

Aplicaciones cosmológicas de cuásares con efecto lente gravitatoria recientemente descubiertos

V. Motta¹

¹ Instituto de Física y Astronomía, Facultad de Ciencias, Universidad de Valparaíso, Chile

Received: 16 February 2024 / Accepted: 03 April 2024

©The Authors 2024

Resumen / Los sistemas lentes gravitatoria son una herramienta útil para examinar temas astrofísicos tales como el contenido y la cinemática del Universo. Como fuentes variables, los AGN permiten mediciones de los retrasos temporales entre imágenes, que pueden usarse para estimar distancias absolutas (es decir, una técnica alternativa para restringir el valor de la constante de Hubble). Presentamos los resultados de una extensa campaña de la colaboración *Time Delay Cosmography* para encontrar nuevos cuásares (el tipo más brillante de AGN) con efecto lente, para producir modelos de masa y retrasos temporales confiables.

Abstract / Strong gravitational lensing is a useful technique for examining astrophysical issues such as the general content and kinematics of the Universe. As variable sources, AGNs enable measurements of the time delays between images, which can be used to estimate absolute distances (i.e. an alternative technique to constrain the value of the Hubble constant). We present the results of an extended campaign of the Time Delay Cosmography collaboration to find new lensed quasars (brightest kind of AGNs), to produce reliable mass models and time delays.

Keywords / cosmology: cosmological parameters — cosmology: distance scale — gravitational lensing: strong — gravitational lensing: micro

1. Introducción

Aunque el denominado modelo cosmológico estándar, Λ Cold Dark Matter (Λ CDM), logra explicar la mayor parte de los datos cosmológicos disponibles, todavía se desconoce la naturaleza de sus principales componentes. Para dos de esos ingredientes, la materia oscura (DM, Rubin & Ford, 1970; Trimble, 1987) y la energía oscura (DE, Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999), la evidencia física proviene de observaciones astrofísicas.

En los últimos años, el aumento de la sensibilidad instrumental ha evidenciado tensiones entre los diferentes conjuntos de datos cosmológicos que son interesantes porque, si no se deben a errores sistemáticos, podrían indicar un fracaso del modelo Λ CDM (Efstathiou, 2021). Las anomalías más notables aparecen cuando se comparan las mediciones del satélite Planck (Planck Collaboration et al., 2020) de las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas (CMB) con datos de bajo desplazamiento al rojo. En particular, hay tensiones entre las estimaciones de la constante de Hubble (H_0) obtenida por Planck y por datos del universo tardío (e.g. Riess et al., 2021). El motivo para enfocarse en la tensión en H_0 es porque estadísticamente es la más significativa y persistente, con un desacuerdo de 4σ a 6σ dependiendo de los conjuntos de datos considerados (ver Fig 1, Di Valentino et al., 2021).

El valor de H_0 que obtiene Planck usando un modelo plano Λ CDM es $H_0 = 67.27 \pm 0.60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con un nivel de confianza (CL) del 68% (Planck Collaboration et al., 2020). Por otro lado, para medir H_0 localmente se

utiliza la relación distancia-desplazamiento al rojo, que se obtiene construyendo una “escalera de distancias”. El primer escalón es geométrico (por ejemplo, usando paralaje) y se utiliza para calibrar las luminosidades de cierto tipo de estrellas (e.g., variables Cefeidas pulsantes y supernovas del tipo Ia o SNIa) que se pueden ver a grandes distancias donde sus desplazamientos al rojo miden la expansión cósmica. La última medición de la colaboración *Supernovae and H_0 for the Equation of State of dark energy* (SH0ES, Riess et al., 2021) entrega un valor $H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a un CL de 68%.

Los intentos de resolver esta tensión en la medición de H_0 siguen dos caminos: (i) la búsqueda de nuevos conjuntos de datos (para detectar posibles errores sistemáticos) y (ii) modelos alternativos a Λ CDM para explicar DE (Motta et al., 2021). En el primer camino, el retraso temporal observado entre imágenes de cuásares con efecto lente puede usarse para medir H_0 con suposiciones independientes de las utilizadas con SNIa.

