

# Geometrización de una atmósfera magnética

G.M. Vera Rueda<sup>1</sup> & R.D. Rohrmann<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Ciencias Astronómicas, de la Tierra y del Espacio, CONICET-UNSJ, Argentina

Contacto / vera.gmatias@gmail.com

**Resumen** / Para resolver el transporte de radiación de una atmósfera magnética, la geometrizamos aplicando un modelo de dipolo descentrado. Se analizan diferentes cuadraturas esféricas de manera tal de optimizar el tiempo de ejecución de los algoritmos de cálculo, como así también de reproducir adecuadamente los espectros observados.

**Abstract** / In order to solve the radiative transfer equations in magnetic atmospheres, we geometrize it applying a descentered dipole model. We test different spherical quadratures in such a way we can optimize the algorithms execution times, and also to reproduce accurately the observed spectra.

*Keywords* / white dwarfs — stars: atmospheres — stars: magnetic field

## 1. Introducción

Las enanas blancas magnéticas (MWDs por sus siglas en inglés) son objetos compactos con campos magnéticos intensos ( $B \sim 10^6 - 10^9 G$ ), y su estudio ha sido abordado por diferentes autores desde el año 1970 (Kemp & Swedlund, 1970; Jordan, 1992; Külebi et al., 2009; Potekhin et al., 2014). Actualmente se conocen más de 500 objetos de este tipo, que representan  $\sim 2\%$  del total de enanas blancas detectadas (Kleinman et al., 2013).

El estudio de MWDs se suele abordar desde el cálculo de modelos que resuelven el transporte de radiación para atmósferas magnéticas. Hasta ahora, los modelos existentes se centran en el cálculo de los coeficientes de opacidad pero ignoran los efectos del campo magnético sobre el equilibrio de poblaciones atómicas (Jordan, 1992; Gänsicke et al., 2002; Euchner et al., 2002; Külebi et al., 2009). En general, la geometría del campo se suele describir con un dipolo magnético el cual resulta apropiado para reproducir las características espectrales de las MWDs (Martin & Wickramasinghe, 1984). Tal configuración produce una distribución no uniforme de  $\mathbf{B}$  sobre la superficie de la estrella. Por lo tanto, el cálculo de un espectro requiere integraciones suficientemente finas de la atmósfera.

En este trabajo ensayamos distintas cuadraturas esféricas que toman en cuenta la distribución del campo magnético estelar, y evaluamos su eficiencia en el cálculo de un espectro. Para ello usamos un algoritmo que resuelve el transporte de radiación de una atmósfera magnética bajo una configuración dipolar arbitraria, que considera los efectos del campo sobre el balance químico de la atmósfera (Vera Rueda & Rohrmann, 2020).

## 2. Desarrollo

Consideremos un dipolo magnético de intensidad  $B_d$  ubicado en una posición  $\mathbf{a}$  respecto del baricentro de una estrella de radio  $r$ . Sea un sistema de coordenadas como el que se ilustra en la Fig. 1: cuyo origen está en

el baricentro estelar, el eje  $z$  tiene la dirección del dipolo, mientras que el eje  $x$  se encuentra sobre el plano que contiene al dipolo y a la línea de visión. El dipolo induce un campo magnético  $\mathbf{B}$  sobre un punto  $(x, y, z)$  de la estrella, con componentes

$$\begin{cases} B_x = 3B_d x_s y_s / 2r_s^5, \\ B_y = 3B_d y_s z_s / 2r_s^5, \\ B_z = B_d [3z_s^2 - r_s^2] / 2r_s^5, \end{cases} \quad (1)$$

tal que

$$\mathbf{r}_s = [x_s^2, y_s^2, z_s^2] = [(x - a_x)^2, (y - a_y)^2, (z - a_z)^2].$$

La Fig. 2 muestra la distribución  $\mathbf{B}$  generada por un dipolo de intensidad  $B_d = 10$  MG centrado en el origen. Se puede observar que la intensidad del campo es mayor en la región polar, y disminuye a la mitad en la zona del ecuador. Debido a esta variación significativa, cada punto de la atmósfera emite luz con diferentes patrones espectrales. La Fig. 3, por ejemplo, compara el perfil de la línea  $H\alpha$  para dos parcelas estelares: una ubicada en el ecuador (azul) y otra en el polo (rojo). Se observa una separación en distintas componentes, proporcional a la intensidad del campo. Así, integrar una atmósfera magnética requiere de la selección adecuada de puntos, de tal forma que el cálculo resulte óptimo, tanto en el tiempo de ejecución del algoritmo como en la reproducción de espectros observados.

