), \tag{3.19}$$

el cual coincide con el elemento de línea de Schwarzschild.

Utilizando el elemento de línea anterior, la *stream equation* sin fuentes adopta la forma

$$\frac{1}{\sin\theta} \partial_r \left[ \left(1 - \frac{r_{\text{Schw}}}{r}\right) \partial_r \Psi \right] + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \left( \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \Psi \right) = 0. \tag{3.20}$$

Considerando un magnetósfera estática, se pueden imponer diversos perfiles para las líneas de campo magnético: monopolar ([28]), paraboidal ([28]), hiperbólico ([62]) o vertical ([63, 64]).

La solución de (3.20), se restringe al hemisferio norte $0 \leq \theta < \pi/2$, y se la emparcha con la solución en el hemisferio sur, obteniendo entonces una configuración de campos discontinua o *split-field configurations*. La disconuidad se encuentra en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, debido a la formación de una corriente infinitesimal, que puede considerarse burdamente como un disco de acreción ([60]).

En [60] se considera una configuración de campos monopolar,

$$\Psi_0 = 1 - \cos\theta, \quad I_0 = 0, \quad \Omega_0 = 0, \tag{3.21}$$

que se utiliza como semilla para encontrar las correcciones en $\alpha$ para las funciones $\Psi$, $I$ y $\Omega$, bajo la suposición de una rotación lenta tanto de la magnetósfera como del agujero negro.

### 3.2.3. Condición de Znajek

Se puede mostrar que el horizonte de eventos es una superficie singular regular, pues (3.16) tiene presente el término

$$\eta^\mu = \frac{1}{g_T}\left[-\left(g_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi}\right)\delta^\mu_t + \left(g_{tt} + \Omega g_{t\phi}\right)\delta^\mu_\phi\right] \equiv \frac{1}{\Delta} h^\mu \tag{3.22}$$

De esta manera, la derivada respecto a la coordenada radial del flujo magnético sobre el horizonte de eventos desaparece, y (3.16) toma la forma

$$\left.\left(\eta_\mu \partial_\theta\left(h^\mu \sin\theta \partial_\theta \Psi\right) + \frac{\Sigma}{\sin\theta} I \frac{dI}{d\Psi}\right)\right|_{r_+} = 0. \tag{3.23}$$

Especificando en $h^\mu$ la métrica de Kerr,

$$h^\mu|_{r_+} = -\left.\left(\frac{4M^2r^2}{\Sigma}\left(\Omega_H - \Omega\right)\left(\delta^\mu_t + \Omega_H \delta^\mu_\phi\right)\right)\right|_{r_+}, \tag{3.24}$$

con $\Omega_H = -\left(g_{t\phi}/g_{\phi\phi}\right)|_{r_+} = a/\left(2Mr_+\right)$ la velocidad angular ZAMO (zero-angular-momentum-observer) evaluada en el horizonte de eventos.

La *stream equation* (3.23) puede rescribirse como

$$\partial_\theta \left.\left(\left(\frac{2Mr}{\Sigma}\sin\theta\right)^2 \left(\Omega_H - \Omega\right)^2 \left(\partial_\theta \Psi\right)^2 - I^2\right)\right|_{r_+} = 0. \tag{3.25}$$

Fijando la constante de integración a cero al proponer que la corriente $I$ desaparezca a lo largo del eje de rotación del BH ($\theta = 0$), se obtiene la *condición de Znajek*

$$I\left(r_+, \theta\right) = \left.\left[\left(\frac{2Mr}{\Sigma}\sin\theta\right)\left(\Omega_H - \Omega\right)\partial_\theta \Psi\right]\right|_{r_+} \tag{3.26}$$

Debe notarse que la condición de Znajek no es una condición de borde que se le impone a los campos; surge naturalmente de la *stream equation* y por ende, no es impuesta de forma independiente para obtener una solución particular para el flujo magnético en la magnetósfera ([60]).

Es importante remarcar que lo que aquí se denomina corriente $I$ y frecuencia angular $\Omega$, en [28] es denotado como $B_T$ y $\omega$.

### 3.2.4. Flujo de energía y momento angular electromagnético

Para cualquier sistema estacionario y axisimétrico se pueden definir vectores de flujo conservados para la energía y el momento angular medidos desde el eje de simetría.

En la literatura, estos flujos han sido calculados en la métrica de Kerr representada en diferentes sistemas coordenados. A continuación mostraremos que independiente del sistema de coordenadas utilizado, el valor de los flujos es el mismo.

Sea la representación de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist, cuyo elemento de línea está dado por (2.78), y en coordenadas de Kerr-Schild (dependiendo del autor, también se las llama como Eddington-Finkelstein avanzadas), cuyo elemento de línea es de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)c^2dt^2+\left(\frac{4GMr}{c^2\Sigma}\right)drcdt+\left(1+\frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)dr^2 \\ &+\Sigma d\theta^2+\sin^2\theta\left(\Sigma+a^2\left(1+\frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)\sin^2\theta\right)d\phi^2 \\ &-\left(\frac{4GMar\sin^2\theta}{c^2\Sigma}\right)d\phi cdt-2a\left(1+\frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi dr. \end{aligned} \tag{3.27}$$

La transformación entre sistemas de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} cdt[KS] \\ dr[KS] \\ d\theta[KS] \\ d\phi[KS] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2GMr}{c^2\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\Delta} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt[BL] \\ dr[BL] \\ d\theta[BL] \\ d\phi[BL] \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

En [28] utilizan la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist, dada por el elemento de linea (2.78), y en [59] se utiliza la métrica de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild, dada por el elemento de línea (3.27).

Ahora se demostrará que ambos tratamientos son equivalentes y que llevan a los mismos resultados.

Antes de proseguir, es de nuestro interés demostrar de manera completa el desarrollo matemático para arribar a algunos de los resultados en [59] y [65].

Si suponemos que los campos electromagnéticos son estacionarios y tienen simetría axial (no dependen del tiempo y del ángulo azimutal), entonces las componentes no nulas del tensor electromagnético, el cual está definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, son:

$$\begin{aligned} F_{tr} &= \partial_t A_r - \partial_r A_t = -\partial_r A_t, \\ F_{t\theta} &= \partial_t A_\theta - \partial_\theta A_t = -\partial_\theta A_t, \\ F_{t\phi} &= \partial_t A_\phi - \partial_\phi A_t = 0, \\ F_{r\theta} &= \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r, \\ F_{r\phi} &= \partial_r A_\phi - \partial_\phi A_r = \partial_r A_\phi, \\ F_{\theta\phi} &= \partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta = \partial_\theta A_\phi. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dada la condición *force-free*,

$$F_{\mu\nu} J^\nu = 0, \tag{3.30}$$

siendo $J^\nu$ la corriente, por otro lado también se satisface la condición ideal de magnetohidrodinámica (MHD), dada por

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0, \tag{3.31}$$

con $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\nu}$ el tensor electromagnético dual. Éste es un tensor antisimétrico definido a partir del pseudo-tensor de Levi-Civita $\mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$. Sus componentes son:

$$\begin{aligned}
F^{*tr} &= -F^{*rt} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{tr\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi,\\
F^{*t\theta} &= -F^{*\theta t} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{t\theta\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -F_{r\phi} = -\partial_r A_\phi,\\
F^{*t\phi} &= -F^{*\phi t} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{t\phi\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{r\theta} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r,\\
F^{*r\theta} &= -F^{*\theta r} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{r\theta\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{t\phi} = 0,\\
F^{*r\phi} &= -F^{*\phi r} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{r\phi\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -F_{t\theta} = \partial_\theta A_t,\\
F^{*\theta\phi} &= -F^{*\phi\theta} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\theta\phi\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = F_{tr} = -\partial_r A_t.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Reemplazando las expresiones (3.29) y (3.32) en (3.31) se obtiene

$$\begin{aligned}
F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(F^{*tr}F_{tr} + F^{*t\theta}F_{t\theta} + F^{*r\phi}F_{r\phi} + F^{*\theta\phi}F_{\theta\phi}\right) &= 0\\
4\left(-A_{\phi,\theta}A_{t,r} + A_{t,\theta}A_{\phi,r}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

A partir de esta última igualdad definimos $\omega(r,\theta)$

$$-\omega(r,\theta) = \frac{A_{t,\theta}}{A_{\phi,r}} = \frac{A_{t,r}}{A_{\phi,\theta}}. \tag{3.34}$$

Entonces el tensor electromagnético resulta

$$F_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\begin{pmatrix} 0 & -\omega B^\theta & \omega B^r & 0\\ \omega B^\theta & 0 & B^\phi & -B^\theta\\ -\omega B^r & -B^\phi & 0 & B^r\\ 0 & B^\theta & -B^r & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

donde hemos usado que $A_{\phi,\theta} = \sqrt{-g}B^r$, $A_{\phi,r} = \sqrt{-g}B^\theta$, $F_{r\theta} = \sqrt{-g}B^\Phi$, donde $g$ es el determinante de la métrica, $g = -c^2\Sigma(r,\theta)^2\sin\theta^2$.