2. El efecto lente gravitatoria

El efecto lente gravitatoria se produce cuando la luz es desviada de su trayectoria rectilínea por un campo gravitatorio, por lo tanto, las distribuciones de masa (e.g galaxias) actúan como una lente óptica sobre la luz. Einstein predijo que el ángulo de desviación $\hat{\alpha} = 4GM/\xi c^2$, donde G es la constante de gravitación universal, M la masa de la lente, ξ el parámetro de impacto y c la velocidad de la luz. Como la cantidad de deflexión que

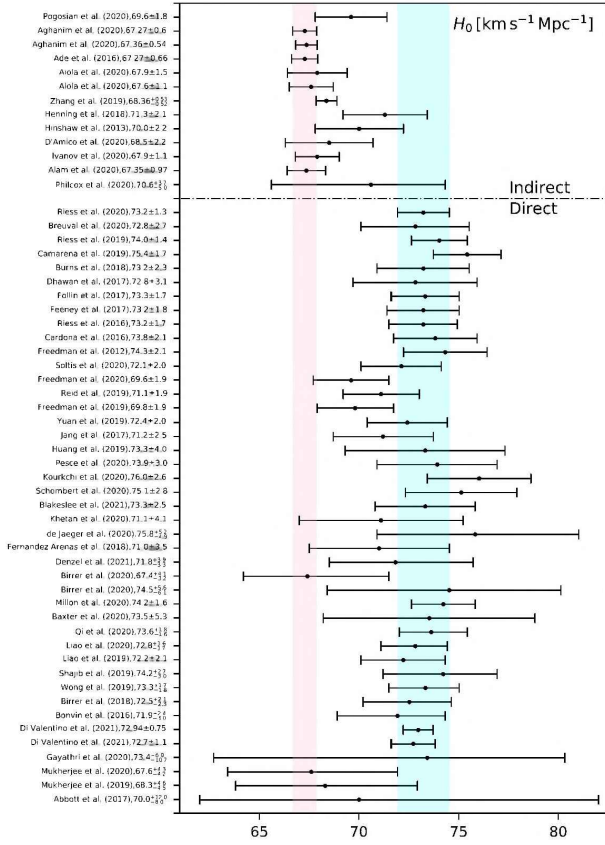


Fig. 1. Gráfico de valores de H_0 con nivel de confianza del 68% usando distintos conjuntos de datos astronómicos. La banda vertical cyan corresponde al valor obtenido por SH0ES banda vertical rosada representa el valor de la colaboración Planck. Figura realizada con el código <https://github.com/lucavisinelli/H0TensionRealm> (Di Valentino et al., 2021).

experimenta la luz depende sólo de la masa total (sin necesidad de suponer equilibrio virial o cierta proporción entre materia bariónica y DM), las lentes gravitatorias son una valiosa herramienta para determinar la distribución de masa de las galaxias y los cúmulos de galaxias. Por otro lado, como el efecto lente implica una amplificación o magnificación de la fuente, significa que podemos usarlas para estudiar objetos lejanos que de otro modo serían demasiado débiles (Caminha et al., 2022; Katz et al., 2023).

El efecto lente gravitatoria no es sólo un fenómeno estático, la dependencia temporal también tiene aplicaciones importantes. Por ejemplo, el retraso temporal (ver 2.2) nos permite medir la constante de Hubble (Refsdal, 1964) y las fluctuaciones en el brillo de las imágenes (efecto microlente), producida por el movimiento de estrellas en la galaxia lente, puede usarse para estudiar la distribución de las estrellas y objetos compactos en nuestra galaxia (Paczynski, 1986) o en galaxias lente (Chang & Refsdal, 1979).