En este trabajo comparamos tres cuadraturas que discretizan la atmósfera en un conjunto de  $N$  parcelas, tal que el flujo integrado puede ser calculado como

$$F(\lambda) \approx \sum_{i=1}^N w_i F_i(\lambda), \quad (2)$$

con  $F_i(\lambda)$  el flujo emergente de la  $i$ -ésima parcela, y  $w_i$  su peso asociado. Estas cuadraturas corresponden a

- Distribución uniforme *t-design*: la selección de parcelas está representada por un conjunto de  $N$  puntos  $\{\mathbf{x}_i\}$  definidos sobre una esfera unidad, tal que

## Geometrización de una atmósfera magnética

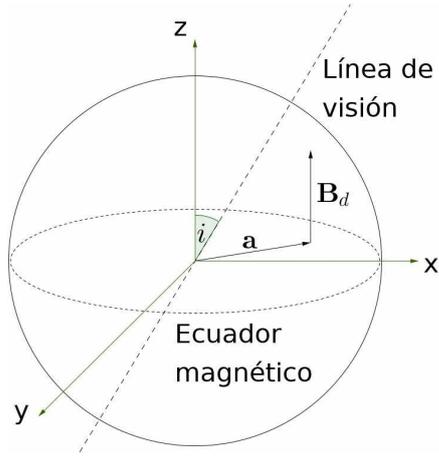


Figura 1: Sistema de referencia estelar que se utiliza para geometrizar la atmósfera.

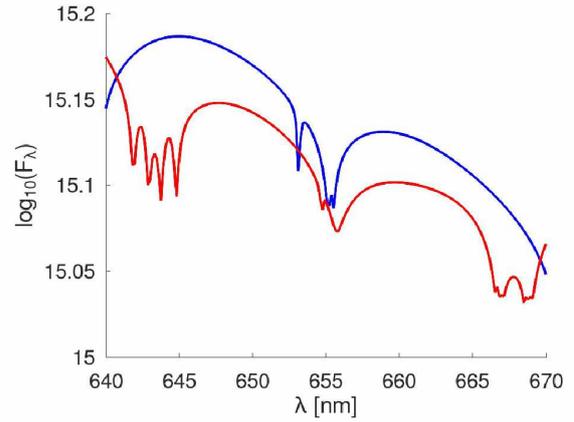


Figura 3: Perfil de la línea  $H\alpha$  que emerge de distintas parcelas una estrella con  $B_d = 10$  MG centrado en el baricentro: de la región polar (rojo) y de la región ecuatorial (azul).

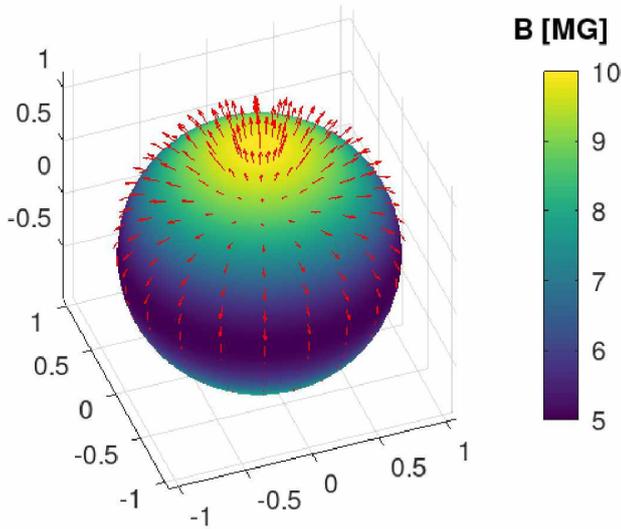


Figura 2: Distribución del campo magnético sobre cada punto de la estrella.

la cuadratura equipada de estos puntos es exacta para todos los armónicos esféricos hasta grado  $t$  (Womersley, 2018), es decir

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{4\pi}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\mathbf{x}_i), \quad \forall f \in \Pi^t,$$

con  $\mathbb{S}^2$  la esfera de radio unidad, y  $\Pi^t$  el subconjunto de armónicos esféricos hasta grado  $t$ .

- Distribución de Gauss: las parcelas se seleccionan a partir de un conjunto de  $N$  puntos  $\{\mathbf{x}_i\} \in \mathbb{S}^2$  tal que la integral sobre la esfera unidad se descompone en dos integrales unidimensionales, en  $\theta$  y en  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} F_\lambda(\mathbf{x}) d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_\lambda(\theta, \phi) d\theta d\phi \\ &\approx \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M w_{jk} F_\lambda(\theta_j, \phi_k), \end{aligned}$$

donde los pesos  $w_{jk}$  se determinan a partir de dos cuadraturas unidimensionales. Para la cuadratura en  $\theta$  se usa una grilla equiespaciada, mientras que para  $\phi$  se usa una grilla de Gauss-Legendre (Beentjes, 2015).

- Cuadratura de Lebedev: La selección de parcelas está representada por un conjunto de puntos  $\{\mathbf{x}_i\} \in \mathbb{S}^2$ , invariante ante el grupo de rotación octaedral con inversión (Lebedev, 1975).

La Fig. 4 muestra una selección de 100 parcelas sobre una estrella magnética con dipolo  $B_d = 10$  MG e inclinación  $i = 45^\circ$  desde la perspectiva del observador, según las tres cuadraturas ensayadas en este trabajo. Se puede notar que la distribución de Gauss (Fig. 4(a)) presenta mayor densidad de puntos en la región polar. En cambio, las distribuciones *t-design* (Fig. 4(b)) y de Lebedev (Fig. 4(c)) son más uniformes, presentando la última un mayor grado de simetría alrededor de la línea de visión.

Para evaluar la eficiencia de las diferentes cuadraturas, simulamos la emisión de luz de la estrella de la Fig. 4 en la región del espectro comprendida por la línea  $H\alpha$ . Para ello analizamos la evolución del error relativo como indicador de la convergencia y también el tiempo total de cómputo, ambas en función del número total de parcelas seleccionadas sobre la atmósfera estelar. La Fig. 5 muestra los resultados obtenidos. Se puede notar que el tiempo de cálculo (panel derecho) es muy similar para las tres cuadraturas comparadas, con apenas un ligero exceso en la distribución *t-design*. En cambio, la convergencia (panel izquierdo) es más rápida para las cuadraturas *t-design* y de Lebedev, las cuales alcanzan valores  $\varepsilon \lesssim 2\%$  a partir de  $N = 50$  y disminuyen gradualmente hasta alcanzar  $\varepsilon \lesssim 1\%$  en  $N \gtrsim 100$ ; por otra parte, la cuadratura de Gauss presenta una convergencia más lenta, alcanzando valores  $\varepsilon \lesssim 1\%$  recién a partir de  $N \approx 200$ .

Finalmente, la Fig. 6 muestra el flujo integrado con cuadratura de Lebedev con  $N = 100$  (línea negra) y los flujos que emergen de diferentes parcelas (líneas azules) de una estrella con  $B_d = 10$  MG apuntando hacia el

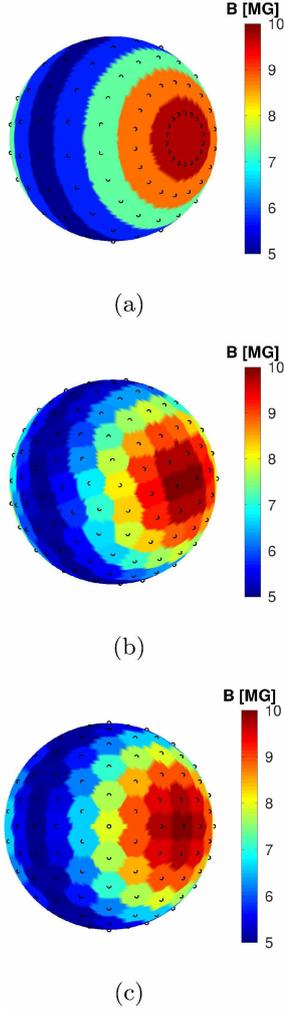


Figura 4: Geometrización de una estrella magnética con  $B_d = 10$  MG e  $i = 45^\circ$  según las distintas cuadraturas ensayadas: (a) cuadratura de Gauss, (b) cuadratura  $t$ -design, y (c) cuadratura de Lebedev.

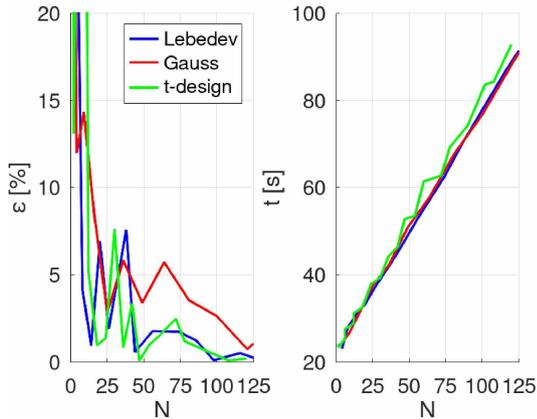


Figura 5: Evolución del error de la cuadratura (izquierda) y tiempo total de cómputo (derecha) para las diferentes distribuciones ensayadas, en función del número de parcelas sobre la atmósfera.

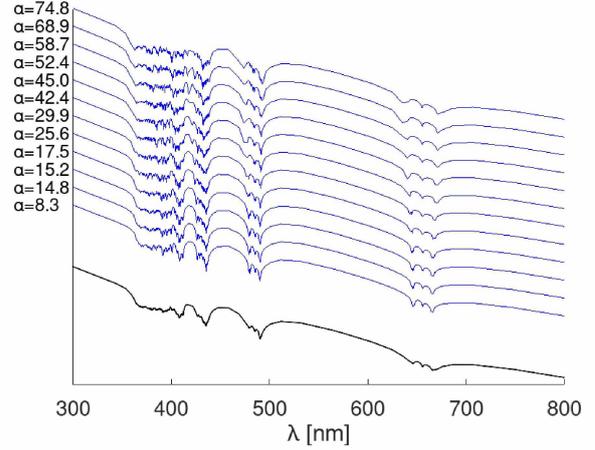


Figura 6: Línea negra: espectro integrado con cuadratura de Lebedev para una estrella con  $B_d = 10$  MG apuntando al observador. Líneas azules: espectros de diferentes parcelas con latitud  $\alpha$  (desplazados verticalmente para su mejor visualización).

observador. Se aclara que, para esta configuración particular, hay simetría de  $\mathbf{B}$  respecto de la línea de visión y por lo tanto no hay variación con la longitud.

### 3. Conclusiones

Los resultados del trabajo indican que la integración de una atmósfera magnética es más adecuada cuando se aplican las cuadraturas de Lebedev o  $t$ -design, ya que presentan mayor uniformidad en la distribución de parcelas respecto de la línea de visión y por lo tanto convergen más rápido que una cuadratura de Gauss. Además, encontramos que una selección de  $N \sim 100$  parcelas permite calcular la emisión de luz con precisión razonable. Por lo tanto, una geometrización adecuada de la atmósfera magnética ayuda a optimizar la evaluación del algoritmo numérico reduciendo su tiempo de ejecución.

### Referencias

- Beentjes C., 2015, Technical Report, Oxford University
- Euchner F., et al., 2002, A&A, 390, 633
- Gänsicke B.T., Euchner F., Jordan S., 2002, A&A, 394, 957
- Jordan S., 1992, A&A, 265, 570
- Kemp J.C., Swedlund J.B., 1970, ApJL, 162, L67
- Kleinman S.J., et al., 2013, ApJS, 204, 5
- Külebi B., et al., 2009, A&A, 506, 1341
- Lebedev V., 1975, USSR-CMAMP, 15, 44
- Martin B., Wickramasinghe D.T., 1984, MNRAS, 206, 407
- Potekhin A.Y., Chabrier G., Ho W.C.G., 2014, A&A, 572, A69
- Vera Rueda M., Rohrmann R.D., 2020, A&A, 635, A180
- Womersley R., 2018, *Efficient Spherical Designs with Good Geometric Properties*, Springer