El tensor energía-momento electromagnético sigue la forma

$$T^\mu_\nu = F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} \tag{3.36}$$

y satisface la ecuación $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$. Se definen el flujo de energía y momento angular conservados $\epsilon^\mu = -T^\mu_t$ y $\mathcal{L}^\mu = T^\mu_\phi$ como,

$$\begin{aligned}
\epsilon^r &= -F_{t\lambda}F^{r\lambda} = F_{t\lambda}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma\lambda} && (3.37)\\
&= -F_{tr}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma r} - F_{t\theta}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma\theta} && (3.38)\\
&= -F_{t\theta}F_{\rho\theta}g^{\rho r}g^{\theta\theta} && (3.39)\\
&= \left(F_{t\theta}F_{\theta\phi}g^{r\phi} - F_{r\theta}F_{t\theta}g^{rr} - F^2_{t\theta}g^{tr}\right)g^{\theta\theta} && (3.40)
\end{aligned}$$

En la expresión (3.38) vemos que hay dos términos, $F_{tr}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma r}$ y $F_{t\theta}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma\theta}$. Analizando el primer término, como la métrica es un tensor simétrico, el producto $g^{\rho r}g^{\sigma r}$ es un tensor de rango 2 doblemente contravariante simétrico, mientras que por definición, $F_{\rho\sigma}$ es un tensor doblemente covariante antisimétrico, y por ende, la contracción de estos dos es nula. En cambio, estudiando el segundo término, vemos que el tensor $g^{\sigma\theta}$ tiene una única componente no nula y lo podemos escribir como $\delta^{\sigma}_{\theta}g^{\theta\theta}$; contrayendo, obtenemos la expresión (3.39).

Para el flujo de momento angular, se puede hacer un cálculo similar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^r &= F_{\phi\lambda}F^{r\lambda} = F_{\phi\lambda}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma\lambda} && (3.41)\\
&= F_{\phi r}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma r} + F_{\phi\theta}F_{\rho\sigma}g^{\rho r}g^{\sigma\theta} && (3.42)\\
&= F_{\phi\theta}F_{\rho\theta}g^{\rho r}g^{\theta\theta} && (3.43)\\
&= \left(F^2_{\theta\phi}g^{r\phi} - F_{r\theta}F_{\theta\phi}g^{rr} - F_{t\theta}F_{\theta\phi}g^{tr}\right)g^{\theta\theta} && (3.44)
\end{aligned}$$

Hasta este punto, el tratamiento ha sido completamente general, pues en ningún momento se especificaron las componentes de la métrica.

Luego, considerando el elemento de línea (2.78) y el tensor electromagnético (3.35), se obtiene que el flujo electromagnético en la dirección radial es de la forma

$$\mathcal{E}^r = \omega B^r B^\phi \Delta \sin^2\theta. \tag{3.45}$$

Luego, considerando la condición de Znajek presentada en [28],

$$B_T[A_\phi(r,\theta)] = \frac{\sin\theta\left(\omega(r^2+a^2) - ac\right)}{r^2 + a^2\cos^2\theta}A_{\phi,\theta}, \tag{3.46}$$

y la definición

$$B_T \equiv \frac{\Delta}{\Sigma}\sin\theta B_\phi, \tag{3.47}$$

se obtiene que el flujo radial electromagnético evaluado sobre el horizonte de eventos es

$$\mathcal{E}^r = \omega\left(\Omega_H - \omega\right)\left(\frac{A_{\phi,\theta}}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)^2\left(r_+^2 + a^2\right), \tag{3.48}$$

donde $\Omega_H$ es la frecuencia angular del agujero negro,

$$\Omega_H = \frac{ac^3}{2GMr_+}, \tag{3.49}$$

siendo este el resultado que se obtiene en [28] a diferencia de una constante $\epsilon_0$, que se debe a la definición que se tomó del tensor de energía-momento.

A continuación, se considerará el elemento de línea (3.27), y se obtendrán los resultados de [59]. Para esto, es necesario conocer las componentes de la métrica $g^{r\nu}$, que en las coordenadas de Kerr-Schild son

$$\begin{aligned}
g^{tr} &= \frac{2GMr}{c^3\Sigma},\\
g^{rr} &= \frac{\Delta}{\Sigma},\\
g^{r\phi} &= \frac{a}{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Reemplazando (3.50) en (3.40), se obtiene

$$\mathcal{E}^r = -B^r B^\phi \Delta\omega(r,\theta)\sin^2\theta + \frac{2GM}{c^3} r\,(B^r)^2\,\omega\left(\frac{ac^3}{2GMr} - \omega\right)\sin^2\theta. \tag{3.51}$$

Evaluando $r = r_+$ en la Ecuación (3.51), se obtiene

$$\mathcal{E}^r = \frac{2GM}{c^3} r_+\,(B^r)^2\,\omega\,(\Omega_H - \omega)\sin^2\theta. \tag{3.52}$$

La definición del radio del horizonte de eventos imponía que éste fuese solución de la ecuación

$$\Delta = 0,$$

y de esto se desprende que

$$2\frac{GM}{c^2} r_+ = r_+^2 + a^2. \tag{3.53}$$

A partir de la definición del tensor electromagnético dada en (3.35) se obtiene

$$B^r = \frac{1}{\sqrt{-g}} F_{\phi,\theta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} A_{\phi,\theta} \tag{3.54}$$

con $\sqrt{-g} = c\Sigma\sin\theta$.

Combinando las Ecuaciones (3.52), (3.53) y (3.54), se obtiene que el flujo electromagnético conservado está dado por

$$\mathcal{E}^r = \omega\,(\Omega_H - \omega)\left(\frac{A_{\phi,\theta}}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)^2\left(r_+^2 + a^2\right), \tag{3.55}$$

obteniendo la misma expresión que en (3.48). De esto se concluye que ambos procedimientos son válidos, pero cada uno tiene complicaciones: si se toma el elemento de línea en coordenadas de Boyer-Lindquist (2.78), para obtener (3.35) fue necesario obtener la condición de Znajek (3.26) de la *stream equation*; si se elige trabajar con el elemento de línea expresado en coordenadas de Kerr-Schild (3.27), no es necesaria esta condición, pero la expresión general del flujo electromagnético conservado (3.40) se complejiza al añadírsele términos.

Además, se puede demostrar que la componente radial del flujo de momento angular electromágnetico satisface

$$\mathcal{E}^r = \omega\mathcal{L}^r, \tag{3.56}$$

y que para tener un flujo de energía saliente, es necesario entonces que se satisfaga que

$$0 \lesssim \omega \lesssim \Omega_H. \tag{3.57}$$

Luego, si se combinan (3.56) y (3.57) , se obtiene

$$\mathcal{E}^r \lesssim \Omega_H\mathcal{L}^r. \tag{3.58}$$

Esta desigualdad está asociada a la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros: la masa irreducible del BH jamás puede decrecer.

