Reunión de Centros de Investigación Económica, 5
La Plata, 1969

ANALISIS CRITICO SOBRE EL USO DE MODELOS GRAVITACIONALES EN ESTUDIO DE FACTIBILIDAD DE PROYECTOS DE CARRETERAS

Miguel Eduardo Martinez

I. Introducción

En los estudios de factibilidad económica de proyectos de carretera es común la utilización de modelos gravitacionales para la determinación del aumento en el volumen de tráfico inducido por el proyecto.

El propósito del presente trabajo, es presentar algunas ideas críticas sobre la validéz de esas proyecciones cuando la mayor parte del tráfico se refiere al intercambio de bienes.

En particular, pensamos que si bien esos modelos son sumamente útiles en el aspecto descriptivo de una realidad económica, no son necesariamente útiles como herramienta de predicción. Creemos que al utilizarlos en ese sentido se les está exigiendo más de lo que el modelo puede dar.

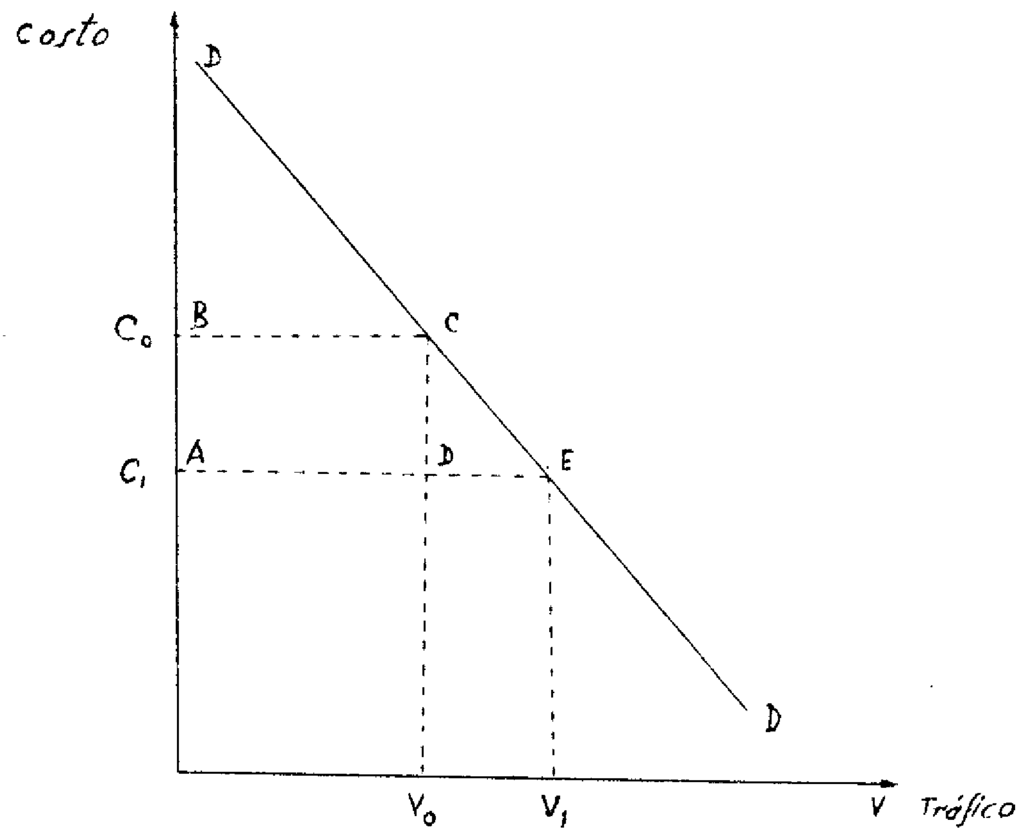
Este trabajo debe entenderse como una primera aproximación al problema o más bien en el sentido de estar constituido por un conjunto de ideas sobre sus limitaciones a la utilización de estos modelos que surgen.

Dada esa finalidad, mucho agrodecemos todos los comentarios o sugerencias que se nos hagan para así corregir nuestros errores y mejorar nuestro conocimiento sobre estos modelos.

BIBLIOTECA CO.NA.DE.

II. El modelo Gravitacional como Instrumento de Proyección

El análisis generalmente usado para la evaluación de proyectos de carretera consiste en medir el ahorro social que produce el mejoramiento de la ruta en relación a los costos de operación de los vehículos que transitaban por ella en el año base del estudio, adicionándole ½ de esa magnitud multiplicada por el volumen del nuevo tráfico inducido por el mejoramiento de la ruta.



La idea implícita, es que existe una demanda por viajes por la ruta (DL), la que relaciona cantidad de viajes con costo de los mismos.

