CUÁNDO Y CUÁNTO: OPTIMIZANDO LAS DECISIONES DE INVERSIÓN EN CONTEXTOS DE CERTIDUMBRE

por

Claudia Nerina Botteon

Universidad Nacional de Cuyo

Agosto 2005

CUÁNDO Y CUÁNTO: OPTIMIZANDO LAS DECISIONES DE INVERSIÓN EN CONTEXTOS DE CERTIDUMBRE

Por Claudia Nerina Botteon

A. Introducción

Al evaluar un proyecto de inversión se hace alusión permanente a la palabra “optimización”. El armado del flujo de beneficios y costos que permite decidir respecto de su conveniencia, resulta de efectuar la diferencia entre los flujos de caja correspondientes a las situaciones con y sin proyecto optimizadas.

La optimización de la situación sin proyecto implica que para cada factor productivo, se deben computar los ingresos y egresos efectivos que corresponden al mejor curso de acción a seguir con él fuera del proyecto. Así, queda automáticamente incorporado su costo de oportunidad.

El proceso de optimizar la situación con proyecto permite seguir el curso de acción más conveniente para cada factor productivo si éste se ejecuta.

La optimización a la que se hace referencia en este trabajo se diferencia de lo ya considerado en el sentido que, en el marco de un proyecto cuyo flujo ya fue optimizado, se analiza si el momento de inicio propuesto es el más conveniente, si el tamaño de la inversión elegido es el más adecuado, si es el momento de liquidación considerado es el más apropiado, etc.

Es por ello que se desarrollan los siguientes conceptos:

- Momento óptimo de inicio.
- Tamaño óptimo o nivel óptimo de inversión inicial.
- Momento óptimo de liquidación de una inversión y ciclo óptimo de inversión y/o producción.

En cada uno de estos temas se indican y se explican conceptualmente los criterios que deben utilizarse para llegar a la correcta decisión. Dada la complejidad de esta temática, sólo se aborda en un contexto de certidumbre.

B. Momento óptimo de inicio

Los indicadores que se calculan a partir del flujo de beneficios y costos de un proyecto de inversión permiten determinar si su ejecución es conveniente. Sin embargo, en algunas decisiones de inversión es necesario profundizar ese análisis para determinar si el momento elegido para iniciarla es el más adecuado. Puede ocurrir que, siendo conveniente ejecutar un proyecto hoy, sea mejor postergar su inicio por uno o más períodos. También puede suceder que un proyecto no sea conveniente hoy y sí lo sea dentro de algunos períodos.

Hay ciertos elementos que advierten al evaluador respecto de la necesidad de analizar cuándo se debe iniciar un proyecto de inversión, como por ejemplo:

- Las variaciones en el costo de la inversión, según el momento de su ejecución.
- La evolución futura de los beneficios y costos del proyecto.
- Los cambios esperados en la tasa de descuento pertinente.

Para determinar si es conveniente o no postergar el inicio de un proyecto se deben comparar los beneficios con los costos que implica esa posposición. En efecto, si el valor actual de esos beneficios es mayor que el valor actual de esos costos, entonces conviene postergar el inicio.

En primer término, se analizan algunos casos en los cuales se considera que los beneficios netos son crecientes en el tiempo. Este crecimiento puede depender del tiempo calendario y/o del momento en que se inicia el proyecto. En todos se supone que la tasa de descuento se mantiene constante a lo largo del período de evaluación.

En segundo término, se considera un proyecto que presenta beneficios netos constantes a lo largo del tiempo, pero se analiza la situación en que la tasa de descuento es variable.

1. Los beneficios netos crecen sólo como función del tiempo calendario

Se trata de proyectos en los que los beneficios netos crecen sólo en función del tiempo calendario. Esto puede ocurrir por ejemplo en los siguientes tipos de proyectos:

- Proyecto de construcción de una escuela: en efecto, sus beneficios netos no dependen del momento en que se ejecuta el proyecto, porque la existencia de una escuela no induce a quienes no se hubieran educado a que se eduquen. Los beneficios netos dependen del número de personas que desean educarse, y éstas van aumentando con el tiempo.
- Proyecto de provisión de agua potable: donde el número de usuarios crece en función del tiempo y, como consecuencia, los beneficios netos también van incrementándose.[1]
- Proyectos viales y de infraestructura de transporte: donde los beneficios netos dependen de la disminución en los costos de viaje (constituido, en términos generales, por el valor del tiempo de las personas y por el costo de operación y de mantenimiento de los vehículos), siendo el número de viajes creciente en el tiempo. [2]

Para facilitar la explicación del tema, en primer término se expone un caso sencillo donde la inversión tiene una duración de infinitos períodos y cuyo costo no es función del momento de inicio. Posteriormente, sobre la base de este mismo caso, se van analizando otras variantes.

Caso 1: La inversión dura infinitos años[3] y no depende del momento de inicio del proyecto

Supóngase que se está evaluando un proyecto de reconstrucción de una ruta cuya calzada muestra cierto grado de deterioro. La inversión total requerida es de $ 1.200.000, la fase de inversión es instantánea (se ejecuta toda en un mismo momento) y dura infinitos años. El monto de inversión es independiente del momento en que se comience a ejecutar el proyecto. A los efectos de simplificar, se considera que no existen costos de mantenimiento.

Los beneficios netos vencidos correspondientes al primer año calendario son de $ 110.000. En efecto, como consecuencia de la reconstrucción, se observa una disminución en los costos de los viajes de esa ruta (debidos a la liberación de tiempo de quienes la usan y a la disminución de los gastos de operación y mantenimiento de los vehículos que transitan por ella). Se estima que los beneficios netos aumentarán a razón de un 2% anual debido al crecimiento vehicular esperado y que son independientes del momento en que se ejecute la inversión.

Si la tasa de descuento es del 10% anual, ¿cuál es el curso de acción más conveniente?

El VAN de iniciar hoy la reconstrucción es igual a $ 175.000, lo que implica que es conveniente.

Dado que los beneficios netos asociados al proyecto son crecientes en el tiempo, resta ahora considerar si iniciarlo hoy es lo más conveniente. Es decir, aún cuando el VAN haya resultado positivo, es necesario profundizar el análisis respecto del momento óptimo de inicio.[4]

---

[1] En el caso de proyectos de provisión de agua potable, los beneficios netos también pueden depender del momento en que se ejecuta el proyecto. Esto ocurre cuando no todos los usuarios se conectan inmediatamente al sistema. Más adelante, se considera este aspecto.

[2] Luego se consideran otros aspectos relativos al crecimiento de los beneficios de este tipo de proyectos.

[3] Este supuesto es un poco “fuerte” ya que las inversiones, aunque duren un número de períodos grande, no tienen una vida útil infinita. Coloma Ferrá en “Consideraciones acerca del momento óptimo de iniciar una inversión”, muestra cómo el considerar infinitos períodos en proyectos cuya duración es de un número grande de períodos, puede conducir a errores respecto del momento óptimo de inicio.

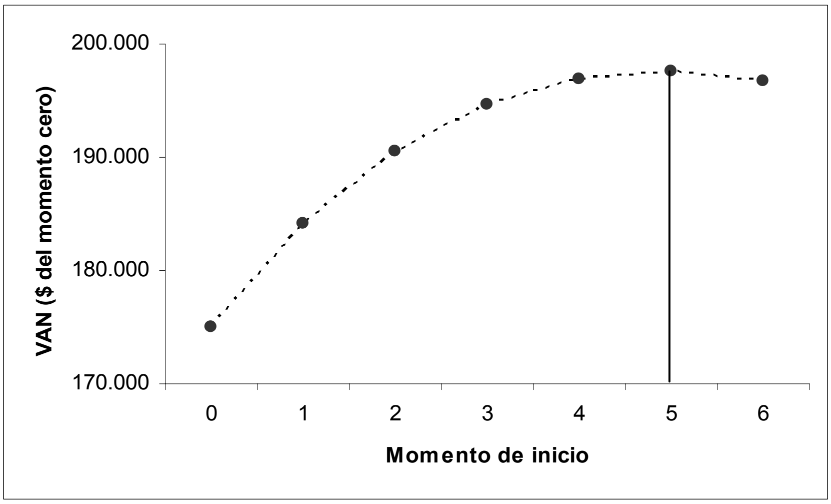
[4] Se puede comprobar que si los beneficios netos son constantes a través del tiempo, la decisión se circunscribe sólo a “ejecutar el proyecto ahora o no ejecutarlo nunca”. En efecto, si el proyecto resulta conveniente, lo mejor es ejecutarlo hoy. De todas formas, más adelante se muestra que esta conclusión es válida sólo si se considera que la tasa de descuento se mantiene constante o crece en el tiempo.

Una de las formas de optimizar el momento de inicio es maximizar el VAN, criterio adecuado para comparar alternativas mutuamente excluyentes entre sí y que duran infinitos períodos.

Para el cálculo de los VAN es necesario plantear previamente los flujos anuales de beneficios y costos correspondientes a cada una de las alternativas de proyecto, las cuales responden a distintos momentos de inicio. Por ejemplo, en el siguiente cuadro se plantean algunos de ellos:

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	4	5
Inicio momento 0	- 1.200.000	110.000	112.200	114.444	116.732,88	...
Inicio momento 1		- 1.200.000	112.200	114.444	116.732,88	...

En el siguiente gráfico se incorporan los VAN de las alternativas de proyectos[5], según sea su momento de inicio. Están expresados a valores del momento 0, lo que los hace comparables:



El momento óptimo de inicio es el final del quinto año y el VAN de esta opción es $ 197.521,97.

Hay una forma alternativa y simple de llegar al mismo resultado. Esta consiste en ir comparando lo que se gana con lo que se pierde por postergar el inicio del proyecto durante un período, de manera de ir evaluando las posposiciones de inicio en forma gradual.

En primer lugar, se determina cuánto se gana y cuánto se pierde por postergar el inicio desde el momento 0 al momento 1 del flujo anual. Debido a esa posposición, ocurre:

- Un beneficio de $ 120.000 en concepto de intereses anuales generados por la postergación de la inversión, expresado al momento 1 del flujo anual.
- Un costo de $ 110.000 debido a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año (beneficio neto del momento 1).

Como ambos están expresados en un mismo instante, se pueden sumar algebraicamente. Por postergar el inicio desde 0 a 1, se obtiene un beneficio neto positivo e igual a $ 10.000 del momento 1. Si ese beneficio se expresa en el momento 0, resulta igual a $ 9.090,91 y coincide con la diferencia entre los VAN de las opciones de iniciar en 1 y 0 respectivamente.

Por iniciar dentro de dos años en lugar de hacerlo dentro de uno, ocurre:

- Un beneficio de $ 120.000 en términos de intereses, expresado al momento 2.
- Un costo de $ 112.200 debido a la pérdida del beneficio neto del momento 2.

Nuevamente se concluye respecto de la conveniencia de esa postergación.

Sobre la base de los supuestos del caso, el beneficio de postergar es constante ($ 120.000) y el costo de hacerlo es creciente. Esto implica que en algún momento futuro dejará de convenir

[5] Los VAN se calculan con la fórmula de valor actual de un plan de cuotas crecientes a una tasa dada.

postergar el inicio del proyecto. A los efectos de simplificar la presentación no se incluyen las tres siguientes postergaciones anuales, ya que en todas ellas se concluye respecto de la conveniencia de iniciar el proyecto un año después. Es decir, se determina que iniciar al final del quinto año es mejor que en cualquier otro momento precedente.

El iniciar en el momento 6, en lugar de hacerlo en el momento 5, da lugar a:

- Un beneficio de $ 120.000 en términos de intereses, expresado al momento 6.
- Un costo de $ 121.448,89 debido a la pérdida del beneficio neto del sexto año (momento 6).

Ambos conceptos están expresados en el momento 6, por lo que se concluye respecto de la no conveniencia de la postergación. Esto implica que el momento óptimo de inicio es el 5.

En este contexto de beneficios crecientes, aún cuando el VAN de iniciar hoy resulte negativo, es necesario evaluar si conviene iniciar el proyecto en el futuro. Si en el caso analizado, la inversión inicial es de $ 1.480.000 (en lugar de $ 1.200.000), el VAN correspondiente a la alternativa de proyecto de iniciar en el momento 0 resulta negativo. No por ello hay que abandonar definitivamente el proyecto. Los VAN correspondientes a iniciar en los momentos 1, 2 y 3 también son negativos, a partir del momento 4 de inicio comienza a ser positivo y el VAN máximo ($ 88.711,26) se alcanza si se ejecuta dentro de 15 años (momento 15).[6]

El procedimiento seguido compara beneficios con costos relevantes de pasar de un momento de inicio a otro. Conviene postergar el inicio del proyecto siempre y cuando los beneficios de hacerlo superen a los costos que esto implica. Cuando estos conceptos se igualan, en principio[7], significa que se ha alcanzado el VAN máximo, y por lo tanto, que se ha determinado el momento de inicio óptimo. Este criterio, en términos matemáticos, se conoce como la condición de primer orden para la maximización de una variable dependiente (en este caso: VAN) en función de una independiente (en este caso: momento de inicio).

Es también posible se puede conformar una función que reúna ambos conceptos. En este caso, el momento óptimo de inicio es aquel para el cual se cumple la siguiente ecuación[8]:

$$BN_{(j-1)\to j} = 0{,}10 \cdot 1.200.000 - 110.000 \cdot (1{,}02)^{j-1} = 0\,,$$

donde, se considera la postergación del inicio desde el momento (j-1) a j. Tal como ha sido conformada la fórmula, el momento óptimo de inicio está comprendido entre (j-1) y j resultantes (4,394 y 5,394 respectivamente). El único número entero que se encuentra ubicado en ese rango es el 5, por lo que éste constituye el momento óptimo de inicio.

Sin embargo, este resultado es insuficiente para corroborar que se haya alcanzado un VAN máximo. Una vez que se obtiene, se debe calcular el VAN correspondiente a la opción elegida y los VAN de las alternativas de proyecto cuyos momentos de inicio sean los inmediatamente inferior y superior al determinado. Si previamente no se hubiesen calculado los VAN, sería necesario determinar el VAN de las alternativas de iniciar el proyecto en los momentos 4, 5 y 6. De esta forma se asegura que se haya encontrado la opción que maximice el VAN.