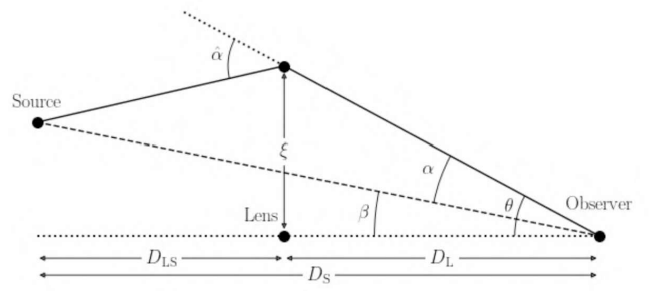


Fig. 2. Esquema del efecto lente gravitatoria. Los rayos de luz provenientes de un cuásar (*source*) son desviados por el campo gravitatorio de la galaxia (*lens*) y produciendo imágenes múltiples (*observer*).

2.1. La ecuación de la lente

En el caso de galaxias lejanas actuando como lentes, su tamaño es mucho menor que las distancias entre la fuente, la lente y el observador (D_S y D_L , respectivamente). Por lo tanto, podemos hacer la aproximación de lente delgada en la dirección perpendicular al rayo de luz, es decir, que la desviación ocurrirá en el plano de la lente (ver Fig. 2). La trayectoria aproximada puede describirse como la luz propagándose en línea recta hasta una distancia mínima de la lente ($\vec{\xi}$) donde su dirección cambia (ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$), para proseguir nuevamente en línea recta hasta el observador. En ausencia de la lente, la fuente se vería en la posición angular $\vec{\beta}$ en el plano de la fuente, pero debido a la deflexión la observamos en $\vec{\theta}$ (i.e. son “espejismos” de la fuente).

Debido a que los ángulos involucrados son pequeños, la relación entre ellos es $\vec{\beta} = \vec{\theta} - D_{LS}\hat{\alpha}(\vec{\xi})/D_S$ y se conoce como ecuación de la lente. Para simplificar esta ecuación, es común definir el ángulo de deflexión reducido $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = D_{LS}\hat{\alpha}(\vec{\theta})/D_S$, usando que $\vec{\xi} = D_L\vec{\theta}$. Entonces, la ecuación de la lente se puede escribir como $\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$.

2.2. Potencial gravitatorio y retraso temporal

Se puede definir el potencial gravitatorio (ψ) o de deflexión de la lente (que será axisimétrico para distribuciones de masa axialmente simétricas) como $\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \nabla^2\psi = 2\kappa(\vec{\theta}) = 2\Sigma(\vec{\theta})/\Sigma_{crit}$, donde

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{crit}} = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{D_{LS}D_L}{D_S} \Sigma(\vec{\theta}) \quad (1)$$

es la convergencia o la densidad superficial de masa adimensional y

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_{LS}D_L}, \quad (2)$$

es la densidad superficial de masa crítica. Esta definición nos permite reescribir la ecuación de lente como

$$\nabla \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \psi(\vec{\theta}) \right] = 0. \quad (3)$$

Esto significa que, para una fuente ubicada en $\vec{\beta}$, los extremos de la función nos entrega la posición de las

imágenes (“espejismos”) de la fuente que estarán situadas en $\vec{\theta}$. Esta función escalar se conoce como potencial de Fermat definido por

$$\tau(\vec{\theta}; \vec{\beta}) = \frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \psi(\vec{\theta}) \quad (4)$$

Esta función está relacionada con el retraso temporal que experimenta la luz a lo largo de su trayectoria. En presencia de un campo gravitatorio, la luz se retrasa en relación a su trayectoria no perturbada por dos motivos: (i) la trayectoria desviada es más larga que la no perturbada, lo que produce un retraso temporal geométrico Δt_{geom} y (ii) el tiempo se dilata a lo largo de la trayectoria de la luz, lo que da el retraso temporal gravitatorio $\Delta t_{Shapiro}$ (discutido por primera vez por Shapiro, 1964). En el caso de campo gravitatorio débil, podemos aproximarlos como (i) el retraso temporal geométrico es igual a la longitud del camino desviado dividido por la velocidad de la luz y (ii) el retraso temporal gravitatorio a lo largo del camino no perturbado:

$$\Delta t_{geom} = \frac{1 + z_L}{2c} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 \quad (5)$$