Dado el costo de operación antes del mejoramiento (Co) y suponiendo que no existen discrepancias entre los costos privados y sociales del viaje, tenemos se realizan un volumen V_0 de viajes. A concecuencia del mejoramiento de la ruta el costo social de operación desciende a C_1 y por lo tanto, tenemos dos fuentes de beneficio social. El antiguo volumen de tráfico V_0, se beneficia con la reducción en costo de transporte (Area ABCD) y por otra parte tenenmos una ganancia en exedente del consumidor, medida por área CDE.

El modelo supone que no existen externalidades en relación al tráfico creado, es decir que el Volumen $V_1 - V_0$ no existiría en ninguna forma antes del mejoramiento. Esto es en general falso, ya que parte de ese tráfico ha sido atraído, ya sea desde otros caminos o desde otros medios de transporte, en tanto otra parte es en realidad, nuevo tráfico.

Al primer efecto se lo denomina "efecto desplazamiento de tráfico" en tanto el segundo "efecto creación de tráfico".

Ello da idea que el triangulo CDE es en realidad una medida del beneficio social bruto del mejoramiento en relación al tráfico creado.

Para obtener el beneficio neto se debería determinar que parte de $V_1 - V_0$ es tráfico desplazado y cuál es tráfico realmente nuevo.

Respecto del tráfico desplazado deberíamos deducir como pérdida el beneficio social que éste tenía en el antiguo medio de transporte y adicionar como beneficio del proyecto el costo social de transportarlo por el viejo medio de transporte.

Se hace necesario entonces un análisis exhaustivo de los flujos de mercaderías y bienes entre las regiones conectadas por la ruta, como así tambien el cálculo del costo social de transporte por cada medio. Este es en realidad el costo social marginal de transportar esa carga desplazada y en general es distinto del flete que se cobra.

Comúnmente se computa como beneficio atribuible al camino la diferencia entre el flete o costo de transporte por el viejo medio y la ruta mejorada. Es inmediato que de esa forma se sobreestiman los beneficios sociales atribuibles al proyecto.

En cuanto al tráfico realmente nuevo, se lo determina en general, mediante la aplicación de modelos gravitacionales.

La idea de estos modelos es que el volumen de tráfico entre dos puntos varía en relación directa a las masas o fuerzas de atracción de esas regiones (medidas por variables tales como población, ingreso, etc.) e inversamente con la distancia que les separa (se suele representar este factor por el costo de transporte entre ambas regiones).

Llamemos T_j al volumen de tráfico entre nuestra región y la región "j" "CT_j" es el respectivo costo de transporte, en tanto Y_j e Y son los dos ingresos de la región "j" y de la nuestra. Por último, K es una constante.

El modelo gravitacional sugiere la existencia de la siguiente relación funcional:

$$T_j = K \frac{Y^{\beta_0} \, Y_j^{\beta_1}}{CT_j^{\beta_2}} \qquad [1]$$

La ecuación se lineariza en logaritmos y se estima estadísticamente mediante datos interregionales de sección transversal sobre las variables correspondientes.

β_2 representa la elasticidad del volumen de tráfico respecto del costo del viaje. Dado que conocemos el porcentaje de reducción en el mismo a concecuencia del proyecto puede determinarse en el volumen de tráfico.

Estos modelos se originaron para explicar los determinantes de los viajes de personas entre disitintos sectores de una ciudad. Se los plicó tambien con éxito para movimientos interregionales, generalizándolos luego para flujos de bienes.

Cuando se los aplica a flujos de bienes, consideramos que brindan una excelente descripción del proceso, pero no tienen mayor valor como herramienta de proyección.

Es decir, que si en nuestra ruta tuviéramos sólo tráfico de bienes (es decir que sólo circularan camiones), no sería correcto proyectar el aumento de tráfico a través de un modelo gravitacional.

Esta proposición quedará aclarada al considerar los determinantes de los flujos interregionales de bienes.

Dadas dos regiones, para cada bien puede derivarse una demanda por transporte. Esta se obtiene desde las demandas y ofertas por el mismo en ambas regiones, e indica las cantidades que se intercambiarán a cada costo de transporte.

Fijado el costo de transporte, se determina la cantidad intercambiada.