Fase de inversión que abarca más de un período

Es interesante analizar el momento óptimo de inicio cuando el proyecto tiene una fase de inversión que abarca más de un período. Considérese el Caso 1 con las siguientes diferencias:

- La fase de inversión es de dos años (en lugar de inversión instantánea).
- La inversión a ejecutar es de $ 800.000 al comienzo del primer año y de $ 400.000 al comienzo del segundo año (en lugar de $ 1.200.000 en el momento 0).

Algunos de los flujos de beneficios y costos correspondientes a alternativas de inicio son:

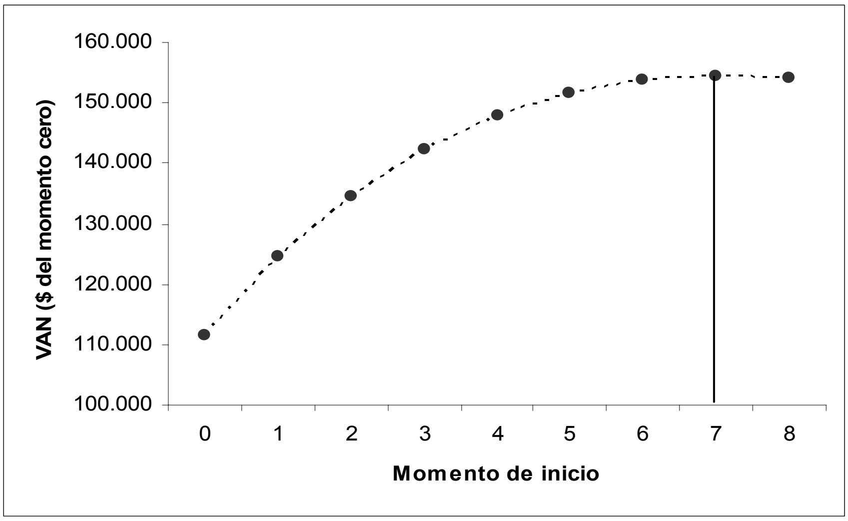
---

[6] Como la inversión es constante a través del tiempo y dura para siempre y los beneficios son crecientes, en algún momento el proyecto comenzará a ser conveniente.
[7] Con ello, sólo se asegura que se cumple la condición de primer orden para la maximización del VAN.
[8] El desarrollo de esta ecuación se presenta en el Apéndice matemático: fórmula (2).

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	4	5
Inicio momento 0	- 800.000	- 400.000	112.200	114.444	116.732,88	...
Inicio momento 1		- 800.000	- 400.000	114.444	116.732,88	...

Nótese que el primer beneficio de la alternativa de iniciar hoy es de $ 112.200, lo que refleja que el beneficio del primer año calendario ($ 110.000) no puede ser logrado por este proyecto.

Los VAN resultantes, expresados a valores del momento 0, se exponen en el siguiente gráfico:



El momento óptimo para iniciar el proyecto es el 7 y su VAN es igual a $ 154.428,71.

Por posponer el inicio desde el momento 0 al momento 1 ocurre:

- Un beneficio de $ 80.000 debido a los intereses anuales originados en la postergación de la primera etapa de inversión, expresado al momento 1 del flujo anual.
- Un beneficio de $ 40.000 debido a los intereses anuales originados en la postergación de la segunda etapa de inversión, expresado al momento 2 del flujo anual.
- Un costo de $ 112.200 debido a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año de operación (beneficio neto del momento 2).

Si todos ellos se expresan en el momento 2, el beneficio neto atribuible a la postergación es positivo ($ 15.800). Se concluye que conviene postergar el inicio del proyecto durante ese año. De seguir aplicando este proceso se llega a la misma conclusión obtenida con el VAN máximo.

En este caso, la ecuación que permite aproximar el momento óptimo de inicio es:

$$BN_{(j-1)\to j} = (0{,}10 \cdot 800.000) \cdot (1{,}10) + (0{,}10 \cdot 400.000) - 112.200 \cdot (1{,}02)^{j-1} = 0,$$

donde el j resultante es 7,653, lo que implica que el momento óptimo de inicio es el 7. Si no se conociesen los VAN, sería necesario calcularlo para los momentos de inicio 6, 7 y 8.

Caso 2: La inversión dura infinitos años y es función del momento en que se inicia

Supóngase la misma información del Caso 1 de página 2 con la única diferencia de que la inversión requerida es de $ 1.200.000, si se inicia hoy, y aumenta a razón del 0,5% por año.

Los flujos anuales correspondientes a algunas de las alternativas de inicio del proyecto son:

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	4	…
Inicio momento 0	- 1.200.000	110.000	112.200	114.444	116.732,88	...
Inicio momento 1		- 1.206.000	112.200	114.444	116.732,88	...
Inicio momento 2			- 1.212.030	114.444	116.732,88	...

Los VAN de las alternativas de proyectos, expresados a valores del momento 0, son:

Alternativa de proyecto	VAN(10%)
Inicio en el momento 0	175.000,00
Inicio en el momento 1	178.636,36
Inicio en el momento 2	180.595,04
Inicio en el momento 3	**181.120,10**
Inicio en el momento 4	180.427,31

Esto permite determinar que el momento 3 es el óptimo para iniciar el proyecto. Como puede apreciarse este momento es menor que el resultante en el Caso 1. Esto se debe a que en este caso la postergación del inicio conlleva asociado un aumento en el costo de inversión.

Cabe notar que si los costos de inversión fuesen decrecientes, el cambio en su valor actúa como un beneficio de la postergación. En efecto, hay una razón más para postergar el inicio.

Se analiza en lo que sigue cuánto se gana y se pierde por postergar el inicio un año.

Por postergar el inicio desde el momento 0 al momento 1, ocurre:

- Un beneficio de $ 120.000 debido a los intereses anuales generados por el dinero no invertido en el momento 0 ($ 1.200.000), expresados en el momento 1 del flujo anual.
- Un costo de $ 110.000 debido a la pérdida del beneficio neto del momento 1.
- Un costo de $ 6.000 debido al incremento del costo de la inversión a ejecutar en el momento 1 con relación al correspondiente al momento 0 ($ 1.206.000 - $ 1.200.000).

Dado que el beneficio neto de postergar resultante es positivo, se concluye respecto de la conveniencia de la postergación del inicio del proyecto durante ese año.

El iniciar en el momento 2 en lugar de hacerlo en el momento 1, da lugar a:

- Un beneficio de $ 120.600 en concepto de intereses anuales generados por el dinero no invertido en el momento 1 ($ 1.206.000), expresado al momento 2.
- Un costo de $ 112.200 debido a la pérdida del beneficio neto del momento 2.
- Un costo de $ 6.030 debido al incremento del costo de la inversión a ejecutar en el momento 2 con relación al correspondiente al momento 1 ($ 1.212.030 - $ 1.206.000).

Nuevamente se concluye respecto de la conveniencia de la postergación.

De seguir con este proceso se llega a la conclusión de que el momento óptimo es el 3. En este caso, el momento óptimo de inicio es aquel para el cual se cumple la siguiente ecuación[9]:

$$BN_{(j-1)\to j} = 0{,}10 \cdot 1.200.000 \cdot (1{,}005)^{j-1} - 110.000 \cdot (1{,}02)^{j-1} - 1.200.000 \cdot \left[(1{,}005)^{j} - (1{,}005)^{j-1}\right] = 0\,,$$

donde el j resultante es 3,411. Nuevamente es necesario calcular los VAN de las alternativas de iniciar en los momentos 2, 3 y 4, de manera de determinar exactamente el momento óptimo.

Caso 3: La inversión dura un número finito de años y no depende del momento de inicio

Supóngase que se está evaluando el proyecto del Caso 1, siendo la única diferencia que la inversión dura sólo 30 años. Por simplicidad, se considera que su valor residual es cero.

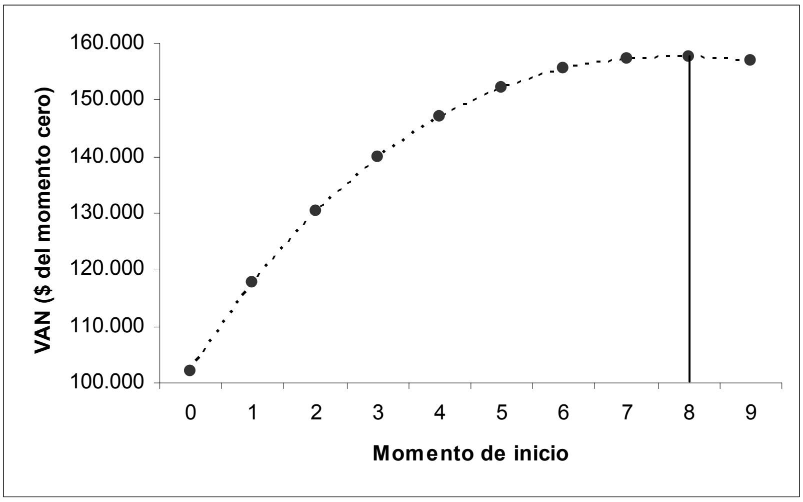
Para optimizar el momento de inicio sigue siendo correcto maximizar el VAN. Sin embargo, para que los VAN sean los adecuados para la comparación de alternativas mutuamente excluyentes entre sí y con inversión repetible, es necesario considerar un horizonte de evaluación de infinitos años. Así quedan automáticamente incluidas las reinversiones futuras.

En el siguiente cuadro se plantea los 31 primeros años correspondientes a los flujos a infinito de las alternativas de iniciar hoy y dentro de un año el proyecto:

[9] El desarrollo de esta expresión se presenta en el Apéndice matemático: fórmula (1).

Alternativa de proyecto	0	1	2	...	30	31
Inicio momento 0						
Inversión	- 1.200.000	0	0	0	- 1.200.000,00	0,00
Beneficios netos		110.000	112.200	...	195.342,92	199.249,77
Inicio momento 1						
Inversión		- 1.200.000	0	0	0,00	- 1.200.000,00
Beneficios netos			112.200	...	195.342,92	199.249,77

A continuación se grafican los VAN, expresados al momento 0, de las alternativas de inicio:



En este caso, el momento 8 es el óptimo para iniciar el proyecto y su VAN es de $ 157.717,13.

Por postergar el inicio desde el momento 0 al momento 1 del flujo anual, ocurre:

- Un beneficio de $ 120.000 debido a los intereses obtenidos sobre las inversiones no realizadas en los momentos 0, 30, etc.; los cuales están expresados respectivamente en los momentos 1, 31, etc. del flujo anual.
- Un costo de $ 110.000 debido a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año.

Para la correcta comparación es necesario expresar todos estos conceptos en un mismo momento en el tiempo. Como el valor del conjunto de intereses, al momento 1, es igual a $127.295,10[10], el beneficio neto de postergar el inicio durante ese año es positivo. De seguir con este procedimiento se llega a la conclusión ya obtenida.

En este caso, la ecuación que permite calcular el momento óptimo de inicio es[11]:

$$BN_{(j-1)\rightarrow j} = \frac{0{,}10 \cdot 1.200.000}{16{,}4494} \cdot (17{,}4494) - 110.000 \cdot (1{,}02)^{j-1} = 0\,,$$

donde 16,4494 (o 1.644,94%) es la tasa de 30 años (equivalente a la tasa del 10% anual). El j resultante es 8,374 y se puede verificar que el momento óptimo exacto es el 8.

2. Los beneficios netos crecen en función del momento en que se inicia el proyecto

Se trata de proyectos en los que los beneficios netos son completamente dependientes del momento de inicio del proyecto, es decir, son función de la edad del proyecto. Esto puede ocurrir por ejemplo en los siguientes casos:

[10] Este resultado se obtiene aplicando la fórmula de valor actual de un conjunto de cuotas perpetuas constantes, en la cual la tasa a utilizar es la correspondiente a un período de 30 años.
[11] El desarrollo de esta expresión se presenta en el Apéndice matemático: fórmula (3).

- Proyectos para extender redes eléctricas en zonas rurales: en efecto, al proveer conexiones eléctricas a hogares que no las tienen se pueden prever beneficios netos crecientes en el tiempo, ya que a medida que pasan los años los consumos por hogares aumentan. Estos aumentos se originan en que las familias comienzan a adquirir aparatos eléctricos en forma paulatina. Normalmente, en zonas marginales, las familias en el año de conexión sólo utilizan la energía para iluminarse. En los años siguientes van adquiriendo algunos electrodomésticos como la heladera y el televisor. Con el correr del tiempo van completando este tipo de equipamiento. Las familias no comienzan a equiparse hasta que no se inicia el proyecto. Dado que la compra de equipos depende del año de conexión, la postergación del proyecto, provocará una posposición del crecimiento de los beneficios.
- Proyectos viales y de infraestructura de transporte: como se indicó precedentemente, los beneficios netos atribuibles a estos proyectos dependen de la disminución en los costos de viaje y del número de los vehículos que crece con el tiempo. Sin embargo, puede suceder que el proyecto genere algunos beneficios netos que dependan del momento en que se inicie el proyecto, como el cambio en el valor de las tierras en la zona de influencia.

Para facilitar la explicación se muestran ejemplos donde la inversión es instantánea, dura infinitos períodos y que no es función del momento de inicio.

Con relación a los beneficios netos se contemplan tres tipos de proyectos:

- Aquellos en que los beneficios netos crecen sólo en función del momento en que se inicia.
- Aquellos que presentan algunos beneficios netos que crecen en función del tiempo calendario y otros que aumentan atendiendo al momento en que se inicia el proyecto.
- Aquellos cuyos beneficios dependen del momento en que se inicia y del tiempo calendario.

Caso 4: Los beneficios netos crecen sólo en función del momento de inicio del proyecto

Supóngase que se está evaluando un proyecto de electrificación de una zona rural. La inversión total requerida por el proyecto es de $ 250.000, la fase de inversión es instantánea y dura infinitos años. Este monto es independiente del momento en que se inicie el proyecto.

