

CAPÍTULO VIII: LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD DESDE UNA MIRADA INCLUSIVA

María de los Ángeles Lastra, María Verónica Lucero, Mariana Soledad Vallone, Verónica Grimaldi e Inés Sancha

Introducción

En este capítulo presentaremos una experiencia que consistió en planificar, gestionar y analizar una clase de Matemática¹, llevada a cabo en un 6° grado con el propósito de promover un trabajo que incluyera a todo el alumnado. Este curso estaba formado por 33 estudiantes, entre quienes había cuatro niñas cuyas condiciones de aprendizaje se distinguían de las del resto del grupo a partir de una decisión institucional: durante la mayor parte de las clases de Matemática ellas se retiraban del aula para trabajar con una maestra de apoyo.

1 Las discusiones iniciales, el diseño de la propuesta y su implementación involucraron a Estefanía Giordano, María de los Ángeles Lastra, Verónica Lucero, Lourdes Tardío y Mariana Vallone bajo la coordinación de Verónica Grimaldi, en el marco de una indagación realizada para el seminario «Relaciones de Proporcionalidad y Medida» de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria, UNIPE, 2018. Esa primera producción fue posteriormente analizada, ampliada, profundizada y sistematizada por las autoras de este capítulo para la elaboración del Trabajo Final Integrador (TFI) de la mencionada carrera. El lector podrá advertir en este capítulo la presencia de huellas del proceso de producción de dicho trabajo final, inherentes a las condiciones de elaboración y comunicación propias de la institución.

La maestra de grado se preguntaba si al volver al aula las niñas comprendían lo que allí se analizaba y discutía, o si simplemente eran participantes pasivas de la clase: ¿qué conocimientos tenían disponibles estas alumnas? ¿de qué manera se podrían generar condiciones para que pudieran desplegarlos dentro del aula? ¿cómo poner en diálogo sus conocimientos con los de los demás alumnos y alumnas de la clase, con quienes no solían interactuar? ¿qué tipos de problema podrían colaborar para movilizar sus conocimientos?

Analizaremos algunos aspectos de lo sucedido en la clase que fue diseñada para iniciar el estudio de la Proporcionalidad. Con la intención de incluir a la totalidad del grupo en la propuesta, buscamos que las niñas pudieran participar de la resolución de los problemas, de discusiones en pequeños grupos, de interacciones con las docentes y de intercambios colectivos en una puesta en común. Para ello diseñamos una situación en la que circularían en el aula cuatro versiones de un mismo problema de comparación de relaciones de proporcionalidad. En cada versión se variarían ciertos valores para movilizar estrategias vinculadas a diferentes propiedades de la relación matemática involucrada.

Construcción del problema

La docente del área de Matemática (y coautora del presente capítulo) que se desempeñaba en el 6to grado de la escuela en donde se realizó la indagación, manifestó su preocupación con respecto a cuatro alumnas con trayectorias muy diferentes a las de sus pares. Según ella misma expresó algunos años atrás, la escuela había propuesto incorporarlas al espacio de apoyo, un dispositivo institucional establecido para aquellos niños y niñas que se consideraba que necesitaban otros tiempos para aprender. A partir de los resultados que veía dentro del aula, la docente se hacía numerosas preguntas en torno a esta decisión.

El espacio no tenía una estructura predeterminada y era la docente de apoyo quien definía la modalidad de trabajo. Esta podría variar entre dos estrategias: la más frecuente consistía en retirar a las alumnas

del aula regular² para ir a trabajar a otro espacio, pudiendo ocurrir que, si ese día tenían dos horas seguidas de Matemática, solo se ausentaran una hora. Otra estrategia, la menos frecuente, consistía en que la docente de apoyo se quedara dentro del aula regular para trabajar con las niñas en lo mismo que estaba trabajando el resto del grupo.

La disconformidad de la docente frente a este dispositivo se fundamentaba principalmente en que no le permitía conocer qué sabían las alumnas para poder enseñarles, ya que en la mayoría de las horas de Matemática ellas estaban fuera del aula con la maestra de apoyo. Además, los contenidos que proponía la docente de apoyo para trabajar en ese espacio y el modo de abordarlos no siempre coincidían con los de su clase; más adelante, también constatamos que se organizaban bajo supuestos coherentes con un enfoque didáctico diferente.

Frente a estas preocupaciones señaladas por la docente, en nuestro equipo de trabajo, nos preguntamos: ¿Qué tipo de experiencia matemática se les estaba ofreciendo a estas niñas a través de la implementación de este dispositivo? ¿De qué manera estas experiencias condicionaban su relación con el saber matemático de ambas aulas?

En investigaciones del campo de la Educación Matemática encontramos ciertas pistas que nos permitían hipotetizar algunas respuestas a estas preguntas. Por ejemplo, Civil y Planas (2004) estudian los efectos que tienen en el alumnado las decisiones que se toman en torno a la organización de la enseñanza. Las autoras encuentran que en instituciones en las que se separa en aulas “especiales” a estudiantes que se consideran en dificultad, la ausencia de articulación con el trabajo que se realiza en el aula regular, así como ciertas diferencias sobre la perspectiva didáctica, pueden impactar negativamente en la relación de estos alumnos y estas alumnas con la Matemática. También plantean que se pueden profundizar las miradas deficitarias de los pares sobre estos niños y estas niñas, así como, en algunos casos, la mirada que estos sujetos tienen sobre sí mismos.

2 Denominamos aula regular al aula común, graduada o estándar a la que asiste el grupo completo.

Encontramos otra investigación que echa luz sobre esta cuestión en Zevenberger (2003), quien recoge las voces de 96 adolescentes de 6 escuelas comunes australianas que trabajan en aulas organizadas según “niveles de capacidad”. La autora encuentra que, mientras que estudiantes que están en aulas de “mayor capacidad” sienten satisfacción por las experiencias de alta calidad que se les ofrecen, los del grupo de “menor capacidad” las consideran muy negativas. Así, el tipo de experiencia que transita el alumnado afecta profundamente su relación con la Matemática y, por lo tanto, su decisión de participar o no en las prácticas del aula³.

No hay dudas de que todas estas propuestas escolares -tanto las que devienen de investigaciones como la que analizamos aquí- se producen en escenarios institucionales en los que hay una intención de mejorar las condiciones para que los niños y las niñas avancen en sus aprendizajes. En este caso, la modalidad de implementación perjudicaba, en primer lugar, a las niñas y a sus compañeros, y también a la docente del curso que estaba condicionada para poder establecer un vínculo pedagógico con ellas en esta área. La maestra encontraba numerosas dificultades para incluir a estas alumnas en la clase porque, cuando volvían de trabajar fuera del aula, sus compañeros se encontraban en discusiones de las que ellas no podían participar. Muchas veces las notaba ausentes, aunque físicamente estuvieran allí, quedando en evidencia que ellas realizaban un trabajo distinto al resto.

¿Cómo incluirlas en la clase de Matemática? ¿Cómo lograr que formen parte, que tengan voz? La docente reconocía que no encontraba las estrategias necesarias y que se iba quedando sin recursos. Analizando sus relatos, inferimos que la práctica de retirarlas del aula se fue naturalizando, ya que esas alumnas cursaron toda su escolaridad con la misma dinámica, sin evaluarse su funcionamiento y perdiéndose de vista el objetivo para el que fue planeada. Producto de esta

3 A posteriori de la realización de esta indagación, similares resultados fueron documentados por Sosa (2021) y Lastra (2022) en escuelas de la jurisdicción de la provincia de Buenos Aires. Estos trabajos se incluyen en los capítulos V y VI de este mismo libro.

naturalización, no llamaba la atención ni a ellas ni al resto de sus compañeros que se retiraran del aula para trabajar aparte al comienzo o en el medio de una clase, sin haber tenido ninguna participación, o que entraran al salón en cualquier momento. Inferimos también que los actores institucionales involucrados interpretaban la situación como un ‘problema de aprendizaje’ de estas cuatro alumnas y no como un ‘problema de enseñanza’. Hipotetizamos que, quizás, el dispositivo no era motivo de revisión en la institución porque, bajo las condiciones que se les ofrecían, las alumnas “resolvían las tareas” y daban ciertas muestras de que avanzaban en contenidos, sin considerar que en las clases posteriores cuando retomaban los problemas no podían dar cuenta de cómo los habían resuelto.

Decidimos entonces en el equipo de trabajo -del cual, como se mencionó, formaba parte la docente del curso- que nuestra indagación consistiría, en primer lugar, en asumir la situación planteada en este 6to año como un ‘problema de enseñanza’ y que lo abordaríamos con alguna pequeña transformación en esa dinámica de trabajo. Partimos del supuesto de que todos los alumnos y todas las alumnas saben algo y que todos y todas pueden aprender, pero para que puedan participar activamente de una clase se requiere de una planificación con un claro propósito. Así fue que elaboramos una propuesta de enseñanza para favorecer la emergencia y circulación de conocimientos de todo el alumnado de ese curso, incluyendo a estas cuatro alumnas, con el objetivo de iniciar a todo el conjunto en el estudio de la Proporcionalidad. Una vez diseñada la situación, la llevaríamos adelante y estudiaríamos su funcionamiento.

Construcción de la propuesta didáctica

Teníamos claro que queríamos generar una situación en la que los conocimientos de cada integrante del grupo fueran convocados, principalmente los de las cuatro niñas. La planificación requirió en primer lugar discutir qué tipo de actividad proponer. Sabíamos que esta debería sacar provecho de la diversidad de conocimientos del aula

-diversidad en términos de ideas que se movilizan y se ponen en marcha- para enriquecer la clase, y no una que resaltara la distancia entre lo que se proponía y los conocimientos de las niñas.

Comenzamos a pensar en el inicio del tratamiento de la Proporcionalidad en tanto objeto de estudio, sabiendo que este contenido permite trabajar dentro de una amplia gama de contextos y que podríamos valernos del aporte de nociones teóricas como las de campos conceptuales (Vergnaud, 1990) y variables didácticas (Brousseau, 1995) para enriquecer la propuesta. Nos apoyamos también en algunos antecedentes que estudiamos.

Uno de ellos fue el trabajo de Broitman, Escobar, Sancha y Urretabizcaya (2015), quienes en el marco de una investigación en una escuela rural unidocente plurigrado, diseñaron, implementaron y analizaron una situación de enseñanza que consideró los distintos niveles de conocimiento de los niños y las niñas del aula. Este equipo se vale de saberes del campo pedagógico y didáctico para elaborar una propuesta,

en la que los alumnos de diferentes grados resolvieran problemas de la misma estructura y contenido con el fin de promover mayores posibilidades de interacción social en torno a ellos. Para que las actividades fueran efectivamente problemáticas para los alumnos de todos los grados se previó en la planificación el comando de variables didácticas (Brousseau, 1995) con la intención de generar un campo de problemas próximos que pudieran ser resueltos por alumnos de diferentes niveles de conocimiento (*Ibíd.*: 13).

Otro antecedente se vinculaba con una experiencia publicada por el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD, 2017), en la que una docente de 1º grado del nivel primario diseñó una clase donde se trabajó sobre un problema con varias versiones, al manipular ciertas variables didácticas vinculadas al contenido que se estaba trabajan-

do. Así, si bien la actividad es la misma para todo ese alumnado, los casos que estudian no lo son: estos se proponen en función de los conocimientos que tienen más disponibles los y las integrantes de cada grupo. Posteriormente al momento de la resolución, todos y todas se involucraron en el análisis de las producciones grupales en una instancia colectiva.

En nuestro proceso de elaboración de la situación, una determinación importante que tomamos fue fijar las características del problema que permanecerían iguales para todos los grupos y pensar cuáles se modificarían. Anticipamos que esto nos facilitaría llegar a aquello que queríamos indagar, evitando multiplicidad de resultados sobre distintas variables que nos hicieran perder el foco de análisis.

Decidimos que todos y todas trabajarían sobre el mismo contenido, relaciones de proporcionalidad directa y, además, se enfrentarían a un mismo tipo de tarea: resolver un problema de comparación de relaciones proporcionales. Conjeturamos que proponerles problemas con la misma estructura facilitaría el posterior análisis colectivo en la puesta en común. Además, evitaría que niños y niñas estuvieran pendientes de tener “tareas diferentes” entre sí -algo que efectivamente sucedió-. Finalmente, aseguraría que el aula entera estuviera hablando sobre “lo mismo”.

A continuación, presentamos el enunciado genérico de los problemas que circularían en el aula:

Pedro fue al mercado por manzanas. ¿En cuál de estos dos puestos le conviene comprarlas si busca las más económicas? ¿Cómo lo averiguaron?⁴



Imagen 1

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón donde está escrito: “x kg de manzanas \$x”. A la derecha, otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que x kilogramos de manzanas valen x pesos]

A su vez, acordamos que la respuesta sería la misma en todos los casos. Es decir, siempre convendría comprar en el puesto de Don José. Establecer esto en un principio fue pensado para facilitar también el momento del intercambio colectivo, focalizando más en los números, las magnitudes involucradas y las relaciones en juego que en la respuesta. Adelantamos aquí que, durante la puesta en aula, surgió una nueva e interesante razón que apoyaría esta decisión tomada en el proceso de planificación: la diferencia entre “misma respuesta” o “mismo procedimiento”.

⁴ La presencia de la letra x en los valores de los pizarrones del dibujo que forma parte del enunciado intenta comunicar que estos valores no serían iguales para todos los grupos. Detallamos esta cuestión en los párrafos que siguen. Problema seleccionado a partir de un rastreo en libros de texto, y adaptado del problema de “Explorar matemática 5”, p. 118, ed. Santillana. Seleccionamos este libro porque había sido utilizado por los alumnos el año anterior, pero esta unidad en particular no había sido abordada.

Resolver un problema de comparación de relaciones proporcionales podría implicar la puesta en juego de diferentes estrategias; por ejemplo, buscar una de las constantes de proporcionalidad en ambos puestos (es decir, cuánto costaría 1 kg de manzanas o cuánto se podría comprar con \$1), o también seleccionar cualquier otro valor común que permitiera compararlos. El criterio utilizado por los alumnos para esa selección también sería un insumo en nuestra indagación.

Una vez establecido qué aspectos del problema no cambiarían, comenzamos a pensar cuáles sí lo harían.

Pensamos seis versiones del mismo problema que no fueron categorizadas por su complejidad; sin embargo, sí tuvimos en cuenta las características de cada versión al momento de seleccionar a qué pareja proponerle cada una, considerando el conocimiento que tenía la docente de sus estudiantes⁵. Durante la clase pusimos en juego sólo cuatro versiones, que presentamos a continuación.

VERSIÓN 1

Pedro fue al mercado por manzanas. ¿En cuál de estos dos puestos le conviene comprarlas si busca las más económicas? ¿Cómo lo averiguaron?



Imagen 2

⁵ Más adelante detallamos los criterios que orientaron estas decisiones.

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón que informa que 4 kilogramos de manzanas valen 180 pesos. A la derecha, otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que 3 kilogramos de manzanas valen 138 pesos]

En esta versión, la aparición de 4 kg en uno de los puestos y 3 kg en el otro, llevaría a los alumnos, según nuestras anticipaciones, a buscar el valor de 1 kg para realizar la comparación o llevar ambos a 12 kg (como múltiplo en común); también podrían averiguar en un solo puesto el valor de 1 kg y luego equiparar el peso con el otro puesto. Decidimos que en ambos casos el valor correspondiente a la unidad (es decir el precio de 1 kg) fuera un número natural, para evitar una complejidad extra.

VERSIÓN 2

Pedro fue al mercado por manzanas. ¿En cuál de estos dos puestos le conviene comprarlas si busca las más económicas? ¿Cómo lo averiguaron?



Imagen 3

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón que

informa que 250 gramos de manzanas valen 18 pesos. A la derecha, otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que 1 kilo y cuarto de manzanas valen 95 pesos]

En esta versión, decidimos que los y las estudiantes trabajarían con la equivalencia entre kilogramos y gramos, además de la incorporación de fracciones que favorecen el establecimiento de ciertas relaciones. El valor de la unidad (es decir el precio de 1 kg) también sería un número natural.

A diferencia de la versión anterior, podrían comparar los precios al equipararlos con el peso de un puesto con el del otro, sin necesidad de buscar el valor del kilo o un tercer peso. Anticipamos que una posibilidad sería llevar la cantidad de manzanas en los dos puestos a $\frac{1}{4}$ kg, a partir de la relación $250 \text{ g} = \frac{1}{4} \text{ kg}$. Otra opción sería que pensarán el precio de $1 \frac{1}{4} \text{ kg}$ en ambos puestos de fruta.

VERSIÓN 3

Pedro fue al mercado por manzanas. ¿En cuál de estos dos puestos le conviene comprarlas si busca las más económicas?

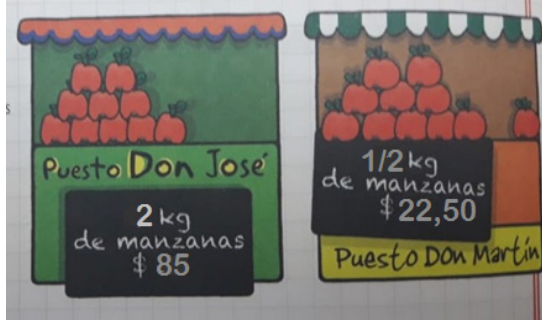


Imagen 4

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón que informa que 2 kilogramos de manzanas valen 85 pesos. A la derecha,

otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que medio kilo de manzanas valen 22 pesos con 50 centavos]

En esta versión, también decidimos involucrar fracciones en las cantidades que representaban el peso de las manzanas; a su vez, agregamos precios con números decimales que favorecieran el uso de estrategias de cálculo mental. Por ejemplo, para calcular 1 kg en el puesto de Don Martín se involucra la relación $\$0,50 + \$0,50 = \$1$.

Era probable que, a partir del precio de 2 kg, calcularan el de $\frac{1}{2}$ kg al reconocer los medios kilos que lo conformaban, lo cual les daría el precio correspondiente expresado en un valor decimal. Otra opción fue pensar que buscarían el precio de 1 kg en ambas relaciones, apelando a una composición aditiva conocida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ para el puesto de Don Martín, y dividir por dos para averiguar el precio de 1 kg en el puesto de Don José. Una tercera opción que anticipamos fue la de calcular el precio de 2 kg en el puesto de Don Martín, al sumar cuatro veces o multiplicar por cuatro el valor de $\frac{1}{2}$ kg, quizás apelando a relaciones conocidas – por ejemplo, al considerar que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

VERSIÓN 4 (la sexta versión de nuestra planificación original)

Pedro fue al mercado por manzanas. ¿En cuál de estos dos puestos le conviene comprarlas si busca las más económicas?



Imagen 5

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón que informa que 8 kilogramos de manzanas valen 280 pesos. A la derecha, otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que 4 kilogramos de manzanas valen 144 pesos]

Esta última versión fue pensada especialmente para las cuatro alumnas, debido a que la elección de los valores 8 kg y 4 kg podía colaborar en que apelaran al cálculo de dobles o mitades. Además, el precio correspondiente a 1 kg es, en ambos casos, un valor natural que puede dividirse por 2 reiteradas veces y el resultado sigue siendo natural.

Como mencionamos, habíamos diagramado otras dos versiones, una involucraba una relación de triples y la unidad entera, y otra, una relación de dobles -como la versión de la Imagen 5-, pero el valor correspondiente a 1 kg con cantidades decimales. La decisión de encontrar una versión pensada exclusivamente para ellas dio lugar a un gran debate en el equipo que nos llevaba a pensar en todo momento no sólo la necesidad de incluirlas en el trabajo común de la clase, sino también en una propuesta que funcionara para que aparecieran los conocimientos de los que disponían y de los cuales sabíamos muy poco.

Dado que la intención era que las niñas pudieran incluirse en la actividad, al estudiar, analizar y discutir sobre las relaciones en juego, nos decidimos por esta versión. Imaginamos que se sentirían más seguras con estas cantidades al tratarse del conjunto de números naturales que venían trabajando desde primer grado. Además, podrían pensar en la relación “doble-mitad”, algo que supusimos habrían trabajado en años anteriores. Resultaba probable que, al restringir el campo numérico al conjunto de los números naturales, les fuera más viable establecer relaciones de cálculo mental que las ayudaran a ganar confianza para resolver el problema y les diera seguridad para construir nuevas relaciones.

Anticipamos que podrían buscar el valor de 8 kg en el puesto de Don Martín, para calcular el doble del precio dado. Otra opción podría ser que calcularan la mitad del peso en el puesto de Don José para averiguar el precio correspondiente a 4 kg y realizar la comparación. Una tercera opción podría ser que calcularan el precio correspondiente a 1 kg en ambos puestos.

Todas las versiones del problema que hemos detallado anteriormente serían las que circularían durante el primer momento de la clase, en el que parejas de alumnos y alumnas resolverían una de ellas. Esas parejas estarían organizadas por la docente del grado, que era quien conocía a los niños, y se destinaría una de las versiones del problema a que se produjeran interacciones entre alumnos específicos.

Una vez definidas las versiones y la anticipación de posibles procedimientos de los y las estudiantes para su resolución en el momento de trabajo en parejas, planificamos cómo continuaría la clase pasada esta instancia. Para discutir si siempre sería más económico comprar en el mismo puesto, decidimos que en un segundo momento les plantearíamos preguntas acerca de otras cantidades. Por ejemplo, a quienes tuvieran la versión 1 les preguntaríamos: “¿seguirá siendo más barato comprar en el puesto de Don José si quisiéramos comprar 12 kg de manzanas? ¿y si decidiéramos comprar 500 g?”. Les propondríamos, dependiendo de la versión, averiguar si continuaba conviniendo comprar en el mismo mercado, aun cambiando el peso, con la intención de favorecer la aparición de múltiples relaciones que los llevaran a pensar la idea de constante de proporcionalidad. Durante la implementación de la propuesta en la clase, constatamos que esta decisión fue acertada porque abrió el debate sobre si siempre convendría comprar en el mismo puesto y por qué, como introducción al concepto de constante Proporcionalidad.

Sabíamos que, al plantear esta situación, se establecerían nuevos interrogantes que luego serían objeto de análisis en nuestra indagación: a partir de la situación propuesta y dentro de este contexto áulico, comenzar a entender e interpretar cómo hacer funcionar la selec-

ción de variables, qué efectos tiene, de qué manera se van incluyendo los alumnos, qué nuevos obstáculos aparecen.

Previsiones sobre la puesta en aula de la propuesta didáctica

En primer lugar, tomamos una decisión respecto del tiempo: la clase diseñada se desarrollaría durante dos horas no consecutivas; la primera hora estaría destinada a un trabajo de resolución del problema en parejas y la segunda, consistiría en una puesta en común de los procedimientos.

Decidimos además que dispondríamos de una hora intermedia entre una hora de clase y la otra, destinada al intercambio entre los integrantes del equipo acerca de lo sucedido en la primera instancia y a la revisión de lo planificado para el momento siguiente. En ese espacio, a partir de lo observado durante el trabajo de la hora anterior, discutiríamos sobre qué mantener y qué modificar de lo previsto y, además, seleccionaríamos procedimientos o ideas que hubieran circulado en los intercambios al interior de las parejas para analizar en la puesta en común.