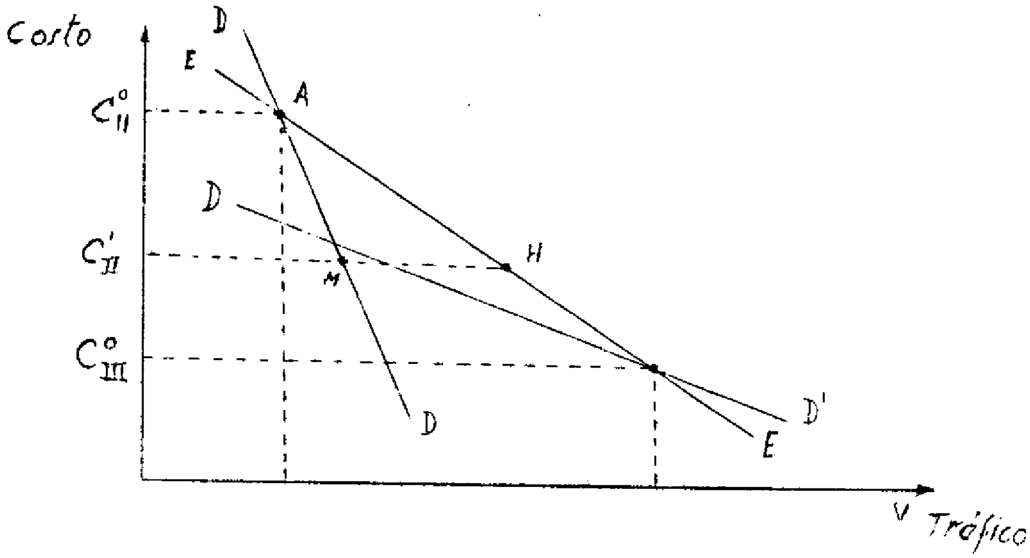
Pensemos en una región que comercia con muchas otras cada flujo de bienes entre ella y cualquiera de las otras es el resultado del equilibrio entre la respectiva demanda por transporte y el correspondiente costo de transporte.

Estos datos son los utilizados como base por el modelo gravitacional para estimar la relación [1] . Vemos que aquella sería completamente válida para describir la situación actual, por cuanto se le deriva mediante el análisis de puntos de equilibrio, pero la proyección del aumento de tráfico ante una reducción en el costo de transporte, debería hacerse por medio de la elasticidad de la demanda por transporte respectiva y no usando esa "pseudo" elasticidad obtenida mediante el modelo gravitacional.

Esto quedará claro con un ejemplo: Supongamos un modelo de tres regiones: I, II, y III. C^o_{II} y C^o_{III} son los costos de transporte entre la región I y las regiones II y III respectivamente.

DD y D'D son las demandas por transporte de ese bien respecto de las regiones II y III. En consecuencia, nuestras observaciones son los puntos A y B. (Ver gráfico en página siguiente). Usando el modelo gravitacional ajustaríamos una función como EE.

Esa función describe perfectamente la situación, en el sentido que introduciendo los correspondientes costos de transporte tendríamos los flujos hacia cada región, pero no es correcto usarla para proyectar. Por ejemplo, si C^o_{II} descendiera a C^1_{II} , hubiéramos proyectado el volumen de tráfico representado por el punto H, cuando en realidad el nuevo nivel de tráfico es el del punto M.



Vemos entonces, que la proyección debería realizarse por medio de la elasticidad de la respectiva demanda por transporte. Como veremos a continuación, no es dificil derivar una expresión para esa elasticidad.

III. Determinantes de la Demanda por Transporte

Examinaremos ahora los determinantes de la demanda por transporte.

Comenzaremos por analizar el caso en que el bien en cuestión se intercambia sólo entre dos regiones. Luego veremos que sucede cuando tenemos mas de una región exportadora y sólo una región importadora y por último el caso de una región exportadora y mas de una región importadora.

Finalmente, generalizaremos el análisis para un bien que es exportado e importado por mas de una región.

I) Los Regiones

Comencemos con un modelo simple en el que tenemos sólo dos regiones, la región I que exporta el bien y la II que lo importa. Sean X_{II}^{D} y X_{I}^{S} la demanda por importaciones y oferta por exportaciones de las regiones II y I respectivamente.

$$\begin{cases} X_{II}^{D} = X_{II}^{D}\left(P_x^{II}, y_{II}\right) \\ X_{I}^{S} = X_{I}^{S}\left(P_x^{I}\ y_{I}\right) \\ X_{I}^{S} = X_{II}^{D} \end{cases}$$

Donde P_x^{II} es el precio del bien en la región II y P_x^{I} es el correspondiente a la región I, de modo que:

$$P_x^{II} = P_x^{I} + CT.$$

Siendo CT el costo de transporte entre esas regiones. y_I é y_{II} representan el ingreso en las regiones I y II. El modelo se convierte entonces en:

$$\begin{cases} X_{II}^{D} = X^{D}\left(P_x^{I}, CT, y_{II}\right) \\ X_{I}^{S} = X_{I}^{S}\left(P_x^{I}, y_{I}\right) \\ X_{II}^{D} = X_{I}^{S} \end{cases}$$