Con relación a los beneficios netos anuales se considera lo siguiente:

- El beneficio neto anual vencido por familia correspondiente al primer año que se conectan al sistema eléctrico es de $ 300. Este beneficio crece a razón de un 2% anual, debido a la incorporación gradual de artefactos eléctricos por parte de las familias beneficiadas.
- El número de familias beneficiadas por el proyecto es 100 (constante a lo largo del tiempo).

Si la tasa de descuento es del 10% anual, ¿cuál es el curso de acción más conveniente?

Como el número de familias se mantiene constante, los beneficios netos se incrementan sólo en función del momento en que se ejecute la inversión.

El VAN de iniciar hoy el proyecto es igual a $ 125.000, lo que implica que es conveniente.

Si se plantean los flujos correspondientes a los distintos momentos de inicio, se ve que su estructura es idéntica pero se encuentran desplazados un año. Esto implica que, si el proyecto es conveniente, lo óptimo es ejecutarlo hoy. Si no lo es, lo mejor es no ejecutarlo nunca.[12]

Caso 5: Algunos beneficios netos crecen en función del tiempo calendario y otros del momento en que se inicia el proyecto

Supóngase que se está evaluando la pavimentación de un camino que hoy está enripiado. La inversión total requerida por el proyecto es de $ 1.200.000, la fase de inversión es instantánea y dura infinitos años. Este monto a invertir es independiente del momento en que se comience a ejecutar el proyecto. Por simplicidad, se considera que no existen costos de mantenimiento.

[12] Esta afirmación es “fuerte”, en el sentido que supone que las situaciones futuras se mantendrán como en la actualidad. Lo conveniente es revisar este proyecto en el futuro.

Los beneficios netos vencidos del proyecto se dividen como sigue:

- Aquellos que crecen en función del tiempo calendario, debido a la disminución en los costos de viaje de los vehículos, cuyo número crece con el tiempo a razón del 2% anual. Los beneficios netos vencidos correspondientes al primer año calendario son de $ 110.000.
- Aquellos que crecen en función del momento en que se ejecute la inversión a razón del 0,5% anual, debido al aumento en el valor de las producciones de la zona[13]. Los beneficios netos vencidos correspondientes al primer año de ejecución son de $ 5.000.[14]

Si la tasa de descuento es del 10% anual, ¿cuál es el curso de acción más conveniente?

Los flujos de las alternativas de iniciar hoy y de iniciar dentro de un año el proyecto son:

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	….
Inicio momento 0					
Inversión	- 1.200.000	0	0	0,00	…
Beneficios disminución costos viaje		110.000	112.200	114.444,00	…
Beneficios aumento valor producción		5.000	5.025	5.050,13	…
Inicio momento 1					
Inversión		- 1.200.000	0	0,00	…
Beneficios disminución costos viaje			112.200	114.444,00	…
Beneficios aumento valor producción			5.000	5.025,00	…

A continuación se presentan los VAN, expresados al momento 0:

Alternativa de proyecto	VAN(10%)
Inicio en el momento 0	227.631,58
Inicio en el momento 1	231.937,80
Inicio en el momento 2	234.034,36
Inicio en el momento 3	**234.254,38**
Inicio en el momento 4	232.891,06

El momento 3 es el óptimo para iniciar el proyecto. La existencia del segundo tipo de beneficios actúa como un costo de postergar el inicio del proyecto.

Por postergar el inicio durante el primer año de evaluación (desde el momento 0 al 1), ocurre:

- Un beneficio de $ 120.000 debido a los intereses obtenidos sobre la inversión no realizada.
- Un costo de $ 110.000 debido a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año.
- Un costo de $ 5.263,16, al momento 1, el cual refleja la pérdida de la postergación por un año del flujo de beneficios netos asociados al aumento del valor de la producción. Este es igual a los intereses calculados sobre el valor actual de esos beneficios (0,1 · 52,631,58).

La ecuación relevante es: $BN_{(j-1)\rightarrow j} = 0{,}10 \cdot 1.200.000 - 110.000 \cdot (1{,}02)^{j-1} - 5.263{,}16 = 0$.

Caso 6: Los beneficios netos crecen en función del tiempo y del momento de inicio

Supóngase que se está evaluando el mismo proyecto de electrificación de una zona rural del Caso 4 de página 8. Las diferencias son las siguientes:

- El beneficio neto anual vencido por familia correspondiente al primer año que se conectan al sistema eléctrico es de $ 190 (en vez de $ 300). Se sigue suponiendo que este beneficio crece a razón de un 2% anual, debido a la incorporación gradual de artefactos eléctricos.

---

[13] Estos beneficios suelen crecer a medida que se incorporen las tierras incultas de la zona del proyecto en el circuito productivo. Sin embargo, seguramente en algún momento este crecimiento se detendrá (porque todas las tierras aledañas han sido cultivadas). Por simplicidad se supone que nunca se detiene.

[14] Si estos beneficios no existiesen, esta situación se reduce a la del Caso 1 de página 2.

- El número de familias que el proyecto beneficia es 100, si se inicia hoy, y aumenta a razón del 1% anual (en lugar de permanecer constante).

Como puede apreciarse, en este caso, los beneficios aumentan por dos motivos: debido a que el beneficio por familia crece en función del momento de inicio y al aumento de las familias.

A continuación se presenta el flujo de beneficios y costos de la alternativa de iniciar hoy:

Concepto	0	1	2	3	4	…
Inversión	- 250.000					…
Beneficios de 100 familias iniciales		19.000	19.380	19.767,6	20.162,95	…
Beneficios de las familias que se incorporan en el segundo año.			190	193,8	197,68	…
Beneficios de las familias que se incorporan en el tercer año.				191,9	195,74	…
…						

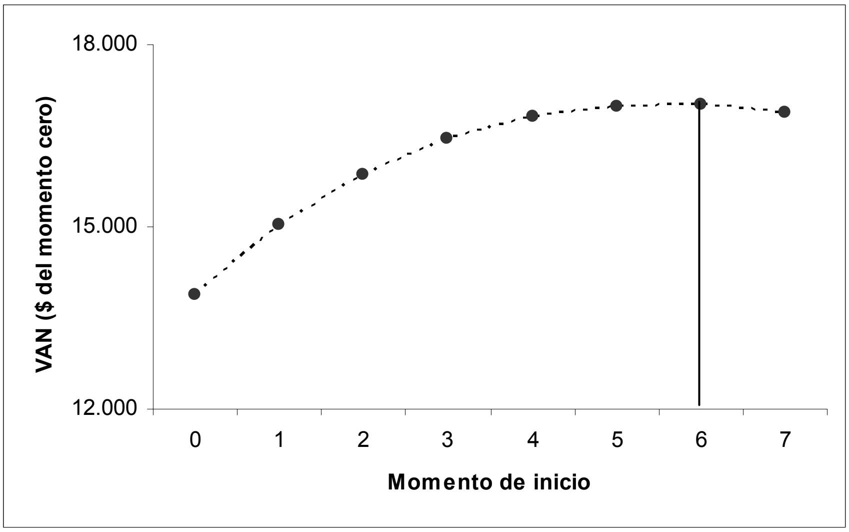
El VAN de este flujo es igual a $ 13.888,89.[15]

El flujo de beneficios y costos de la alternativa de iniciar dentro de un año:

Concepto	0	1	2	3	4	…
Inversión		- 250.000				…
Beneficios de 101 familias iniciales			19.190	19.573,8	19.965,28	…
Beneficios de las familias que se incorporan en el segundo año.				191,9	195,74	…
Beneficios de las familias que se incorporan en el tercer año.					193,82	…
…						

Si el proyecto se inicia en 1, el número inicial de familias es de 101 (100 familias originales más el incremento del 1%). El VAN de este flujo, expresado en 0, es igual a $ 15.025,25.[16]

El siguiente gráfico resume los VAN, expresados a valores del momento 0.



El momento 6 es el óptimo para iniciar el proyecto (VAN = $ 17.003,86, al momento 0).[17]

---

[15] La fórmula (5) del Apéndice matemático es la que permite obtener este resultado.
[16] La fórmula (7) del Apéndice matemático es la que permite obtener este resultado.
[17] En este caso particular es más complicado llegar al resultado analizando cuánto se gana y cuánto se pierde por postergar el inicio. Lo mismo sucede al querer plantear una ecuación que permita aproximar el momento óptimo de inicio. En el Apéndice matemático se deriva esta ecuación: fórmula (8).

3. **Los beneficios netos son constantes a través del tiempo, pero la tasa de descuento es decreciente**

A los efectos de aislar la influencia de la tasa de descuento, se considera que los beneficios del proyecto son constantes a través del tiempo.[18]

Caso 7: La tasa de descuento es decreciente

Considérese un proyecto que consiste en el mejoramiento de un camino, en una zona netamente rural, que hoy está enripiado. La inversión total requerida por el proyecto es de $170.000 hoy y dura infinitos años. Este monto es independiente del momento en que se inicie el proyecto. Por simplicidad, se considera que no existen costos de mantenimiento.

Los beneficios netos vencidos son constantes e iguales a $ 25.000 por año. Estos se deben básicamente al aumento del valor de las producciones de la zona y a la disminución en los costos de viajes realizados por él. Que estos beneficios sean constantes a través del tiempo implica suponer que el número de vehículos que transitará por él no aumentará (hoy son los dueños de las tierras los que lo recorren y serán los que seguirán haciéndolo en el futuro) y que las tierras actuales están totalmente cultivadas (es decir, no existen en la zona hectáreas incultas que puedan irse incorporando a la producción agrícola a raíz del proyecto).

Las tasas de descuento anuales relevantes son decrecientes y se estiman en el orden del 18%, 16%, 14%, 12% y 10% para los primeros cinco años respectivamente. A partir del sexto año se mantiene al nivel del 10% anual. ¿Cuál es el curso de acción más conveniente?

Los flujos de beneficios y costos correspondientes a las alternativas de proyecto con distintos momentos de inicio son idénticos, pero se encuentran desplazados un período:

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	4	5
Inicio momento 0	- 170.000	25.000	25.000	25.000	25.000	...
Inicio momento 1		- 170.000	25.000	25.000	25.000	...

Para el cálculo de los VAN, es necesario considerar la variabilidad de la tasa de descuento:

Alternativa de proyecto	VAN(10%)
Inicio en el momento 0	42.822,93
Inicio en el momento 1	47.568,70
Inicio en el momento 2	**49.175,94**
Inicio en el momento 3	48.406,92

Esto permite determinar que el momento óptimo para iniciar el proyecto es el 2.

Es interesante considerar cuánto se gana y cuánto se pierde por postergar el inicio del proyecto un año. Este análisis se presenta en forma resumida en el siguiente cuadro:

Postergación desde:	Se gana	Se pierde	En $ del momento
Momento 0 al 1	30.600	25.000	1
Momento 1 al 2	27.200	25.000	2
Momento 2 al 3	23.800	25.000	3

Nótese que los beneficios asociados a la postergación van decreciendo a medida que se pospone el inicio. Estos beneficios responden a los intereses generados por la postergación de la inversión, cuyo cálculo considera tasas decrecientes. Por ejemplo, postergar el inicio desde 0

[18] En este caso, si la tasa de descuento no varía, nunca conviene postergar el inicio de un proyecto que resultó conveniente. Tampoco lo será si se espera que la tasa de descuento crezca a través del tiempo.

al 1, implica un beneficio del 18% anual sobre los $ 170.000 de inversión; en cambio, la postergación desde 1 al 2 genera un beneficio sólo del 16% anual sobre el mismo monto.

C. Tamaño óptimo

Cuando en evaluación de proyectos de inversión se habla de tamaño óptimo, normalmente se está haciendo referencia al nivel óptimo de la inversión inicial. Las alternativas de tamaño suelen estar restringidas por la tecnología, los recursos naturales, el tamaño de mercado, etc. Estas restricciones se van reflejando en el flujo del proyecto que se está evaluando.

La optimización de tamaño sólo tiene sentido si existe una relación directa entre el nivel de inversión y el valor actual de los beneficios netos asociados a la misma. Esto es, sólo es relevante estudiar el nivel de inversión óptimo, si un tamaño mayor da lugar a beneficios netos mayores. No necesariamente tiene que ocurrir que los beneficios netos aumenten con el tamaño para todos los años, pero en términos de valores actuales sí deben ser mayores a los correspondientes al tamaño inferior.

En términos generales se define como "óptimo" a aquel tamaño de la inversión que permite maximizar el VAN del flujo de beneficios y costos de un proyecto. Es por ello que uno de los caminos a seguir para determinar cuál es el tamaño óptimo de un proyecto es calcular el VAN correspondiente a cada nivel de inversión posible y elegir el mayor. Sin embargo, también se presentan otros indicadores que suelen utilizarse a fin de simplificar los cálculos.

En primer término se analizan dos casos cuyos beneficios netos son constantes en el tiempo:

- Por razones de simplicidad en las explicaciones, se analiza la pertinencia de utilizar ciertos indicadores para determinar el tamaño, aplicándolos a un caso de un período de duración.
- Luego se extiende el análisis a un proyecto cuyos beneficios tienen un horizonte mayor.

Finalmente, se considera un proyecto que presenta beneficios netos crecientes a lo largo del tiempo y cuya inversión puede ejecutarse por tramos.

1. Optimización de tamaño con beneficios netos constantes

En este apartado, para poder centrar el análisis sólo en el tema de tamaño óptimo, se consideran proyectos cuyos beneficios netos son constantes a través del tiempo.

Caso 8: Proyecto de un año de duración

Considérese que un empresario está estudiando la conveniencia de dedicarse a un proyecto durante el próximo año. Los flujos de beneficios netos anuales correspondientes a cada alternativa de tamaño de inversión técnicamente posible, son:

Alternativa de proyecto	0	1
A	- 180	280
B	- 380	520
C	- 580	750
D	- 780	960
E	- 980	1.165

Si la tasa de descuento es del 5% anual, ¿le conviene al empresario ejecutar el proyecto? Si el proyecto le resulta conveniente, ¿cuál es el nivel óptimo de inversión?

