DEFINICION Y CLASIFICACION DE LAS CADENAS DE MARKOV

Por JOSE A. BOSSO [1] y OSCAR SORARRAIN [2]

Es posible frecuentemente definir un conjunto de estados S_j. Por ejemplo, considerando los casos posibles que resultan de arrojar simultáneamente dos monedas, los S_j serán:

$$S_1 = (C, C); \quad S_2 = (C, S); \quad S_3 = (S, C); \quad S_4 = (S, S)$$

En general, un conjunto de estados se llamarán estocásticos si se dan juntamente con los mismos las probabilidades respectivas. En el ejemplo anterior:

$$P_1 = \frac{1}{4}; \quad P_2 = \frac{1}{4}; \quad P_3 = \frac{1}{4}; \quad P_4 = \frac{1}{4}$$

Naturalmente, podríamos definir como estados estocásticos en el caso anterior a:

$$S_1 \text{ (dos caras) con } P_1 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 \text{ (una cara y una seca) con } P_2 = \frac{1}{2}$$

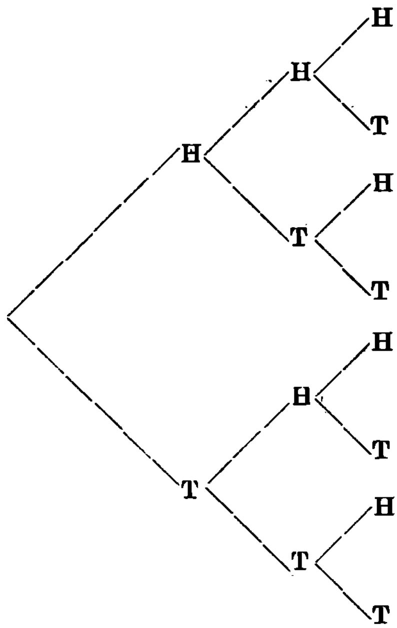
$$S_3 \text{ (dos secas) con } P_3 = \frac{1}{4}$$

Procesos estocásticos. — Estos surgen cuando se analizan experiencias que se realizan en etapas. Los estados posibles a alcanzar en la enésima etapa dependen de los estados alcanzados en las etapas anteriores. Es decir, se supondrá que los posibles estados resultantes de una etapa dada son conocidos cuando los pasos previos se conocen.

[1] Ing. Agrón. y Licenciado en Meteorología. Prof. titular, Cátedra de Cálculo Estadístico y Biometría.

[2] Dr. en Ciencias físicas, Jefe de Trabajos Prácticos, Cátedra de Cálculo Estadístico y Biometría.

Ejemplo: Se desean conocer los estados posibles de una experiencia que resulta de arrojar una moneda; se tendrá:



En síntesis, se tiene un sistema completo de eventos S_1, S_2, S_i (mutuamente exclusivos y exhaustivos). Es decir, se consideran los estados posibles de cada experiencia y se definen las variables aleatorias f_n ($n = 0, 1, 2, 3 \ldots$) en la forma $f_n = S_j$, si S_j es el resultado de la enésima prueba.

Si las pruebas son independientes, se tiene:

$$P(f_n = S_i / f_0 = S_1 ; f_1 = S_{i_1} \ldots\ldots ; f_n = S_{i_{n-1}}) = P(f_n = S_j)$$

para todos los valores de n y de los estados S_j.

Cadenas de Markov. — Un conjunto de variables estocásticas asociadas constituye una cadena de Markov si para todo ($n = 1, 2 \ldots$) y para todo valor de las variables estocásticas f_n ($n = 1, 2 \ldots$) resulta:

$$P(f_n = S_j / f_0 = S_{i_0} ; f_1 = S_{i_1} \ldots f_{n-1} = S_{i_{n-1}} = S_i)$$
$$= P(f_n = S_j / f_{n-1} = S_{i_{n-1}})$$

o bien llamado $S_{i_{n-1}} = S_i$

$$P\,(f_n = S_j / f_{n-1} = S_{i_{n-1}}) = P\,(f_n = S_j / f_{n-1} = S_i) = P_{ij}$$

donde las probabilidades de transición entre los estados $S_i \longrightarrow S_j$ no dependen de n.