Resolviendo: $P_x^{I} = P\left(X_{II}, y_{I}, y_{II}, CT\right)$, desde donde:

$$X_2^{T} = T\left(CT, y_{I}, y_{II}\right)$$

esta es nuestra demanda por transporte, de la que se desprende que la cantidad enviada es función no sólo del costo de transporte, sino de las demás variables que determinan las ofertas y demandas en cada región. La elasticidad de esta demanda puede derivarse así:

$$\eta_{I,II}^{T} = \frac{\Delta X_{II}^{T}}{\Delta CT}\ \frac{\Delta CT}{\Delta X_{II}^{T}} = \eta_{II}\ \frac{\Delta P_x^{II}}{\Delta CT}\ \frac{CT}{P_x^{II}} = \eta_{II}\ E_{CT}^{P_x^{II}} \qquad [2]$$

Donde $\eta_{I,II}^{T}$ es la elasticidad de la demanda por transporte, entre las regiones I y II, η_{II} es la elasticidad de la demanda por importaciones de la región II, $E_{CT}^{P_x^{II}}$ indica como varía el precio del bien en la región II al cambiar el costo de transporte.

$$E^{P_x^{II}}_{CT} = \frac{\Delta P_x^{II}}{\Delta CT} \quad \frac{CT}{P_x^{II}} \qquad [3]$$

Para cambios pequeños, puede probarse que:

$$\frac{\Delta P_x^{II}}{P_x^{II}} = \frac{\mathcal{E}^{I} \frac{\Delta CT}{P_x^{II}} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}{\eta_{II} + \mathcal{E}^{I}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \qquad [4]$$

Donde $\mathcal{E}^{I}$, se refiere a la elasticidad de las ofertas por exportaciones de la región I y $\alpha = \frac{CT}{P_x^{II}}$, es decir la importancia del flete en el precio del producto puesto en destino.

Reemplazando [4] en [3]

$$E^{P_x^{II}}_{CT} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{\mathcal{E}^{I}}{\eta_{II} + \mathcal{E}^{I}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \qquad [5]$$

donde $\alpha = \frac{CT}{P_x^{II}}$, es decir la importancia del costo de transporte en el precio del bien en la región II.

Reemplazando [5] en [2]

$$\eta^{T}_{I,II} = \frac{\mathcal{E}^{I}\eta_{II}}{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\mathcal{E}^{I} + \eta_{II}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \qquad [6]$$

Esa es la expresión para la elasticidad de la demanda por transporte entre las regiones I y II.

De manera que ante una reducción en el costo de transporte, mediante esa elasticidad de demanda por transporte podría determinarse el aumento en el volumen intercambiado del bien.

2) <u>Una región exportadora y dos regiones importadoras</u>

La región I produce el bien y lo exporta a las regiones II y III. Nuestro propósito es analizar ahora los determinantes de la demanda por transporte entre la región I y II y entre I y III.

$$\begin{cases} X_I^S = X_I^S\left(P_x^I, \gamma_I\right) \\ X_{II}^D = X_{II}^D\left(P_x^{II}, \gamma_{II}\right) \\ X_{III}^D = X_{III}^D\left(P_x^{III}, \gamma_{III}\right) \\ X_I^S = X_{II}^D + X_{III}^D \end{cases}$$

Pero $P_x^{II} = P_x^I + CT_{II}^I$; $P_x^{III} = P_x^I + CT_{III}^I$, donde CT_{II}^I es el costo de transporte desde la región I a la II y CT_{III}^I es correspondiente al transporte entre las regiones I y III.

De manera que podemos escribir nuestro modelo como:

$$\begin{cases} X_I^S = X_I^S\left(P_x^I, \gamma_I\right) \\ X_{II}^D = X_{II}^D\left(P_x^I, CT_{II}^I, \gamma_{II}\right) \\ X_{III}^D = X_{III}^D\left(P_x^I, CT_{III}^{II}, \gamma_{III}\right) \\ X_I^S = X_{II}^D + X_{III}^D \end{cases}$$

Determinamos la demanda por transporte de la región II, respecto de la I.

Resolviendo el sistema: $X_{II}^T = T_{II}\; CT_{II}^I \cdot CT_{III}^I, \gamma_I, \gamma_{II}, \gamma_{III}$

Esta es nuestra demanda por transporte para la región II, de la misma forma podemos obtener la demanda P/ transporte para la región III.

$$X_{III}^T = T_{III}\left(CT_{II}^I ; CT_{III}^I , \gamma_I , \gamma_{II} , \gamma_{III}\right)$$

Es importante notar que se trata de demandas interdependientes, es decir que la demanda por transporte de la región II, por ejemplo, depende no solo de su costo de transporte, sino también del costo de transporte de la otra región.