Para explicar los diferentes caminos que pueden seguirse a los efectos de determinar si el proyecto es conveniente y el nivel óptimo de inversión a ejecutar, se presenta el siguiente cuadro en el que se reúnen una serie de indicadores asociados a cada tamaño. La explicación de cómo se obtiene cada uno de ellos se incluye a medida que se avanza en el análisis.

Alternativa de proyecto	VAN(5%)	TIR anual	TIR marginal anual
A	86,67	55,56%	
			20,0%
B	115,24	36,84%	
			15,0%
C	134,29	29,31%	
			5,0%
D	134,29	23,08%	
			2,5%
E	129,52	18,88%	

Uso del VAN para optimizar tamaño de inversión

Cuando existen diferentes tamaños de la inversión inicial posibles, el VAN es un indicador adecuado para decidir respecto de cuál de ellos es el óptimo, debido a que las alternativas que se comparan son mutuamente excluyentes y de igual duración. De la maximización del VAN, se concluye que los tamaños óptimos son los correspondientes a las alternativas C o D.

Conceptualmente, y en forma similar a lo presentado en el tema de optimización de momento de inicio de un proyecto, puede demostrarse la validez de este proceso de selección considerando lo gana y lo pierde el empresario por elegir un tamaño en lugar de otro.

En primer lugar, partiendo de la alternativa de proyecto A, se considera la opción de ampliar la inversión al nivel de la considerada en la alternativa de proyecto B. Pasar de A a B le ocasiona al empresario:

- Un costo de $ 200 en el momento 0, en términos de incremento de inversión.
- Un beneficio neto al cabo de un año (momento 1 del flujo anual) de $ 240.

Para determinar si este aumento de tamaño es conveniente, estos conceptos deben expresarse en un mismo momento en el tiempo. La alternativa de proyecto B es preferible a la A en $ 30 del momento 1 o en $ 28,57 del momento 0. Este último valor coincide con la diferencia entre los VAN de las alternativas B y A que aparecen el cuadro.

En segundo lugar, partiendo de la alternativa B, se analiza si conviene ampliar nuevamente la inversión al tamaño previsto en C. El empresario por pasar de B a C observa:

- Un costo de $ 200 en el momento 0 debido al incremento de inversión.
- Un beneficio neto de $ 230 al cabo de un año.

Como el beneficio neto de ampliar la inversión es positivo, se concluye que C es mejor que B.

Siguiendo con este proceso, se concluye que los tamaños de inversión de C o D son óptimos.

En definitiva, el tamaño óptimo de inversión es aquel para el cual el valor actual de la inversión adicional (costo) es igual al valor actual de los beneficios adicionales que ella implica.[19]

Uso de la TIR para optimizar tamaño de inversión

La TIR correspondiente a cada alternativa de inversión es aquella tasa que anula el valor actual de su flujo de beneficios y costos.

Estas alternativas tienen la ventaja de tener una sola TIR[20]. Sin embargo, como se debe elegir entre opciones mutuamente excluyentes, este indicador puede conducir a un ordenamiento erróneo. Particularmente esto ocurre cuando los proyectos tienen distinta inversión inicial.

En el ejemplo analizado puede apreciarse que la mayor TIR anual corresponde a la alternativa A. Sin embargo su uso para ordenar las alternativas es engañoso. Si bien es verdad que en A el dinero rinde el 55,56% anual, hay que tener en cuenta que esta rentabilidad se obtiene sólo

[19] Esta es la condición de primer orden para la maximización del VAN.
[20] Al ser flujos convencionales (con un solo cambio de signo, de negativo a positivo), tienen una sola TIR.

sobre una inversión de $ 180. Si se desea comparar A con C, por ejemplo, es necesario considerar que en esta última alternativa cada uno de los $ 580 invertidos rinde el 29,31%.

Para efectuar la comparación correcta, es necesario corregir la TIR de la siguiente forma:

- Se debe identificar la inversión, entre las correspondientes a las alternativas a comparar, que sea mayor. En el caso analizado, esa inversión corresponde a la E y es de $ 980.
- Se calcula la rentabilidad correspondiente a la totalidad de esos fondos (de los $ 980) para el empresario, según sea la alternativa de proyecto que ejecute. Por ejemplo, si ejecuta A, la rentabilidad total de los $ 980 está dada por $ 180 invertidos al 55,56% anual y de $ 800 depositados al 5% anual, lo que hace un promedio ponderado del 14,29% al año.

Alternativa de proyecto	TIR anual	Rentabilidad total anual
A	55,56%	14,29%
B	36,84%	17,35%
C	29,31%	19,39%
D	23,08%	19,39%
E	18,88%	18,88%

- Se selecciona como la alternativa más conveniente a aquella que permita alcanzar la mayor tasa de rentabilidad total de los $ 980. En este caso, C y D son las que resultan elegidas.

Con este procedimiento, se obtienen los mismos resultados que con el criterio VAN máximo.[21]

Uso de la TIR marginal para optimizar tamaño de inversión

La TIR marginal es la tasa de descuento que anula el valor actual de la diferencia de los flujos de beneficios y costos correspondientes a dos alternativas del proyecto. En términos generales, matemáticamente la TIR marginal es la tasa ρ' que cumple la siguiente condición[22]:

$$\Delta VAN = \sum_{t=0}^{n} \frac{\Delta BN_t}{(1+\rho')^t} = 0$$

donde ΔVAN es el cambio en el valor actual de pasar de una alternativa de proyecto a otra y ΔBN_t es el cambio en beneficio neto correspondiente al período t.

Para calcular la TIR marginal es necesario plantear la diferencia de flujos aludida. Por ejemplo, para calcular la correspondiente a pasar de A a B, el flujo diferencia es:

Flujo anual de beneficios y costos correspondiente a la:	0	1
Alternativa de proyecto B	- 380	520
Alternativa de proyecto A	- 180	280
Diferencia (Alternativa B – Alternativa A)	- 200	240

La tasa que anula el VAN de este flujo diferencia es del 20% anual. De esta forma se calculan las restantes TIR marginales que aparecen en el cuadro de indicadores de rentabilidad.

Para la correcta interpretación conceptual de la TIR marginal es importante tener en cuenta el origen de la distinción entre las alternativas de proyecto consideradas para su cálculo. En este caso, las alternativas responden a tamaños de inversión distintos. Por lo tanto, en principio, la TIR marginal pretende reflejar la tasa de rendimiento promedio de cada uno de los pesos

[21] En este ejemplo es sencillo calcular la rentabilidad total. En proyectos cuya duración es superior a un año, este cálculo es un poco más complicado. Por lo tanto, es un criterio que carece de practicidad.

[22] En algunas ocasiones, cuando se habla de TIR marginal, a la TIR del proyecto se la empieza a denominar “TIR media”. En este trabajo, se ha optado por continuar denominándola “TIR”.

adicionales invertidos en el proyecto[23]. Por ejemplo, la TIR marginal de pasar de la alternativa B a la C, refleja que cada uno de los $ 200 adicionales invertidos rinde en promedio el 15% anual.

Sobre la base de este concepto, se puede afirmar que si la TIR marginal es igual a la tasa de descuento, el nivel de inversión de las alternativas consideradas es óptimo. Esto es así debido a que el valor actual de los cambios en los beneficios netos que ocurren desde el momento 1 calculados con la tasa de descuento es igual al cambio en la inversión inicial.

En el ejemplo, la TIR marginal que coincide con la tasa de descuento del 5% anual es la que se calcula a partir del flujo diferencia entre los correspondientes a las alternativas D y C, lo que indica que sus inversiones son las óptimas.[24]

La coincidencia entre la TIR marginal y la tasa de descuento sólo garantiza que el VAN alcance un valor extremo (máximo o mínimo). Dado que los beneficios netos observados a partir del momento 1 son positivos, para que el VAN sea un máximo, es necesario agregar una condición: que la TIR marginal disminuya a medida que aumente el tamaño de la inversión[25]. Se puede verificar que en este ejemplo, esto se cumple.

Conceptualmente, este criterio compara el rendimiento de los pesos adicionales “puestos” en el proyecto (TIR marginal) con el que obtienen en la mejor opción fuera de él (tasa de descuento):

- Si se compara ejecutar la alternativa de proyecto A, cuya inversión es de $ 180, con la opción de no ejecutarla, se determina que cada uno de los $ 180 puestos en el proyecto rinde el 55,56% anual (TIR de la alternativa A), mientras que su costo de oportunidad es del 5% anual. Esto implica que es más conveniente invertirlos en el proyecto que fuera de él.
- Si se considera ejecutar la alternativa de proyecto A versus la B, se determina que ésta última requiere de una inversión adicional de $ 200. Si esos $ 200 se colocan en el proyecto rinden el 20% anual (TIR marginal del flujo diferencia entre B y A), mientras que fuera de él el 5% anual. Esto implica que es más conveniente invertirlos en el proyecto que fuera de él, es decir, aumentar el tamaño de inversión en $ 200.
- Se puede seguir con este procedimiento gradual. Si se saltea la opción de pasar de B a C y se considera ejecutar la alternativa de proyecto C versus la D, se concluye que el dinero adicional que implica el incremento de inversión rinde lo mismo “puesto” en el proyecto que fuera de él. Esto implica que el inversor se encuentra indiferente entre aumentar el tamaño de la inversión en $ 200 o colocar ese dinero en la mejor opción fuera de él.
- De la comparación de D con E, se concluye que ampliar la inversión no es conveniente.

Es interesante considerar una tasa de costo de oportunidad de los fondos diferente para mostrar cómo puede aplicarse el criterio de “igualdad” entre TIR marginal y tasa de descuento cuando entre ellas no hay coincidencia exacta. Supóngase que la tasa de costo de oportunidad de los fondos del empresario es del 16% anual (en lugar del 5%).

Una forma de determinar el nivel de inversión óptima es recalcular todos los VAN. Otra, es comparar el rendimiento de los pesos en el proyecto con el de la mejor opción fuera de él:

- Si se compara ejecutar la alternativa de proyecto A con no ejecutarla, se determina que cada uno de los $ 180 puestos en el proyecto rinde el 55,56% anual, mientras que su costo de oportunidad es del 16% anual. Esto implica que es más conveniente invertirlos en el proyecto que fuera de él.
- Si se evalúa ejecutar la alternativa de proyecto A versus la B, dado que la TIR marginal del flujo diferencia entre B y A es del 20% anual, mayor que la tasa de descuento anual del 16%, se concluye que es conveniente aumentar el tamaño de inversión en $ 200.

[23] En el ejemplo usado, al tratarse de flujos de un período, esta definición es correcta. Sin embargo, se puede demostrar que no siempre este es el verdadero significado de la TIR marginal.

[24] Es la misma conclusión obtenida al maximizar el VAN. Esto es lógico ya que cuando la TIR marginal coincide con la tasa de descuento se cumple la condición de primer orden de la maximización del VAN.

[25] La demostración de esta afirmación se expone en el Apéndice matemático.

- Si se considera ejecutar B versus la C, se concluye que el dinero adicional que implica el incremento de inversión rinde menos en el proyecto (15% anual) que fuera de él (16% anual). Esto implica el tamaño óptimo de inversión es el B.

Caso 9: Proyecto de más de un año de duración. Incorporación de técnicas de aislamiento a la construcción tradicional

Considérese un proyecto que consiste en incorporar a la construcción tradicional de una vivienda ciertos elementos que la harían más aislada de la temperatura exterior (más caliente en invierno y más fresca en verano). El aislamiento de la casa que se estudia consiste en la aplicación de técnicas en las paredes. En realidad, a medida que aumenta el espesor del aislamiento (mayor es la inversión), disminuyen los gastos de calefacción en invierno y de refrigeración en verano. A los efectos de los cálculos se considera que la vida útil de la inversión en aislamiento es de 20 años y que su valor residual es nulo.

En el siguiente cuadro se exponen los flujos de beneficios netos anuales del proyecto correspondiente a cada alternativa de tamaño de inversión en la técnica:

Alternativa de proyecto	0	1 a 20
A	- 580	64
B	- 780	81
C	- 980	94

Si la tasa de descuento es del 5% anual, ¿le conviene al propietario de la casa aplicar la técnica de aislamiento de paredes? ¿Cuál es el tamaño de inversión más conveniente?

Los indicadores que permiten determinar la conveniencia del proyecto y su tamaño son:

Alternativa de proyecto	VAN(5%)	TIR marginal anual
A	217,58	
		5,69%
B	229,44	
		2,64%
C	191,45	

Tomando en consideración el VAN, la inversión óptima en la técnica de aislamiento es la correspondiente a la alternativa de proyecto B, ya que es la opción que lo maximiza.

Por pasar de la alternativa A a la B, ocurre:

- Un costo de $ 200 en el momento 0, debido a la mayor inversión.
- Un beneficio anual de $ 17 vencidos durante 20 años, siendo su valor actual de $ 211,86.

Con ello puede afirmarse que la alternativa de proyecto B es preferible a la A en $ 11,86 del momento 0. Este último valor coincide con la diferencia entre los VAN de las alternativas B y A.

Por pasar de B a C, el propietario observa:

- Un costo de $ 200 en el momento 0.
- Un beneficio anual de $ 13 durante los próximos 20 años, cuyo valor actual es de $ 162,01.

Esto implica que no le conviene aumentar la inversión, por lo que B es la alternativa óptima.

Alternativamente se puede llegar a la misma conclusión utilizando el criterio TIR marginal igual a la tasa de descuento. La tasa de descuento del 5% anual se puede ubicar entre las dos TIR marginales que aparecen en ese cuadro. Si se procede a la comparación de las alternativas B y C, se concluye que el dinero adicional que implica aumentar el espesor del aislamiento, dentro del proyecto tiene un rendimiento del 2,64% anual frente al 5% por año que obtiene fuera de él. Esto permite concluir que no conviene incurrir en ese aumento de inversión.

Algunos comentarios adicionales respecto de la TIR marginal

Si bien se ha indicado que la TIR marginal es un criterio que permite llegar al mismo resultado que el obtenido a través del proceso de maximización del VAN, es conveniente tener en cuenta que la TIR marginal presenta las mismas limitaciones que la TIR. En términos generales, sólo puede usarse si el flujo diferencia a partir del cual se calcula tiene una sola TIR marginal.