$$\Delta t_{Shapiro} = -(1 + z_L) \frac{D_S D_L}{D_{LS}} \psi(\vec{\theta}) \quad (6)$$

donde z_L es el desplazamiento al rojo de la lente. El retraso temporal total es

$$\Delta t = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_S D_L}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} |\vec{\theta} - \vec{\beta}|^2 - \psi(\vec{\theta}) \right] \quad (7)$$

$$= \frac{D_{\Delta t}}{c} \tau(\vec{\theta}; \vec{\beta}) \quad (8)$$

donde la distancia de retraso temporal es $D_{\Delta t} = (1 + z_L) D_L D_S / D_{LS}$. Como la distancia diámetro angular depende de H_0 y del modelo seleccionado para el Universo (Hogg, 1999), $D_{\Delta t} \propto 1/H_0$. El retraso temporal (Δt) entre imágenes puede medirse utilizando curvas de luz (ver 3.1)). La Fig. 3 muestra las curvas de luz para un sistema observado por la colaboración *COSmological MONitoring of GRAvitational Lenses* (COSMOGRAIL*). Usando la configuración y la morfología de las imágenes se puede modelar la distribución de masa de la lente para determinar el potencial de la lente ($\xi(\vec{\theta})$) y la posición no perturbada de la fuente ($\vec{\beta}$). Por lo tanto, modelando la distribución de masa de la lente (asociada con $\tau(\vec{\theta}; \vec{\beta})$) y midiendo el retraso temporal entre imágenes de cuásares, se puede calcular $D_{\Delta t}$ y H_0 .

2.3. Incertidumbres en la distribución de masa

La primera y principal fuente de error del modelado se debe a la transformada de hoja de masa (*mass sheet transform*, MST, Falco et al., 1985). Es una degeneración matemática que deja los observables de lente sin cambios, mientras reescala el retraso temporal absoluto y, por lo tanto, el H_0 inferido. Transforma la ecuación de la lente en $\lambda \vec{\beta} = \vec{\theta} - \lambda \vec{\alpha}(\vec{\theta}) - (1 - \lambda) \vec{\theta}$ (donde λ es el factor multiplicativo), la convergencia $\kappa_\lambda(\theta) = \lambda \kappa(\theta) + (1 - \lambda)$, el retraso temporal $\Delta t_\lambda = \lambda \Delta t$ y la constante de Hubble $H_{0\lambda} = \lambda H_0$ (Birrer et al., 2020). La degeneración se

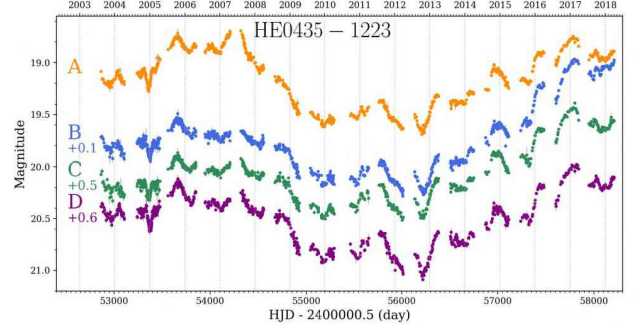


Fig. 3. Curva de luz (magnitud aparente vs. tiempo) observada para el sistema lente gravitatoria cuádruple HE0435 – 1223. La variación en flujo para cada imagen del cuásar es representada por las letras A, B, C, D. Algunas curvas han sido desplazadas en magnitud para distinguirlas (la cantidad desplazada en magnitud se indica en cada curva). Tomado de la página web de la colaboración COSMOGRAIL.

puede levantar mediante (i) el uso de trazadores independientes del potencial gravitatorio, como por ejemplo, el uso de la cinemática estelar en la galaxia lente o (ii) mediante la suposición de un perfil de densidad de masa (por ejemplo, una ley de potencias para las estrellas y un perfil de Navarro et al., 1997, para el halo de materia oscura).

La pendiente de la distribución radial de masa de la lente y la distancia de retraso temporal tienen influencia directa en los observables: dado un retraso temporal, una galaxia con una pendiente pronunciada produce un $D_{\Delta t}$ más bajo que el de una con una pendiente menor. La pendiente radial de la galaxia lente puede medirse en la posición de las imágenes usando fuentes extendidas (e.g. la galaxia anfitriona del cuásar con efecto lente, Suyu, 2012).

Por otro lado, las estructuras a lo largo de la línea de visión también afectan los retrasos temporales observados. Las masas externas y los vacíos provocan un enfoque y desenfoque adicional en los rayos de luz, respectivamente. Se asume que el efecto de las estructuras en la línea de visión pueden caracterizarse por un sólo parámetro, la convergencia externa κ_{ext} , con valores positivos para sobredensidades y negativos para subdensidades (Keeton, 2003). Excepto en el caso de las galaxias muy cercanas a la lente, la contribución κ_{ext} de las estructuras en la línea de visión a la lente es constante a lo largo del sistema. Un modelo de masa que no considere la convergencia externa conduce a una predicción insuficiente o excesiva de $D_{\Delta t}$ para perturbaciones en la línea de visión que sean sobre- o subdensos. El $D_{\Delta t}$ verdadero se relaciona con el que modela mediante la ecuación $D_{\Delta t} = D_{\Delta t}^{model} / (1 - \kappa_{ext})$.

La forma de resolver estas degeneraciones son (i) utilizar información de la cinemática estelar de la galaxia lente (e.g. Treu & Koopmans, 2002) para hacer una estimación independiente de la masa de la lente y (ii) estudiar el entorno de la lente (e.g. Keeton & Zabludoff, 2004) para estimar κ_{ext} directamente.

*<https://www.epfl.ch/labs/lastro/scientific-activities/cosmograil/>

3. Medición de H_0 usando retraso temporal

Para lograr una medición precisa de H_0 usando retraso temporal, es necesario: (i) realizar mediciones rigurosas de los retrasos temporales relativos en el tiempo de llegada de imágenes múltiples de cuásares; (ii) comprender la distorsión a gran escala a lo largo de la línea de visión; y (iii) un modelo preciso de la distribución de masa dentro de la galaxia lente.

El primer problema se resuelve con un monitoreo fotométrico de gran cadencia y alta precisión (e.g. Courbin et al., 2018), que a su vez es validado mediante simulaciones. Para el segundo punto se hace una corrección estadística del efecto en la línea de visión de lentes gravitacionales fuertes en comparación con simulaciones numéricas cosmológicas (e.g. Suyu et al., 2013). Millon et al. (2020) demostraron que los residuos de la corrección en la línea de visión son más pequeños que los errores generales. El tercer problema se enfrenta analizando imágenes de alta calidad de la galaxia anfitriona de los cuásares con efecto lente, que provee resolución espacial para restringir los modelos de lentes (e.g. Suyu et al., 2009). En estos casos, el acceso a datos con miles de píxeles (tanto para la fuente como para la lente) permite el uso de modelos más complejos y flexibles en lugar de utilizar sólo las posiciones y flujos de las imágenes del cuásar.

3.1. Medición del retraso temporal

Los núcleos activos de galaxias (*Active Galactic Nuclei*, AGN) son fuentes ideales para el monitoreo porque muestran una variabilidad temporal intrínseca a distintas longitudes de onda y la amplitud de la variabilidad aumenta con la escala temporal. Idealmente se necesitan campañas de seguimiento periódicas y prolongadas, pero en la práctica están limitadas por el número de noches de observación disponibles y por la falta de una cadencia uniforme. La mayor precisión en los retrasos temporales se deben a las campañas de monitoreo en observatorios dedicados a un monitoreo a largo plazo.

La colaboración COSMOGRAIL ha logrado temporadas de 8 a 12 meses de duración durante 9 años, con un promedio de intervalos de 3 a 4 días (Treu & Marshall, 2016). Además, aplican la deconvolución simultánea de las imágenes fotométricas individuales, utilizando un modelo puntual para las imágenes lente del cuásar y uno extendido para representar la galaxia lente y la galaxia anfitriona del AGN. La combinación de mediciones de seis sistemas lente permite obtener $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, una precisión del 2,4% de H_0 (Wong et al., 2020).