Veamos como derivar la elasticidad de la demanda por transporte de la región II.

$$\eta^{T}_{I,II} = \frac{\Delta X^{T}_{II}}{\Delta CT^{I}_{II}} \quad \frac{CT^{I}_{II}}{X^{T}_{II}} = \eta_{II}\, E^{p^{II}_{x}}_{CT^{I}_{II}} \qquad [7] \quad ; \quad E^{p^{II}_{x}}_{CT^{I}_{II}} = \frac{\Delta P^{II}_{x}}{P^{II}_{x}} \quad \frac{CT^{I}_{II}}{\Delta CT^{I}_{II}}$$

Donde η_{II} es la elastecidad precio de la demanda por el bien en la región II.

$$\eta_{II} = \frac{\Delta X_{II}}{\Delta P^{II}_{x}} \quad \frac{P^{II}_{x}}{X_{II}}$$

Recordemos que: $P^{II}_{x} = P^{I}_{x} + CT^{I}_{II}$, por lo tanto:

$$\frac{\Delta P^{II}_{x}}{\Delta CT^{I}_{II}} = \frac{\Delta P^{I}_{x}}{\Delta CT^{I}_{II}} + 1 \qquad [8]$$

Veamos ahora los determinantes de $\frac{\Delta P^{I}_{x}}{\Delta CT^{I}_{II}}$, es decir el cambio en el precio del bien en la zona productora ante la variación en el costo de transporte entre las regiones I y II.

Este cambio en el costo hace desplazar la demanda total dirigida al centro productor, de manera que al mismo precio $\left[P^{I}_{x}\big|_{0}\right]$, ahora se demanda una cantidad mayor por parte de la zona II. Ese aumento porcentual en la demanda de la región II es:

$$\frac{\Delta X_{II}}{X_{II}} = \frac{\Delta P^{II}_{x}}{P^{II}_{x}}\, \eta_{II} \qquad \text{pero} \qquad \Delta P^{II}_{x} = \Delta CT^{I}_{II}$$

En concecuencia el aumento porcentual en la demanda dirigida a la región I es:

$$\frac{\Delta X_{II}}{X^{III} + X^{II}} = \frac{X_{II}}{X_{III} + X_{II}}\, \eta_{II}\, \frac{\Delta CT^{I}_{II}}{P^{II}_{x}}$$

Ese desplazamiento horizontal en la demanda lleva a un aumento en el precio en origen medido por:

$$\frac{\Delta P_x^I}{P_x^I} = \frac{\frac{X_{III}}{X_{II}+X_{III}} \eta_{II} \frac{\Delta CT_{II}^I}{P_x^{II}}}{\eta^* + \varepsilon^I} \qquad [9]$$

Donde $\eta^* = \frac{\Delta (X_{II}+X_{III})}{\Delta P_x^I} \frac{P_x^I}{(X_{II}+X_{III})}$, es decir que se refiere a la elasticidad de la demanda total dirigida a la región I.

Haciendo $\omega_{II} = \frac{X_{II}}{X_{II}+X_{III}}$; $\alpha_{II} = \frac{CT_{II}^I}{P_x^{II}}$ y reemplazando [9] en [8] y ésta en [7]

$$\eta_{I,II}^T = \alpha_{II} \eta_{II} \left[1 - \frac{\omega_{II} \eta_{II} (-\alpha_{II})}{\eta^* + \varepsilon^I} \right] \qquad [10]$$

Esa es la elasticidad de la demanda por transporte de la región II respecto de la región I.

Como vemos depende no solo de las condiciones de demanda en II y de oferta en I sino también de las condiciones de demanda en el otro centro consumidor (región III).

3) <u>Dos regiones exportadoras y una importadora</u>

Supongamos ahora que las regiones I y II son exportadoras, en tanto III es región importadora.

$$\begin{cases} X_I^S = X_I^S\,(P_x^I,\ \gamma_I) \\ X_{II}^S = X_{II}^S\,(P_x^{II},\ \gamma_{II}) \\ X_{III}^D = X_{III}^D\,(P_x^{III},\ \gamma_{III}) \\ X_{III}^D = X_I^S + X_{II}^S \end{cases}$$

Pero $P_x^{III} = P_x^I + CT_{III}^I$ $\quad P_x^{II} = P_x^{II} + CT_{III}^{II}$, por lo tanto nuestro modelo se convierte en:

$$\begin{cases} X_I^S = X_I^S\,(P_x^{III},\ CT_{III}^I,\ \gamma_I) \\ X_{II}^S = X_{II}^S\,(P_x^{III},\ CT_{III}^{II},\ \gamma_{II}) \\ X_{III}^D = X_{III}^D\,(P_x^{III},\ \gamma_{III}) \\ X_I^S + X_{II}^S = X_{III}^D \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, tenemos la demanda por transporte de la región III respecto de la región I.

$$X_I^T = T_I\,(CT_{III}^I,\ CT_{III}^{II},\ \gamma_I,\ \gamma_{II};\ \gamma_{III})$$