Ejemplos: Sea una partícula que se mueve en línea recta "a saltos". Cada salto hacia la derecha tiene probabilidad p y hacia la izquierda q. Los estados posibles son 5 y cuando un punto extremo es alcanzado permanece allí con probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)$ o se mueve hacia el otro borde con la misma probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)$.

En tal caso la matriz de transición será:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
S_2	q	0	p	0	0
S_3	0	q	0	p	0
S_4	0	0	q	0	p
S_5	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Algunos teoremas sobre la matriz de transición. — A continuación se mencionan algunos teoremas cuya demostración se omite sobre las cadenas de transición.

Teorema: Si π_0 es un vector fila que representa las probabilidades iniciales de una cadena de Markov finita, la probabilidad inducida de las funciones f_n estará dada por el vector fila π_n obtenido mediante

$$\pi_n = \pi_0 \, P_1^{\,n}$$

Si el vector inicial tiene sus componentes todas nulas, excepto la i-ésima, el vector π_n será la i-ésima fila de la matriz $P_1^{\,n}$.

Ejemplos: Si se modifica el caso anterior de modo tal que cuando se alcanzan los estados extremos S_1 y S_5 el sistema permanece allí indefinidamente, la matriz de transición resulta:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	1	0	0	0	0
S_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
S_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
S_4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
S_5	0	0	0	0	1

y las matrices P_1, P_2, P_3

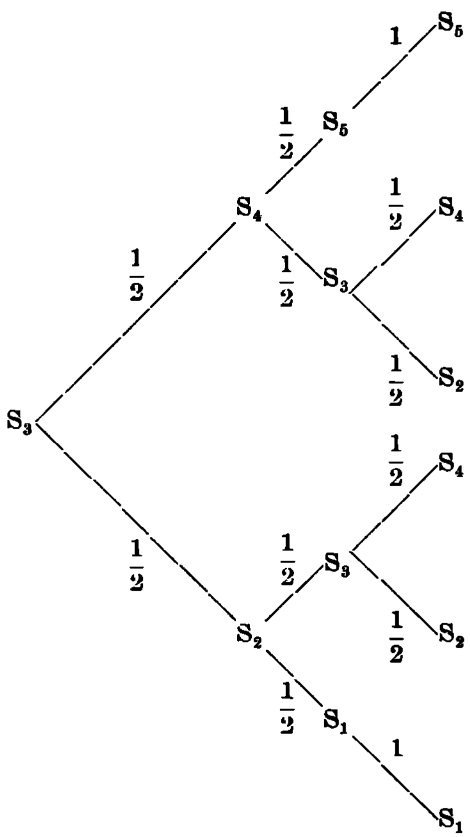
$$P^2 = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$P^3 = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Si el estado inicial es π_0 (0, 0, 1, 0, 0) resulta:

$$\pi_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right); \quad \pi_2 = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right); \quad \pi_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

siendo fácil verificar su coincidencia con



Clasificación de los estados

Matriz canónica de transición. — Es posible clasificar los estados según sus relaciones de comunicación, se denotará S_i T S_j si es posible pasar del estado S_i al S_j, aunque no necesariamente en un paso.

Definición.: Un estado S_i de un conjunto de estados U se llamará mínimo si S_i T S_j implica S_j T S_i para todo S_j perteneciente a U. Igualmente se puede lograr la definición de máximo.

Se dice que dos estados son equivalentes si S_i T S_j y S_j T S_i se verifican simultáneamente. Dado el carácter transitorio de la relación de equivalencia, basta dar un estado de una clase dada de equivalencia para definirla totalmente. Se llama clase equivalente a todo conjunto de elementos equivalentes.

Para cada par de estados (S_i, S_j) es posible definir un conjunto N_{ij} de números que representan los números posibles de pasos para pasar del estado S_i al estado S_j. Así, por ejemplo, N_{ii} representa los números de pasos posibles que permiten salir y regresar a un cierto estado S_i. De la definición surge que si $a \varepsilon N_{ii}$; $b \varepsilon N_{ii}$, entonces $a + b \varepsilon N_{ii}$, ya que es posible retornar a S_i en a pasos, y luego volver a retornar en b saltos, es decir N_{ii} es cerrada respecto a la operación de adición. Se dice que un conjunto es cerrado respecto a una operación dada si la aplicación de dicha operación a dos elementos a y b del conjunto da otro elemento del conjunto.

Llamando d_i al máximo común divisor del conjunto N_{ii}, puede demostrarse que si dos estados son equivalentes (S_i y S_j), entonces los máximos común divisores d_i y d_j de N_{ii} y N_{jj} son iguales, es decir $d_i = d_j$.

Otra propiedad importante es que los elementos del conjunto N_{ij} son componentes del módulo d, es decir, todo elemento a puede obtenerse mediante $a = r\,d + t_{ij}$, donde r = entero positivo y $0 \leq t_{ij} < d$. De aquí surge inmediatamente que $T_{ij} = 0$, pues d es el máximo común divisor de los elementos de N_{ij}.

Otra propiedad importante es que si los elementos S_i Ts_j y S_j Ts_m resulta $t_{ij} + t_{jm} \equiv t_{im}$ (módulo d).

Si $t_{ij} = 0$, los estados S_i y S_j pertenecen a una clase cíclica. De aquí resulta que siendo $t_{ij} + t_{jm}$, serán $t_{ij} \equiv t_{im}$ si y sólo si $t_{jm} = 0$, es decir, si S_j y S_m pertenecen a la misma clase cíclica. Esto implica que si $n \equiv t_{ij}$, es decir $n = t_{ij}$ o múltiplo de t_{ij}, resultará que si el sistema parte del estado S_i al cabo de n pasos, se encontrará en una dada clase cíclica. (Suponemos que el proceso se realiza dentro de una dada clase equivalente, pues en caso contrario no se podría volver a S_i). Es decir, la clase citada constará de d clases cíclicas. Si $d = 1$, la clase de equivalencia coincidirá con una clase cíclica simple.

Diremos que un estado es ergódico si no existe la posibilidad de que el sistema deje de volver al mismo. Por el contrario, si existe tal posibilidad el estado es transitorio. Un estado se llamará absorbente si es imposible abandonarlo.

Resulta sumamente importante escribir la matriz de transición en forma canónica. Para ello se clasifican los elementos en clases de equivalencia. Las clases de equivalencia ergódicas se caracterizan porque si el sistema alcanza un estado perteneciente a la misma no saldrá posteriormente de ella.

Las clases de equivalencia implican elementos que son comunicables en ambos sentidos; elementos que pertenecen a distintas clases son solamente relacionables en un solo sentido, es decir, la matriz de transición podrá escribirse con sus elementos ergódicos en el ángulo superior izquierdo; los elementos que constituyen una clase donde algunos de los elementos considerados permiten pasar en una etapa a la clase ergódica; vendrán después las clases sucesivas, es decir, las que necesitan dos, tres y más etapas; la matriz de transición tomará la forma

	U_1	U_2	U_3	U_4
U_1	P_1	0	0	0
U_2	R_2	P_2	0	0
U_3	R_3		P_3	0
U_4	R_4			P_4

En el caso de la figura hay 4 clases de equivalencia: los bloques diagonales P_2 representan las probabilidades de transición dentro de la misma clase de equivalencia; los R_2 las probabilidades de transición entre elementos pertenecientes a clases distintas. Por ejemplo, es posible pasar de U_2 a U_1, pero no recíprocamente; luego $R_2 = 0$, mientras es cero el conjunto de probabilidades correspondientes a

	U_1	U_2
U_1		0

Clasificación de las cadenas de Markov

En todo problema de aplicación de las cadenas de Markov se presenta el problema siguiente:

1º Construir el modelo correspondiente, supuesto que un proceso de Markov constituya una cadena. Es decir, la matriz de transición.

2º Qué tipo de cadena se tiene. Las cadenas se clasifican naturalmente de acuerdo a la naturaleza de sus estados. Las cadenas pueden tener todos sus estados ergódicos y ser ergódicas; pueden admitir estados transitorios y ser no ergódicas. Toda cadena tiene al menos un estado ergódico, según puede demostrarse, pero es necesario que todos ellos sean ergódicos para que sea ergódica.

Las cadenas ergódicas pueden ser regulares cuando el número d ya definido es uno, o bien cíclica si $d \neq 1$, puesto que en este caso se la puede dividir en d clases cíclicas. (Recordar definición de clases cíclicas).

Las cadenas no ergódicas se clasifican por los elementos ergódicos. Recordar que éstos existen siempre.

1. Si las clases ergódicas son de un solo elemento, en cuyo caso $P_{ii} = S$, dichos estados son absorbentes y la cadena es absorbente.
2. Todas las clases son regulares, pero no todas de un solo elemento.
3. Todas las clases ergódicas son cíclicas.
4. Hay conjuntos ergódicos regulares y cíclicos.

Ejemplos: Para la matriz

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
S_2	q	0	p	0	0
S_3	0	q	0	p	0
S_4	0	0	q	0	p
S_5	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$

En este ejemplo (S_1, S_5) son ergódicos y (S_2, S_3, S_4) son transitorios y forman una clase de equivalencia.

Es sumamente importante conocer el tipo de cadena de un modelo real, puesto que variarían las respuestas a una serie de preguntas fundamentales de aplicación, tales como:

¿Cuál es el número promedio de veces que el proceso está en S_i?

Para pasar de S_i a S_j ¿cuál es la media y la varianza del número de pasos necesitados?, y muchas otras.

PROBLEMAS DE APLICACION CON CADENAS DE MARKOV

Vamos a resolver algunos problemas que ilustran la teoría expuesta, que han sido propuestos por Kemeny y Snell, pero no resueltos, por lo que hemos emprendido su resolución como ilustración a los objetos de formar matrices de transición, identificar si un proceso estocástico es o no una cadena de Markov y posteriormente a escribir la matriz de transición canónica y clasificación de la cadena.

Ejercicio 1

Cinco puntos están marcados sobre un círculo. Un proceso mueve un punto a cada uno de sus vecinos con probabilidad $\frac{1}{2}$ para cada vecino. Hallar la matriz de transición de la cadena de Markov resultante.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
S_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
S_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
S_4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
S_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Ejercicio 2

Modificar el ejemplo 1: si cuando el proceso alcanza S_1, en la etapa siguiente pasa necesariamente a S_2. Formar la matriz de transición.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	0	1	0	0	0
S_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
S_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
S_4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
S_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Ejercicio 3

Una secuencia de dígitos es generada al azar. Los estados se considerarán S_1 si aparece el 0; S_2 si 1 ó 2; S_3 si 3, 4, 5, 6; S_4 si 7 u 8; S_5 si 9. Es decir, la matriz de transición será:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
S_2	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
S_3	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
S_4	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
S_5	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Modificar la matriz de transición si el número cero tiene probabilidad doble que cualquier otro número.

Solución:

Llamando X a la probabilidad de cualquier número distinto de cero, será:

$$2x + 9x = 1; \quad 11x = 1; \quad x = \frac{1}{11}$$

luego la matriz de transición será:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$
S_2	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$
S_2	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$
S_4	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$
S_5	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$

Ejercicio 4

En cierto lugar de la tierra nunca hay dos días agradables seguidos. Si se tiene un día agradable, es igualmente probable que llueva o nieve al día siguiente. Si llueve o nieva existe igual probabilidad de que el día siguiente sea de lluvia o nieve, pero si hay un cambio desde lluvia o nieve solamente, la mitad de las veces será un día agradable. Llamando A a los días agradables, L a los lluviosos y N a los días con nieve, se tendrá:

	L	A	N
L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
A	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
N	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Modificar la matriz de transición si el tiempo se divide en agradable y no agradable. Mostrar que el proceso es una cadena de Markov y escribir la matriz correspondiente.

Solución:

	A	no A
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
no A	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Ejercicio 5

Si en el ejercicio 4 la parte de la distribución inicial

$$\pi_0 \left(\frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Hallar π_1 y π_2. ¿Qué significa π_n?

Para hallar π_1 $\pi_1 = \pi_0$ P.

Luego las probabilidades obtenidas serán:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \pi_0 \, (P_1) \text{ de lluvia}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\pi_0\,(P_2)\ \text{agradable}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\pi_0\,(P_3)\ \text{nieve}$$

Para hallar $\pi_2 = \pi_0\ P^2$

los elementos de la matriz P^2 resultan:

$$(1,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$$

$$(1,2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

$$(1,3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$(2,1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$(2,2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$(2,3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$(3,1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$(3,2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

$$(3,3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$$

Luego

	L	A	N
L	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$
A	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
N	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{3}{16}$

de donde $\pi_2 = \pi_0 \ P^2$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{32}{80}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{16}{80}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16} = \frac{32}{80}$$

π_n significa la distribución correspondiente a la enésima experiencia.

Ejercicio 6

Si el tiempo es agradable hoy en la tierra citada, ¿cuál será el estado más probable pasado mañana?

Solución:

Siendo π_0 (0, 1, 0) resulta que da la segunda fila de la matriz hallada en el ejercicio 13: que lluvia y nieve son los estados más probables con probabilidad $\frac{3}{8}$ cada uno.

Ejercicio 7

Para la siguiente cadena de Markov clasifique los estados y construya la matriz canónica.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_1	0	0	0	1	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0	0	1
S_3	0	0	1	0	0	0	0
S_4	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
S_5	0	0	0	0	1	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	1
S_7	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Solución:

Los estados S_1 y S_4 pueden comunicarse en ambos sentidos, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \rightarrow S_4 \\ S_4 \rightarrow S_1 \end{array}\right\} \text{ son equivalentes A}$$

El $S_3 \longrightarrow S_3$ puede comunicarse consigo mismo y no es posible alcanzarlo desde otro estado; luego la clase B está desconectada del resto de la cadena.

Es posible escribir

$$\left\{\begin{array}{l} S_2 \rightarrow S_7 \rightarrow S_6 \\ S_6 \rightarrow S_7 \rightarrow S_2 \\ S_6 \rightarrow S_2 \end{array}\right.$$

es decir $S_2 \longrightarrow S_7$; $S_7 \longrightarrow S_2$; S_6 —— S_7; la clase C es una clase equivalente ergódica; luego la clase C es ergódica.

S_5 está en la misma situación que S_3, clase D.

Luego las clases A y C son ergódicas y están desconectadas; igualmente ocurre con las clases absorbentes C y D, también desconectadas entre sí y de las anteriores.

La matriz canónica será:

	S_1	S_4	S_2	S_6	S_7	S_3	S_5
S_1	0	1					
S_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0		0	
S_2			0	0	1		
S_6	0		0	0	1	0	
S_7			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
S_3	0			0		1	0
S_5						0	1

Ejercicio 8

Clasificar las siguientes cadenas como ergódicas o absorbentes. ¿Cuál de las cadenas ergódicas es regular?

a) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *b*) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d*) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

e) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) La cadena correspondiente es regular ergódica.

b) La cadena es absorbente con dos conjuntos ergódicos absorbentes y C es transitorio (tipo II-A).

c) La cadena es ergódica pues todos sus puntos lo son.

Es posible comunicarse entre los estados en la forma

$$\begin{cases} 2 \to 1; \quad 1 \to 2 \quad \text{(dos etapas)} \\ 2 \to 1; \quad 1 \to 3; \quad 3 \to 1; \quad 1 \to 2 \quad \text{(cuatro etapas)} \end{cases}$$

Resulta $d = 2$ para S_2 y siendo los tres elementos equivalentes, también será $d = 2$ para los elementos S_1 y S_3. Además $N_{ij} = 1 \equiv$ módulo d (con $i = 1$; $j = 2, 3$), es decir, la clase $\{S_2, S_3\}$ es cíclica.

La cadena es ergódica y cíclica (tipo II-C).

d) Hay dos conjuntos ergódicos $\{S_1\}$ y $\{S_2, S_3, S_4\}$; la cadena es tipo II-B. Los dos conjuntos ergódicos forman cadenas regulares. El elemento $\{S_1\}$ es absorbente.

e) Los elementos se comunican en la forma

$$1 \to 2 \to 3 \to 1$$

$$3 \to 2 \to 3 \qquad \text{(dos etapas)}$$

$$3 \to 1 \to 2 \to 3 \qquad \text{(tres etapas)}$$

$$2 \to 3 \to 1 \to 2 \qquad \text{(tres etapas)}$$

en general se ve fácilmente que el máximo común divisor es $d = 1$. La cadena es regular, tipo I-A.

Ejercicio 9

Si en una cadena ergódica el i-ésimo estado se hace absorbente reemplazando la i-ésima fila de la matriz de transición por una fila con 1 en la i-ésima componente y cero en los restantes. Probar que la cadena resultante es absorbente.

Solución:

Siendo la cadena ergódica, los elementos son comunicables en ambos sentidos; luego será posible ir del conjunto de estados i_1, i_2 $i_{2-1}, i_{2+1}, \ldots$ al i-ésimo, pero no viceversa. El estado i será absorbente y los restantes perderán su carácter ergódico al existir la posibilidad de que el sistema alcance el estado i desde los restantes, lo cual es posible por hipótesis y no se pueda volver a los estados anteriores. La cadena tiene un solo elemento ergódico y es absorbente Si.

RESUMEN. — Los elementos fundamentales de la teoría de las cadenas de Markov finitas es desarrollada. Las cadenas de Markov constituyen un capítulo de vastas aplicaciones en biología, particularmente en genética. Se dan aquí los elementos para formar las llamadas matrices de transición. El problema fundamental para el biólogo que utiliza las cadenas de Markov es determinar a qué tipo de cadena corresponde su particular problema de aplicación (ergódica, absorbente, etc.) para usar posteriormente los elementos de la teoría que se ajustan a cada una de ellas. Aquí se dan las nociones básicas para formar las matrices de transición, clasificando el tipo que corresponden, punto de partida de toda utilización biológica.

Una serie de problemas de aplicación de la teoría expuesta es dada. Los problemas han sido particularmente elegidos con la intención de ayudar al lector cuya formación es esencialmente no matemática. Matrices de transición son formadas y clasificadas.

SUMMARY. — **A review of basic elements in finite Markov chains,** by JOSÉ A. BOSSO and OSCAR SOKARRAIN. — The basic elements of the theory of finite Markov chains are given. Markovian chains are very useful in biology, mainly in genetics. We also give the fundamental elements for making transition matrices. It is very important for a researcher using Markov chains in a particular problem which is the corresponding chain (ergodic, absorbent, etc.) for applyng later the theory specially developped for each one of them. How to make and classifyng transition matrices is exposed, this is the starting point for any possible biological application.

Several examples of application of the theory are exposed. The problems had been chosen for helping the reader whose background is not mainly in mathematics. Transition matrices are given and classified.

BIBLIOGRAFIA

N. ARLEY and K. R. BUEN, *Introduotion to the theory of Probability and Statitics*. John Wiley, 1950.

E. B. DYNKIN, *Theorie des Processus Markoviens*. Dunod, París, 1963.

LOUIS A. PIPES, *Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos*. Segunda Edición, Mc. Graw-Hill, 1963.

FELLER, WILLIAM, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley, 1957.

JOHN G. KEMENY and J. L. SNELL, *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, 1960.

J. V. USPENSKY, *Matemáticas de las Probabilidades*. Editorial Nigar, 1947.