Debido a la naturaleza de la condición de Znajek como una condición de regularidad de los campos, y que el horizonte de eventos se encuentra causalmente “desconectado” del flujo electromagnético, se entiende que la presencia de un horizonte de eventos no es el catalizador para que se desarrolle este mecanismo; por el contario, la condición fundamental para que se produzca un flujo saliente de energía electromagnética es la presencia de una ergósfera, lo cual se ve apoyado en resultados analíticos y simulaciones.

Es precisamente este argumento el que nos lleva a pensar que un agujero de gusano rotante, el cual no presenta un horizonte de eventos, pero si una ergósfera, en principio sería capaz de producir un flujo electromagnético si se encuentra embebido en una magnetósfera. Este escenario es el que se estudiará en el próximo capítulo.

# Capítulo 4

# Resultados

En el Capítulo 2 se desarrolló la teoría de la RG y sus fundamentos básicos; se definieron los conceptos físicos de agujero negro y de gusano, brindando diversos ejemplos de espacio-tiempos que los describen.

Luego, en el Capítulo 3, se consideró un agujero negro envuelto por una magnetósfera que satisface la condición *force-free*. Se describió el mecanismo de Blanford-Znajek, que permite la transferencia de energía rotacional del agujero negro a la magnetósfera y que es liberada en forma de un flujo de Poynting. Además, se señaló que este mecanismo únicamente necesita presencia de la ergósfera, y no del horizonte de eventos del agujero negro, por lo que se dedujo que este mecanismo puede darse en agujeros de gusano rotantes.

A continuación, consideraremos el espacio-tiempo de RSDWH definido en la Sección 2.5, y se hará un estudio exhaustivo de los parámetros de spin $a$ y deformación $\lambda$. Luego, propondremos un modelo para el perfil de los campos magnéticos. Por último, calcularemos el flujo de Poynting para este modelo, utilizando la expresión (3.40).

## 4.1. Análisis del rango de parámetros de spin y deformación

Como se discutió anteriormente, el elemento de línea para el espacio-tiempo del agujero de gusano rotante de DS en coordenadas $(t, r, \theta, \phi)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right)c^2dt^2 - 4\frac{GMar\sin\theta^2}{c\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\hat{\Delta}}dr^2 \\ &+ \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2r\sin\theta^2}{c^2\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

con

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{4.2}$$

$$\hat{\Delta} \equiv r^2 - 2\frac{GM}{c^2}(1+\lambda^2)r + a^2. \tag{4.3}$$

Es vital establecer los valores que pueden adoptar los parámetros del agujero de gusano (la masa $M$, el spin $a$ y el parámetro de deformación $\lambda$) de forma que se den las condiciones para la extracción de energía rotacional en forma de un flujo de Poynting. Sin pérdida de generalidad, adoptaremos unidades geometrizadas $G = c = 1$ y $M = 1$, de forma que la cantidad $a$ se mueva en el rango $0 \leq a \leq 1$, es decir, el spin está dado en unidades de masa.

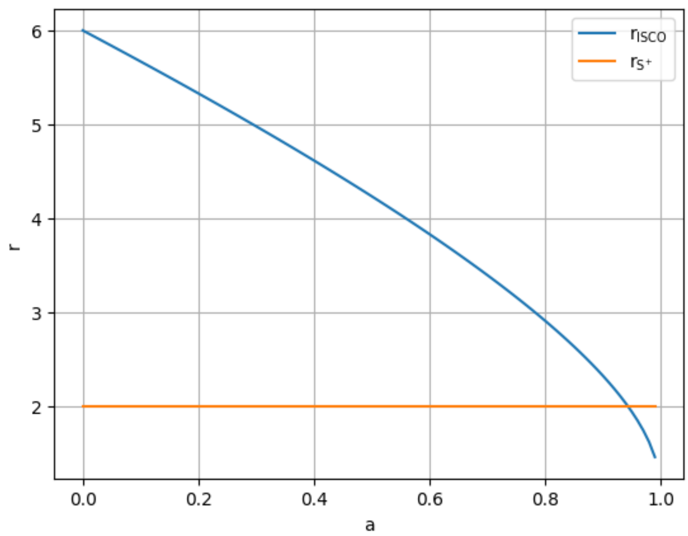



**Figura 4.1.** Radio de la última orbita circular estable y de la ergorregión sobre el ecuador en función del parámetro de spin $a$.

En la Subsección 2.5.3, se demostró que para valores del parámetro de deformación $\lambda \leq \lambda_{\text{crit}} = a/2$ (recordar que normalizamos $M = 1$), la ergósfera del agujero de gusano está por fuera de la garganta. Ésta es la primera restricción en los valores de los parámetros que tomaremos.

Por otro lado, suponemos que la magnetósfera es producida por cargas en un disco de acreción entorno al agujero de gusano. El disco de acreción se encuentra en el plano ecuatorial y su radio más interno corresponde a la coordenada radial de la última órbita circular estable ($r_{\text{disk}} \geq r_{\text{ISCO}}$). Esta suposición respecto al límite interno del disco está justificada en los modelos de disco ópticamente grueso y geometricamente delgado de [66] y su versión relativista de [67] y [68]. Luego, necesariamente parte del disco de acreción debe estar contenido en la ergósfera. Esta condición se traduce en forma matemática como

$$r_{\text{ISCO}} \leq r_{S^+}(\theta = \pi/2) = 2M = 2. \tag{4.4}$$

En la Figura 4.1, representamos la coordenada radial de la última órbita circular estable y el radio de la ergósfera en el ecuador. A partir de la figura deducimos que la condición (4.4) se satisface sólo si el parámetro de spin se encuentra en el rango $0.94281 \leq a \leq 1$, es decir, sólo agujeros de gusano dados por la métrica de Damour-Solodukhin, de muy rápida rotación.

Una vez establecido el rango de los posibles valores de spin, se tomarán aquellos valores del parámetro de deformación $\lambda$ de forma que la última órbita circular estable se encuentre por fuera de la garganta.

En la Figura 4.2 graficamos con línea continua el radio de la garganta en función del parámetro de deformación $\lambda$ para tres valores distintos de spin: $a = 0.9428$ (rojo), $a = 0.95$ (azul), $a = 0.9714$ (cian)y $a = 1$ (negro). Las cuatro curvas punteadas corresponden al radio de la última orbita circular estable para cada uno de esos valores de spin. Dado que $r_{\text{ISCO}}$ no depende de $\lambda$ (toman los mismos valores que para un agujero negro de Kerr), las curvas son rectas paralelas al eje de las abcisas.

De esta figura podemos observar que para el valor mínimo de $a$, no importa el valor que le asignemos al parámetro de deformación (recordar que $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{crit}} = a/2$, donde ya hemos normalizado $M = 1$), la última órbita circular estable se encuentra por fuera de la garganta,

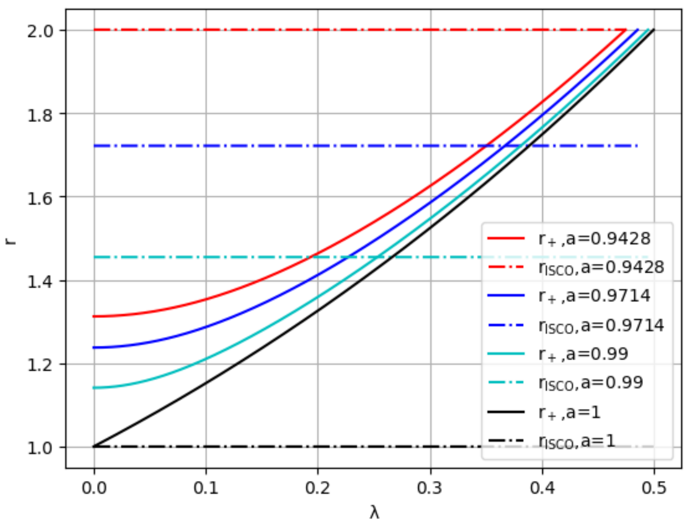



**Figura 4.2.** Radio de la última orbita circular estable y de la garganta sobre el ecuador para tres valores diferentes de $a$.

que era lo que buscábamos.

Conforme aumentemos el valor del spin, tanto el radio de la garganta como el de la última órbita circular estable se reducen; se observa que existe un valor del parámetro de deformación, denotado $\tilde{\lambda}_{\text{crit}}$, donde ambas curvas se intersectan. Para $\lambda \geq \tilde{\lambda}_{\text{crit}}$, la última órbita circular estable cae dentro de la garganta, violando las suposiciones de nuestro modelo.

Cuando se alcanza el valor límite del parámetro de spin, $a = 1$, se ve que si $\lambda > 0$, entonces $r_+ > r_{\text{ISCO}}$, y por lo tanto, la última órbita circular estable caería dentro de la garganta, coincidiendo con ésta para $\lambda = 0$. Pero hay un problema con esta situación: para $\lambda = 0$, la métrica del agujero de gusano se reduce a la de un agujero negro de Kerr. Más aún, cuando el spin vale $a = 1$, los horizontes de eventos desaparacen dejando lugar a una singularidad desnuda [35].

De este análisis concluímos que para modelar un agujero de gusano rotante que presente un disco de acreción dentro de la ergósfera, tenemos que tomar valores del parámetro de spin en el intervalo $0.94281GM/c^2 \leq a < GM/c^2$, habiendo recuperado las constantes de forma que el parámetro de spin tenga unidades de longitud. Por otro lado, una vez habiendo fijado el parámetro de spin $a$, el parámetro de deformación $\lambda$ va a poder adoptar valores solamente en el rango $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}_{\text{crit}} \leq \lambda_{\text{crit}}$, con $\tilde{\lambda}_{\text{crit}}$ dependiente de la elección del parámetro de spin $a$.

## 4.2. Modelo de campo electromagnético

Para continuar con nuestro cometido, debemos determinar el comportamiento del campo magnético en la región de interés, entre la garganta y la ergósfera. Para esto, vamos a tomar de referencia el modelo de [69].

En este modelo se considera que en la región externa a la ergósfera, el campo magnético es asintóticamente uniforme y apunta en la dirección de simetría axial del agujero negro, es decir

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}, \quad r \to \infty. \tag{4.5}$$

Nosotros adaptaremos este modelo para la métrica de agujero de gusano que se estudia en esta tesis. A partir de las simetrías de un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico (que es asintóticamente plano), y ciertas propiedades impuestas al tensor electromagnético $F$ (ver [69]), se puede mostrar que éste tiene la forma

$$F = \frac{1}{2}B_0\left(d\psi + 2\frac{a}{c}d\eta\right), \tag{4.6}$$

siendo $\psi$ el vector de Killing axial, y $\eta$ el vector de Killing temporal (monoformas), y la letra d denota la derivada exterior. Estos vectores de Killing en forma contravariante se escriben como

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^\mu\partial_\mu = (0,0,0,1)\,, && (4.7)\\ \eta &= \eta^\mu\partial_\mu = (1,0,0,0)\,. && (4.8) \end{aligned}$$

Su correspondiente expresión covariante es

$$\begin{aligned} \psi_\mu &= g_{\mu\nu}\psi^\nu = g_{\mu\phi} = (g_{t\phi},0,0,g_{\phi\phi})\,, && (4.9)\\ \eta_\mu &= g_{\mu\nu}\eta^\nu = g_{\mu t} = (g_{tt},0,0,g_{t\phi})\,. && (4.10) \end{aligned}$$

Definamos la derivada exterior de un tensor. Sea $\varphi$ una k-forma,

$$\varphi = g dx^I = g dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge ... \wedge dx^{i_k}. \tag{4.11}$$

La derivada exterior de una k-forma se define como

$$d\varphi = \frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i \wedge dx^I. \tag{4.12}$$

Entonces, el tensor electromagnético dado por (4.6) toma la forma

$$\begin{aligned} F \;=\; & \frac{1}{2}B_0\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(g_{t\phi}+2\frac{a}{c}g_{tt}\right)dr\wedge dt + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_{t\phi}+2\frac{a}{c}g_{tt}\right)d\theta\wedge dt\right.\\ & \left. + \frac{\partial}{\partial r}\left(g_{\phi\phi}+2\frac{a}{c}g_{t\phi}\right)dr\wedge d\phi + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_{\phi\phi}+2\frac{a}{c}g_{t\phi}\right)d\theta\wedge d\phi\right]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Si llamamos $X$ a

$$X = g_{\phi\phi}+2\frac{a}{c}g_{t\phi} = \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left(\rho^2 - 4\frac{GM}{c^2}a^2 r\right) \tag{4.14}$$

con $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\rho^2 = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$, y $\Delta = r^2 - 2GM/c^2 r + a^2$, el campo magnético en la coordenada radial $r$ es

$$B^r(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi} = \frac{B_0}{2\Sigma\sin\theta}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}}\frac{\partial X}{\partial\theta}. \tag{4.15}$$

con $\hat{\Delta} = r^2 - 2GM/c^2\,(1+\lambda^2)\,r + a^2$.

Una vez definido $B^r(r,\theta)$, podemos calcular $B^\theta(r,\theta)$, que se puede deducir de forma similar:

$$B^\theta(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{-g}}F_{\phi r} = -\frac{B_0}{2\Sigma\sin\theta}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}}\frac{\partial X}{\partial r}. \tag{4.16}$$

El campo magnético resulta entonces

$$\vec{B} = B^r(r,\theta)\hat{r} + r_{\mathrm{g}} B^\theta(r,\theta)\hat{\theta} \tag{4.17}$$

con magnitud

$$B^2 = B^r(r,\theta)^2 + r_{\mathrm{g}}^2 B^\theta(r,\theta)^2. \tag{4.18}$$

siendo $r_{\mathrm{g}}$ un radio gravitacional, $r_{\mathrm{g}} = GM/c^2$.

Teniendo en cuenta la forma del tensor electromagnético dada por (3.35), se puede ver que la velocidad angular del campo electromagnético la podemos calcular como

$$\omega = \frac{F_{t\theta}}{F_{\theta\phi}} \tag{4.19}$$

lo cual resulta en

$$\omega(r,\theta) = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \theta}}{\frac{\partial X}{\partial \theta}}, \tag{4.20}$$

con $X$ como la definimos antes y $U = g_{t\phi} + 2a/cg_{tt} = -2ac\left[1 - (2Mr\cos^2\theta)/\Sigma\right]$.

La expresión (4.17) corresponde al campo magnético por fuera de la ergósfera. Suponemos que debido al fenómeno de *frame dragging*, las líneas de campo magnético que penetran la ergósfera desarrollan una componente azimutal, la cual denotaremos $B^\phi$, a la vez que se modifican las correspondientes componentes $r$ y $\theta$,

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\mathrm{in}}(r,\theta) &= \vec{B}_{\mathrm{new}} + r_{\mathrm{g}} B^\phi(r,\theta)\hat{\phi}, \\ \vec{B}_{\mathrm{new}}(r,\theta) &= B^r_{\mathrm{new}}\hat{r} + r_{\mathrm{g}} B^\theta_{\mathrm{new}} = \left(B^r(r,\theta)\hat{r} + r_{\mathrm{g}} B^\theta(r,\theta)\hat{\theta}\right) y(r,\theta) \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde el subíndice *in* indica que es el campo magnético en el interior de la ergorregión y el subíndice *new* lo utilizamos para indicar que se trata de una nueva componente radial y axial. Por $y(r,\theta)$ nos referimos una función lineal tal que evaluada sobre la ergósfera valga 1 y sobre la garganta se anule,

$$y(r,\theta) = \frac{r - r_+}{r_{S^+} - r_+}. \tag{4.22}$$

Bajo estas consideraciones, es de nuestro interés obtener una forma explícita para la componente $B^\phi$, y con este fin tomaremos una última condición: la magnitud del campo magnético por dentro de la ergósfera será uniforme, y coincidirá con la magnitud del campo magnético sobre la ergósfera. Esta condición queda descripta por la siguiente expresión

$$r_{\mathrm{g}}^2 B^\phi(r,\theta)^2 + y(r,\theta)^2\left(B^r(r,\theta)^2 + r_{\mathrm{g}}^2 B^\theta(r,\theta)^2\right) = B(r_{S^+},\theta)^2, \forall r,\theta. \tag{4.23}$$

De esta expresión, se encuentra que la componente del campo magnético $B^\phi(r,\theta)$ es

$$B^\phi(r,\theta) = -\frac{1}{r_{\mathrm{g}}}\sqrt{B(r_{S^+},\theta)^2 - y(r,\theta)^2\left(B^r(r,\theta)^2 + r_{\mathrm{g}}^2 B^\theta(r,\theta)^2\right)}, \tag{4.24}$$

donde tomamos el signo negativo para luego tener tasas de extracción de energía positivas.

## 4.3. Cálculo del flujo electromagnético

Ya conociendo la forma explícita de las componentes del campo magnético para nuestro modelo particular procederemos al cálculo del flujo electromagnético de acuerdo a la expresión (3.40). Los coeficientes de la inversa del tensor métrico del elemento de línea (4.1) resultan

$$\begin{aligned} g^{tr} &= 0, \\ g^{rr} &= \frac{\hat{\Delta}}{\Sigma}, \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma}, \\ g^{r\phi} &= 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Usando la definición del tensor electromagnético (3.35) y que el determinante del tensor métrico es $-g = c^2\Sigma^2 \sin^2\theta\Delta/\hat{\Delta}$, la forma de $\mathcal{E}^r$ (3.40) se reduce a

$$\mathcal{E}^r = -c^2\omega(r,\theta)B^r_{\text{new}}(r,\theta)B^{\phi}(r,\theta)\Delta\sin^2\theta. \tag{4.26}$$

Buscamos obtener la tasa de extracción de energía electromagnética, la cual se obtiene de integrar en el ángulo sólido el flujo electromagnético $\mathcal{E}^r$ evaluado en un dado radio. Nosotros tomamos el radio interno del disco de acreción, esto es, el radio de la última orbita circular estable $r_{\text{ISCO}}$:

$$P_{\text{BZ}} = \frac{2}{c^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_{\text{inicial}}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{-g}\mathcal{E}^r(r_{\text{ISCO}},\theta) = \frac{4\pi}{c^3}\int_{\theta_{\text{inicial}}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{-g}\mathcal{E}^r(r_{\text{ISCO}},\theta). \tag{4.27}$$

siendo $\theta_{\text{inicial}}$ el valor mínimo para el ángulo axial donde se observa que el flujo $\mathcal{E}^r$ se anula; este valor está determinado únicamente por la componente azimutal del campo magnético (para un valor del ángulo más pequeño, $B^{\phi}$ resulta imaginario), y por ende, es dependiente del modelo de la topología del campo magnético que adoptemos. Se observa que $\theta_{\text{inicial}}$ depende del spin $a$ y que si tiene dependencia con el parámetro de deformación $\lambda$, esta es mínima, pues las Figuras 4.3,4.4 y 4.5 se observan diferencias mínimas entre las curvas a distintos valores de parámetro de deformación.

Propondremos un agujero de gusano con parámetros similares a los de un agujero negro de masa estelar, con una masa $M = 10\,M_{\odot}$ y un campo magnético $B_0 = 10^7$ *Gauss* (proponemos este valor para el módulo del campo magnético a partir del hecho que para la fuente Cygnus X-1, se observa un flujo electromagnético de $10^{37}$ $erg\,s^{-1}$ [70]). Para hacer un estudio detallado, elegimos tres valores de spin diferentes en el rango que establecimos antes, $a$ =0.95 $GM/c^2$, $a$ =0.97 $GM/c^2$ y $a$ =0.99 $GM/c^2$; para cada uno de estos casos tomamos cuatro parámetros de deformación distintos: el valor mínimo es $\lambda$ =0, que corresponde a un agujero negro de Kerr, y el valor máximo del parámetro de deformación es tal que la garganta y la última órbita circular estable son próximas.

Las Figuras 4.3, 4.4 y 4.5 representan al integrando de la Ecuación (4.28) para los distintos valores de los parámetros de spin y de deformación. En ellos se pueden observar dos comportamientos: primero que, conforme el parámetro de spin $a$ aumenta, la distribución angular de flujo se vuelve simétrica en el ángulo axial $\theta$; y segundo que, conforme el parámetro de spin $a$ disminuye, cambia el comportamiento de las curvas, de forma que el caso de Kerr deja de dominar frente a agujeros de gusano levemente deformados. Además, se ve que independientemente del valor que tome el parámetro de spin $a$, para agujeros de gusano altamente deformados, la tasa de extracción de energía electromagnética es altamente deficiente.

| $a$=0.95 $GM/c^2$ | $\mathrm{r}_{ISCO}/(\mathrm{GM/c^2})$ | $\mathrm{r}_+/(\mathrm{GM/c^2})$ | $P_{\mathrm{BZ}}$ [$10^{36}$ $erg\ s^{-1}$] |
|---|---|---|---|
| $\lambda$=0 | 1.93724 | 1.31225 | 1.049 |
| $\lambda$=0.18 | 1.93724 | 1.43657 | 1.172 |
| $\lambda$=0.35 | 1.93724 | 1.72042 | 1.303 |
| $\lambda$=0.445 | 1.93724 | 1.92793 | 0.3 |

**Tabla 4.1.** Valores de las tasas de extracción de energía con masa $M = 10\,M_\odot$, parámetro de spin $a$=0.95 $GM/c^2$ y campo magnético $B = 10^7\ G$, a distintos valores del parámetro de deformación $\lambda$.

Luego, resolviendo la integral de la Ecuación (4.28) para los distintos valores de spin y deformación, se obtienen los resultados presentes en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3. De éstas, si se comparan valores cercanos del parámetro de deformación, se puede ver que se obtiene una tasa de extracción de energía electromagnética $P$ máxima para objetos compactos con parámetros de spin intermedios. Además, observamos que los resultados obtenidos para agujeros negros de Kerr coinciden en orden de magnitud con la expresión obtenida en el trabajo [71],

$$P = 1.7 \times 10^{50} \left(\frac{ac}{GM}\right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{< B_H >}{10^{15}\,Gauss}\right)^2\ erg\ s^{-1}, \tag{4.28}$$

donde aquí redefinieron $a \equiv ac$ y $< B_H >$ es la componente física radial media del campo magnético; salvo en el caso de agujeros de gusano altamente deformados ($\lambda \approx \tilde{\lambda}_{\mathrm{crit}}(a)$), el flujo de Poynting de un Kerr BH coincide en orden de magnitud con el de un agujero de gusano tipo Kerr.

Notemos de la expresión (4.28) que la tasa de extracción de energía electromagnética es proporcional al cuadrado del parámetro de spin, lo cual no se condice con nuestros resultados, pues de estos vemos que la tasa de extracción es máxima para $a \approx 0.97$. Esta diferencia en los comportamientos probablemente se deba a la elección de la topología del campo magnético que hemos realizado, y es de esperar que si se resuelve la *stream equation*, se observe el comportamiento esperado.

Por otro lado, a medida que se aumenta el valor del spin (en el rango analizado), el valor máximo de la potencia se mueve a valores más pequeños del parámetro $\lambda$. Notar, además, que valores de $\lambda$ más grandes corresponden a regiones ergosféricas más pequeñas (tal como se observa en la Figura 2.4). Luego, la región de integración del flujo de energía electromagnética es menor.

Por último, debe señalarse que los resultados aquí obtenidos son dependientes del modelo adoptado para la topología del campo magnético. En particular, si bien el flujo electromagnético depende (a grandes rasgos) del cuadrado del módulo del campo magnético, este último tiene una dependencia altamente no lineal con el spin y el parámetro $\lambda$. Es por ello que, a partir del análisis que llevamos acabo, no es posible concluir de manera general si el mecanismo de Blandford-Znajek resulta más eficiente en un Kerr BH o en un RDSWH; ésto sólo puede determinarse mediante un estudio particular fijando los parámetros que determinan completamente ambos espacio-tiempos: masa y spin $a$, y para el RDSWH el parámetro de deformación $\lambda$.

| $a$=0.97 $GM/c^2$ | r$_{ISCO}$/(GM/c$^2$) | r$_+$/(GM/c$^2$) | $P_{\rm BZ}$ [$10^{36}$ $erg\ s^{-1}$] |
|---|---|---|---|
| $\lambda$=0 | 1.73752 | 1.2431 | 4.08 |
| $\lambda$=0.12 | 1.73752 | 1.31123 | 4.134 |
| $\lambda$=0.24 | 1.73752 | 1.47905 | 3.836 |
| $\lambda$=0.36 | 1.73752 | 1.70847 | 0.969 |

**Tabla 4.2.** Valores de las tasas de extracción de energía con masa $M = 10\,M_\odot$, parámetro de spin $a$=0.97 $GM/c^2$ y campo magnético $B = 10^7$ $G$, a distintos valores del parámetro de deformación $\lambda$.

| $a$=0.99 $GM/c^2$ | r$_{ISCO}$/(GM/c$^2$) | r$_+$/(GM/c$^2$) | $P_{\rm BZ}$ [$10^{36}$ $erg\ s^{-1}$] |
|---|---|---|---|
| $\lambda$=0 | 1.4545 | 1.14107 | 2.038 |
| $\lambda$=0.08 | 1.4545 | 1.18734 | 1.91 |
| $\lambda$=0.16 | 1.4545 | 1.29347 | 1.426 |
| $\lambda$=0.24 | 1.4545 | 1.42965 | 0.293 |

**Tabla 4.3.** Valores de las tasas de extracción de energía con masa $M = 10\,M_\odot$, parámetro de spin $a$=0.99 $GM/c^2$ y campo magnético $B = 10^7$ $G$, con diferentes valores del parámetro de deformación $\lambda$.

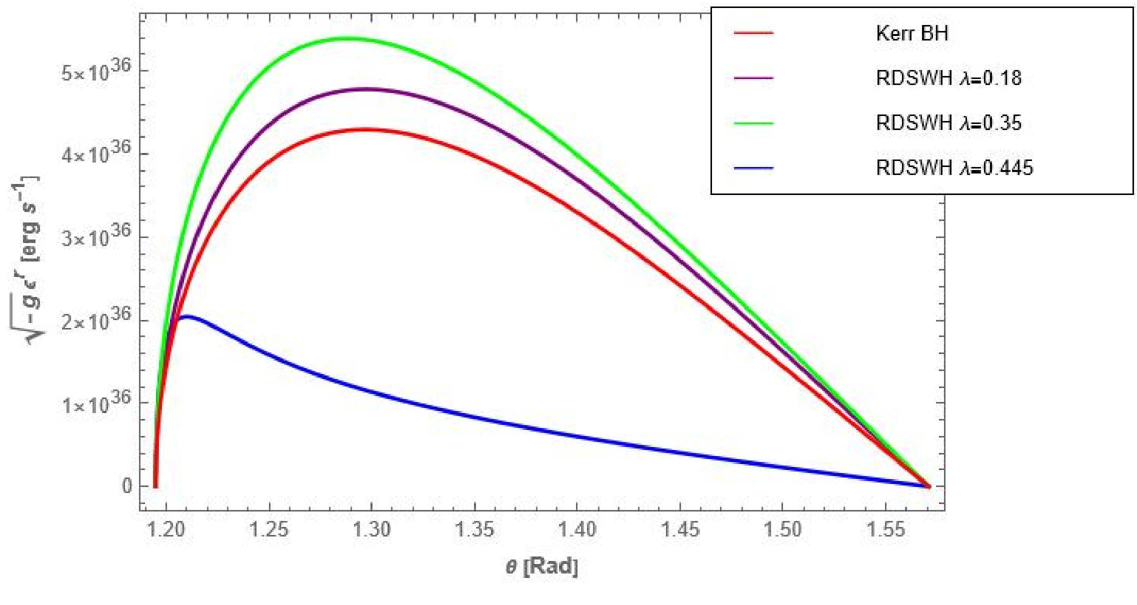



**Figura 4.3.** Flujo de energía electromagnético por unidad de ángulo sólido para un parámetro de spin $a = 0.95$, variando el parámetro de deformación.

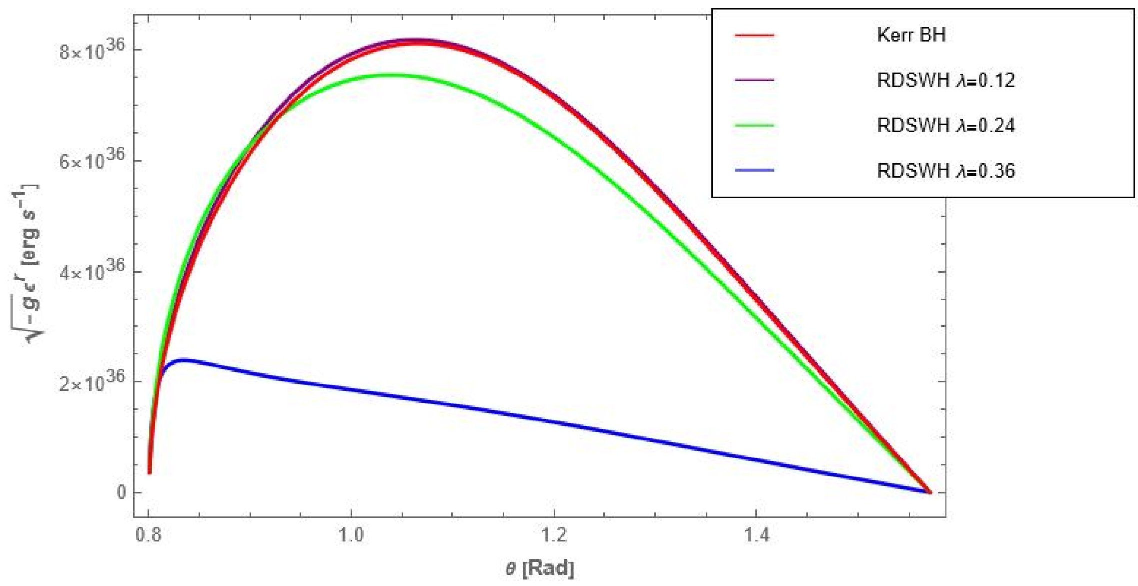



**Figura 4.4.** Flujo de energía electromagnético por unidad de ángulo sólido para un parámetro de spin $a = 0.97$, variando el parámetro de deformación.

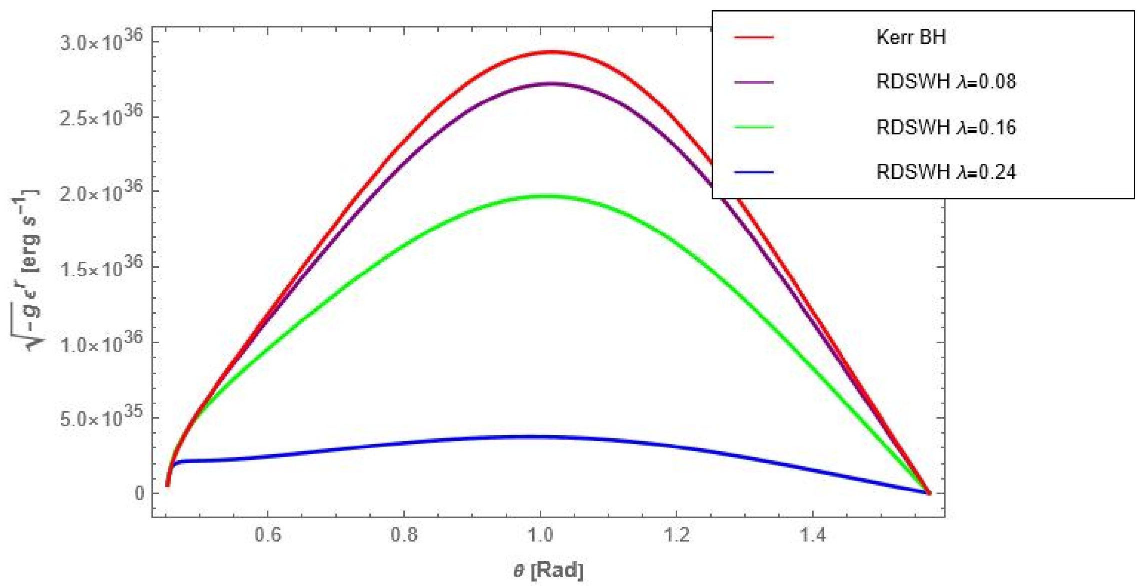



**Figura 4.5.** Flujo de energía electromagnético por unidad de ángulo sólido para un parámetro de spin $a = 0.99$, variando el parámetro de deformación.

# Capítulo 5

# Conclusiones

La motivación de este trabajo fue analizar si en agujeros de gusano rotantes es posible la extracción de energía rotacional en forma de un flujo de Poynting, análogo al mecanismo de Blandford-Znajek en agujeros negros, y cuantificar este proceso. Para eso, primero presentamos el marco teórico necesario: se definió el concepto de espacio-tiempo, se introdujeron los fundamentos de la teoría de la RG, junto con las herramientas matemáticas necesarias para definir a un agujero negro y a un agujero de gusano.

Luego, realizamos una recopilación de las soluciones de agujero de gusano rotantes más relevantes. Entre éstas, nos concentramos en el modelo RDSWH, el cual describe un agujero de gusano rotante tipo Kerr. Analizamos para qué valores de los parámetros de spin y deformación son posibles configuraciones donde la ergosfera se encuentra por fuera de la garganta.

Posteriormente, discutimos en detalle el mecanismo de Blandford-Znajek, el cual describe la extracción de la energía rotacional de un agujero negro, en forma de un flujo de Poynting. Calculamos el flujo de extracción de energía electromagnética para el caso de un Kerr BH en dos sistemas de coordenadas diferentes, mostrando que la misma es independiente de la elección de coordenadas.

Finalmente, llevamos a cabo un estudio similar al anterior considerando un agujero de gusano descrito por el modelo RDSWH. En este contexto, analizamos los rangos posibles para los parámetros de spin $a$ y de deformación $\lambda$, con el objetivo de caracterizar el flujo de Poynting. Encontramos que los valores de estos parámetros están restringidos a $0.94281 \leq a < 1$ y $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}_{\text{crit}}(a) \leq \lambda_{\text{crit}} = ac^2/2GM$. Además, propusimos un modelo de campo magnético uniforme que apunta en dirección polar fuera de la ergosuperficie. Dentro de esta región, propusimos que la componente poloidal del campo magnético decrece linealmente a medida que nos acercamos a la garganta del agujero de gusano, desarrollándose simultáneamente una componente toroidal, de forma que el módulo del campo magnético se conserve dentro de la ergorregión.

Concluimos en que existe un flujo de Poynting asociado al proceso de acreción de materia y campos en agujeros de gusano rotantes, constituyendo un resultado original no abordado previamente en la literatura. Es importante destacar que nuestros hallazgos dependen significativamente de la topología del campo magnético propuesto, siendo esto evidente en el comportamiento de la tasas de extracción de energía con el parámetro de spin. Debido a la dependencia no lineal del campo magnético con respecto al spin y al parámetro de deformación, no se obtuvo un comportamiento general que describa la relación entre los flujos de Poynting emitidos por un agujero negro de Kerr y un agujero de gusano rotante de DS. No obstante, observamos que el flujo de Poynting alcanza valores máximos para valores de spin cercanos a $a \approx 0.97$, y que el flujo de Poynting de un agujero de gusano de DS es comparable al de un agujero negro de Kerr.

El trabajo realizado en esta tesis sienta las bases para investigaciones a futuro. Aquí sólo se exploró el mecanismo de Blandford-Znajek considerando que la superficie ergosférica se encuentra por fuera de la garganta. Sin embargo, dada la similitud de la solución de RDSWH con la de Kerr, existe una región ergosférica interna a la garganta. La física asociada merece ser estudiada ya que puede dar lugar a toda una fenomenología completamente novedosa y distinta con respecto al caso de un agujero negro.

Por otro lado, aquí se propuso un modelo sencillo para la topología del campo magnético. Sin embargo, es posible, en principio, hallar soluciones de la *stream equation* en la métrica de un agujero de gusano rotante de Damour-Solodukhin. Ésto permitirá explorar en detalle el comportamiento del campo magnético, en particular en las cercanías a la garganta. Hasta la fecha, este tipo de investigaciones no han sido llevadas a cabo en espacio-tiempos de agujeros de gusano rotantes

Por último, se podría expandir el análisis llevado a cabo en esta tesis a otros espacios-tiempos de agujeros de gusano rotantes, como pueden ser el agujero de gusano de Teo y el agujero gusano rotante de Ellis, permitiendo la comparación de los flujos electromagnéticos entre diferentes modelos de agujeros de gusano.

# Bibliografía


[1] Muhammed Amir, Kimet Jusufi, Ayan Banerjee, and Sudan Hansraj. Shadow images of Kerr-like wormholes. Classical and Quantum Gravity, 36(21):215007, November 2019.

[2] A. Tchekhovskoy. The formation and disruption of black hole jets. Astrophysics and Space Science Library, 414:45–82, 2015.

[3] Kip S. Thorne. Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy. 1994.

[4] Michael S. Morris and Kip S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. American Journal of Physics, 56(5):395–412, May 1988.

[5] Matt Visser. Lorentzian wormholes. From Einstein to Hawking. 1995.

[6] Francisco S. N. Lobo. Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions. Fundamental Theories of Physics, 189, January 2017.

[7] Sung-Won Kim. Schwarzschild-de Sitter type wormhole. Physics Letters A, 166(1):13–16, June 1992.

[8] Thomas A. Roman. Inflating Lorentzian wormholes. Phys. Rev. D, 47(4):1370–1379, February 1993.

[9] Sung-Won Kim. Cosmological model with a traversable wormhole. Phys. Rev. D, 53(12):6889–6892, June 1996.

[10] Sebastian Bahamonde, Mubasher Jamil, Petar Pavlovic, and Marko Sossich. Cosmological wormholes in f (R ) theories of gravity. Phys. Rev. D, 94(4):044041, August 2016.

[11] Daniela Pérez and Mário Raia Neto. A new solution for a generalized cosmological wormhole. European Physical Journal C, 83(12):1127, December 2023.

[12] Cosimo Bambi and Dejan Stojkovic. Astrophysical Wormholes. Universe, 7(5):136, May 2021.

[13] S. W. Kim and Y. M. Cho. Wormhole gravitational lens. In Evolution of the Universe and its Observational Quest, pages 353–354, January 1994.

[14] John G. Cramer, Robert L. Forward, Michael S. Morris, Matt Visser, Gregory Benford, and Geoffrey A. Landis. Natural wormholes as gravitational lenses. Phys. Rev. D, 51(6):3117–3120, March 1995.

[15] De-Chang Dai and Dejan Stojkovic. Observing a wormhole. Phys. Rev. D, 100(8):083513, October 2019.

[16] De-Chang Dai and Dejan Stojkovic. Reply to "Comment on 'Observing a wormhole"'. Phys. Rev. D, 101(6):068302, March 2020.

[17] Petya G. Nedkova, Vassil K. Tinchev, and Stoytcho S. Yazadjiev. Shadow of a rotating traversable wormhole. Phys. Rev. D, 88(12):124019, December 2013.

[18] Takayuki Ohgami and Nobuyuki Sakai. Wormhole shadows. Phys. Rev. D, 91(12):124020, June 2015.

[19] Muhammed Amir, Ayan Banerjee, and Sunil D. Maharaj. Shadow of charged wormholes in Einstein-Maxwell-dilaton theory. Annals of Physics, 400:198–207, January 2019.