De **la misma** forma:

$$X_{II}^T = T_{II}(CT_{III}^I,\ CT_{III}^{II},\ \gamma_I,\ \gamma_{II},\ \gamma_{III})$$

Derivemos ahora la elasticidad de la demanda por transporte entre las regiones I y III.

$$\eta_{I,III}^T = \frac{\Delta X_I}{\Delta CT_{III}^I}\ \frac{CT_{III}^I}{X_I} = -\ \mathcal{E}^I\,\frac{\Delta P_x^I}{\Delta CT_{III}^I}\ \frac{CT_{III}^I}{P_x^I} \qquad [11]$$

Donde $\mathcal{E}^I = \frac{\Delta X^I}{\Delta P_x^I}\ \frac{P_x^I}{X^I}$, es la elasticidad de la oferta por exportaciones de la región I.

Recordemos que: $P_x^{III} = P_x^I + CT_{III}^I$ luego: $\frac{\Delta P_x^I}{\Delta CT_{III}^I} = \frac{\Delta P_x^{III}}{\Delta CT_{III}^I} - 1$ $\qquad [12]$

Al reducirse el costo dé transporte desde la región I a la III la oferta total dirigida a la región III aumenta en un porcentaje dado por:

$$\frac{\Delta X_I}{X_I + X_{II}} = \frac{X_I}{X^I + X^{II}} \, \mathcal{E}^I \, \frac{\Delta c T^I_{III}}{P^I_x}$$

El cambio en el precio en la región III ante ese desplazamiento de oferta es:

$$\frac{\Delta P^{III}_x}{P^{III}_x} = \frac{\frac{X_I}{X_I + X_{II}} \, \mathcal{E}^I \, \frac{\Delta c T^I_{III}}{P^I_x}}{\mathcal{E}^* + \eta_{III}} \qquad [13]$$

$\eta_{III} = \frac{\Delta X_{III}}{\Delta P^{III}_x} \frac{P^{III}_x}{X_{III}}$, es decir la elasticidad de demanda por importaciones de la región III.

$\mathcal{E}^* = \frac{\Delta X_I + X_{II}}{\Delta P^{III}_x} \frac{P^{III}_x}{X^I + X^{II}}$, es decir la elasticidad de la oferta total por exportaciones dirigida a la región III. Haciendo:

$\emptyset_1 = \frac{X_I}{X_I + X_{II}}$, es decir la participación de la región I en las importaciones de la región III y $\alpha^I_{III} = \frac{c T^I_{III}}{P^{III}_x}$

Reemplando [13] en [12] y ésta en [11]

$$\eta^T_{I,III} = \left(\frac{\alpha^I_{III}}{1 - \alpha^I_{III}} \right) \mathcal{E}^I \left[1 - \frac{\emptyset_1 \, \mathcal{E}^I \left(\frac{1}{1 - \alpha^I_{III}} \right)}{\mathcal{E}^* + \eta_{III}} \right] \qquad [14]$$

Esa es la expresión para la elasticidad de la demanda por transporte entre las regiones I y III.

4) <u>Más de una región productora y consumidora</u>

Este es el caso más general, en el que existe más de una región productora y consumidora del bien.

Supongamos que nos interesa conocer la elasticidad de la demanda por transporte de un bien entre las regiones

I y II. La región II exporta el bien en cuestión pero no solo hacia la región I, sino también hacia otras regiones y a su vez I lo importa también desde otras regiones distintas de la II.

El análisis es exactamente similar al caso de dos regiones, pero con la salvedad que las elasticidades de demanda y oferta son elasticidades de exceso de demanda y oferta.

En efecto la demanda de la región I dirigida a otras regiones distintas de la II. En tanto la elasticidad de la oferta de II dirigida a I es una función de execeso de la oferta total de la misma menos la dirigida a otras regiones.

$$\eta^{T}_{I,II} = \frac{\eta^{E}_{I} \; \varepsilon^{E}_{II}}{\eta^{E}_{I} + \varepsilon^{E}_{II}} \qquad [15]$$

Donde $\eta^{T}_{I,II}$ es la elasticidad de la demanda por transporte entre las regiones I y II. Vemos que depende de las correspondientes elasticidades de execeso de demanda y oferta.

IV. Análisis crítico del modelo gravitacional

En base al análisis anterior, es posible inferir las limitaciones del modelo gravitacional cuando se lo utiliza como herramienta de proyección en lo que hace al tráfico de bienes.

Supongamos que existe un solo bien que es objeto de intercambio interregional.

Mediante el conocimiento de los actuales flujos de intercambio y costos de transporte entre la región analizada y las demás, se determinaría la elasticidad de esos flujos respecto del costo de transporte.

Un método para hacerlo puede consistir en estimar estadísticamente la relación [1] mediante datos de sección transversal.