3.2. Efectos en la línea de visión

El problema consiste en cómo incorporar la información sobre las posiciones de las galaxias en la línea de visión que perturban los rayos de luz de la fuente sin introducir sesgos adicionales por las suposiciones sobre cómo se distribuye su materia oscura y cómo contribuye el resto de la masa en el vecindario de la lente.

Suyu et al. (2010) propusieron una solución para este problema que consiste en comparar la distribución numérica de galaxias en B1608 + 656 con distribuciones similares extraídas de la simulación *Millennium*. Los efectos en la línea de visión se modelaron con un único parámetro de convergencia externo.

3.3. Modelado de la distribución de masa

Imágenes fotométricas con suficiente profundidad y resolución son capaces de separar la componente puntual (núcleo del AGN) de su galaxia anfitriona (con menor brillo superficial) y revelar, en muchos casos, arcos extendidos que conectan las imágenes puntuales. Idealmente, dado que estos arcos cubren miles de píxeles, se podría usar la información sobre la variación del ángulo de deflexión en cada punto para obtener el potencial gravitatorio con gran precisión. En la práctica, el análisis está limitado por la presencia de ruido y resolución limitada. Sin embargo, observaciones con *Full Width at Half Maximum* (FWHM) de 0.1" a 0.2" generan buenos resultados si hay un modelo adecuado para la *Point Spread Function* (PSF) del instrumento utilizado.

El modelo matemático utilizado debe describir tres componentes: (i) el brillo superficial de la fuente, (ii) el brillo superficial de la lente, (iii) el potencial gravitatorio de la lente. En principio, cada componente puede describirse mediante funciones simples (como el perfil de Sérsic o el elipsoide singular isoterma) o combinado con modelos más complicados. Es importante mantener un equilibrio entre la necesidad de imponer restricciones y la flexibilidad para obtener una estimación realista, el primero puede dar lugar a errores subestimados y el segundo a una pérdida de precisión.

4. Búsqueda de nuevos sistemas lente

Una de las mayores limitaciones que enfrenta la estimación de H_0 mediante el uso del efecto lente gravitatoria es el número relativamente pequeño de sistemas a los que se puede aplicar. Hasta 2015 se conocía alrededor de 200 sistemas lente cuásar, recopilados por la colaboración *CfA-Arizona Space Telescope LENS Survey* (CASTLES**). Sin embargo, no todos los sistemas son adecuados para estimar el retraso temporal (e.g. pares de imágenes cercanas difíciles de resolver con telescopios de 2-4 m, configuraciones simétricas que dan lugar a retrasos temporales de $\lesssim 5$ días), restringiendo el estudio a unas pocas decenas de objetos.

Dos criterios necesarios para considerar un objeto como lente gravitatoria son: (i) imágenes múltiples claramente identificadas y (ii) que la configuración de las imágenes sea reproducida por un modelo simple. El segundo criterio es importante porque nos permite eliminar contaminantes tales como regiones HII, cuásares binarios con colores diferentes. Con un seguimiento posterior, el desplazamiento al rojo de la fuente y la lente son necesarios para establecer el modelo lente.

La aparición de una nueva generación de relevamientos de gran campo propició la búsqueda de nuevos sis-

**<https://lweb.cfa.harvard.edu/castles/>

temas lente. Por ejemplo, la colaboración *STRong lensing Insights into Dark Energy Survey* (STRIDES^{***}, Treu et al., 2018) utilizó el *Dark Energy Survey* (DES) para buscar nuevos sistemas cuásares con efecto lente. Más recientemente, la colaboración *Time Delay Cosmography* (TDCosmo^{****}), que engloba STRIDES y COSMOGRAIL, ha descubierto ≈ 200 nuevos sistemas. Para las estimaciones de retraso temporal, se prefiere los cuádruples porque proporcionan mejores restricciones (la posibilidad de arcos producidos por la galaxia anfitriona del cuásar) y tres retrasos temporales por sistema (en lugar de uno producido por un sistema doble). Sin embargo, esta configuración es un evento raro y por eso la importancia de que TDCosmo haya triplicado el número de cuádruples conocido (agregando 30 sistemas a los 15 conocidos, Shajib et al., 2019; Schmidt et al., 2023).