[20] Tiberiu Harko, Zoltán Kovács, and Francisco S. N. Lobo. Electromagnetic signatures of thin accretion disks in wormhole geometries. Phys. Rev. D, 78(8):084005, October 2008.

[21] Tiberiu Harko, Zoltán Kovács, and Francisco S. N. Lobo. Thin accretion disks in stationary axisymmetric wormhole spacetimes. Phys. Rev. D, 79(6):064001, March 2009.

[22] R. Kh. Karimov, R. N Izmailov, and K. K. Nandi. Accretion disk around the rotating damour–solodukhin wormhole. The European Physical Journal, pages 951–959, 2019.

[23] Suvankar Paul, Rajibul Shaikh, Pritam Banerjee, and Tapobrata Sarkar. Observational signatures of wormholes with thin accretion disks. JCAP, 2020(3):055, March 2020.

[24] R. A. Konoplya and C. Molina. Ringing wormholes. Phys. Rev. D, 71(12):124009, June 2005.

[25] R. A. Konoplya and A. Zhidenko. Wormholes versus black holes: quasinormal ringing at early and late times. JCAP, 2016(12):043, December 2016.

[26] Kamal K. Nandi, Ramil N. Izmailov, Almir A. Yanbekov, and Azat A. Shayakhmetov. Ring-down gravitational waves and lensing observables: How far can a wormhole mimic those of a black hole? Phys. Rev. D, 95(10):104011, May 2017.

[27] Pablo Bueno, Pablo A. Cano, Frederik Goelen, Thomas Hertog, and Bert Vercnocke. Echoes of Kerr-like wormholes. Phys. Rev. D, 97(2):024040, January 2018.

[28] R. D. Blandford and R. L. Znajek. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. MNRAS, 179:433–456, May 1977.

[29] S. S. Komissarov. Direct numerical simulations of the Blandford-Znajek effect. MNRAS, 326(3):L41–L44, September 2001.

[30] S. S. Komissarov. On the nature of the Blandford-Znajek mechanism. arXiv e-prints, pages astro–ph/0211141, November 2002.

[31] S. S. Komissarov. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of monopole magnetospheres of black holes. MNRAS, 350(4):1431–1436, June 2004.

[32] Gustavo E. Romero and Gabriela S. Vila. Introduction to Black Hole Astrophysics, volume 876. 2014.

[33] Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, 1972.

[34] P. A. M. Dirac. General Theory of Relativity. 1996.

[35] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. General Relativity. 2006.

[36] Albert Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pages 778–786, January 1915.

[37] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pages 189–196, January 1916.

[38] Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. Phys. Rev. Lett., 11(5):237–238, September 1963.

[39] E. T. Newman and A. I. Janis. Note on the Kerr Spinning-Particle Metric. Journal of Mathematical Physics, 6(6):915–917, June 1965.

[40] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a Rotating, Charged Mass. Journal of Mathematical Physics, 6(6):918–919, June 1965.

[41] A. Einstein and N. Rosen. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. Physical Review, 48(1):73–77, July 1935.

[42] Charles W. Misner and John A. Wheeler. Classical physics as geometry. Annals of Physics, 2(6):525–603, December 1957.

[43] Michael S. Morris, Kip S. Thorne, and Ulvi Yurtsever. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. Phys. Rev. Lett., 61(13):1446–1449, September 1988.

[44] Homer G. Ellis. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. Journal of Mathematical Physics, 14(1):104–118, January 1973.

[45] Homer G. Ellis. The evolving, flowless drainhole: A nongravitating-particle model in general relativity theory. General Relativity and Gravitation, 10(2):105–123, February 1979.

[46] K. A. Bronnikov. Scalar-tensor theory and scalar charge. Acta Phys. Polon. B, 4:251–266, 1973.

[47] Hisa-Aki Shinkai and Sean A. Hayward. Fate of the first traversible wormhole: Black-hole collapse or inflationary expansion. Phys. Rev. D, 66(4):044005, August 2002.

[48] J. A. González, F. S. Guzmán, and O. Sarbach. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: I. Linear stability analysis. Classical and Quantum Gravity, 26(1):015010, January 2009.

[49] J. A. González, F. S. Guzmán, and O. Sarbach. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field: II. Nonlinear evolution. Classical and Quantum Gravity, 26(1):015011, January 2009.

[50] Burkhard Kleihaus and Jutta Kunz. Rotating Ellis wormholes in four dimensions. Phys. Rev. D, 90(12):121503, December 2014.

[51] Edward Teo. Rotating traversable wormholes. Phys. Rev. D, 58(2):024014, July 1998.

[52] Thibault Damour and Sergey N. Solodukhin. Wormholes as black hole foils. Phys. Rev. D, 76(2):024016, July 2007.

[53] Farrux Abdulxamidov, Carlos A. Benavides-Gallego, Wen-Biao Han, Javlon Rayimbaev, and Ahmadjon Abdujabbarov. Spinning test particle motion around a rotating wormhole. Phys. Rev. D, 106(2):024012, July 2022.

[54] Kimet Jusufi, Ayan Banerjee, Galin Gyulchev, and Muhammed Amir. Distinguishing rotating naked singularities from Kerr-like wormholes by their deflection angles of massive particles. European Physical Journal C, 79(1):28, January 2019.

[55] James M. Bardeen. Black holes, in Proceeding of the Les Houches Summer School, Session 215239. Gordon and Breach Science Publishers.

[56] Shinta Kasuya and Masataka Kobayashi. Throat effects on shadows of Kerr-like wormholes. Phys. Rev. D, 103(10):104050, May 2021.

[57] Demetrios Christodoulou. Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics. Phys. Rev. Lett., 25(22):1596–1597, November 1970.

[58] Demetrios Christodoulou and Remo Ruffini. Reversible Transformations of a Charged Black Hole. Phys. Rev. D, 4(12):3552–3555, December 1971.

[59] Jonathan C. McKinney and Charles F. Gammie. A Measurement of the Electromagnetic Luminosity of a Kerr Black Hole. ApJ, 611(2):977–995, August 2004.

[60] Filippo Camilloni, Oscar J. C. Dias, Gianluca Grignani, Troels Harmark, Roberto Oliveri, Marta Orselli, Andrea Placidi, and Jorge E. Santos. Blandford-Znajek monopole expansion revisited: novel non-analytic contributions to the power emission. JCAP, 2022(7):032, July 2022.

[61] Samuel E. Gralla and Ted Jacobson. Spacetime approach to force-free magnetospheres. MNRAS, 445(3):2500–2534, December 2014.

[62] Samuel E. Gralla, Alexandru Lupsasca, and Maria J. Rodriguez. Electromagnetic jets from stars and black holes. Phys. Rev. D, 93(4):044038, February 2016.

[63] Antonios Nathanail and Ioannis Contopoulos. Black Hole Magnetospheres. ApJ, 788(2):186, June 2014.

[64] Zhen Pan and Cong Yu. Highly-collimated, magnetically-dominated jets around rotating black holes. arXiv e-prints, page arXiv:1406.4936, June 2014.

[65] R. A. Konoplya, J. Kunz, and A. Zhidenko. Blandford-Znajek mechanism in the general stationary axially-symmetric black-hole spacetime. JCAP, 2021(12):002, December 2021.

[66] N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. A&A, 24:337–355, January 1973.

[67] I. D. Novikov and K. S. Thorne. Astrophysics of black holes. In Black Holes (Les Astres Occlus), pages 343–450, January 1973.

[68] Don N. Page and Kip S. Thorne. Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk. ApJ, 191:499–506, July 1974.

[69] Robert M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. Phys. Rev. D., 10(6):1680–1685, September 1974.

[70] Juri Poutanen, Julian H. Krolik, and Felix Ryde. The nature of spectral transitions in accreting black holes: the case of CYG X-1. MNRAS, 292(1):L21–L25, November 1997.

[71] H. K. Lee, R. A. M. J. Wijers, and G. E. Brown. The Blandford-Znajek process as a central engine for a gamma-ray burst. Phys. Rep., 325(3):83–114, January 2000.