La elasticidad obtenida de esa forma se usaría para proyectar el incremento en tráfico ante la reducción en costo de transporte entre nuestra región y cualquier otra debido a algún proyecto vial.

El método correcto, como hemos visto, consistiría en realizar esa proyección en base a la respectiva elasticidad de la demanda por transporte de este bien entre las regiones afectadas por el proyecto.

A fin de determinar el sesgo en que se incurriría al usar el modelo gravitacional, veamos la relación existente entre la elasticidad estimada mediante ese modelo y las correspondientes elasticidades de la demanda por transporte.

Comencemos con el caso más simple en que existe una región exportadora (región I) y dos regiones importadoras (regiones II y III). Luego lo generalizamos para el caso de "n" regiones.

Usando el modélo gravitacional hubiéramos linearizado en logaritmos la relación [1], estimando los parámetros de la siguiente expresión:

$$\log T_j = K'' + \beta_1 \log y_j + \beta_2 \log CT_j \;; \forall j = II, III$$

Donde: T_j se refiere al flujo de intercambio entre las regiones I y II, y I y III: $T_{II} = X_{II}^T$; $T_{III} = X_{III}^T$

y_j es el ingreso de la región "j"

CT_j es el costo de transporte entre la región I y las regiones II y III respectivamente.

μ_t es un componente estocástico con las propiedades habituales : $E(\mu_t)=0$, $E(\mu_t^2)=\sigma^2$ $K^{\tau}=$ constante $+\beta_0 \log y$

Expresado en forma matricial, el modelo sería:

$$H = Z\beta + \mu \qquad [16]$$

Donde:

$$H = \begin{bmatrix} H_I \\ H_{II} \end{bmatrix} \qquad H_I = \begin{bmatrix} \log X^{\tau}_{II} \end{bmatrix} \qquad H_{II} = \begin{bmatrix} \log X^{\tau}_{III} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_I \\ Z_{II} \end{bmatrix} \qquad Z_I = \begin{bmatrix} \log y_{II} & \log C\tau_{II} \end{bmatrix} \qquad Z_{II} = \begin{bmatrix} \log y_{III} & \log C\tau_{III} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{II} \\ \mu_{III} \end{bmatrix}$$

β es un vector que originariamente es 2 x 1, y como toda la ha sido hecha en vectores de ese orden debe ser considerado como un escalar, sin perjuicio que al desagregar se lo considere como un vector 2 x 1.

Estimando [16] mediante mínimos cuadrados:

$$\hat{\beta} = \left[(Z_I' Z_I) + (Z_{II}' Z_{II})\right]^{-1} (Z_I' Z_{II}') \begin{bmatrix} H_I \\ H_{II} \end{bmatrix} \qquad [17]$$

$\left[(Z_I' Z_I) + (Z_{II}' Z_{II}) \right]^{-1}$ es una matriz de orden 2 x 2,

Definamos: $N = \left[(Z_I' Z_I) + (Z_{II}' Z_{II}) \right]^{-1}$

donde $N = \begin{bmatrix} N_I \\ N_{II} \end{bmatrix}$, es decir que N_I y N_{II} representan la primera y la segunada fila respectivamente de aquella inversa.

Reemplazando en [17]

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} N_I Z_I' & N_I Z_{II}' \\ N_{II} Z_I' & N_{II} Z_{II}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_I \\ H_{II} \end{bmatrix} \qquad [18]$$

Recordemos que:

$$H_I = \log X_{II}^T$$
$$H_{II} = \log X_{III}^T$$

A su vez X_{II}^T y X_{III}^T son los valores de equilibrio de cantidades transportadas que resultan de la solución del modelo:

$$\begin{cases} X_{II}^T = T_{II}\left(CT_{II}^{\bullet},\ CT_{III},\ \gamma_I,\ \gamma_{II},\ \gamma_{III} \right) & [19] \\ X_{III}^T = T_{III}\left(CT_{II},\ CT_{III},\ \gamma_I,\ \gamma_{II},\ \gamma_{III} \right) & [20] \\ CT_{II} = CT_{II} \mid_0 & \\ CT_{III} = CT_{III} \mid_0 & \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones se refieren a las demandas por transporte entre las regiones I y II y I y III respectivamente. En tanto las últimas muestran las ofertas por transporte, a las que supondremos completamente elásticas.

Los valores de equilibrio X_{II}^{T} y X_{III}^{T} obtenidos en base de la solución del modelo, son usados como dato para ajustar el modelo gravitacional.