5. Comentarios finales

Como mencionamos anteriormente, la mayor limitación para la estimación de H_0 a partir de cuásares con efecto lente es el tamaño de la muestra. Se necesita un aumento significativo, que probablemente se obtenga en esta década gracias a grandes relevamientos. Aquellos en el dominio temporal (como el Observatorio Rubin[†]) tendrán la ventaja de proporcionar retrasos temporales, aunque todavía será necesario el seguimiento espectroscópico para obtener el desplazamiento al rojo de la fuente y de la lente e investigar la contribución de materia en la línea de visión a la lente, así como imágenes fotométricas profundas y de alta resolución para obtener un modelo lente de precisión.

La posibilidad de tener 10 000 candidatos a sistema lente gravitatoria (Treu, 2010), pone de relieve la necesidad de automatizar el modelado y de priorizar estrategias para el posterior seguimiento (espectroscópico y de alta resolución).

Agradecimientos: La autora agradece a los organizadores de la 65ta Reunión Anual de la Asociación Argentina de Astronomía por su invitación a presentar este informe y a los Editores de este

Boletín por su paciencia con la autora durante la preparación de este manuscrito.

Referencias

- Birrer S., et al., 2020, *A&A*, 643, A165
 Caminha G.B., et al., 2022, *A&A*, 666, L9
 Chang K., Refsdal S., 1979, *Nature*, 282, 561
 Courbin F., et al., 2018, *A&A*, 609, A71
 Di Valentino E., et al., 2021, *Classical and Quantum Gravity*, 38, 153001
 Efstathiou G., 2021, *MNRAS*, 505, 3866
 Falco E.E., Gorenstein M.V., Shapiro I.I., 1985, *ApJL*, 289, L1
 Hogg D.W., 1999, arXiv e-prints, astro-ph/9905116
 Katz H., et al., 2023, *MNRAS*, 518, 592
- ^{***}<http://strides.astro.ucla.edu>
^{****}<https://obswww.unige.ch/~lemon/tdcosmo-master/index.html>
[†]<https://rubinobservatory.org>
- Keeton C.R., 2003, *ApJ*, 584, 664
 Keeton C.R., Zabludoff A.I., 2004, *ApJ*, 612, 660
 Millon M., et al., 2020, *A&A*, 639, A101
 Motta V., et al., 2021, *Universe*, 7, 163
 Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1997, *ApJ*, 490, 493
 Paczynski B., 1986, *ApJ*, 304, 1
 Perlmutter S., et al., 1999, *ApJ*, 517, 565
 Planck Collaboration, et al., 2020, *A&A*, 641, A5
 Refsdal S., 1964, *MNRAS*, 128, 307
 Riess A.G., et al., 1998, *AJ*, 116, 1009
 Riess A.G., et al., 2021, *ApJL*, 908, L6
 Rubin V.C., Ford W. Kent J., 1970, *ApJ*, 159, 379
 Schmidt T., et al., 2023, *MNRAS*, 518, 1260
 Shajib A.J., et al., 2019, *MNRAS*, 483, 5649
 Shapiro I.I., 1964, *PhRvL*, 13, 789
 Suyu S.H., 2012, *MNRAS*, 426, 868
 Suyu S.H., et al., 2009, *ApJ*, 691, 277
 Suyu S.H., et al., 2010, *ApJ*, 711, 201
 Suyu S.H., et al., 2013, *ApJ*, 766, 70
 Treu T., 2010, *ARA&A*, 48, 87
 Treu T., Koopmans L.V.E., 2002, *MNRAS*, 337, L6
 Treu T., Marshall P.J., 2016, *A&A Rv*, 24, 11
 Treu T., et al., 2018, *MNRAS*, 481, 1041
 Trimble V., 1987, *ARA&A*, 25, 425
 Wong K.C., et al., 2020, *MNRAS*, 498, 1420