Es importante notar que la probabilidad de que se obtengan TIR marginales múltiples es mayor que para la TIR. Es decir, aún cuando los flujos correspondientes a las alternativas de proyecto sean convencionales, el polinomio correspondiente al flujo diferencia puede no serlo.

Relación entre tamaño óptimo y la tasa de descuento

En el Caso 8 y en el Caso 9, a medida que aumenta la inversión, todos los beneficios se incrementan. Si es así, la relación entre tasa de descuento y tamaño óptimo es inversa. Sin embargo, pueden ocurrir otras situaciones en las cuales esta relación no sea inversa. Por ejemplo, supóngase las dos siguientes alternativas de un proyecto, para las cuales se expone el flujo anual de beneficios y costos y el VAN calculado a las tasas del 5% y 10% anual.

Alternativa de proyecto	0	1	2	3	VAN(5%)	VAN(10%)
A	-150	120	180	180	**283,04**	243,09
B	-200	300	100	120	280,08	**245,53**

Al pasar la tasa de 5% a 10% anual, resulta mejor la opción de mayor tamaño de inversión.[26]

2. Optimización de tamaño con beneficios netos crecientes

El problema de tamaño óptimo, cuando los beneficios netos crecen a través del tiempo, no es sencillo de resolver debido a que depende de las economías de escala presentes.

Por ejemplo, esta situación puede ocurrir en un proyecto de ampliación de una ruta, en el cual el número de vehículos que la utiliza crece a través del tiempo. En este caso, las economías de escala se presentan en la inversión ya que el costo por kilómetro pavimentado disminuye a medida que la superficie a pavimentar aumenta[27]. Con el objetivo de aprovechar estas economías de escala, normalmente suele analizarse la conveniencia de un proyecto cuya inversión inicial permita ampliar todo el sector de la ruta que presenta problemas de congestión. Sin embargo, este análisis es incompleto, ya que es probable que no todo ese trayecto se encuentre congestionado de la misma forma.

Si se contemplan todos esos aspectos, puede ocurrir que en ciertas ocasiones lo óptimo sea ejecutar la inversión en etapas, es decir, pavimentar hoy ciertos tramos y en el futuro otros. Esto implica la necesidad de otro proceso de optimización, el cual se refiere a la distribución de la inversión en el tiempo según los beneficios asociados a cada uno de los tramos en los que se pueda o convenga dividir el sector de ruta a ampliar.

Si bien el problema es complejo de resolver, lo más importante no es precisar hoy el número de etapas de ampliación, ni el nivel de inversión correspondiente a cada una de ellas, sino identificar el tamaño óptimo inicial. Esto es así ya que las ampliaciones futuras deben ser reevaluadas en el momento en que surja la necesidad de su ejecución conforme a las nuevas condiciones imperantes, que pueden o no diferir de las contempladas en el proyecto original.

[26] Se puede comprobar que para tasas menores que el 7,58% anual la alternativa A resulta más conveniente, y para tasas que superen ese nivel, la mejor opción es B. Esta afirmación es válida para el rango de tasas para el cual el VAN de ambas alternativas es positivo. La tasa del 7,58% anual es una de las TIR del flujo diferencia entre los flujos de B y de A, la otra TIR es del 190,78% anual. Esto implica que, estrictamente, el VAN de B es mayor que el de A para tasas comprendidas entre el 7,58% y 190,78%,

[27] Incluso, si la evaluación se lleva a cabo desde el punto de vista socioeconómico, ocurren también economías de escala con relación a los costos de congestión ocasionados en la etapa de inversión.

Caso 10: Proyecto de ampliación de una ruta

Supóngase que se está evaluando la ampliación del númer o de carriles de una ruta. La inversión total requerida por el proyecto es de $ 9.050.000 si la ruta se pavimenta con hormigón armado o de $ 6.090.000 si se utiliza asfalto. A los efectos de simplificar el análisis, considérese que los montos de inversión no dependen del momento en que se inicia el proyecto, que la inversión es instantánea (se ejecuta toda en el momento 0) y que dura 60 años en el caso del hormigón y 15 años en el del asfalto.

Los beneficios netos vencidos correspondientes al primer año calendario son de $ 960.000 para cualquiera de los dos tipos de pavimentación. Tal como se explicó precedentemente, los beneficios netos asociados a la pavimentación de una ruta se deben básicamente a la disminución en los costos de viaje. Como el número de vehículos que la transitan crece con el tiempo calendario, estos beneficios tienen asociada una tasa de crecimiento del 2% anual. Estos beneficios son independientes del momento en que se ejecute la inversión.

Un aspecto importante a tener en cuenta es con el correr del tiempo y debido al uso, la ruta se vuelve más rugosa y esta rugosidad es diferente según sea el tipo de pavimentación. En efecto, a igualdad de tránsito, con el correr del tiempo la ruta asfaltada se vuelve más rugosa que la pavimentada con hormigón. La rugosidad repercute contra el crecimiento de los beneficios: el beneficio por usuario disminuye a medida que el camino se vuelve más rugoso.

A los efectos de incorporar esta temática de manera simplificada, se considera que en el caso de pavimentación con hormigón armado, no se presenta el problema de rugosidad. En cambio, en la opción de asfalto este problema existe y puede ser eliminado con un plan de mantenimiento anual, gasto que asciende a $ 90.000 anuales y vencidos durante el primer año de operación de la ruta recién asfaltada y que crece a una tasa del 1,2% anual.[28]

Si la tasa de descuento relevante es del 10% anual, ¿cuál es el curso de acción más conveniente? Si la ampliación resulta conveniente, ¿cuál es el nivel óptimo de inversión?

Para el cálculo de los VAN se considera un horizonte de evaluación de infinitos años, de manera de incluir las reinversiones futuras cada 60 años en la opción de hormigón y cada 15 en la de asfalto. El VAN de iniciar hoy el proyecto correspondiente a la alternativa de utilizar hormigón armado es igual a $ 2.920.179,42 y el de usar asfalto de $ 3.033.589,51[29]. Se puede comprobar que en ninguna de las dos alternativas conviene postergar el inicio. Estos resultados estarían indicando que el curso de acción más conveniente es ampliar la ruta hoy pavimentándola con asfalto, lo que implica incurrir en una inversión inicial de $ 6.090.000.

Para profundizar el análisis, los especialistas viales han identificado tres tramos en los que se pueda dividir la ruta, para los cuales los beneficios y costos correspondientes son:

Concepto	Tramo A	Tramo B	Tramo C	Unidades
Inversión en hormigón armado	4.900.000	2.450.000	1.820.000	$
Inversión en asfalto	3.300.000	1.715.000	1.110.000	$
Costo de mantenimiento primer año calendario	60.000	20.000	10.000	$/año vencido
Tasa de crecimiento del costo de mantenimiento	1,5%	1,05%	0,5%	anual
Beneficios netos primer año calendario	580.000	240.000	140.000	$/año vencido

Nótese que, la suma de las inversiones correspondientes a cada tramo es superior a la inversión considerada para la ejecución del proyecto como un todo. Esto implica la existencia

[28] Se considera creciente debido a que la problemática de rugosidad se empeora con el tiempo. En este caso en que aparece un costo creciente es pertinente estudiar el tamaño óptimo del ciclo de inversión, el cual se desarrolla en el siguiente apartado del trabajo. El ejemplo se ha armado de forma tal que el ciclo óptimo de inversión coincida con la duración de la inversión (15 años).

[29] Como las alternativas tienen iguales beneficios, también se podría haber utilizado el costo anual equivalente para tomar la decisión.

de economías de escala debidas a la ejecución de la inversión en forma conjunta. Los costos de mantenimiento corresponden a la alternativa de asfalto.

Considerando esta nueva información, se procede nuevamente a evaluar el proyecto. En primer término, sólo se analiza la alternativa de pavimentación con hormigón armado.

El error más común es guiarse por el VAN del proyecto conjunto, es decir, el de pavimentar hoy todos los tramos y considerar la conveniencia de ejecutarlo si este indicador es positivo. Para esta alternativa ese VAN es de $ 2.920.179,42[30]. Sin embargo, al desglosar ese resultado en los VAN correspondiente a cada tramo, si todos ellos se inician hoy, se determina que sólo los de los tramos A y B son positivos ($ 2.333.854,05 y $ 541.927,02 respectivamente). Por lo tanto, estos VAN compensan el VAN negativo correspondiente al del tramo C (- $ 75.997,07).[31]

Aún con estos resultados, no deben extraerse conclusiones apresuradas. Dado el crecimiento de los beneficios netos anuales, se debe profundizar más el análisis. Es pertinente responder a la pregunta respecto de cuál es el momento óptimo de inversión para cada tramo:

- Con relación al tramo A: por postergar el inicio del proyecto un año, ocurre un beneficio dado por los intereses obtenidos sobre la inversión y las reinversiones futuras no realizadas de $ 491.614,60 expresados al momento 1 del flujo anual. Al mismo tiempo, esto trae aparejado un costo de $ 580.000 debidos a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año. Con ello se concluye que el momento 0 es el óptimo de ejecutar el tramo A.
- Con relación al tramo B: si se posterga el inicio del proyecto un año, ocurre un beneficio debido a los intereses obtenidos sobre la inversión y las reinversiones futuras no realizadas de $ 245.807,30 al momento 1 del flujo anual. Al mismo tiempo, se observa un costo de $ 240.000 debidos a la pérdida del beneficio neto correspondiente al primer año. Esto implica la conveniencia postergar el inicio desde 0 a 1. Siguiendo con este proceso, se concluye que el momento óptimo de inicio del tramo B es el principio del tercer año (momento 2). [32]
- Con relación al tramo C: si se posterga el inicio del proyecto un año, ocurre un beneficio debido a los intereses obtenidos sobre la inversión y las reinversiones futuras no realizadas de $ 182.599,71 y un costo de $ 140.000 debidos a la pérdida del beneficio neto del primer año (ambos expresados al final del primer año). Por lo que resulta conveniente postergar el inicio desde 0 a 1. Siguiendo con este procedimiento secuencial, se determina que el momento óptimo de inicio del tramo C es el comienzo del decimoquinto año (momento 14).

La misma evaluación se puede realizar para la alternativa de asfalto. Se puede comprobar que los momentos óptimos de inicio son el 0 para el tramo A, el 2 para el B y el 6 para el C.

En lo siguiente se resume el momento óptimo de inicio y los VAN optimizados correspondientes a cada tramo, expresados al momento 0, para cada una de las alternativas consideradas:

Alternativa de proyecto	Tramo A	Tramo B	Tramo C	Suma	Unidades
Hormigón armado					
Momento óptimo de inicio	0	2	14		
VAN	2.333.854,05	548.038,86	127.212,90	3.009.105,81	$
Asfalto					
Momento óptimo de inicio	0	2	6		
VAN	2.261.076,53	541.232,09	230.720,71	3.033.029,32	$

30 Este VAN se calcula con una inversión de $ 9.050.000, ya que si se ejecuta el proyecto como un todo el monto invertido resulta menor que si se ejecuta por partes (en éste último caso se invierte $9.170.000).

31 Debido a las economías de escala propuestas, la suma de estos tres VAN no es igual al VAN del proyecto como un todo. En efecto, el VAN del proyecto como un todo es igual a la suma de los VAN de cada uno de los tramos ($2.799.784,00) y del valor actual de la disminución del costo de la inversión y reinversiones futuras que implica su ejecución conjunta de $ 120.000 ($9.170.000 - $9.050.000).

32 La fórmula (3) del Apéndice matemático permite aproximar el momento de inicio en este caso.

En el cuadro se ha incorporado una columna que contiene la suma de los VAN optimizados de cada tramo. Cabe notar que, como los tramos tienen distintos momentos óptimos de inicio, se pierden las economías de escala de la inversión conjunta. Dado que el VAN del conjunto es mayor para la alternativa de proyecto de pavimentación con hormigón armado, aparentemente ésta surge como la más conveniente. Sin embargo, esta conclusión es incorrecta. El mejor curso de acción es pavimentar los tramos A y B con hormigón armado y el C con asfalto. El VAN de esta combinación es igual a $ 3.112.613,62[33]. El tamaño óptimo de proyecto está referido a la combinación seleccionada y es igual a $ 4.900.000 a invertir hoy en el tramo A, $ 2.450.000 a ejecutar dentro de 2 años en el B y $ 1.110.000 dentro de 6 años en el C.

En este ejemplo, se desglosó el proyecto en tres tramos. Cabe ahora preguntarse sobre la conveniencia de volver a profundizar el análisis ampliando el número de tramos. Obviamente cuanto más desagregada es la información con que se cuenta, más adecuada es la evaluación. Pero esto también la torna mucho más costosa y compleja. Es probable que convenga reunir más información respecto de aquel tramo cuya ejecución aparece como la más inmediata. En el caso del ejemplo, éste es el tramo A, para el cual el momento óptimo de inicio es hoy. El dividirlo en partes más pequeñas permite determinar la conveniencia de ejecutarlo hoy como un todo o sólo en determinados trayectos. De esta forma se llega, a través de aproximaciones sucesivas, al nivel de inversión óptimo correspondiente al momento 0. Lógicamente, a medida que vaya transcurriendo el tiempo, deben reevaluarse los tramos para los que hoy se concluye sobre la conveniencia de su ejecución en el futuro.

D. Momento óptimo de liquidación de una inversión y ciclo óptimo de inversión y/o producción

Hay ciertos proyectos que tienen asociada en forma implícita una determinada tasa de crecimiento del capital invertido. Esto ocurre, por ejemplo, con las plantaciones de árboles, el añejamiento de vinos, el engorde o cría de animales, etc.

En efecto, uno de los beneficios asociados a este tipo de proyectos es el ingreso por venta de los productos aludidos. Mientras mayor es la edad de esos productos, mayor es el ingreso que se logra por sus ventas. Aunque hay que tener en cuenta que, normalmente, al principio este ingreso suele crecer a tasa creciente y luego a tasa decreciente.

Sin embargo, el esperar un período más con el objetivo de lograr ese mayor ingreso, tiene asociado ciertos costos. De allí que surge el problema de determinar el momento óptimo de liquidar una inversión (cuándo cortar los árboles, cuándo vender el vino, cuándo vender los animales, etc.) o de identificar el ciclo óptimo de producción (cada cuántos años conviene cortar los árboles para volver a plantar, cuál es el tamaño óptimo del ciclo de venta de vinos, a qué edad conviene vender los animales y volver a comprarlos, etc.).

Estos procesos de optimización no tienen por qué circunscribirse a proyectos que presenten las características previamente descriptas. Por ejemplo:

- El momento óptimo de liquidar una inversión, también es relevante en la evaluación de proyectos de explotación minera. Esto es así debido a que a medida que se extrae mineral, se obtiene menos cantidad de material por unidad de tiempo (se va agotando la mina). Además, cuanto más se deba introducir en la mina o cantera para extraerlo, mayores son los costos por unidad de material obtenido. Estos elementos pueden motivar el abandono de la explotación, aún cuando todavía quede material por extraer. Como se aprecia, en este

[33] Incluso este resultado es superior al VAN de iniciar hoy el proyecto conjunto bajo la modalidad de pavimentación con asfalto previamente calculado ($ 3.033.589,51). Podría suceder que las economías de escala asociadas al proyecto ejecutado como un todo en el mismo momento en el tiempo fueran lo suficientemente importantes como para que ésta fuera la mejor opción. Si la inversión en asfalto para todos los tramos ejecutados hoy fuese de $ 5.900.000 (en lugar de $6.090.000), el VAN resultante para el proyecto como un todo es de $ 3.283.389,68, superior al combinación óptima seleccionada.

caso, normalmente el precio de la unidad del bien se mantiene constante. Sin embargo, el aumento del costo de extracción por unidad puede motivar el abandono de la actividad.

- El tema de ciclo óptimo, es relevante para evaluar el recambio de equipos en una empresa.

A continuación se presentan algunos ejemplos numéricos que incorporan estos conceptos.

Caso 11: Proyecto de engorde de ganado

Supóngase que un empresario está estudiando un proyecto de engorde de ganado, que consiste en comprar terneros recién destetados, para engordarlos y venderlos. Dispone de un terreno cuyo valor de venta es de $ 200.000 (hoy y en cualquier momento) en el que puede engordar un máximo de 200 animales. Cada ternero recién destetado cuesta $ 400.

Se indican, por animal: a) los precios a los cuales puede venderse el ganado, alternativamente, al final de cada semestre, según el peso que ha logrado y su edad; b) los costos de operación (cuidados, alimentación, etc.) semestrales adelantados, que dependen de la edad del ganado:

Edad (en semestres)	1	2	3	4	5	6	Unidades
Precio de venta	500	650	810	950	1.060	1.110	($ / semestre vencido)
Costo operación	20	24	30	39	48	50	($ / semestre adelantado)

Si la tasa de descuento relevante para la evaluación de este proyecto es del 5% semestral, ¿le conviene al empresario ejecutar el proyecto si no piensa reinvertir en el negocio? De ejecutarlo, ¿en qué momento debe liquidarlo? ¿Y si piensa reinvertir en el negocio?

Es necesario plantear los flujos correspondientes a cada alternativa de proyecto y calcularles los indicadores de rentabilidad. Por ejemplo, para la alternativa de comprar el ganado y venderlo cuando tenga una edad igual a tres semestres, se puede plantear el siguiente flujo:

Flujo semestral de beneficios y costos de "Ejecutar el proyecto de comprar el ganado y venderlo a los tres semestres versus no ejecutarlo"

Concepto	0	1	2	3
Inversión en terreno	- 200.000			200.000
Inversión en terneros	- 80.000			
Costo de operación	- 4.000	- 4.800	- 6.000	
Ingresos por venta del ganado				162.000
Flujo de beneficios netos	- 284.000	- 4.800	- 6.000	362.000

En el primer rubro se registra el costo de oportunidad de usar el terreno propio en el proyecto.

El VAN de esta alternativa de proyecto es igual a $ 18.695,61. A partir de ese valor se calcula el valor semestral equivalente (VSE) utilizando la fórmula de cuota del sistema francés, resultando igual a $ 6.865,19. La TIR de este flujo es igual a 7,219% semestral.

Al igual que en tamaño óptimo, es posible calcular la TIR marginal o tasa que anula el valor actual de la diferencia de los flujos de beneficios y costos de dos alternativas del proyecto, las cuales responden en este caso a momentos de liquidación distintos. El flujo diferencia a partir del cual se calcula incorpora alternativas con distintos momentos de liquidación. Esto implica que la TIR marginal resultante refleja la tasa de rendimiento promedio de cada uno de los pesos que permanecen en el proyecto un período más (en este caso, un semestre más).

A modo de ejemplo, se calcula la TIR marginal de pasar de la alternativa de liquidar el proyecto al cabo de 3 semestres a terminarlo al cabo de 4 semestres. La diferencia de flujos es igual a:

Flujo de beneficios y costos de la:	0	1	2	3	4
Alternativa de liquidar a los 3 semestres	- 284.000	- 4.800	- 6.000	362.000	
Alternativa de liquidar a los 4 semestres	- 284.000	- 4.800	- 6.000	- 7.800	390.000
Diferencia (Alternativa 4 – Alternativa 3)	0	0	0	- 369.800	390.000

La TIR marginal resultante es del 5,462% semestral.

Los valores correspondientes a esos cuatro indicadores se exponen en el siguiente cuadro:

Momento de liquidación	VAN(5%)	VSE(5%)	TIR semestral	TIR marginal semestral
Final del primer semestre	1.714,29	1.800,00	5,634%	
Final del segundo semestre	10.748,30	5.780,49	6,953%	8,268%
Final del tercer semestre	18.695,61	6.865,19	7,219%	7,738%
Final del cuarto semestre	20.102,43	5.669,12	6,764%	5,462%
Final del quinto semestre	14.163,30	3.271,36	5,989%	3,103%
Final del sexto semestre	- 1.581,85	- 311,65	4,907%	0,000%

El inversor desea ejecutar el proyecto por única vez

El criterio de decisión adecuado para la comparación de alternativas de distinta duración y no repetibles es la maximización del VAN. Entonces, la decisión correcta es invertir en el proyecto y liquidarlo en el momento 4 del flujo semestral (VAN = $ 20.102,43).

La decisión puede tomarse utilizando el criterio TIR marginal igual a tasa de descuento. De hecho, su aplicación es otra forma de llegar al VAN máximo. Hasta el final del cuarto semestre, el rendimiento del dinero inmovilizado en el proyecto durante un semestre más es superior que la tasa de descuento, por lo tanto al empresario le conviene seguir manteniendo su dinero en ganado. A partir del momento 4, debe preguntarse si le conviene continuar engordando los animales durante un semestre más. Tal como puede apreciarse, el rendimiento que su dinero obtiene durante el quinto semestre de engorde es del 3,103%. Esto implica que la alternativa de colocación de los fondos del 5% semestral es más atractiva, y por lo tanto, se concluye sobre la conveniencia de liquidar el proyecto al final del cuarto semestre.

Cabe destacar que los otros dos indicadores que aparecen en el cuadro no son adecuados para ordenar las alternativas de proyecto, en el caso de inversión por única vez:

- La TIR, aún cuando sea única (como ocurre en este ejemplo), puede conducir a error si se debe elegir entre alternativas de proyecto mutuamente excluyentes. Justamente el caso analizado reúne las condiciones para que la TIR pueda ordenar mal: las alternativas presentan flujos con distinta duración y con valores intermedios.
- El VSE no debe utilizarse para seleccionar, por tratarse de alternativas no repetibles.

El inversor está permanentemente en el negocio

Cuando el empresario realiza esta actividad en forma permanente, no es pertinente referirse a momento óptimo de liquidación. Lo relevante es analizar cuál es el tamaño óptimo del ciclo de engorde. La idea es que si una persona vende los animales al cabo de cuatro semestres, por ejemplo, va a volver a invertir por cuatro semestres más y así sucesivamente. Al vender los animales vuelve a invertir para comprar otros 200 terneros, y así sucesivamente.

Una de las formas de determinar el tamaño óptimo del ciclo es usando el VAN. Sin embargo, cuando se trata de decidir entre alternativas repetitivas de distinta duración, es necesario ser cuidadoso a los efectos de que la comparación sea válida. Para obtener el resultado correcto es necesario igualar los horizontes de las alternativas, por ejemplo en infinito. Alternativamente, se puede determinar cuál es la alternativa más conveniente comparando sus VSE. Dado que el mayor VSE es igual a $ 6.865,19 y corresponde a la opción de liquidar el proyecto en el momento 3, se concluye que el tamaño óptimo del ciclo de engorde es de tres semestres.

Con relación a los otros dos indicadores (TIR y TIR marginal) que aparecen en el cuadro se considera conveniente efectuar algunos comentarios:

- La TIR marginal no es adecuada para ordenar las alternativas. Esto se debe a que los flujos diferencias a partir de los cuales se calculan no consideran las repeticiones.
- La TIR expuesta en el cuadro es la correspondiente al primer ciclo de engorde. Sin embargo, también es la TIR de los ciclos siguientes y la del proyecto en su conjunto. En el ejemplo analizado, su uso arroja el mismo ordenamiento que el VAE. No por ello se deben sacar conclusiones apresuradas. Como los flujos presentan valores intermedios, sus TIR no son la verdadera tasa de rentabilidad, y por lo tanto, no deben usarse para ordenar.

Comentario respecto de la consideración de la inversión inicial

Uno de los errores más comunes que suele cometerse al efectuar la comparación de las alternativas de proyecto es no considerar la inversión inicial. Si bien es cierto que en todas ellas se debe invertir un mismo monto, sólo constituye un elemento irrelevante para la selección de la mejor opción cuando la alternativa de no ejecutar el proyecto ha sido descartada. En el ejemplo, al ser el VAN de “Ejecutar el proyecto de comprar el ganado y venderlo al final del primer semestre versus no ejecutarlo” positivo, queda descartada la opción de no ejecutar el proyecto y en la comparación de las alternativas puede prescindirse de la inversión inicial.

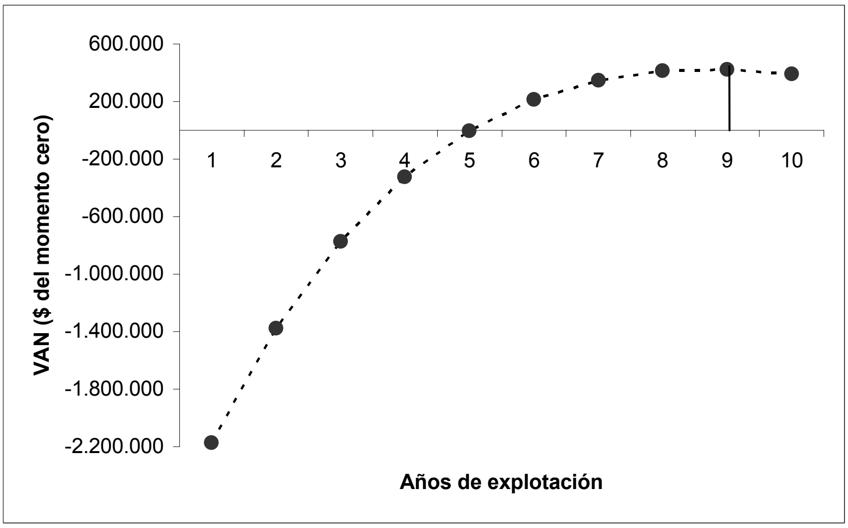
Caso 12: Proyecto de explotación de una mina de oro

Considérese que una empresa puede obtener la concesión para explotar una mina de oro. Si la explota debe pagar regalías por el 15% de sus ingresos brutos. Las inversiones requeridas son de $ 1.200.000 tanto al inicio como al final del primer año, momento en el cual comenzará la explotación. Al finalizar la concesión se debe realizar una inversión en desmantelamiento de la mina de $ 1.000.000, cuyo valor es independiente del momento en que se lleve a cabo.

Los costos de operación adelantados se estiman en $ 700.000 en el primer año de operación y crecen al 4% anual. La producción de oro será de 9 toneladas en el primer año de operación e irá disminuyendo al 8% anual. Se venderá a fin de cada año a $ 250.000 la tonelada.

La tasa de descuento relevante para la empresa es del 10% anual. ¿Le conviene a la empresa obtener la concesión? De hacerlo, ¿en qué momento debe abandonar la explotación?

La maximización del VAN es un criterio adecuado para ordenar las alternativas de proyecto, ya que éstas no son repetibles. El siguiente gráfico resume los VAN:



Lo más conveniente para la empresa es obtener la concesión, pero sólo explotarla durante nueve años (VAN = $ 424.081,34), lo que implica una duración total del proyecto de 10 años.

Los flujos a partir de los que se calculan son, por ejemplo:

Flujo anual de beneficios y costos de "Obtener la concesión de la mina y explotarla durante 2 años versus no obtener la concesión"

Concepto	0	1	2	3
Inversión	- 1.200.000	- 1.200.000		
Inversión en desmantelamiento				- 1.000.000
Costo de operación		- 700.000	- 728.000	
Ingresos por venta del oro			2.250.000	2.070.000
Pago de regalías			- 337.500	- 310.500
Flujo de beneficios netos	-1.200.000	- 1.900.000	1.184.500	759.500

El VAN de esta alternativa de proyecto, a la tasa del 10% anual, es igual a - $ 1.377.723,52.

Una forma simple de llegar a este resultado es preguntarse cuánto gana y cuánto pierde la empresa por postergar un año la liquidación del proyecto. Es posible conformar una función que reúna los beneficios y costos de postergar la liquidación del proyecto por un año, cuando se pasa de (j-1) a j años de explotación:

$$BN_{(j-1)\to j} = 100.000 + 2.250.000 \cdot (1-0{,}15) \cdot (1-0{,}08)^{j-1} - 700.000 \cdot (1+0{,}04)^{j-1} \cdot (1{,}10) = 0 \,,$$

de donde surge j = 9,226. Tal como fue incorporado en la fórmula, este resultado indica que el número de años de explotación óptimo es 9, ya que está comprendido entre 8,226 y 9,226. Sin embargo, este resultado es insuficiente para corroborar que se haya alcanzado un VAN máximo. Una vez que se obtiene, se debe calcular el VAN correspondiente a la opción elegida y si resulta positivo, también los VAN de las alternativas de proyecto cuya duración sea inmediatamente inferior y superior a la determinada.

También podrían utilizarse las TIR marginales para tomar la decisión.

Caso 13: Cambio de equipos

En el tema de cambio de equipos se presentan muchas situaciones alternativas. Por ejemplo:

- Se puede considerar que sólo existe el problema del deterioro del equipo adquirido: cuanto más viejo es el equipo, mayores son los costos de operación y/o mantenimiento del mismo.
- Se puede incorporar sólo el problema de la obsolescencia: con el paso de los años aparece en el mercado un equipo mejorado, que proporciona la misma utilidad y que tiene menores costos de operación y/o mantenimiento que sus antecesores.
- Se pueden estudiar los dos aspectos antes mencionados en forma conjunta.
- Se puede considerar en todas las situaciones anteriores la existencia de valor residual.

Considérese que una empresa utiliza una máquina para estriar piezas de acero. Actualmente la máquina nueva cuesta $ 80.000 y este valor se mantiene constante en el tiempo. La máquina dura como máximo 10 años. Por simplicidad, se supone que no tiene valor residual.[34]

En el caso que se desarrolla se considera tanto el deterioro como el de la obsolescencia.

Los costos de operación y mantenimiento se pagan al final de cada año y van aumentando de acuerdo con la antigüedad de la máquina debido al deterioro: ascienden a $ 25.000 cuando la primera máquina tiene un año de antigüedad y luego crecen al 8% anual.

Con el paso del tiempo, los fabricantes de estas máquinas las van mejorando, lo que ocasiona que una máquina nueva tenga menores costos de operación que sus antecesoras. La tasa anual a la que disminuyen estos costos es del 0,1% y lo hacen de la siguiente forma:

- Si el ciclo de reemplazo es de un año, el costo de operación de la segunda máquina comprada, será de $ 25.000·(1-0,001) = $ 24.975 (en lugar de $ 25.000), cuando ésta tenga

[34] En el Apéndice matemático, se incorpora la posibilidad de que el costo de compra de la máquina cambie a través del tiempo y que el valor residual se distinto de cero.

un año de antigüedad. El de la tercera máquina, será de \$ 25.000·$(1-0,001)^2$ = \$ 24.950,03 (en lugar de \$ 25.000), cuando ésta tenga un año de antigüedad.

- Si el ciclo de reemplazo es de dos años, el costo de operación de la segunda máquina comprada, será de \$ 25.000·$(1-0,001)^2$ = \$ 24.950,03 (en lugar de \$ 25.000), cuando ésta tenga un año de antigüedad. A partir de ese nuevo valor, comienza a aumentar a la tasa del 8% por el deterioro. Asimismo, el costo de operación de la tercera máquina, será de \$25.000·$(1-0,001)^4$ = \$ 24.900,15 (en lugar de \$ 25.000), cuando ésta tenga un año de antigüedad. A partir de ese valor, comienza a aumentar a la tasa del 8% por el deterioro.

Si la tasa de descuento relevante es del 10% anual, ¿cada cuántos años le conviene a la empresa cambiar la máquina por una nueva si espera seguir con la actividad para siempre?

En este caso, la minimización del valor actual de los costos (VAC), calculado sobre flujos cuyos horizontes sean de infinitos períodos, es un criterio adecuado. Esto es así debido a que se están comparando alternativas de proyecto repetibles y de distinta duración.[35]

Se plantean los flujos anuales de costos de cada alternativa de reposición de la máquina considerando un horizonte de infinitos años. Por ejemplo, el siguiente flujo corresponde a las tres primeras máquinas que se compran, en la alternativa de reposición cada dos años:

Flujo anual de costos correspondiente a los tres primeros ciclos de compra de la máquina (dos años de duración)

Concepto	0	1	2	3	4	5	6
Inversión	80.000		80.000		80.000,00		
Costos de operación		25.000	27.000	24.950,03	26.946,03	24.900,15	26.892,16
Flujo de beneficios netos	80.000	25.000	107.000	24.950,03	106.946,03	24.900,15	26.892,16

El VAC correspondiente al flujo a infinitos años es igual a \$ 1.127.524,75.[36]

Como la máquina dura 10 años como máximo, es posible formar 10 flujos alternativos: cada uno corresponde a un tamaño diferente de ciclo de recambio (cada año, cada dos años, etc). A continuación se expone un cuadro que resume los VAC de estos flujos:

Alternativa de proyecto	VAC(10%)
Ciclos de un año	1.127.524,75
Ciclos de dos años	720.217,03
Ciclos de tres años	590.637,49
Ciclos de cuatro años	531.162,36
Ciclos de cinco años	499.814,81
Ciclos de seis años	482.596,48
Ciclos de siete años	473.502,68
Ciclos de ocho años	469.526,17
Ciclos de nueve años	**468.991,80**
Ciclos de diez años	470.890,44

Se concluye que lo más conveniente es cambiar la máquina cada 9 años (menor VAC), aún cuando éstas puedan durar un año más.

[35] Normalmente se toman estas decisiones en función del costo anual equivalente. Sin embargo se puede comprobar que, dadas las características del caso, el cálculo de este indicador es muy complejo.
[36] Este VAN surge de aplicar la fórmula (15) desarrollada en el Apéndice matemático.

APÉNDICE MATEMÁTICO

A. Momento óptimo de inicio

Tal como se indicó en la presentación de momento óptimo de inicio de un proyecto, el criterio a utilizar es la maximización del VAN. En este apéndice se derivan, para algunos de los casos analizados, las ecuaciones que corresponden a la condición de primer orden de la maximización de la variable VAN. Estas ecuaciones surgen de un proceso conceptual que implica la igualación de beneficios y costos de postergar el inicio del proyecto por un período.

1. Los beneficios netos crecen sólo como función del tiempo calendario

Sólo se presenta el caso en que la inversión es instantánea.

- **La inversión dura infinitos periodos**

Se considera que la inversión es función del momento en que se inicia el proyecto. Los flujos periódicos correspondientes a algunas de las alternativas de inicio son:

Alternativa de proyecto	0	1	2	…	j-1	j	j+1	…
Inicio momento 0	- C	B	$B \cdot (1+\gamma)$	...	$B \cdot (1+\gamma)^{j-2}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...
Inicio momento 1		$- C \cdot (1+\theta)$	$B \cdot (1+\gamma)$	...	$B \cdot (1+\gamma)^{j-2}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...
Inicio momento j-1					$- C \cdot (1+\theta)^{j-1}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...
Inicio momento j						$- C \cdot (1+\theta)^{j}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...

Donde C es la inversión inicial, B es el beneficio neto correspondiente al primer período calendario, γ es la tasa periódica de crecimiento de ese beneficio y θ es la tasa periódica de crecimiento del valor de la inversión inicial.

Conviene postergar el inicio del proyecto siempre que los beneficios de hacerlo superen a los costos respectivos. Cuando estos conceptos se igualan, en principio, se habrá determinado al momento óptimo de inicio. Este proceso de igualación se presenta a continuación. Para ello se analiza cuánto se gana y cuánto se pierde por postergar el inicio del proyecto desde j-1 a j, lo cual surge de efectuar la diferencia entre los flujos correspondiente a estas alternativas:

Concepto correspondiente al:	j-1	j
Flujo de iniciar en j		$- C \cdot (1+\theta)^{j}$
Flujo de iniciar en j-1	$+ C \cdot (1+\theta)^{j-1}$	$- B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$

En el cuadro anterior se exponen sólo los conceptos que son relevantes en el flujo diferencia. Los correspondientes a la alternativa de iniciar en j-1 tienen los signos cambiados por ser el flujo que está en el sustraendo de la diferencia. Como algunos conceptos se encuentran en el momento j-1 y otros en el j, a los efectos de la comparación es necesario expresarlos en un mismo momento usando la tasa de descuento periódica r. Si se opta por j, la ecuación que constituye la condición de primer orden para la maximización del VAN es:

$$r \cdot C \cdot (1+\theta)^{j-1} - B \cdot (1+\gamma)^{j-1} - C \cdot \left[(1+\theta)^{j} - (1+\theta)^{j-1}\right] = 0 \,, \qquad (1)$$

Esta ecuación permite identificar el momento óptimo de inicio. Si embargo, es necesario adicionalmente calcular los VAN correspondientes a las alternativas de proyectos de iniciar en ese momento y en los momentos inmediatamente anterior y posterior al determinado, de manera de confirmar que se haya alcanzado un valor máximo.[37]

Si la inversión fuese constante a través del tiempo, θ asume el valor cero y (1) se reduce a:

$$r \cdot C \cdot - B \cdot (1+\gamma)^{j-1} = 0 \,. \qquad (2)$$

[37] También podría derivarse matemáticamente la condición de segundo orden.

- **La inversión dura un determinado número de períodos**

A los de simplificar se considera el caso en que la inversión no es función del momento en que se inicia el proyecto y cuya duración es de n períodos. Los flujos correspondientes a las alternativas de iniciar el proyecto en j-1 y en j son:

Alternativa de proyecto	j-1	j	j+1	…	(j-1)+n	j+n	…
Inicio momento j-1	- C				- C		
		$B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...	$B \cdot (1+\gamma)^{j-2+n}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j-1+n}$	...
Inicio momento j		- C				- C	
			$B \cdot (1+\gamma)^{j}$	...	$B \cdot (1+\gamma)^{j-2+n}$	$B \cdot (1+\gamma)^{j-1+n}$	...

Es importante notar que los flujos contemplan reinversiones cada n periodos.

La diferencia entre los flujos correspondientes a las alternativas de iniciar en j y en j-1 es:

Concepto correspondiente al:	j-1	j	…	(j-1)+n	j+n	…
Flujo de iniciar en j		- C			- C	...
Flujo de iniciar en j-1	+ C			+ C		...
		$- B \cdot (1+\gamma)^{j-1}$				

En el cuadro anterior se exponen sólo los conceptos relevantes y los correspondientes a la alternativa de iniciar en j-1 figuran con los signos cambiados. Los puntos suspensivos en las filas de inversiones significan que éstas deben ejecutarse cada n periodos.

Si todos estos conceptos se expresan en el momento j, la ecuación relevante es igual a:

$$\frac{r \cdot C}{r_n} \cdot (1 + r_n) - B \cdot (1+\gamma)^{j-1} = 0 , \qquad (3)$$

donde r_n es la tasa de descuento correspondiente a n períodos, que es equivalente a la tasa periódica de descuento r. A partir de ella se puede identificar el momento óptimo de inicio.

2. Los beneficios netos crecen en función del momento en que se inicia el proyecto

De los casos expuestos en este trabajo, el más interesante de presentar en este apartado es el del Caso 6 de página 9. Se considera para su exposición que la inversión es instantánea.

A continuación se presenta el flujo de beneficios y costos de la alternativa de iniciar hoy:

Concepto	0	1	2	3	4	…
Inversión	- C					…
Beneficios de beneficiarios iniciales		B	$B \cdot (1+\gamma)$	$B \cdot (1+\gamma)^2$	$B \cdot (1+\gamma)^3$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el segundo período.			$\sigma \cdot B$	$\sigma \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$\sigma \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el tercer período.				$\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B$	$\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el cuarto período.					$\sigma \cdot (1+\sigma)^2 \cdot B$	…
….						

Donde C es la inversión inicial, B es el beneficio neto correspondiente al primer período calendario para el grupo inicial de beneficiarios del proyecto cuando se inicia en el momento cero, γ es la tasa periódica de crecimiento de ese beneficio y σ es la tasa periódica de crecimiento del número de beneficiarios.

Si r es la tasa de descuento periódica, el valor al momento 1 de los beneficios correspondiente a los beneficiarios que se incorporan en el segundo período es igual a: $VF_1 = \dfrac{\sigma \cdot B}{r - \gamma}$.

El valor al momento 2 de los beneficios correspondientes a los beneficiarios que se incorporan en el tercer período es igual a: $VF_2 = \frac{\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma}$.

Con el mismo procedimiento se pueden calcular los valores del resto de los beneficios, correspondientes a los beneficiarios que se van incorporando. El conjunto de valores así calculados constituyen un plan de cuotas vencidas a perpetuidad que crecen a la tasa periódica constante σ a partir del momento 1. Como el valor correspondiente a la primera cuota es de $\frac{\sigma \cdot B}{r-\gamma}$, el valor actual de este plan es igual a:

$$VA = \frac{\frac{\sigma \cdot B}{r-\gamma}}{r-\sigma}. \tag{4}$$

Esto implica que el VAN de la alternativa de iniciar el proyecto en el momento 0 es igual a:

$$VAN = -C + \frac{B}{r-\gamma} + \frac{\frac{\sigma \cdot B}{r-\gamma}}{r-\sigma}, \tag{5}$$

donde el segundo sumando del segundo término de la igualdad es el valor actual de los beneficios correspondientes a los beneficiarios iniciales, los cuales no se consideraron en (4).

El flujo de beneficios y costos de la alternativa de iniciar dentro de un año es el siguiente:

Concepto	0	1	2	3	4	…
Inversión		- C				…
Beneficios de beneficiarios iniciales			$(1+\sigma) \cdot B$	$(1+\sigma) \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$(1+\sigma) \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el tercer período.				$\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B$	$\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el cuarto período.					$\sigma \cdot (1+\sigma)^2 \cdot B$	…
…						

El valor al momento 2 de los beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el tercer período es: $VF_2 = \frac{\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma}$. El valor al momento 3 de los beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el cuarto período es: $VF_3 = \frac{\sigma \cdot (1+\sigma)^2 \cdot B}{r-\gamma}$. El conjunto de valores constituye un plan de cuotas periódicas vencidas a perpetuidad que crecen a la tasa periódica constante σ a partir del momento 2, siendo el valor correspondiente a la primera cuota de $\frac{\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma}$. El valor de este plan al momento 1 es igual a:

$$VF_1 = \frac{\frac{\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma}}{r-\sigma}. \tag{6}$$

Por lo tanto el VAN de la alternativa de iniciar el proyecto, al momento 1, es igual a:

$$VAN = -C + \frac{(1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma} + \frac{\frac{\sigma \cdot (1+\sigma) \cdot B}{r-\gamma}}{r-\sigma}, \tag{7}$$

donde el segundo sumando del segundo término de la igualdad es el valor actual de los beneficios correspondientes a los beneficiarios iniciales, los cuales no se consideraron en (6). Este VAN está expresado en el momento 1. Para compararlo con (5), debe actualizarse.

Generalizando, el VAN de iniciar el proyecto en j, expresado en ese momento, es igual a:

$$VAN = -C + \frac{(1+\sigma)^j \cdot B}{r-\gamma} + \frac{\dfrac{\sigma \cdot (1+\sigma)^j \cdot B}{r-\gamma}}{r-\sigma}.$$

Este planteo puede extenderse a las alternativas de iniciar el proyecto en j-1 y en j:

Concepto correspondiente al:	j-1	j	j+1	j+2	j+3	…
Flujo de iniciar en el momento j-1						
Inversión	- C					…
Beneficios beneficiarios iniciales		$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)^3$	…
Beneficios beneficiarios que se incorporan en el j ésimo período.			$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios beneficiarios que se incorporan en el j+1 ésimo período.				$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j} \cdot B$	$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Beneficios beneficiarios que se incorporan en el j+2 ésimo período.					$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j+1} \cdot B$	…
…						
Flujo de iniciar en el momento j						
Inversión		- C				…
Beneficios beneficiarios iniciales			$(1+\sigma)^{j} \cdot B$	$(1+\sigma)^{j} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$(1+\sigma)^{j} \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios beneficiarios que se incorporan en el j+1 ésimo período.				$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j} \cdot B$	$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Beneficios beneficiarios que se incorporan en el j+2 ésimo período.					$\sigma \cdot (1+\sigma)^{j+1} \cdot B$	…
...						

Observando ambos flujos se puede concluir que la diferencia existente entre ellos es:

Concepto correspondiente al:	j-1	j	j+1	j+2	…
Flujo de iniciar en j					
Inversión		- C			…
Beneficios de beneficiarios iniciales			$(1+\sigma)^{j} \cdot B$	$(1+\sigma)^{j} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Flujo de iniciar en j-1					...
Inversión	+ C				…
Beneficios de beneficiarios iniciales		$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el j ésimo período.			$-\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$-\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…

Se exponen sólo los conceptos que no se cancelan al efectuar la diferencia de flujos y los correspondientes a la alternativa de iniciar en j-1 figuran con los signos cambiados.

Como $(1+\sigma)^j \cdot B = (1+\sigma)^{j-1} \cdot B + \sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B$, el cuadro anterior puede reescribirse como:

Concepto correspondiente al:	j-1	j	j+1	j+2	…
Flujo de iniciar en j					
Inversión		- C			…
Beneficios de beneficiarios iniciales			$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B$ $+ \sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$ $+ \sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…
Flujo de iniciar en j-1					...
Inversión	+ C				…
Beneficios de beneficiarios iniciales		$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	$-(1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)^2$	…
Beneficios de los beneficiarios que se incorporan en el j ésimo período.			$-\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B$	$-\sigma \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B \cdot (1+\gamma)$	…

Esta forma de expresar los conceptos del cuadro permite cancelar algunos de ellos. Si todos los conceptos que continúan siendo relevantes se expresan en el momento j, la ecuación que permite determinar el momento óptimo de inicio es igual a:

$$r \cdot C - \frac{r \cdot (1+\sigma)^{j-1} \cdot B}{r-\gamma} = 0 . \qquad (8)$$

Es interesante notar que el segundo sumando del primer término de la igualdad indica que el costo de postergar un período el inicio del proyecto está dado por los intereses atribuibles a la posposición del logro de beneficios netos por parte de los beneficiarios iniciales correspondientes a la alternativa de iniciar el proyecto en j-1. En efecto, en este caso, la posposición del inicio implica la postergación por un período del logro de todos los beneficios futuros correspondientes a aquellos agentes que el proyecto beneficiaría de iniciarse en j-1.

B. Tamaño óptimo

Uno de los criterios que se usó para optimizar el tamaño de inversión de un proyecto es igualar la TIR marginal con la tasa de descuento. Puesto que este criterio está íntimamente relacionado con la condición de primer orden para la maximización del VAN, es interesante analizar esta conexión. También es interesante ver cómo se refleja el cumplimiento de la condición de segundo orden de maximización del VAN en el comportamiento de la TIR marginal. A continuación se presenta una demostración matemática de las condiciones de primero y segundo orden de maximización del VAN, con relación al tamaño de inversión inicial.

El valor actual del flujo de un proyecto es igual a: $VAN = -C + \sum_{t=1}^{n} \frac{BN_t}{(1+r)^t}$, donde C es la inversión inicial; BN_t es el beneficio neto correspondiente al momento t; r es la tasa de descuento periódica y n es el momento final de la vida del proyecto.

La condición de primer orden es: $\frac{\delta VAN}{\delta C} = -1 + \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{\delta BN_t}{\delta C}}{(1+r)^t} = 0$. (9)

Para que se cumpla la sumatoria de las derivadas primeras de los beneficios netos respecto de C (debidamente actualizadas) debe ser positiva. Esto implica que las derivadas primeras de los beneficios netos respecto de C pueden ser positivas, negativas o iguales a cero.

La TIR marginal de pasar de un tamaño de inversión a otro se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta VAN}{\delta C} = -1 + \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{\delta BN_t}{\delta C}}{(1+\rho')^t} = 0 . \qquad (10)$$

Al comparar (9) con (10), se advierte que la única diferencia que existe entre ellas es que en la primera de ellas aparece r en el mismo lugar que en la segunda figura ρ'. De esto se deduce que cuando ocurre la igualdad de tasas (ρ' = r), se está garantizando el cumplimiento de la condición de primer orden para la maximización del VAN.

La condición de segundo orden es: $\frac{\delta^2 VAN}{\delta C^2} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{\delta^2 BN_t}{\delta C^2}}{(1+r)^t} < 0$.

Para que se cumpla la sumatoria de las derivadas segundas de los beneficios netos respecto de C (debidamente actualizadas) debe ser negativa. Esto implica que las derivadas segundas de los beneficios netos respecto de C pueden ser positivas, negativas o iguales a cero.

Para determinar cómo se refleja el comportamiento de la TIR marginal en el cumplimiento de la condición de segundo orden, se deriva (10) respecto de C:

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{\delta^2 BN_t}{\delta C^2}.(1+\rho')^t - \frac{\delta BN_t}{\delta C}.t.(1+\rho')^{t-1}.\frac{\delta\rho'}{\delta C}}{(1+\rho')^{2t}} = \sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{\delta^2 BN_t}{\delta C^2}}{(1+\rho')^t} - \sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{\delta BN_t}{\delta C}.t.\frac{\delta\rho'}{\delta C}}{(1+\rho')^{t+1}} = 0\,. \qquad (11)$$

Recordando que para que el VAN sea máximo deben cumplirse que la suma de las derivadas primeras de los beneficios netos respecto de C (debidamente actualizadas) sea positiva y que la suma de las derivadas segundas de los beneficios netos respecto de C (debidamente actualizadas) sea negativa, se puede afirmar que para que (11) se cumpla, la derivada de la TIR marginal con respecto a C puede ser positiva, negativa o nula.

Si para todos los períodos ocurre que $\frac{\delta BN_t}{\delta C} > 0$, la expresión (11) se cumple si $\frac{\delta\rho'}{\delta C} < 0$ (lo que significa que debe existir una relación inversa entre ρ' y tamaño de inversión inicial).

C. Ciclo óptimo de duración de equipos

El reemplazo de equipos debe tener en consideración las siguientes problemáticas:

- El deterioro: cuanto más viejo es, mayores son sus costos de operación y/o mantenimiento.
- La obsolescencia: con el paso de los años aparece en el mercado un equipo mejorado, que proporciona la misma utilidad, que suele costar menos y que tiene menores costos de operación y/o mantenimiento que sus antecesores.
- El valor residual: cuanto más viejo es el equipo que se cambia, menor es su valor de venta.

En lo que sigue se muestra cómo determinar el VAC considerando infinitos períodos.

El flujo de costos del primer ciclo de un equipo que se utiliza durante n períodos es:

Concepto	0	1	2	…	n
Inversión	C				
Valor residual					$- C \cdot (1-\beta)^n$
Costos de operación		A	$A \cdot (1+\delta)$	…	$A \cdot (1+\delta)^{n-1}$

Donde n es la cantidad de períodos que se utiliza el equipo en la alternativa considerada; C es el valor de compra del equipo hoy y A es el primer costo operativo correspondiente al primer ciclo. Estos costos crecen a una tasa periódica δ a partir del momento 1. El valor residual se calcula a partir del valor de compra. Se considera para su estimación que el equipo se deprecia periódicamente a una tasa β a partir del momento de la compra.

Si r es la tasa de descuento periódica, el valor de esos costos al momento 0 es igual a:

$$\text{VAC primer ciclo} = C - C\cdot\frac{(1-\beta)^n}{(1+r)^n} + A\cdot\frac{(1+r)^n-(1+\delta)^n}{(1+r)^n\cdot(r-\delta)}.$$

El flujo de costos del segundo ciclo de un equipo que se utiliza durante n períodos es:

Concepto	n	n + 1	n + 2	…	2 · n
Inversión	$C \cdot (1+\lambda)^n$				
Valor residual					$- C \cdot (1-\beta)^n \cdot (1+\lambda)^n$
Costos de operación		$A \cdot (1-\alpha)^n$	$A \cdot (1-\alpha)^n \cdot (1+\delta)$	…	$A \cdot (1-\alpha)^n \cdot (1+\delta)^{n-1}$

Donde λ es la tasa periódica a la que aumenta el valor de compra del equipo y α es la tasa periódica a la que disminuyen los costos operativos de un equipo nuevo con relación a su antecesor inmediato.

El valor de esos costos al momento n es igual a:

$$VAC_n \text{ segundo ciclo} = C \cdot (1+\lambda)^n - C \cdot (1+\lambda)^n \cdot \frac{(1-\beta)^n}{(1+r)^n} + A \cdot (1-\alpha)^n \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(1+r)^n \cdot (r-\delta)}.$$

Con este procedimiento se pueden calcular los valores actuales de todos los ciclos restantes. El conjunto de los valores actuales correspondientes a todos los ciclos posibles es un plan de perpetuidades que ocurren cada n años y que varían a las tasas α y λ.

El valor actual de las inversiones iniciales correspondientes a los infinitos ciclos es igual a:

$$VAC \text{ inversión inicial} = C + \frac{C \cdot (1+\lambda)^n}{(1+r)^n} + \frac{C \cdot (1+\lambda)^{2n}}{(1+r)^{2n}} + ... = \frac{C}{r_n - \lambda_n} \cdot (1+r_n), \tag{12}$$

donde r_n es la tasa de descuento correspondiente a n períodos que es equivalente a la r periódica y λ_n es la tasa de crecimiento del valor de la máquina correspondiente a n períodos.

El valor actual de los valores residuales correspondientes a los infinitos ciclos es igual a:

$$VAC \text{ valor residual} = -\frac{C \cdot (1-\beta)^n}{(1+r)^n} - \frac{C \cdot (1-\beta)^n \cdot (1+\lambda)^n}{(1+r)^{2n}} - ... = -\frac{C \cdot (1-\beta)^n}{r_n - \lambda_n}. \tag{13}$$

El valor actual de los costos operativos correspondientes a los infinitos ciclos es igual a:

$$VAC \text{ costos operativos} = A \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(1+r)^n \cdot (r-\delta)} + A \cdot (1-\alpha)^n \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(1+r)^n \cdot (r-\delta)} \cdot \frac{1}{(1+r)^n} + ... =$$

$$VAC \text{ costos operativos} = \frac{A \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(1+r)^n \cdot (r-\delta)}}{r_n + \alpha_n} \cdot (1+r)^n = A \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(r-\delta) \cdot (r_n + \alpha_n)}, \tag{14}$$

donde α_n es la tasa de decrecimiento del costo de operación de la máquina con relación a su antecesora, correspondiente a n períodos.

El valor actual de todos los costos es igual a la suma de las fórmula (12), (13) y (14):

$$VAC = \frac{C}{r_n - \lambda_n} \cdot (1+r_n) - \frac{C \cdot (1-\beta)^n}{r_n - \lambda_n} + A \cdot \frac{(1+r)^n - (1+\delta)^n}{(r-\delta) \cdot (r_n + \alpha_n)}. \tag{15}$$

La fórmula (15) es general:

- Si el valor de compra del equipo no varia a través del tiempo, λ asume el valor 0.
- Si el valor residual del equipo es nulo, β asume el valor 1.
- Si los costos asociados a un equipo son constantes a través del tiempo, δ es cero.
- Si los costos asociados a un nuevo equipo son iguales a su predecesor, α es 0.

Bibliografía consultada:

BOTTEON, Claudia y FERRA, Coloma, “Costo de oportunidad y flujo de beneficios y costos”, en imprenta de la FCE, “Serie Estudios - Economía”, N° 48 (Mendoza, FCE-UNCuyo, 2005).

BOTTEON, Claudia y FERRA, Coloma, “Elementos de matemática financiera para la evaluación de proyectos”, en “Serie Estudios - Economía”, N° 47 (Mendoza, FCE-UNCuyo, 2005).

FERRA, Coloma, “Consideraciones acerca del momento óptimo de iniciar una inversión”, en "Revista de la FCE", N° 97/98 (Mendoza, FCE-UNC, 1988).

FERRA, Coloma y BOTTEON, Claudia, “Indicadores de rentabilidad”, en imprenta de la FCE, “Serie Estudios - Economía”, N° 49 (Mendoza, FCE-UNCuyo, 2005).

FONTAINE, Ernesto, “Evaluación social de proyectos”, 12a. ed. (México, Alfaomega, 1999).

GUTIERREZ, Héctor, “Evaluación de proyectos ante certidumbre” (Santiago de Chile, Universidad de Chile, 1994).