En cuanto a la planificación de la gestión de la clase, establecimos los roles que cada una tomaría, principalmente al tener en cuenta que eran varias versiones del problema que circularían simultáneamente en un grupo numeroso y que, por ello, habría muchos intercambios y producciones para registrar. Anticipamos, además, que establecer claramente nuestros roles permitiría intervenir en varias de las posibles aristas de la clase que íbamos a poner en marcha. También favorecería la posibilidad de poner el foco en aquellos asuntos que surgieran dentro del grupo de las alumnas ya nombradas.

Por otra parte, determinamos que durante la primera instancia fuera la docente del grupo, con quien los niños y las niñas estaban ya familiarizados, la que diera inicio a la actividad y repartiera las diferentes propuestas de trabajo a las parejas. Una vez que se pusieran a resolver, dos de las docentes del equipo estarían atentas especialmente

a las discusiones y procedimientos de las cuatro niñas, interviniendo en caso de considerarlo necesario. Otras dos, pasarían por los grupos para mediar, observar o repreguntar si fuera preciso, y realizarían registros escritos. Una quinta docente del equipo se encargaría de filmar y fotografiar, para sumar registros que favorecieran un posterior análisis. Estos roles serían flexibles, se previó que habría intercambios de opinión y recordatorios de intervenciones.

En relación con las intervenciones, sabíamos con anticipación que sería conveniente no solicitar a las cuatro alumnas las razones por las que resolvían de cierta forma preguntando “por qué” de una manera directa, dado que eso las podría inhibir a seguir argumentando. Para ellas habíamos pensado otras intervenciones posibles:

- Aclarar consignas en caso de ser necesario y alentar la resolución sin intervenir de modo directo.
- Favorecer la interacción entre las parejas en caso de que no se produzca espontáneamente, a partir de invitarlas a contar qué hicieron, preguntarles si coincidieron en sus formas de pensarlo.
- Si se identificara mucha distancia entre los conocimientos que se requieren para resolver y los que las cuatro alumnas tienen disponibles, pensar alguna modificación para que la situación realmente represente un problema.
- Tomar lo que las alumnas ponen en palabras y devolverlo en forma de pregunta o con otras palabras para favorecer la comprensión del problema.

Durante la clase se generaron otras intervenciones no previstas, que serán objeto de análisis más adelante.

Dado que se trataba de una situación nueva para las integrantes del equipo, la planificación de la puesta en común resultó compleja. ¿Qué pretendíamos de esa puesta en común? ¿Cómo asegurar que circularan conocimientos en relación con la proporcionalidad y así aprovechar las diferentes versiones? ¿Cómo lograr que todos y todas pudieran argumentar, pero en especial esas cuatro alumnas? Es de-

cir, ¿cómo gestionar una puesta en común que estuviera alineada con nuestro propósito, para sacar el mayor provecho de la diversidad áulica? ¿Cómo plantear una discusión con situaciones vinculadas pero diferentes?

Al momento de la planificación, incluso, planteamos la posibilidad de no llevar adelante una puesta en común. Dejamos librada esta decisión a lo que sucediera en la primera parte porque supusimos que el trabajo en parejas podría ser suficientemente potente o productivo y, en ese caso, nos parecía adecuado no interrumpir el entusiasmo con el que se estuviera trabajando. Igualmente, discutimos qué nos interesaría proponer en la puesta en común y qué no íbamos a hacer en esa instancia en caso de llevarla adelante. Sabíamos que no íbamos a “controlar” resultados, sino que el propósito sería entrelazar los procedimientos para entender por qué se usó uno u otro en función de los valores en juego en las relaciones de proporcionalidad que debían comparar. También sabíamos que intentábamos involucrar a las niñas en esa discusión, buscar una manera en que no fueran simples “oyentes” como les venía sucediendo, sino que tuvieran un rol activo, al igual que el resto de sus compañeras y compañeros, en la matemática que se discutiría. Si bien en la primera instancia de planificación quedaron varios aspectos del momento de trabajo colectivo sin anticipar, contábamos con la hora entre clase y clase, a la que llamamos “entretiempo”, para terminar de definir y tomar decisiones acerca de la puesta en común a partir del análisis de lo ocurrido en el trabajo en parejas.

La clase de Proporcionalidad. De la planificación a la puesta en marcha de tres momentos

En esta sección describiremos la clase implementada de manera general e incluiremos algunos aspectos del análisis que profundizaremos en las próximas secciones.

Primer momento: trabajo en parejas

Al iniciar la clase, la docente del grado comentó a sus estudiantes que iban a trabajar en parejas en la resolución de un problema, en el cual, como ya venían haciendo, debían poner en juego lo que sabían y explicar lo que iban pensando. Se había dispuesto con anterioridad a las parejas y la distribución de las mismas dentro del aula. Para elegir la dupla de trabajo de niños y niñas se tuvo en cuenta, en primera instancia, que tuvieran buen vínculo en lo cotidiano; luego, que compartieran tiempos de resolución y estrategias de cálculo mental similares, para facilitar el diálogo en la pareja y evitar que fuera un o una estudiante quien resolviera y que su par solo participara de manera pasiva.

La docente titular del curso ya tenía los problemas separados en las diferentes versiones, pero esa información no aparecía aclarada en el papel destinado a las niñas y los niños. Es decir, no se les anticipó nada en relación con el problema o con las cantidades involucradas. A cada pareja se le asignó la versión acordada según los criterios antes mencionados y rápidamente todos y todas se pusieron a resolver. Resultó notorio que al grupo no parecía incomodarles la presencia de otras cuatro personas adultas dentro del aula ya que interactuaban con todas con total naturalidad. Si bien hasta el momento no habían pasado por una situación similar, consultaban por igual a cualquiera de las docentes del equipo sobre alguna palabra o aclaración que necesitaban, o pedían la siguiente actividad una vez finalizada la primera propuesta.

Las cuatro niñas estaban ubicadas de la siguiente manera: Micaela y Luz⁶ frente al escritorio de la maestra; Delfina y Lola en el segundo banco, en el medio del salón. Estaba previsto que no se sentaran en un sector apartado -como teníamos entendido que a veces sucedía cuando ingresaba la maestra de apoyo al aula para trabajar con las niñas-, precisamente porque apuntábamos a que hubiera un clima de estudio que incluyera a todas y todos y rompiera con la idea de que a

⁶ Los nombres que se usan en este capítulo son ficticios con el fin de resguardar la identidad de las niñas.

las alumnas y los alumnos con dificultad hay que proponerles trabajos solamente en grupos reducidos y con un adulto que trabaje de manera específica con ellos. Quizás a causa de las experiencias que venían viviendo como alumnas, sucedió inmediatamente algo que habíamos previsto: Micaela miró a la pareja que estaba sentada atrás. Interpretamos que buscaba saber si ellas tenían una tarea diferente al resto. Parecía querer corroborar que se trataba de la misma actividad.

Tal como habíamos previsto, algunas de las investigadoras se mantuvieron atentas para colaborar en la comprensión del problema por parte de las cuatro alumnas e intervenir cuando fuera necesario, pero sin sentarse junto a ellas, sino yendo de la observación de un grupo a otro, atentas a lo que ocurría en esas parejas en particular. El resto del equipo también hacía aportes a partir de alguna observación de lo realizado por ellas o de una intervención de las docentes. Considerábamos importante que no sintieran un trato diferente o preferencial al resto de sus compañeros y compañeras.

La resolución del problema puso a la totalidad del grupo en acción y se establecieron diálogos interesantes en la recuperación de determinadas relaciones como cuántos gramos había en un kilo o cuántos cuartos formaban un kilo y medio, entre otros. Les resultaron problemáticos dos factores que no habíamos previsto: el vocabulario del enunciado y la imagen. Muchos y muchas necesitaron la aclaración de ciertos términos, como “económico”, y otros y otras confundían cantidad de manzanas con el peso de las mismas a comprar.

Fue una hora de clase de gran actividad y discusión. Para todo el grupo lo propuesto implicó realmente un problema matemático y tuvieron que poner estrategias en juego para resolverlo. Muchas parejas llegaron a pensar qué pasaría con otras magnitudes, aunque no teníamos la certeza de que estuvieran pensando que siempre, más allá de cambiar precio o peso, iban a mantenerse las relaciones, conviniendo comprar en el mismo puesto.

Fue llamativo también que varios grupos buscaron la constante -sin nombrarla así aún-, averiguando el precio de 1 kg, y algunos es-

tablecieron relaciones entre cantidades. Por ejemplo, en la versión 3, llevaban el valor de medio kilo al de 2 kilos como en el otro puesto, o en la versión 2, los 250 gramos al valor del kilo y cuarto.

Todas las alumnas y todos los alumnos pensaban en las relaciones de proporcionalidad y utilizaban diferentes campos numéricos tal como habíamos anticipado. A su vez, surgieron situaciones y respuestas que no previmos, en especial en lo referente a las cuatro niñas, algo que dejaremos para desarrollar más adelante.

Al terminar la hora de clase pedimos a cada pareja sus producciones para poder analizarlas en la instancia siguiente. Finalizó esta primera parte con muchas ideas para compartir en el momento del “entretiempo” entre las docentes.

Segundo momento: “Entretiempo”

En el espacio de intercambio entre las dos horas de clase con los alumnos y las alumnas, y con la mirada puesta en las preguntas que guiaban nuestra indagación, analizamos las producciones de cada pareja, debatimos qué procedimiento seleccionar para comenzar la puesta en común y qué habilitar en esa instancia de discusión a partir de lo resuelto en la hora anterior.

La intención era gestionar un espacio de debate que convocara los conocimientos de todos y todas, compartiendo estrategias y relaciones establecidas para resolver la situación planteada. La maestra del grado prefería sostener un rol de observadora esta vez; deseaba evitar sesgos que condicionaran la elección de los y las estudiantes al momento de dar la palabra, teniendo en cuenta que ya los conocía. Al considerar esta preferencia, acordamos que fuera otra integrante del equipo la encargada de la puesta en común, con la explícita legitimación del resto para intervenir si se consideraba necesario. Asimismo decidimos que trabajaríamos a partir de las estrategias de alguna de las cuatro niñas, ya que en nuestros intercambios con ellas advertimos que no solo habían buscado el valor de la unidad, sino que también se habían enfocado en la relación de dobles. Otra razón era que nos pa-

recía importante habilitar su voz en la escena colectiva; si bien habíamos notado su activa participación en el trabajo en parejas, teníamos dudas sobre cómo sería la participación con todo el grupo.

La determinación de proponer este espacio intermedio nos permitió volver a revisar y ajustar contratos como equipo de trabajo y decidir cómo gestionar la puesta en marcha del último momento de la propuesta -quizás el de mayor complejidad-. Más allá de las previsiones realizadas en este segundo momento, quedaba un margen de “cierta incertidumbre” sobre qué ocurriría en la puesta en común.

Tercer momento: Puesta en común

A pesar de que las y los estudiantes habían tenido clase de inglés entre una hora de Matemática y la siguiente, el clima logrado en la primera hora no había cambiado: se notaba el interés en la totalidad del alumnado.

La maestra del grado les devolvió las hojas donde habían trabajado y les anticipó que tendrían un momento para compartir estrategias, dando lugar a la otra docente asignada por el equipo para gestionar la puesta en común.

Esta docente comenzó por invitarlos a recordar de qué trataba el problema y qué había que averiguar. Si bien convocó a todo el curso, para iniciar el intercambio dio la palabra a Delfina, como se había planeado. Lo que no estaba previsto fue la seguridad con la que comenzó su relato. Fue recién en ese momento en que la mayoría del curso advirtió que se trataba del mismo tipo de problema, aunque con precios y cantidades diferentes.

Tras la confirmación por parte de quien conducía la clase de que se trataba del mismo enunciado, otra alumna (Irina) comentó: “¡Ah! Entonces, si es el mismo problema, son las mismas cuentas y los mismos procedimientos”. La docente decidió usar esta afirmación como hilo conductor de la puesta en común, escribió lo dicho por Irina en un costado del pizarrón con un signo de pregunta y aclaró que retomarían esa idea al final del análisis grupal.

Nuevamente sorprendió la actitud de todo el grupo porque fue un momento de activa participación, en el que iban intentando ponerse “en la cabeza del compañero o de la compañera” para pensar qué estrategia había utilizado y la razón de ello, además de comentar las propias. Las cuatro alumnas participaron también, pudiendo -en general- argumentar sus procedimientos y escuchar con gran interés lo que el resto de las y los estudiantes proponían. Nos preguntamos de qué manera el hecho de haber presentado una situación con estas características contribuyó a que todos y todas pudieran construir esta posición.

Hacia el final de la discusión, se retomó la pregunta que había quedado en el pizarrón, lo cual permitió analizar que, a pesar de ser un mismo tipo de problema y con una misma respuesta, las relaciones establecidas y las estrategias elegidas no eran las mismas. Si bien sabíamos que la noción de relación de proporcionalidad y de constante de proporcionalidad requerirían de otras nuevas instancias de análisis, consideramos que fue un buen punto de partida.

Análisis de la clase, parte I: Algunas transformaciones en los conocimientos de Micaela

Analizaremos el trabajo realizado por una de las alumnas en particular, en diferentes momentos de la clase. Seleccionamos las producciones y argumentaciones de esta niña debido a que era una de las alumnas que, como mencionamos anteriormente, participaba del dispositivo de apoyo y generaba en la maestra de grado interrogantes referidos a qué sabía y qué podía producir.

Al momento de llevar a cabo la clase, pudimos observar cómo fue logrando establecer diferentes relaciones matemáticas que la llevaron a pasar de un inicio más inseguro en cuanto a la argumentación en el trabajo en parejas, hasta verse decidida y clara durante la puesta en común.

¿Cuáles entendemos que fueron las intervenciones docentes que favorecieron ese cambio? ¿Qué colaboró en hacer emerger los conocimientos matemáticos que tenía a disposición? ¿Qué nuevas relaciones pudo construir?

El recorrido de esta alumna, tanto en el trabajo en parejas como en la puesta en común, pone en evidencia cómo una propuesta didáctica intencionada y planificada puede dar la posibilidad de que los alumnos y las alumnas se involucren directamente con ella. Una propuesta que tenga en cuenta sus posibilidades, que les permita poner en juego lo que saben y, de esta manera, transformarlo o reutilizarlo para un nuevo aprendizaje.

El análisis de este recorrido estará guiado por tres ejes:

- Micaela en interacción con el problema y con su compañera Luz.
- Micaela en interacción con sus conocimientos frente a un nuevo desafío.
- Micaela en interacción con todo el grupo.

Cada eje en particular, pero principalmente en conjunto, tiene como propósito el intento de dar respuesta a lo planteado con anterioridad: Micaela sabe algo, puede algo y puede construir nuevos conocimientos en interacción con su grupo. Además, este recorrido aporta una mirada panorámica a las transformaciones que ocurren en ella a lo largo de las distintas instancias de clase, lo cual ayuda también a evaluar nuestra propuesta de enseñanza.

Recordamos que la versión del problema propuesto para Micaela y su compañera fue la siguiente:

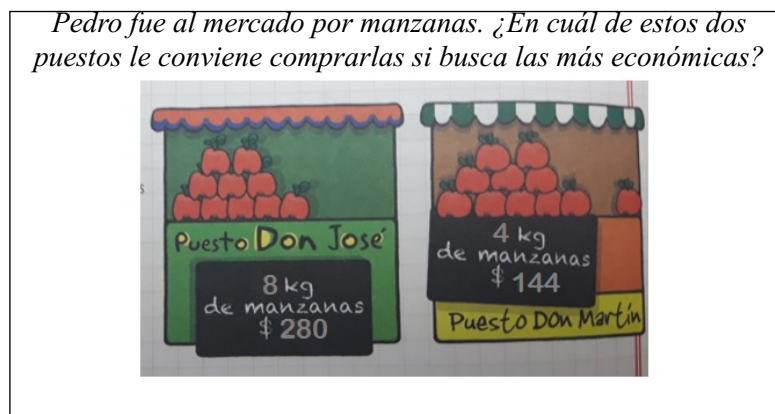


Imagen 6

[La imagen muestra dos dibujos de puestos de venta de manzanas. A la izquierda, uno llamado Puesto de Don José, con un pizarrón que informa que 8 kilogramos de manzanas valen 280 pesos. A la derecha, otro llamado Puesto de Don Martín, con un pizarrón que informa que 4 kilogramos de manzanas valen 144 pesos]

Micaela en interacción con el problema y con su compañera Luz

Durante el primer momento de trabajo en parejas, Micaela propuso hacer una multiplicación para resolver el problema; sólo se le mencionó a la compañera, no hubo intervención docente hasta ese momento. Observamos que las cantidades que ella involucraba en esa multiplicación no la llevarían al resultado correcto.

Tomamos conocimiento de esta idea a partir del análisis de los registros de audio. Entendemos que, de haber presenciado esta situación, quizás hubiera sido oportuna una intervención que permitiera clarificar por qué proponía “multiplicar algo”.

1. Comienzan a leer el problema, miran los números y rápidamente proponen una operación con ellos:
2. Micaela: Bueno, poné Don José... Ay, Iván, hacé silencio. Bueno... puesto de Don José, 8 kilos por 280.
3. Luz: 280 por 8 kilos... ¡Es dividido, nena!
4. M: 8 kilos... 8 kilos por... al precio de 280.
5. L: No, pero yo digo de dividir.
6. M: Ay, si... pero ¡Lulu! Primero hay que... Bueno 280 dividido 8... No, hay que multiplicar. Preguntemos.
7. L: Nooo... no tenés que preguntar, tenés que saber vos.
8. M: Bueno, 280 dividido 8.

9. L: Es necesario hacer las cuentitas.
10. M: Para mí no es eso, pero bueno... 280 dividido...

Este pequeño extracto de la clase refleja lo que mencionamos anteriormente. Incluso en este comienzo, la multiplicación que propuso parece no tener sentido en relación con lo que había que averiguar (líneas 1 y 3). Sin embargo, algo la llevaba a insistir en la multiplicación.

Resulta interesante analizar algunos posibles supuestos que circularon en este diálogo y que podrían indicarnos un tipo de relación que las niñas han establecido con los problemas que se les proponen en Matemática. Por ejemplo, que la decisión sobre qué operación utilizar no depende de la comprensión que tengan de la situación. La ausencia de argumentos que sostengan el uso de uno u otro cálculo pareciera indicar que están tratando de “adivinarlo”, quizás buscando alguna pista en el enunciado que les permita decidir. También es posible que consideren que se trata de un problema de multiplicación o de división ya que estas han sido las últimas operaciones que han estudiado en el aula de apoyo.

Otra idea que se puede interpretar de lo que dicen en este intercambio se vincula con lo que creen que se espera de ellas. Frente a la sugerencia de Micaela de preguntar a las docentes, Luz afirma que es algo que tienen que saber ellas. En este sentido, parece estar presente el supuesto de que resolver de manera autónoma es equivalente a resolver sola, sin ayuda. Sabemos que la docente del curso no coincidiría con esta interpretación; en efecto, resolver de manera autónoma puede incluir, desde nuestro punto de vista, la intervención del docente siempre que dicha intervención no le resuelva el problema al estudiante. Se trata de colaborar en que se establezcan puentes entre los conocimientos disponibles y lo nuevo que presenta el problema, dejando a cargo del sujeto que aprende la construcción de algunas de las ideas que resultan relevantes para hallar la solución. Para ello es

necesario que el docente sostenga cierta incertidumbre de modo que los estudiantes puedan tomar decisiones.

Finalmente, destacamos el lugar que le da Luz a “las cuentitas” (línea 8), lo cual nos permite acceder a aquello que parece ser lo más valorado en el trabajo que se les viene proponiendo. Esto también lo veremos más adelante en las producciones escritas de estas alumnas.

Luego de acceder a la propuesta de su compañera y de resolver la división que Luz propuso, podía notarse por sus dudas y comentarios que Micaela no estaba convencida de lo que se le estaba proponiendo (línea 9). Si bien se podían comparar las relaciones de proporcionalidad de un puesto y de otro de diferentes maneras, para Micaela lo propuesto por Luz aún carecía de sentido.

En ese momento no teníamos certeza si ambas tenían en claro lo que se debía averiguar: dónde es conveniente comprar dependiendo de dónde sale más barato. A partir de la intervención de la docente, Micaela comenzó a darle forma y palabras a lo que estaba pensando.

11. (Las alumnas venían resolviendo la división que propone Luz, compañera de Micaela. En el momento de la intervención de la docente, Micaela pone de manifiesto que no está convencida de lo que están haciendo...)
12. Docente: ¿Cómo vamos?
13. Alumnas: Bien
14. M: Es que no sabemos... para mí es de 4... no sabemos si es de multiplicar o de dividir.
15. D: Bueno, a ver pensémoslo juntas
16. Alumnas: Ya lo estamos haciendo.
17. D: A ver, ¿tienen claro qué es lo que tienen que hacer?
18. M: Sí
19. D: Bien, ¿qué es lo que nos está pidiendo el problema? Tenemos un negocio por acá y

- otro negocio por acá (señalando los dibujos haciendo referencia al puesto de “Don José” y al de “Don Martín”) ¿Y qué me está preguntando?
20. M: En cuál le conviene.
21. D: En cuál me conviene. Y, ¿en cuál me va a convenir? En el que sea qué...
22. (Luz duda...)
23. M: El que tenga más... el que salga menos...
24. D: El que salga menos...

Luego de esta intervención, el diálogo se desarrolla para que las niñas intenten poner en palabras el porqué de la elección de ese procedimiento (línea 15). Micaela recuperó trabajos anteriores realizados con la maestra de apoyo y formuló una idea que parecía arraigada que consistía en que si se estaba dividiendo era porque había que repartir (línea 24). Pareciera que no relacionaba este concepto de repartir con lo que ella entendía que habría que hacer en esta situación problemática.

25. M: Para mí era de multiplicar, pero no sé...
Ahora tenemos que intentar de multiplicar.
26. D: No, no es que sí o sí tenés que multiplicar.
El tema es que tenemos que pensar que lo que estamos haciendo nos sirva para algo.
27. M: Lu, dividir nos dijo Caro que era para repartir. (refiriéndose a su maestra de apoyo)
28. D: Sí para repartir. ¿Y qué estarías repartiendo acá?
29. M: Nada...
30. D: ¿Nada?
31. M: Manzanas.
32. D: ¿Manzanas? ¿Entre qué?
33. M: Entre kilos.

En este diálogo podemos advertir que la propuesta de apelar a la división fue planteada sin considerar el sentido del problema y a partir de recurrir a algo que les había enseñado la maestra de apoyo. Micaela sostuvo hasta el final esta confusión entre repartir manzanas o kilos de manzanas (algo que se evidenció en otras parejas también). En ese momento, la docente decidió intervenir para retomar lo dicho por Micaela referido a que la división servía para repartir.

34. D: No, no importa si no lo terminaste. Lo que tenemos que pensar es por qué ustedes pensaron en esa división. Lo que tenemos que hacer es comparar... un negocio con el otro para saber, como dijeron ustedes al principio, cuál es más barato. ¿Sí? Y ¿cómo podemos hacer, averiguar, ¿eh...? Acá hay 8, me dice 8 kilos \$280; 4 kilos \$144. ¿Hay algo que ustedes puedan averiguar para saber cuál es más barato? Por ejemplo, si yo en vez de comprar 8...
35. M: ¡Ahhh ya sé!
36. D: ¡A ver...!
37. M: Sé lo que hay que hacer, pero no sé cómo decirlo.
38. D: No importa. Como te salga.
39. M: Eh... hay que hacer una cuenta de... de cuánto te daría 8 kilos en 144...
40. D: ¡Me encantó! O sea, vos acá tenés el precio de cuánto... de 4...
41. M: Cuánto daría 8 kilos...
42. D: ¿Y si averiguamos cuánto nos salen 8 kilos acá? (Refiriéndose al puesto de Don Martín) Para después compararlos... si tengo 8 kilos y 8 kilos voy a poder compararlo... ¡Me en-

- cantó! ¿Cómo podemos hacer para averiguar acá cuánto salen 8 kilos?
43. M: Multiplicando.
44. D: ¿Qué vas a multiplicar?
45. L: 140 por 4.
46. D: ¿Por 4? Yo acá tengo el valor de 4 kilos, como hago para llegar a 8 kilos.
47. M: Eh... por 2.
48. D: ¡Sí, muy bien! Por 2. Y si a este, préstame el lápiz, si a este 4 para llegar al 8 lo multiplico por 2. Perdón que estoy escribiendo al revés, me salen torcidos. Si al 8... perdón, si al 4 lo multiplico por 2 para llegar al 8, al 144 ¿por cuánto lo voy a tener que multiplicar?
49. M: Pooor... 2.
50. D: ¡Sí, muy bien! ¡Por 2! Muy bien. ¿Se animan a hacer esa cuenta? ¿Te animás? 48. D: Dale Lu, ¿te animás a hacer esa cuenta? No borren lo que hicieron antes, ¿eh?
51. 48. M: No, no.

En este extracto podemos advertir cómo a través de la interacción con una de las docentes y volviendo a detallar los datos del problema y lo que debe averiguar, logra vincular el sentido de multiplicar con la pregunta que se le proponía desde el problema. A partir de entender y tener claro qué había que comparar, le dio forma al procedimiento a través de una multiplicación de una de las magnitudes ($4 \text{ kg} \times 2$ para averiguar 8 kg) que la acercó a la resolución del problema. En este momento, la docente intervino también al ampliar esta idea que sostiene que si una de las cantidades de la relación se modifica, la otra también debía hacerlo; la niña completó la idea al indicar que deben modificarse de la misma manera (línea 46).

En la siguiente imagen compartimos el procedimiento utilizado por las alumnas.

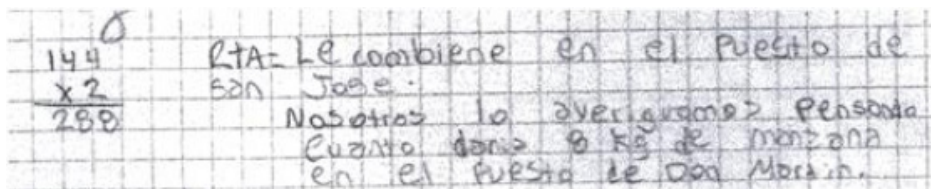


Imagen 7

[La imagen muestra un recorte de hoja cuadrículada escolar, escrita con lápiz negro azulado. A la izquierda, se ve el cálculo $144 \times 2 = 288$ resuelto a través del algoritmo usual de multiplicación (cuenta vertical). A la derecha de la cuenta dice “RTA: Le conviene en el puesto de San Jose. Nosotras lo averiguamos pensando cuánto tenía que dar 8 kg de manzana en el puesto de Don Martín”.]

Considerar lo que las alumnas ponían en palabras y devolver lo dicho por ellas en forma de pregunta o con otras palabras fue una intervención anticipada por parte nuestra, con la intención de que pudieran repensar y reelaborar lo que estaban pensando, y que ellas mismas pudieran dar cuenta del procedimiento que llevaron a cabo.

Luego, la docente decidió retomar la idea primaria que tuvieron sobre resolver el problema usando una división. Tomó esta decisión porque le resultó importante no descartar ni pasar por alto algo que se había pensado. Además, lo hizo con la intención de ayudarlas a poner en palabras de dónde surgió esa idea y de qué manera podría serles útil. Era un procedimiento válido, pero que por alguna razón descartaron.

Esa división les daría la posibilidad de comparar otra cosa: ya no la promoción de 8 kilos en cada negocio, sino el precio de un kilo en cada uno de ellos. ¿Lo habrían pensado así?

52. D: (...) A mí me interesa que pensemos juntas esta división. Porque no está mal lo que pensaron ahí. Ahora, pensemos para qué nos puede servir. Si yo los \$280, que es ese número que tenemos ahí, lo divido por 8, o sea los 8 kilos...
53. M: Te va a dar menos.
54. D: Me va a dar menos, eso seguro (interrumpe otra nena de otro grupo solicitando ayuda). Ya voy. Yo tengo que todos esos 8 kilos me salen \$280. Si yo esos \$280 los divido, como dijeron ustedes, los reparto entre los 8 kilos.
55. Alumnas: Me da menos.
56. D: Me da menos. ¿Y qué me va a dar?
57. L: 4.
58. D: Bueno, ¿y qué me va a dar? Ese 4 ¿qué es?
59. M: Ese 4...
60. D: Pensá, yo tengo \$280 repartido entre 8.
61. M: Eh...cuánto te... ¿Cuánto te da?
62. D: ¿Cuánto te da qué?
63. M: Cuánto te dan las manzanas... no...

En este pasaje vuelve a aparecer la duda entre manzanas o kilos de manzanas, qué se busca al dividir. Frente a esto, la docente toma una decisión (que se comparte en el extracto que sigue): proponer otra situación con las mismas cantidades, pero en la que ambas magnitudes sean discretas, con la intención de colaborar en que comprendan esa división como un reparto (línea 65). Posteriormente, se les propone trasladar esa idea a lo que habían pensado inicialmente sobre el problema. El desafío estaba en que reconocieran qué era lo que estaban repartiendo, qué información brindaría esa división en el problema original y si se estaba comparando algo a través de este procedimiento como había habilitado la multiplicación.

64. D: Supongamos esto... tengo 280 caramelos para repartir en 8 bolsas. ¿Qué me va a dar esa cuenta de dividir?
65. M: Eh...
66. D: Tengo un montón de caramelos y los quiero repartir en una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho bolsas.
67. M: Eh... cuántos caramelos hay en cada bolsa.
68. D: Bien. Cuántos caramelos hay en cada bolsa. Si yo tengo \$280 para repartir en 8 kilos... un kilo, dos kilos, tres kilos... ¿qué es lo que me va a dar esa cuenta de dividir?
69. M: Eh, cuaaa....
70. D: Dale, animate.
71. M: Cuántos caramelos pusiste... eh... no... cuántas manzanas pusiste...
72. D: No estoy repartiendo manzanas, estoy repartiendo qué cosa...
73. L: Dinero.
74. M: Plata.
75. D: Plata. Bien. ¿Cuánta...?
76. L: Plata alcanzaría.
77. D: ¿En qué?
78. L: En los...
79. D: ¿En los 8 kilos o en cada kilo?
80. Las dos: (muy seguras) En cada kilo.
81. D: ¡Bien! En cada kilo. O sea que esta división no está mal.
82. M: No, pero era para...
83. D: No importa. En realidad, lo que yo estoy averiguando ahí ¿qué es? ¿Cuánto sale?
84. M: Cada kilo.
85. L: Cada kilo de manzanas.

A partir de este diálogo es que las alumnas comenzaron a resolver, según muestran las siguientes producciones de Micaela:

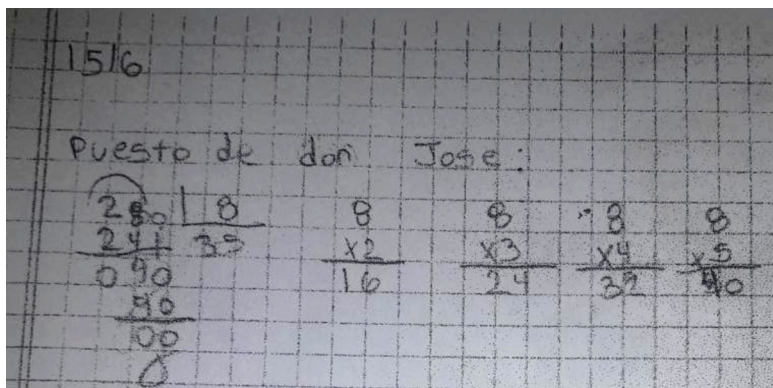


Imagen 8

[La imagen muestra un recorte de hoja cuadriculada escolar, escrita con lápiz negro. Arriba a la izquierda está escrita la fecha, 15/6. Debajo dice "Puesto de don Jose" y debajo de esta escritura hay una serie de cálculos. Los cálculos son, de izquierda a derecha: $280 : 8 = 35$ resuelto a través del algoritmo usual de división en el que aparecen escritas las restas en la columna del resto; $8 \times 2 = 16$, $8 \times 3 = 24$, $8 \times 4 = 32$ y $8 \times 5 = 40$, todas escritas siguiendo la organización vertical del algoritmo de la multiplicación.]

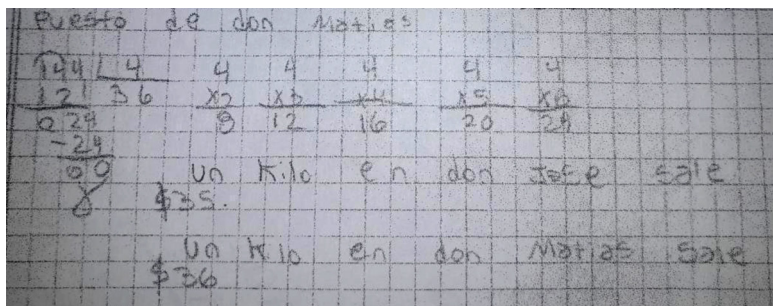


Imagen 9

[La imagen muestra un recorte de hoja cuadriculada escolar, escrita con lápiz negro. Se ve una serie de cálculos debajo de la escritura “Puesto de don Matias”. Los cálculos son, de izquierda a derecha: $144 : 4 = 36$ resuelto a través del algoritmo usual de división en el que aparecen escritas las restas en la columna del resto; $4 \times 2 = 8$, $4 \times 3 = 12$, $4 \times 4 = 16$, $4 \times 5 = 20$ y $4 \times 6 = 24$, todas escritas siguiendo la organización vertical del algoritmo de la multiplicación. Debajo de las multiplicaciones dice: “Un kilo en don Jose sale \$35. Un kilo en don Matias sale \$36.”]

Podemos vincular la relevancia de este movimiento por parte de la docente, su insistencia en que las alumnas construyan una idea más clara acerca del problema que se les estaba proponiendo, con el siguiente aporte de Peltier (2003). La autora subraya la importancia de proponer problemas que permitan a los y a las estudiantes evocar una situación conocida por ellos o que la representación pueda ser construida mentalmente por analogía a otras situaciones que conoce.

De esta manera, el alumno puede construir una representación mental de la situación evocada y anticipar las que pueden ser preguntas relativas a dicha situación. Puede entonces leer ciertos datos como respuestas a ciertas preguntas, mientras comprueba que otras preguntas no están

planteadas en el enunciado, pero podrían estarlo manipulando los datos. Sin fase de anticipación, es muy difícil “escoger la operación correcta”. A partir de esta representación mental de la situación y de la anticipación de preguntas y de respuestas, el alumno puede resolver el problema y no a partir de rasgos o de índices superficiales del texto o de la proximidad temporal con nociones en proceso de aprendizaje (*Ibid.*, 36-37).

Así, las intervenciones docentes desplegadas apuntaron a que las niñas se involucraran en la situación y se distanciaran de respuestas como las que habían producido inicialmente, en las que intentaban utilizar operaciones sin una idea muy clara de las razones que las sustentaban. Podemos afirmar entonces que la dificultad inicial de las alumnas es interpretada por la docente como producto de una barrera (Booth y Ainscow, 2002) que debía ser eliminada, para lo cual construye un conjunto de intervenciones que les permiten vincularse con el problema, comprenderlo y diseñar variadas estrategias de resolución.

Micaela en interacción con sus conocimientos frente a un nuevo desafío

Minutos antes de finalizada la primera hora de trabajo en parejas y luego de haber escrito en su hoja ambos procedimientos, una docente se acercó a ellas para proponer, al igual que se hizo con los otros grupos, pensar algo más en relación con el problema dado. Debido a que tocó el timbre del recreo, el intercambio con la docente y las alumnas se hizo oralmente; por este motivo es que no hay registro escrito de su producción.

1. D: ¿Les puedo pedir pensar algo más?
2. M: Sí (Luz dudó, ya era su tiempo libre).
3. D: ¿Cómo podría averiguar cuánto saldría

comprar 16 kg de manzanas en cada puesto,
en el de Martín y en el de José?

4. M: ¡Es fácil! - dijo entusiasmada-. Lo que sale los 8 kg por dos y lo que sale 4 kg por 8... ¡NO! ¡Lo que sale 4 kg por 4! Porque 8 por 2 es 16 y 4 por 4 es 16.

Desde nuestra perspectiva, este breve momento, de carácter más informal, aportó mucho a la transformación de los conocimientos de Micaela. Ella supo reconocer, aunque no en estos términos, al 16 como múltiplo común entre 8 y 4, a partir de establecer que debía duplicar el precio si se duplica el peso y cuadruplicar en el otro caso. Así, Micaela utiliza implícitamente propiedades de la proporcionalidad.

Nos resulta interesante la seguridad con la que expresó su idea en ese momento, porque fue una estrategia que no apareció en otros compañeros en los que sí se esperaba que pudiera aparecer. Además, dio cuenta de aquello que venía pensando durante casi toda la hora, lo que brindó sentido y argumento a la multiplicación planteada.

Al dar justificación frente a una nueva propuesta de la docente, Micaela nos confirmó que se había involucrado con el problema, que lo había comprendido y que podía apoyarse en lo analizado con su compañera para pensar sobre esta nueva pregunta.

Esta idea de proceso de comprensión y producción de Micaela, en ese pequeño espacio de clase, continuó percibiéndose durante la puesta en común.

Micaela en interacción con todo el grupo

Tal como detallamos en la descripción de la clase, habíamos establecido empezar la puesta en común al convocar a las cuatro niñas a contar lo que pensaron, para garantizarles un lugar en la discusión grupal.

Inicialmente propusimos un momento para mirar el problema entre todos y todas, desentrañarlo, establecer cuestiones en común para luego ir a lo que tenía de diferente cada versión. El propósito de la

puesta en común era poder establecer relaciones entre varios procedimientos. Para ello era necesario no perderse detalle de lo que cada estudiante o pareja quería aportar.

Sabíamos que la mayoría había buscado el valor de la unidad, entre ellos dos de las niñas: Delfina y Lola. También, que Luz y Micaela habían iniciado de esa manera, pero luego la habían descartado y habían calculado el doble del valor de 4 kilos para equiparar en 8 kilos como el otro puesto. Esto era importante para este momento porque bajo una misma versión, aparecieron dos estrategias diferentes y habían sido producidas por las cuatro niñas que nos interesaba particularmente incluir en la clase.

Para el análisis de los procedimientos utilizados por estas niñas, se estableció un diálogo entre ellas, la docente y sus compañeros. Se trató de un ida y vuelta de intervenciones que ayudaron a que Micaela y Luz vayan clarificando qué hicieron y por qué descartaron la división pensada en primer lugar. Destacamos la seguridad con que Micaela argumentó lo que había realizado, no la división propuesta por Luz sino la idea de calcular el doble de 4.

1. M: Lo primero que hicimos fue dividir y nos dimos cuenta que estaba mal, bah que no estaba mal que era de menos (esto no quedó claro para la docente, pero en ese momento decidí no preguntarle, sólo le dijo que le recordara las cantidades que les habían tocado mientras las escribía en el pizarrón).

(...)

2. D: Ahora sí, dale Micaela, decí lo que hicieron ustedes.
3. M: Pusimos dividir y vimos que estaba mal la cuenta porque no había que saber cuánto salía, cuánto costaba un kilo sino cuánto costaban 4 kilos, no 8 kilos en el puesto de Don

- Martín. Hicimos 144×2 que nos dio 288.
4. D: ¿Pensaron las dos lo mismo? ¿Lo charlaron un ratito?
 5. M: Ella pensó en dividir (refiriéndose a Luz) y yo en multiplicar, pero bueno. Primero hicimos dividir, pero...
 6. L: (Bajito hablándole a Micaela) Pero no estaba mal (...)
 7. D: Pero Luz... ¿por qué no estaba mal?

Aquí toma la voz Micaela, quien responde:

8. M: Era para saber cuánto daba un kilo.

Subrayamos este pequeño diálogo porque nos resulta relevante cómo, frente a las preguntas de la docente, Micaela sigue mostrando convicción ante el procedimiento pensado en el trabajo en parejas, argumenta y da las razones de sus ideas. Por medio de este recurso podemos inferir que ella sigue arraigada a su conjetura inicial: que el problema se podía resolver con una multiplicación.

Este breve episodio nos posibilita observar la importancia de favorecer, no sólo a ella sino a todo el alumnado, instancias de exploración y momentos para poder poner a prueba las ideas que elaboran. También sirvió para advertir cómo sostiene ciertas dudas en relación con lo que otros y otras piensan, mientras no tuviera sentido para ella. Veremos que más avanzada la puesta en común será más clara al respecto, pero en este momento ha dado un indicio al decir que con la división averiguaba un dato que, tal como diría después y desde su interpretación del problema, no era necesario o no era pedido: el valor del kilo.

9. M: Después averiguamos cuánto nos iba a dar en el puesto de Don Mateo (sic) los 8 kilos, multiplicamos 144×2 .

10. D: Por un lado, están averiguando el valor del kilo y llegan a decir que cuesta 35 y acá me estás diciendo que pensaron en 144×2 .
11. M: Sí... y nos dio 288.
12. D (la docente toma nota de lo dicho por Micaela en el pizarrón) ... ¿Qué es lo que averiguás cuando haces 144×2 ?
13. M: Cuánto te va a dar el doble de 4.
14. D: Son...
15. M: 288.
16. D: ¿Son pesos verdad? (se refiere a dinero (\$))
17. M: Sí.
18. D: Y estos 288 que está diciendo ella equivale ¿a cuántos kilos de manzana?
19. M: 8.
20. D (a todos): ¿Están de acuerdo con lo que ella hizo...?

A medida que desarrolla su explicación, Micaela se torna más clara en las relaciones de proporcionalidad establecidas, ya refiriéndose a “dobles”: el doble del peso lleva al doble del precio.

Veamos a continuación que, cuando otro niño (indicado como Al en el diálogo) propone una estrategia que involucra una estimación, ella presenta sus argumentos para defender su propio procedimiento:

21. Al: Yo decía que como 140 es la mitad de 280, pero 144 es más, yo ya me daba cuenta que era más caro lo de Don Martín porque 144×2 da más que 280.
22. (...)
23. M: ¡Es lo mismo, pero nosotras hicimos el doble! 144×2 .

24. D: Cuando hicieron 144×2 , ¿pensaron en qué cosa Micaela?
25. M: En cuanto daría en don Martín 8 kilos.

Recuperamos aquí la voz de Sadovsky para referirnos al rol que pueden tener los desacuerdos en el avance de los aprendizajes de los y las estudiantes:

Frente a los disensos los alumnos potencian sus capacidades argumentativas al enfrentar la necesidad de convencer a sus compañeros en una situación auténtica de debate. Al mismo tiempo los argumentos o razones que proponen profundizan la comprensión que tienen de cierto contenido dando lugar a diferentes propiedades que son el punto de apoyo para convencer a los otros (2010: 121).

Destacamos la actitud de Micaela en esta interacción con un compañero que había resuelto otra versión del problema. Recordemos que se trataba de una alumna que no estaba habituada a participar de las discusiones en las clases. Su respuesta, “¡Es lo mismo, pero nosotras hicimos el doble!”, parece no tomar en cuenta el razonamiento completo de su compañero -aunque quizás lo habría tomado en cuenta a partir de algunas intervenciones de la docente-, y solo enfocarse en la primera parte en la que él propone calcular “la mitad”. Enfatizamos la importancia de este intercambio, que le permite a Micaela reafirmar su estrategia y su fundamentación, aun si no se generaron condiciones para que comprenda totalmente lo que su compañero había afirmado.

Decidimos poner estos pasajes porque notamos un gran avance en su comprensión, desde el primer encuentro con el problema y el trabajo con su compañera hasta esta instancia de análisis grupal. Esto se evidenciaba en el sentido que daba a las propuestas, en la forma de argumentarlas y en la seguridad que iba cobrando, así como en su intervención a propósito de otras producciones. Por ejemplo, luego

de haber escuchado un procedimiento que relata un alumno al que le habían tocado otros números, Micaela lo explica: “Averiguó la unidad y lo multiplicó por los kilos del otro puesto”. Pero, sobre todo, destacamos su participación activa en todos los momentos de la clase, siendo parte del grupo, algo que no venía sucediendo. Sobre este tipo de fenómenos, Escobar y Grimaldi señalan que:

Cuando pensamos en el aula de matemática inclusiva no nos referimos solamente a aceptar que todos estén allí. Estamos pensando en incluir sus ideas, valorarlas, incorporarlas a la comunidad de producción de la clase, someterlas a discusión, ponerlas en relación con otras ideas (2015: 5).

Micaela produjo ideas matemáticas en torno al problema que se había propuesto, y estas fueron una parte central de la discusión colectiva.

Análisis, parte II. Algunas consideraciones sobre la puesta en común

En primer lugar, señalamos en este análisis la complejidad que supuso para nosotras la gestión de una puesta en común con características novedosas en nuestras prácticas docentes. Muchas eran las preguntas que se presentaron al momento de planificar esta instancia: ¿cómo gestionar una puesta en común que habilitara el aporte de las diferentes parejas y que tenga en cuenta la variedad de cantidades y de relaciones existentes en las distintas versiones del problema? ¿cómo asegurar que participaran también las niñas? ¿cómo lograr que conviviera la diversidad en la puesta en común, compartiendo ideas? ¿cómo generar una discusión rica para todos, frente a la disparidad de conocimientos?

Si bien la conversación que habíamos tenido durante el “entretiem po” había clarificado algunos aspectos, aún teníamos varias incertidumbres tanto respecto a cómo sostener la gestión, como a qué actitud iban a mostrar los niños y las niñas frente a esta propuesta.

Desde el momento de la planificación fue dificultoso imaginar el “hilo conductor” de esta instancia. Por un lado, en cuanto a lo que nos habíamos propuesto trabajar sobre la Proporcionalidad, que era el objeto de estudio de esa clase y, por otro, en cuanto a asegurar una participación activa de todo el grupo, en especial de las cuatro niñas, para que pudieran sentirse parte de la discusión matemática que pretendíamos establecer. Debíamos lograr un punto de unión entre las diferentes versiones. Eso era algo nuevo para nosotras. Sabíamos que no apuntaríamos a un mero control de resultados, pero ¿cómo construir lo común partiendo de lo diferente?

Tal como señalamos, al comenzar esta nueva hora de clase, lo primero que hicimos fue devolver a las alumnas y los alumnos sus producciones. Esto era necesario para que pudieran evocar lo realizado al momento de discutir con sus pares y de argumentar ideas. Fue destacable cómo recordaron los procedimientos realizados y las razones que los justificaban, casi sin mirar sus hojas. Esto fue parte del clima de compromiso, atención e interés por lo que se iba intercambiando que reinó desde el inicio.

Luego de repartir las hojas con sus producciones, como habíamos previsto, la docente que conducía la puesta en común (M1) comenzó la clase dando lugar “como si fuera casualidad” a las niñas:

1. M1: Ahora sí, Delfina. Delfina y después seguimos con alguna otra mano. Delfi, ¿qué había que hacer?
2. Delfi: Había que averiguar en cuál de los dos (realiza una pausa que pareciera indicar duda) ... Por ejemplo, yo hice unas cuentas.
3. M1: Esperá. Recién acabo de preguntar lo que teníamos que hacer. No quiero que ya nos metamos en lo que hizo cada uno para resolverlo. (M1 en ese momento, aclara a todos sobre turnos para hablar y que no dará

- pie a quien no levante la mano).
4. M1: Delfi, de manera general, ¿qué habría que hacer?
 5. M2: Hacer cuentas y averiguar cuánto salía cada kilo.
 6. A1: En cuál sale más barato (dice otro compañero).
 7. M1: A ver Delfina, lo que dijiste está bien. Pensalo más general.
 8. D: Teníamos que ver cuál era el más barato o económico, que es lo mismo, y hacer cuentas. Por ejemplo...
 9. M1: Esperá, ahí ya te estás metiendo en lo que hizo cada uno. ¿Están todos de acuerdo que era lo que había que averiguar? Teníamos que decir...
 10. As: (contestan los niños antes que la docente termine la idea) ... Donde era más barato y explicar cómo lo hicimos...
 11. M1: Antes de explicar cómo lo hicimos. ¿Saben por qué hicimos esta aclaración? Recién estábamos discutiendo qué cosas íbamos a analizar con ustedes. Notamos que a algunas parejas les surgió la inquietud de qué significa esto de decir “más económico”. ¿Estamos todos de acuerdo que decir más económico es hacer referencia a lo más barato? Es decir, voy a ir a un lugar y voy a decidir ir donde más barato me salga lo que quiero comprar, ¿sí? ¿Seguro eso? ¿Está claro?
 12. As (Todos): Sí.

Este extracto no sólo da cuenta de la intención de que comenzaran las niñas, sino también algunas pautas en cuanto a la organización de la clase (por ejemplo, la necesidad de que levanten la mano para poder ser escuchados). Además, queríamos comenzar mirando el problema entre todos y todas, desentrañarlo a partir de establecer cuestiones en común para luego ir a lo distinto.

Para continuar el análisis de las características no solamente comunes sino también las diferentes del problema, la maestra dio la palabra a otro niño y se produjo el siguiente intercambio:

13. M1: OK. (mira a un niño con la mano levantada) ¿Tu nombre?
14. A2: Enzo. Había puestos de manzanas, uno de Don Matías y otro de Don José. El de Don José decía 4 kg de manzanas 180 pesos y 3 kg de manzanas en el de don Martín 138 pesos.
15. M1: A ver, lo que él acaba de hacer es leernos el problema. (Se dirige a una niña) ¿Qué no-taste vos?
16. A3: Que es distinto el problema.
17. M1: Que el problema es distinto. ¿Alguien notó lo mismo?
18. As: Sí.
19. A4: El problema era el mismo, pero ... (se empieza a escuchar interferencia en la charla)
20. M1: A ver, ¿qué estás diciendo vos?
21. A4: Que en realidad el problema era el mismo pero los precios eran diferentes.
22. M1: ¿Sólo los precios? ¿A ver Lola? Escuchen.
23. Lola: El problema es igual pero los precios son diferentes.
24. M1: El problema es el mismo pero los precios son diferentes. ¿Sólo los precios?

25. A5: Distintas cantidades.
(...)
26. M1: Entonces, todos tienen el mismo problema. Todos tienen que averiguar adónde nos conviene comprar, pero varía la cantidad que tenía cada uno, no solo la cantidad de manzanas sino también el precio. ¿Tienen ganas de arrancar contando lo que hicieron?
27. As: ¡Sí! Yo, yo, yo... (Manos levantadas, una es la de Micaela, que es la que elige M1)
28. M1: ¿Nombre?
29. A: Micaela.

Más adelante, luego de que Micaela y Luz presentaran sus estrategias -tal como desarrollamos en la sección anterior-, la docente invitó a las otras dos niñas, Delfina y Lola, a compartir las suyas, ya que frente a la misma versión del problema ellas habían buscado el valor de la unidad en los dos puestos.

30. M1: Mica, ellas arrancaron como ustedes. Hicieron esto, pero en lugar de hacer este cálculo (mostrando la multiplicación de 144×2) Delfina nos está contando que ella hizo (escribe en el pizarrón) $144: 4$. ¿Para qué Delfi?
31. Delfi: Porque era para saber cuánto sale un kilo.
32. M1: ¿Un kilo de qué?
33. Delfi: Eemm, un kilo de manzanas.
34. M1: Claro un kilo de manzanas que es lo mismo que ustedes estaban buscando en el cálculo anterior. ¿Y esto de qué le sirve?

La propuesta de Luz respecto de la pertinencia del uso de la división generó dudas en Micaela, pero resultó una buena oportunidad para analizar estrategias y hacerle notar que ambos procedimientos eran válidos. Además, llevó a analizar que otras parejas habían usado el mismo procedimiento u otro similar al de las niñas, aun disponiendo de valores diferentes de las variables en juego.

A partir de lo que se compartió en función de las relaciones pensadas por estas cuatro niñas a propósito de una versión particular del problema, comenzaron a escucharse las voces de todo el grupo, murmullos. Algunas de las docentes del equipo presentes en el aula (M2, M3) se sumaron interviniendo en el intercambio, como se ejemplifica con el siguiente fragmento:

35. M2: Más allá de que los números fueran diferentes y los precios fueran diferentes. ¿Alguien más resolvió buscando un kilo?
36. As: ¡Nosotros! (Dijeron varias parejas levantando la mano).
37. A10: ¿Pero había que averiguar cuánto salía un kilo?
38. M3: No, no. Había que averiguar cuál era el puesto más barato.
39. M2: A ver. ¿Cómo te llamás?
40. A10: Juan Pedro.
41. M2: Por acá decían que a varios les sirvió como estrategia averiguar el kilo y Juan Pedro pregunta si en todos los casos había que buscar un kilo.

Nos resulta notable una vez más que al grupo no le haya llamado la atención que otra voz adulta los y las invitara a compartir lo pensado. Como ya se ha recogido en experiencias anteriores, es posible problematizar un rasgo muy arraigado de la cultura escolar como es la pre-

sencia de un único adulto en el aula regular. En este sentido, Grimaldi, Broitman y Cobeñas (2021) advierten que la Educación Inclusiva nos pone frente a la necesidad de pensar en un trabajo colaborativo entre figuras adultas -que podrían ser todas docentes, como en este caso, o con distintas formaciones, como cuando participan asistentes personales o acompañantes terapéuticos-. Lo ocurrido en esta clase nos permite desplazar la discusión sobre la cantidad de adultos hacia la calidad de sus participaciones.

Queremos destacar, además, que estas intervenciones colaboraron en que los niños pudieran comenzar a realizar conexiones con sus propias estrategias al resolver otras versiones del problema, a partir de lo expresado por sus cuatro compañeras.

En relación con el rol del “pasaje a la unidad”, una de las conversaciones llevó al grupo a distinguir diferentes modos de “pasar por el 1” al tomar como referencia el uso que habían hecho dos de las niñas:

42. M1: (...) Varios pensaron en lo que sale un kilo con esos números que ustedes tenían para averiguar y decir dónde les conviene comprar. (...) ¿Fue la única manera?
43. As: No.
44. D: De hecho, a la vista nos estamos dando cuenta que ellas pensaron de otra manera.
45. A9- Nosotros hicimos igual.
46. M1: ¿Qué?
47. A9: Quisimos averiguar cuánto cuesta un kilo, pero después, póneme en Don José nosotros teníamos 4 kilogramos. Y después pusimos por 3 que en Don Martín teníamos tres. O sea, como que rotamos los kilos para ver cuál era más barato.
48. A10: Como la otra manera, o sea ver a Don José con los 4 kilos. O sea, el de 280 pero con

- 4 kilos. Cuánto era...
49. M1: ¿Y no es similar a lo que ella hizo?
 50. A11: 35×4 para ver si daba más barato o más caro.
 51. M1: Claro, agarraban la unidad y trataban de llevarlo a la misma cantidad que el otro en kilos.
 52. As: Claro.
 53. M1: ¿Pero no es similar a lo que ellas pensaron?
 54. A9: Claro, empezamos lo mismo que ellas hicieron, pero como que después lo mezclamos.
 55. A10: Como que lo unimos...

Veamos que, en este pasaje, la docente del grado tracciona a volver sobre lo que propusieron las niñas (líneas 44 y 48). Esto resulta importante en términos de nuestros propósitos: generar condiciones para que sus ideas matemáticas fueran parte constitutiva de lo que se discute en la clase. Desde el punto de vista de los contenidos en juego, la intención de la puesta en común no consistía en que cada pareja cuente lo que hizo; se apuntaba a establecer relaciones entre las diferentes estrategias desplegadas, dado que cada versión alojaba la posibilidad de apelar a distintas propiedades de la proporcionalidad que pretendíamos comenzar a tematizar.

Un asunto interesante a considerar es que por un momento asumimos que el cálculo de la unidad implicaba un mismo procedimiento (línea 46). Sin embargo, el alumno quería darnos a entender que no era igual y que, si bien buscó la unidad, no lo hizo con ambos valores: lo hizo para luego llevar ambos precios al valor del mismo peso (3 kilos). Si bien insistíamos en que los chicos y las chicas se pusieran “en la cabeza del otro u otra” al reenviarlos al procedimiento de las niñas, este ejercicio también representó un desafío para nosotras. ¿Cómo y

para qué buscar el valor de la unidad? El comentario de estos alumnos nos hizo ver, con posterioridad, que la respuesta a esa pregunta pareciera englobar un universo de posibilidades asociadas al modo en que se piensa la estrategia de comparación de relaciones, y esto lo aprendimos gracias a estos intercambios.

Reflexiones finales

En esta sección sintetizaremos lo que compartimos a lo largo del capítulo y abriremos nuevas reflexiones que consideramos necesarias para construir aulas y propuestas cada vez más inclusivas.

Nos parece relevante mencionar algunas condiciones que tuvimos en cuenta al momento de pensar nuestra propuesta. No es nuestra intención que se constituyan en un “método” de enseñanza; se trata de características que, en nuestra experiencia, configuraron condiciones para incluir las voces de todo el grupo a propósito del conocimiento.

- Apuntamos a que la totalidad del grupo trabajara con el mismo contenido, el mismo tipo de problema y la misma tarea.
- Diseñamos varias versiones del mismo problema con el objetivo de poner en juego diferentes relaciones matemáticas en torno al mismo contenido.
- Decidimos que las cuatro niñas tuvieran un lugar protagónico dada su historia como alumnas en este grupo.
- Planificamos de manera colaborativa y previmos algunas actividades extra por si fuese necesario para alguna pareja de estudiantes.
- Acordamos qué rol iba a tener cada una de nosotras en esa clase, sabiendo que sería posible para todas colaborar en algún otro rol que no estuviera fijado de antemano.

Sabemos que estas condiciones no fueron casuales ni producto del azar, sino que fueron el resultado de planificar una clase a partir de ciertas convicciones. Creemos oportuno mencionar algunas:

- Reconocer y considerar la diversidad (de modos de aprender, de modos de resolver, de modos de argumentar) propia de un aula, y respetar las trayectorias de cada uno y cada una.
- Entender la diversidad como una ventaja pedagógica (Ferreiro, 1994) y no como un obstáculo.
- Considerar que todos y todas pueden aprender, y que ese aprender siempre es con otros y otras, nunca desde la soledad.
- Concebir que la planificación es una herramienta valiosa y flexible. Valiosa porque permite prever algunas cuestiones (procedimientos, intervenciones, tiempos, modos de organización) que pueden suceder en el aula al tener en cuenta el propósito perseguido. Flexible, porque da la posibilidad de abrir el juego a lo que en la clase pudiera ocurrir.

Al retomar esas condiciones que generamos, pudimos identificar un efecto favorable en la construcción de conocimiento por parte de todo el grupo:

- Determinar que sea un mismo tipo de problema y un mismo tipo de tarea implicó que estén pensando sobre “lo mismo”, lo cual generó buenas condiciones para las instancias de debate colectivo.
- Abrir el juego a la manipulación de variables didácticas y determinadas decisiones respecto al tipo de problema anteriormente nombrado favoreció que esa situación sea un verdadero problema para la totalidad del grupo de estudiantes.
- Mirar a estas niñas desde “otro lugar” generó un cambio en la dinámica grupal, ya que ellas tuvieron un rol activo en las interacciones ocurridas durante la clase.
- Planificar de manera detallada y colaborativa, a partir de considerar una necesaria flexibilidad, posibilitó respetar la diversidad en los tiempos de resolución.
- Distribuir los roles nos permitió prestar atención a todas las situaciones que en más de una ocasión pasan inadvertidas en un aula cuando hay un único docente frente a la clase.

Esta propuesta no sólo generó cambios en los alumnos y las alumnas, sino que también nos hizo pensar sobre algunas ideas que conviven en las escuelas y que terminan siendo naturalizadas, y que a veces se escapan de la mirada crítica de quienes formamos parte de una institución. Este trabajo, creemos, colabora en cuestionar algunas verdades que instala a veces la propia escuela. Como por ejemplo que:

- Con una clase numerosa no se puede incluir a todos y todas.
- Muchos adultos en el aula confunden a las chicas y los chicos.
- El problema es del estudiantado y no de las prácticas docentes.
- Hay que sacar del aula a los y las estudiantes con trayectorias diferentes porque sólo podrán avanzar en grupos reducidos.
- Para algunos niños y algunas niñas con ciertas dificultades para adquirir conocimientos es necesario que tengan propuestas más tradicionales.
- El mismo dispositivo sirve para todos los alumnos y todas las alumnas independientemente de su trayectoria y éste debe ser el mismo en todos los años de la escuela primaria.
- Si un alumno o alumna tiene dificultades en adquirir algún contenido, esta dificultad lo va a acompañar en lo que resta de su trayectoria en la escuela primaria.

Finalmente, una de las preguntas que nos hacíamos desde el inicio de esta producción es cómo se lleva adelante una puesta en común que incluya al grupo de estudiantes en su totalidad y tenga en cuenta la diversidad de conocimientos. A partir de la experiencia transitada, podríamos esbozar una primera aproximación de respuesta al señalar que, frente a la incertidumbre de “cómo hacer” con la que se inició esta propuesta didáctica, la clave estuvo en escuchar a los chicos y las chicas para construir el intercambio desde allí. En este sentido, coincidimos con las reflexiones que Castorina y Sadovsky proponen:

Tal vez uno de los problemas más difíciles del trabajo de maestros y profesores sea el de coordinar las dimensiones

mencionadas [cultural, social, pedagógica, psicológica, didáctica e institucional] y habilitar la inclusión de los conocimientos de los estudiantes de manera que puedan considerarse constitutivos de las ideas que se plasman en las aulas. Efectivamente, el pensamiento de los alumnos sobre lo que se está tratando en un cierto momento “habla” de sentidos que están atribuyendo y con los cuales necesariamente hay que contar para que haya una genuina interacción entre la transmisión y el aprendizaje de los saberes. Dar lugar a la voz y a los aportes de los estudiantes requiere que los docentes: interpreten desde qué marco de ideas los están analizando, propongan interacciones en sala de clase que permitan modificarlas, ayuden a hacerlas visibles, promuevan la producción de argumentos que validen las elaboraciones que se realizan. En otros términos, el docente se ve exigido a producir intervenciones que se estructuran tomando simultáneamente en cuenta las respuestas de los alumnos a los desafíos que enfrentan y las intenciones didácticas que se configuran en función del proyecto de enseñanza, así como del saber que se propone. Y ello, asumiendo las condiciones que la institución impone (dimensión institucional), que moldean el conocimiento al plantear restricciones de tiempos (dimensión didáctica) y visibilidad de las acciones que se realizan (2018: 9).

La centralidad de la voz de los y de las estudiantes es reconocida tanto por la Didáctica de la Matemática -como se ilustra en la cita anterior- como en el campo de la Educación Inclusiva. En efecto, desde esta última perspectiva se define a la exclusión como un modo de negar tanto el aprendizaje como la participación de la totalidad y, a la vez, de cada estudiante.

Ahora bien, ¿qué significa tener voz en el aula de Matemática y qué significa ser escuchado? Arcavi e Isoda proponen la siguiente definición de “escuchar” a los alumnos y las alumnas:

(...) prestar cuidadosa atención a lo que los alumnos dicen (y observar lo que hacen), tratando de comprenderlo, así como sus orígenes y sus implicaciones. “Escuchar”, tal como lo concebimos, no es una tarea pasiva, ya que debería incluir las siguientes componentes:

- detectar, aprovechar, y crear oportunidades en las que los alumnos puedan expresar libremente sus ideas matemáticas;
- interrogar a los alumnos para develar la esencia y las fuentes de sus ideas;
- analizar lo que oímos (a veces consultando con colegas) y hacer el enorme esfuerzo intelectual de tomar la perspectiva “del otro” para comprender su esencia; y
- decidir de qué manera se puede integrar productivamente las ideas de los alumnos en el transcurso de una clase (2007: 111-112).

Los autores señalan algunos de los desafíos que enfrentan los y las docentes en torno a esta tarea; por ejemplo, la necesidad de dejar de lado los propios modos de saber.

Dar sentido a las ideas de los niños no es tan fácil. Los niños usan sus propias palabras y sus propios marcos en formas que no necesariamente se adaptan a la forma de pensar del profesor... “La capacidad de oír lo que los niños están diciendo trasciende la disposición, la agudeza auditiva y el conocimiento, aunque también dependa de todos

ellos” (Ball, 1993, p. 378). Por lo tanto, escuchar no sólo implica un ejercicio de desbloqueo de nuestros propios conocimientos matemáticos relevantes para la situación en cuestión, sino que también requiere el desarrollo de una capacidad de “descentración”. (*Ibíd.*, p. 113)

Así, la dificultad que solemos identificar en los alumnos y las alumnas para escuchar las reflexiones de otros y de otras también es un asunto del que nos debemos ocupar como docentes si tenemos la intención de crear en el aula condiciones que incluyan las ideas de todos y todas. Sadovsky reflexiona acerca de la escucha y la voz de los alumnos y las alumnas en la clase de Matemática y resalta su función para diseñar y llevar adelante un proyecto de enseñanza: “Abrir a la escucha tiene consecuencias: hay que hacer algo con esa escucha. No se trata solo de que los niños o los adolescentes hablen: hay que tomar su palabra. Hay que tomarla en relación con el conocimiento” (Unipe, 2019, 1m40s). La autora reconoce en esta escucha, además, la consideración de una variedad de maneras de expresarse:

Escuchar a los chicos (es) escuchar sus ideas, sus formas de expresarse, sus escrituras, sus pensamientos... Es tomar todo eso y pensar que tomar eso y transformarlo, interperarlo, discutirlo, asimilarlo, matizarlo... o sea, hacer algo con esa palabra, es constitutivo del sentido de lo que se está aprendiendo (es decir), hace al sentido de lo que se quiere transmitir, y no contar con eso transforma el sentido, da lugar a sentidos distintos (*Ibíd.*, 2m29s).

Cada una de las intervenciones que propusimos en la puesta en común promovieron, a nuestro entender, la organización de aquello que los niños y las niñas iban pensando. Intentamos comprender lo que decían los y las estudiantes y poner en diálogo las ideas que emergían, para identificar y subrayar cuestiones centrales vinculadas al conteni-

do en juego, aquello que queríamos enseñar. Formulamos preguntas para que continúen pensando caminos para resolver las situaciones planteadas, sin dar respuestas acabadas sino retomando los aportes de los y las estudiantes para seguir profundizando y buscando que pudieran relacionar lo que sabían anteriormente con lo que se quería que construyeran en esa clase. No lo hizo una docente en soledad, sino todas juntas apoyándonos unas a otras, convirtiéndonos en una gran red de interacción. En este sentido, fue un espacio de trabajo en colaboración donde se escucharon las voces de todos y todas, no sólo de las y los estudiantes sino de todas las docentes.

Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. e Isoda, M. (2007). Aprender a escuchar: de las fuentes históricas a la práctica del aula. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 111-129.
- Booth, T. y Ainscow, M. (2002). Índice de Inclusión. *Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas* (A.L.López, trad.). Bristol UK: CSEI (Trabajo original publicado en 2000).
- Broitman, C.; Escobar, M; Sancha, I. y Urretabizcaya, J. (2015). Interacciones entre alumnos de diversos niveles de conocimientos matemáticos. Un estudio en un aula plurigrado de escuela primaria. *Yupana Revista de Educación Matemática*, (8), 11-30.
- Brousseau, G. (1995). *Glossaire de didactique des mathématiques. Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Bordeaux: Copirelem, IREM d'Aquitaine, LADIST.
- Castorina, J.A. y Sadovsky, P. (2018). Los saberes docentes y la producción de conocimiento sobre la enseñanza. *Desde la Patagonia difundiendo saberes*, 15(26), 8-12.
- Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 8-14.
- Escobar, M. y Grimaldi, V. (2015). El conocimiento matemático como derecho. Nuevas coordenadas políticas para pensar y transformar las prácticas de enseñanza. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Ensenada, Argentina.
- Ferreiro, E. (1994). Diversidad y proceso de alfabetización: de la celebración a la toma de conciencia. *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, 15 (3).
- Grimaldi, V., Broitman, C. y Cobeñas, P. (2021). Capítulo X. La inclusión de alumnos con discapacidad en aulas de Matemática del nivel secundario: su abordaje en la formación docente inicial. En P. Cobeñas, V. Grimaldi, C. Broitman, I. Sancha y M. Escobar

- (coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad* (pp. 511-557). La Plata, EDULP.
- Instituto Nacional de Formación Docente (2017). *Pasaje del conteo al cálculo en 1er grado* [Video]. Ministerio de Educación.
- Lastra, M.A. (2022). *Del espacio de apoyo al aula. Condiciones que favorecen la continuidad de los aprendizajes matemáticos* [Trabajo final integrador de Especialización]. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata.
- Lastra, M.A., Lucero, M.V. y Vallone, M.S. (2021). *La enseñanza de la proporcionalidad desde una mirada inclusiva*. [Trabajo final integrador de Licenciatura no publicado]. Universidad Pedagógica Nacional, Argentina.
- Peltier, M-L (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática*, 15(3), 29-55.
- Sadovsky, P. (2010). Explicar na aula de matemática, um desafio que as crianças enfrentam com prazer. *Escola Da Vila. Centro de Formação. 30 olhares para o futuro*. São Paulo, 116-122.
- Sosa, M. (2021). *Condiciones pedagógicas y didácticas para que todos participen, interactúen y aprendan: Análisis de una propuesta de enseñanza en un 4to grado del nivel primario* [Trabajo final integrador de Especialización]. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de La Plata.
- Universidad Pedagógica Nacional (2019). Patricia Sadovsky en Congreso CDN. [Video] <https://youtu.be/f97etQ3S6IA>
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2 y 3), 133-170 (Traducción).
- Zevenberger, R. (2003). "Ability grouping in Mathematics classrooms: a bourdieuan analysis". *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 5-10.