Expresemos las demandas por transporte en forma doble logarítmica para facilitar la comparación. Las demandas $\begin{bmatrix}19\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}20\end{bmatrix}$ en forma matricial serían: $H = WL$

Donde H tiene el mismo significado anterior y ;

$$W = \begin{bmatrix} R_I & 0 \\ 0 & R_{II} \end{bmatrix} \quad ; \quad R_I = \begin{bmatrix} Z_I & Z_I^{*} \end{bmatrix} \; ; \; Z_I^{*} = \begin{bmatrix} \log y_{III} & CT_{III} \end{bmatrix}$$

$$; \quad R_{II} = \begin{bmatrix} Z_{II} & Z_{II}^{*} \end{bmatrix} \; ; \; Z_{II}^{*} = \begin{bmatrix} \log y_{II} & CT_{II} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \pi \\ \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \pi = \begin{bmatrix} \pi_I \\ \pi_I^{*} \end{bmatrix} \; ; \quad \pi_I = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \; ; \; \pi_I^{*} = \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_I \\ \gamma_I^{*} \end{bmatrix} \; ; \quad \gamma_I = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \; ; \; \gamma_I^{*} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}$$

De modo que:

$$H_I = R_I \pi = Z_I \pi_I + Z_{III}^{*} \pi_I^{*} \qquad [21]$$

$$H_{II} = R_{II} \gamma = Z_{II} \gamma_I + Z_{II}^{*} \gamma_{II}^{*} \qquad [22]$$

[21] y [22] representan la verdadera estructura del modelo, entanto [16] sería algo así como una cross-sectión de esas estructuras verdaderas.

Reemplazando [21] y [22] en [18]

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_I Z_I & N_I Z_{II}^{I} \\ N_{II} Z_I' & N_{II} Z_{II}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_I \pi_I + Z_I^{*} \pi_I^{*} \\ Z_{II} \gamma_I + Z_{II}^{*} \gamma_I^{*} \end{bmatrix} \qquad [23]$$

Estamos interesados en $\hat{\beta}_2$, esto es, en el estimador de la elasticidad respecto del costo de transporte del modelo gravitacional. De modo que concentraremos nuestra atención en ese estimador.

Desde [23]

$$\hat{\beta}_2 = N_{II}(Z_I' Z_I)\, \pi_I + N_{II}(Z_{II}' Z_{II})\, \gamma_I + E \qquad [24]$$

Donde $E = N_{II}(Z_I' Z_I^{*})\, \pi_I^{*} + N_{II}(Z_{II}' Z_{II}^{*})\, \gamma_I^{*}$

Pedemos simplificar la expresión [24] un poco más:

$$\hat{\beta}_2 = N_{II}(Z_I' Z_I)\, \pi_2 + N_{II}(Z_{II}' Z_{II})\, \gamma_2 + G \qquad [25]$$

$$G = E + N_{II}(Z_I' Z_I)\, \pi_1 + N_{II}(Z_{II}' Z_{II})\, \gamma_1$$

$\boxed{25}$ es la expresión final que muestra la relación entre el estimador de la elasticidad respecto del costo de transporte obtenida mediante el uso del modelo gravitacional $\hat{\beta}_2$ y las correspondientes elasticidades, también respecto del costo de transporte, de las demandas por transporte de las regiones II y III $(\pi_2$ y $\gamma_2)$

Puede probarse que $\hat{\beta}_2 = \pi_2 = \gamma_2$, sólo si las demandas por transporte de ambas regiones son idénticas.

No existe una regla fija que nos permita decir si $\hat{\beta}_2$ subestima o sobreestima la correspondiente elasticidad de la demanda por transporte.

Los resultados son completamente generales, en el sentido que si permitimos la inclusión de más regiones, la elasticidad de la demanda por transporte estinada por medio del modelo gravitacional será un promedio de las correspondientes elasticidades de las demandas por transporte respecto de las otras regiones, más otro término.

Si admitimos la existencia demás de un bien, transado interregionalmente, la utilidad del modelo gravitacional como instrumento de proyección es aún menor.

La elasticidades obtenida en ese caso será un promedio delpromedio de las elasticidades correspondientes a cada bien en cada región más otro término que reflejaría las caractirísticas peculiares de cada región.

Vemos entonces, que no existe una interpretación sencilla para la elasticidad derivada del modelo gravitacional, lo que desde ya cuestiona su utilidad para proyectar por su intermedio el aumento en el tráfico de bienes.

Conclusiones

Hemos visto que la elasticidad de la demanda por transporte derivada desde el modelo gravitacional, es algún tipo de promedio de las correspondientes elasticidades para cada producto intercambiado.

Esa situación, hace que pensemos que no es correcto realizar predicciones sobre posibles aumentos en tráfico basados en la misma. Ese análisis debería realizarse por medio de las correspondientes elasticides de la demanda por transporte para cada producto involucrado.

Estas últimas elasticidades pueden derivarse fácilmente utilizando las relaciones explicitadas en la sección referida a los determinantes de la demanda por transporte.

Mendoza, Octubre de 1969.

Miguel Eduardo Martínez

Instituto de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO