CAPÍTULO 2

Paralaje

Gonzalo Carlos de Elía

La paralaje es un efecto geométrico definido como la desviación angular de la dirección a un objeto desde distintas ubicaciones. En este contexto definimos el corrimiento paraláctico como la variación en la dirección al objeto debido a un cambio en la posición del observador. De este modo, si el observador se ubica en el origen del sistema de referencia, la corrección por paralaje en las coordenadas de un astro estará basada simplemente en un cambio en el origen del sistema de referencia.

A partir de dichas consideraciones y dependiendo del desplazamiento del observador, podemos definir dos variantes:

- *Paralaje Diurna o Geocéntrica:* el cambio en el origen del sistema de referencia se produce desde el Geocentro al Topocentro,

- *Paralaje Anual:* el cambio en el origen del sistema de referencia se produce desde el Baricentro del Sistema Solar al Geocentro.

A continuación, brindaremos una descripción detallada de cada una de estas variantes, poniendo énfasis en el tratamiento matemático utilizado para desarrollar la transformación, así como también en el orden de magnitud asociado al cambio en las coordenadas celestes debido a este efecto.

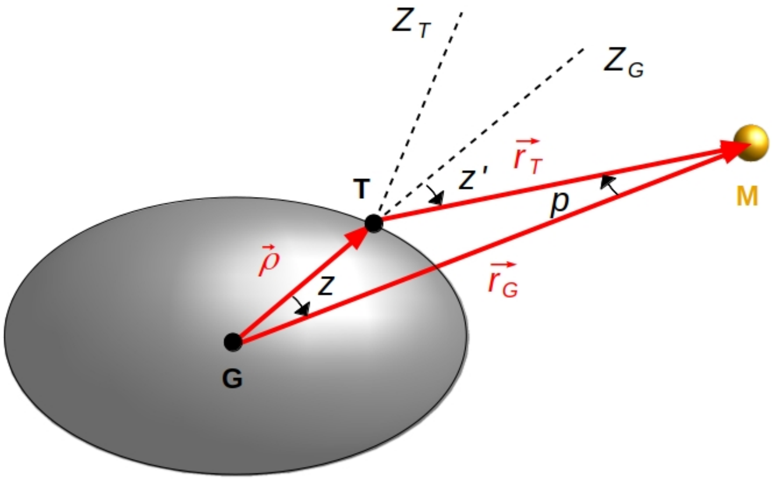
Paralaje diurna

Definiciones y consideraciones generales

Dada la Figura 2.1, sean G y T el Geocentro y Topocentro, respectivamente, Z_G el cenit geocéntrico, y Z_T el cenit topocéntrico. Además, sean $\vec{r}_G$ y $\vec{r}_T$ los vectores posición geocéntrico y topocéntrico de un mismo punto del objeto M, respectivamente, $\vec{\rho}$ el vector posición geocéntrico del Topocentro, y z y z' las distancias cenitales geocéntricas de $\vec{r}_G$ y $\vec{r}_T$, respectivamente. Finalmente, sea p la paralaje diurna, la cual se define como el ángulo subtendido en el astro por la distancia entre el Geocentro y el Topocentro.

Figura 2.1.

Representación esquemática de la paralaje diurna.



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 199), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Consideraciones geométricas y trigonométricas simples nos permiten derivar diversas conclusiones de interés. Por un lado, dado que G, T, y el punto en consideración sobre el objeto M forman un triángulo plano, la suma de los ángulo interiores es igual a 180°, por lo que

$$(180° - z') + z + p = 180° \tag{2.1}$$

de lo cual

$$z' = z + p \tag{2.2}$$

Este planteo simple nos permite observar que la paralaje diurna incrementa la distancia cenital geocéntrica de un astro (Smart, 1977, p. 199; Green, 1985, p. 102). Por otra parte, aplicando la fórmula del seno para triángulos planos obtenemos que

$$\frac{|\vec{r}_G|}{\operatorname{sen}(180° - z')} = \frac{|\vec{r}_T|}{\operatorname{sen} z} = \frac{|\vec{\rho}|}{\operatorname{sen} p} \tag{2.3}$$

con lo cual

$$\operatorname{sen} p = \frac{|\vec{\rho}|}{|\vec{r}_G|} \operatorname{sen} z' \tag{2.4}$$

De acuerdo con esto, para un dado Topocentro, la paralaje diurna de un astro adoptará diferentes valores dependiendo de la distancia geocéntrica y de la distancia cenital (Smart, 1977, p. 200; Green, 1985, p. 102). A partir de estas dependencias, resulta útil definir la paralaje horizontal ecuatorial P_0, la cual representa la paralaje diurna cuando el objeto bajo consideración está en el horizonte y el observador se encuentra en el Ecuador (Smart, 1977, p. 200; Green, 1985, p. 102). Luego, el valor de P_0 puede ser obtenido de la Ecuación 2.4 considerando $z' = 90°$ y $|\vec{\rho}| = a$, siendo a el radio ecuatorial de la Tierra, con lo que

$$\operatorname{sen} P_0 = \frac{a}{|\vec{r}_G|} \tag{2.5}$$

Tabla 2.1.

Valores extremos de la Paralaje Horizontal Ecuatorial del Sol, la Luna, y los planetas del Sistema Solar.

OBJETO	PARALAJE HORIZONTAL ECUATORIAL
Sol	8,65´´ – 8,94´´
Mercurio	6´´ – 16,5´´
Venus	5,07´´ – 32,6´´
Luna	53,9´ – 61,5´
Marte	3,27´´– 24,12´´
Júpiter	1,36´´ – 2,22´´
Saturno	0,78´´ – 1,13´´
Urano	0,42´´ – 0,51´´
Neptuno	0,28´´ – 0,31´´

Nota. El valor adoptado para el radio ecuatorial de la Tierra en la Ecuación 2.5 es de 6378,137 km.

Para derivar los valores de la Paralaje Horizontal Ecuatorial del Sol, la Luna, y los planetas del Sistema Solar es necesario conocer la evolución orbital de dichos objetos relativa a la Tierra con el fin de determinar sus distancias geocéntricas en cada instante. Para desarrollar esta tarea, analizamos numéricamente la evolución orbital de la Luna y los planetas alrededor del Sol haciendo uso del código de N-cuerpos conocido como MERCURY (Chambers 1999). En particular, utilizamos la versión RA15 del integrador numérico RADAU (Everhart 1985), la cual está disponible en dicho código, con un parámetro de precisión de 10^{-12}.

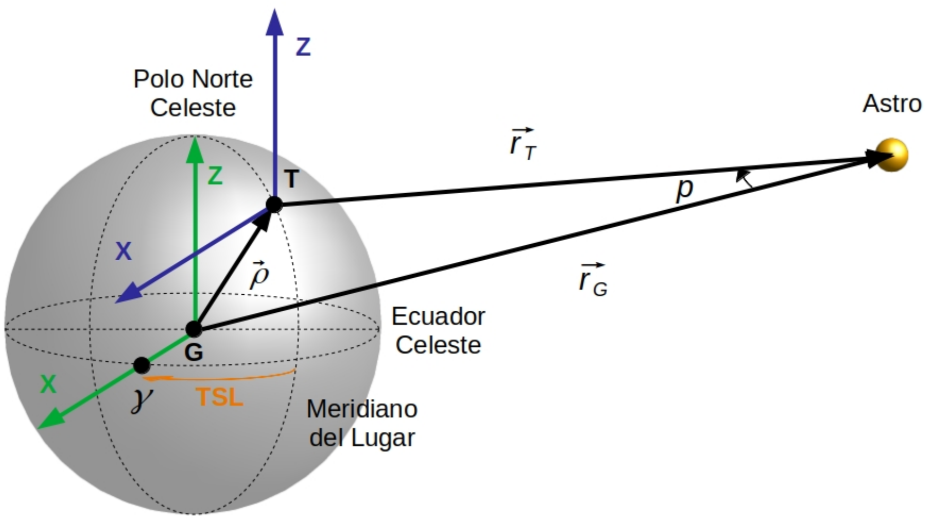
Los resultados de dicha simulación nos permiten calcular la distancia geocéntrica del Sol, la Luna, y los planetas en función del tiempo. A partir de esto, la Tabla 2.1 muestra el rango de valores obtenido para la Paralaje Horizontal Ecuatorial de los objetos de interés mencionados.

Fórmulas rigurosas de corrección

De la Figura 2.2, sean XYZ los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste geocéntrico y topocéntrico, los cuales son ilustrados en color verde y azul, respectivamente. Sean $\vec{r}_G$ y $\vec{r}_T$ los vectores posición del astro medidos en el sistema ecuatorial celeste geocéntrico y topocéntrico, respectivamente. Sea $\vec{\rho}$ el vector posición del Topocentro medido en el sistema ecuatorial celeste geocéntrico.

Figura 2.2.

Sistemas de referencia y vectores posición en el tratamiento vectorial de la paralaje diurna.



Nota. Sistemas de referencia celestes geocéntrico en verde y topocéntrico en azul.

De acuerdo a lo expuesto en la Figura 2.2, se verifica la relación vectorial

$$\vec{r}_G = \vec{r}_T + \vec{\rho} \tag{2.6}$$

Es muy importante tener en claro que siempre la incógnita a determinar será el vector posición del astro $\vec{r}_T$ asociado al sistema ecuatorial celeste topocéntrico. Por ende, nuestra expresión vectorial de trabajo siempre será

$$\vec{r}_T=\vec{r}_G-\vec{\rho} \tag{2.7}$$

(Green, 1985, p. 107). Dado que estamos trabajando con sistemas de referencia ecuatoriales celestes, los vectores $\vec{r}_G$ y $\vec{r}_T$ son escritos como

$$\vec{r}_G=\begin{pmatrix}|\vec{r}_G|\cos\delta_G\cos\alpha_G\\|\vec{r}_G|\cos\delta_G\,\mathrm{sen}\,\alpha_G\\|\vec{r}_G|\,\mathrm{sen}\,\delta_G\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

y

$$\vec{r}_T=\begin{pmatrix}|\vec{r}_T|\cos\delta_T\cos\alpha_T\\|\vec{r}_T|\cos\delta_T\,sen\,\alpha_T\\|\vec{r}_T|\,\mathrm{sen}\,\delta_T\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

donde $|\vec{r}_G|, \alpha_G,$ y δ_G representan la distancia, ascensión recta y declinación geocéntrica del astro, y $|\vec{r}_T|, \alpha_T,$ y δ_T la distancia, ascensión recta y declinación topocéntrica del mismo. Recordemos que las cantidades $|\vec{r}_G|, \alpha_G,$ y δ_G resultan ser datos mientras que $|\vec{r}_T|, \alpha_T,$ y δ_T son las incógnitas a resolver. Para lograr esto, debemos aun cuantificar el vector $\vec{\rho}$ en un sistema ecuatorial celeste. Sin embargo, la escritura del vector $\vec{\rho}$ dependerá del modelo seleccionado para describir la forma matemática adoptada para la Tierra. De acuerdo con esto, en primera instancia debemos expresar $\vec{\rho}$ en un sistema de referencia terrestre y luego, mediante el uso de rotaciones, escribir $\vec{\rho}$ en un sistema ecuatorial celeste.

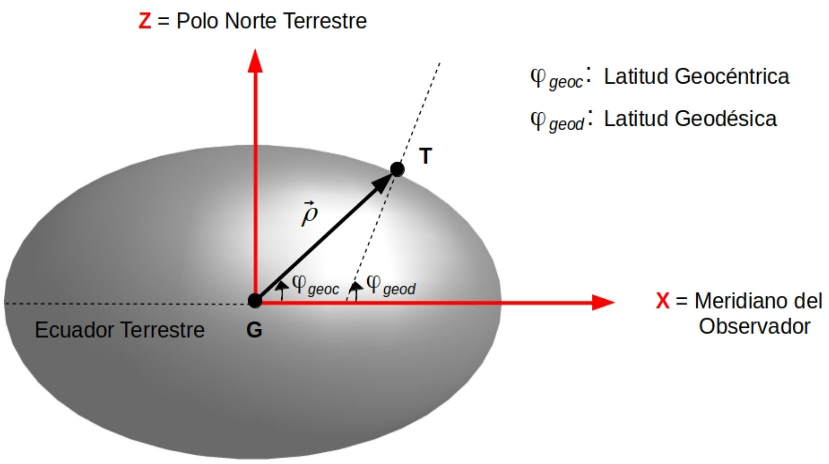
La forma matemática adoptada para la Tierra está dada por el elipsoide de revolución World Geodetic System 1984 (WGS84). El semieje mayor de dicho elipsoide es a = 6378,137 km mientras que el achatamiento f adopta un valor dado por f = 1/298,257223563. La Figura 2.3 muestra una representación esquemática de dicho elipsoide, junto con el vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho},$ y las latitudes geocéntrica y geodésica del Topocentro φ_{geoc} y $\varphi_{geod},$ respectivamente. Además, en dicha figura, se ilustran en color rojo los ejes cartesianos del sistema de referencia terrestre, donde el eje Z tiene la dirección del Polo Norte Terrestre, el eje X apunta hacia el Meridiano Geodésico del Observador, y el eje Y (no representado) se ubica formando una terna directa.

De la Figura 2.3 es sencillo observar que las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre están dadas por

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix}|\vec{\rho}|\cos\varphi_{geoc}\\0\\|\vec{\rho}|\,\mathrm{sen}\,\varphi_{geoc}\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Figura 2.3.

Representación esquemática del elipsoide de revolución WGS84 y del sistema de referencia terrestre.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 97), de R. M. Green, 1985, Cambridge University Press.

Sin embargo, la latitud geocéntrica del Topocentro no resulta ser dato. Haciendo uso del modelo de elipsoide WGS84 y siguiendo el planteo desarrollado por Green (1985, p. 98), es posible escribir las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre mediante la expresión

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix}C\cos\varphi_{geod}\\0\\S\,\mathrm{sen}\,\varphi_{geod}\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

donde

$$C=a\left[\cos^2\varphi_{geod}+(1-f)^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_{geod}\right]^{-1/2} \tag{2.12}$$

y

$$S=(1-f)^2 C \tag{2.13}$$

La latitud geodésica del Topocentro φ_{geod} y los parámetros del elipsoide a y f resultan ser datos conocidos por lo cual, las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre quedan completamente definidas a partir de las Ecuaciones 2.11, 2.12, y 2.13.

Aún nos resta escribir las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste. Para cumplir con esta tarea, observemos la Figura 2.4. Dado que el eje Z del sistema ecuatorial celeste tiene la misma dirección que el eje Z del sistema de referencia terrestre, que el eje X del sistema ecuatorial celeste apunta hacia el equinoccio vernal γ, y el eje X del sistema terrestre está orientado hacia el Meridiano Geodésico del Observador, las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste pueden ser obtenidas a partir de la expresión

$$\vec{\rho}=R_Z^{ret}(TSL)\vec{\rho}_{terr} \tag{2.14}$$

donde $R_Z^{ret}(TSL)$ representa la matriz de rotación retrógrada alrededor del eje Z un ángulo igual al Tiempo Sidéreo Local TSL, y $\vec{\rho}_{terr}$ el vector posición geocéntrico del Topocentro escrito en el sistema terrestre, el cual está dado por la Ecuación 2.11. De acuerdo con esto y siguiendo los lineamientos de Green (1985, p. 107), las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste son escritas como

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix} C\cos\varphi_{geod}\cos TSL \\ C\cos\varphi_{geod}\,\mathrm{sen}\,TSL \\ S\,\mathrm{sen}\,\varphi_{geod} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

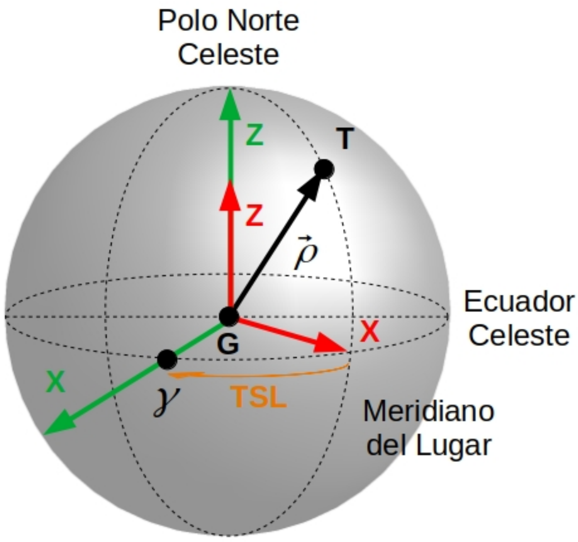
Es muy importante mencionar que en la representación del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema terrestre y en su posterior escritura en el sistema ecuatorial celeste, hemos asumido diversas hipótesis que merecen ser especificadas. Por un lado, consideramos que el Geocentro coincide con el centro del elipsoide WGS84. Por otra parte, despreciamos los efectos del movimiento del polo (ver capítulo 8). Finalmente, consideramos que la deflexión de la vertical es nula, por lo cual la proyección del meridiano geodésico en la esfera celeste coincide con el meridiano astronómico. La especificación de tales hipótesis resulta ser sumamente necesaria para una correcta interpretación del procedimiento matemático propuesto.

Habiendo expresado cada uno de los vectores posición $\vec{r}_G, \vec{r}_T,$ y $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste, la Ecuación 2.7 puede ser resuelta y determinar el vector posición topocéntrico del astro $\vec{r}_T$. En efecto, teniendo en cuenta las Ecuaciones 2.7, 2.8, 2.9, y 2.15, el cálculo de $\vec{r}_T$ requerirá la resolución del sistema (Green, 1985, p. 107)

$$\begin{pmatrix} |\vec{r}_T|\cos\delta_T\cos\alpha_T \\ |\vec{r}_T|\cos\delta_T\operatorname{sen}\alpha_T \\ |\vec{r}_T|\operatorname{sen}\delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{r}_G|\cos\delta_G\cos\alpha_G \\ |\vec{r}_G|\cos\delta_G\operatorname{sen}\alpha_G \\ |\vec{r}_G|\operatorname{sen}\delta_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C\cos\varphi_{geod}\cos TSL \\ C\cos\varphi_{geod}\operatorname{sen} TSL \\ S\operatorname{sen}\varphi_{geod} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Figura 2.4.

Sistemas de referencia involucrados en la transformación del vector posición geocéntrico del topocentro.



Nota. Sistemas de referencia celeste en verde y terrestre en rojo.

Ya que el lado derecho de esta ecuación matricial nos queda expresado en función de datos conocidos, es posible calcular, a partir de ello, las componentes cartesianas del vector posición topocéntrico del astro $\vec{r}_T = (r_{T,x}, r_{T,y}, r_{T,z})$ en el sistema ecuatorial celeste. Una vez calculadas dichas componentes, la ecuación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} |\vec{r}_T|\cos\delta_T\cos\alpha_T \\ |\vec{r}_T|\cos\delta_T\operatorname{sen}\alpha_T \\ |\vec{r}_T|\operatorname{sen}\delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{T,x} \\ r_{T,y} \\ r_{T,z} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

nos permite derivar las variables topocéntricas $|\vec{r}_T|, \alpha_T,$ y δ_T a partir del siguiente esquema de resolución:

$$|\vec{r}_T| = \sqrt{r_{T,x}^2 + r_{T,y}^2 + r_{T,z}^2} \tag{2.18}$$

$$\delta_T = \text{arcsen}\left(\frac{r_{T,z}}{|\vec{r}_T|}\right) \tag{2.19}$$

$$\alpha_T = \text{arctg}\left(\frac{r_{T,y}}{r_{T,x}}\right) \tag{2.20}$$

Es importante destacar que antes de calcular la ascensión recta topocéntrica α_T a partir de la Ecuación 2.20, es necesario determinar el cuadrante al cual pertenece dicha coordenada. A partir de la Ecuación 2.17, y teniendo en cuenta que $|\vec{r}_T|$ y $\cos\delta_T$ son cantidades positivas, el signo de las coordenadas $r_{T,x}$ y $r_{T,y}$ nos dan el signo de $\cos\alpha_T$ y $\text{sen}\,\alpha_T,$ respectivamente, lo cual nos permite determinar el cuadrante de $\alpha_T.$

Finalmente, la Figura 2.2 nos muestra que, dado que conocemos $|\vec{\rho}|, |\vec{r}_G|,$ y $|\vec{r}_T|,$ es posible obtener la paralaje diurna p del astro aplicando el teorema del coseno de la trigonometría plana, derivando la expresión

$$p = \arccos\left(\frac{|\vec{r}_G|^2 + |\vec{r}_T|^2 - |\vec{\rho}|^2}{2|\vec{r}_G||\vec{r}_T|}\right) \tag{2.21}$$

Es importante destacar que la corrección de coordenadas por efectos de paralaje diurna debe ser aplicada a objetos pertenecientes al Sistema Solar. Por el contrario, astros ubicados fuera de nuestro Sistema Solar poseen distancias lo suficientemente grandes como para que la corrección de sus coordenadas por efectos de paralaje diurna pueda ser considerada despreciable.

Paralaje anual

Definiciones y consideraciones generales

Dada la Figura 2.5, sean B y G el Baricentro del Sistema Solar y el Geocentro, respectivamente, $\vec{r}_B$ y $\vec{r}_G$ los vectores posición baricéntrico y geocéntrico de un astro, respectivamente, $\vec{R}$ el vector posición baricéntrico del Geocentro, y E el ángulo de elongación. Finalmente, sea π_* la paralaje anual, la cual se define como el ángulo subtendido en el astro por los vectores posición baricéntrico y geocéntrico del mismo.

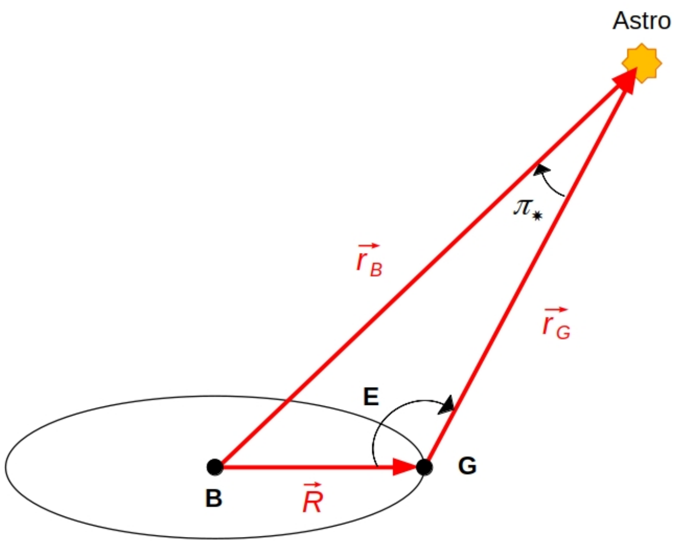
A partir del teorema del seno

$$\operatorname{sen}\pi_* = \frac{|\vec{R}|}{|\vec{r}_B|}\operatorname{sen}E \tag{2.22}$$

(Smart, 1977, p. 217; Green, 1985, p. 188).

Figura 2.5.

Representación esquemática de la paralaje anual.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 187), de R. M. Green, 1985, Cambridge University Press.

Asumiendo que $\operatorname{sen}\pi_* \approx \pi_*$, $|R| = 1\,\mathrm{UA}$, y E = 90°, la paralaje anual puede ser expresada por

$$\pi_*[\mathrm{rad}] \approx \frac{1}{|\vec{r}_B|[\mathrm{UA}]} \tag{2.23}$$

Con el fin de cuantificar este efecto, mencionamos que la paralaje anual de la estrella Próxima Centauri, la cual se ubica a 4,2 años luz y es la más cercana a nuestro Sistema Solar, es de 0,768´´ (Gaia Collaboration et al., 2016; 2021).

Fórmulas rigurosas de corrección

De la Figura 2.6, sean XYZ los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste baricéntrico y geocéntrico, los cuales son ilustrados en color magenta y verde, respectivamente. Sean $\vec{r}_B$ y $\vec{r}_G$ los vectores posición del astro medidos en el sistema ecuatorial celeste baricéntrico y geocéntrico, respectivamente. Sea $\vec{R}$ el vector posición del Geocentro medido en el sistema ecuatorial celeste baricéntrico.

De acuerdo a lo expuesto en la Figura 2.6, se verifica la relación vectorial (Green, 1985, p. 188)

$$\vec{r}_B=\vec{r}_G+\vec{R} \tag{2.24}$$

Destacamos que en este marco de trabajo siempre la incógnita a determinar será el vector posición del astro $\vec{r}_G$ asociado al sistema ecuatorial celeste geocéntrico. Luego, nuestra expresión vectorial de trabajo siempre será

$$\vec{r}_G=\vec{r}_B-\vec{R} \tag{2.25}$$

Si el astro en consideración pertenece al Sistema Solar, es esencial que esta ecuación vectorial sea utilizada en su forma exacta para el desarrollo de su resolución. Sin embargo, si el astro en cuestión es una estrella, es posible asumir ciertas simplificaciones en el procedimiento matemático (Green, 1985, p. 188). En efecto, escribiendo $\vec{r}_B=|\vec{r}_B|\hat{s}_B,$ $\vec{r}_G=|\vec{r}_G|\hat{s}_G,$ y $\vec{R}=|\vec{R}|\hat{s}_R,$ la Ecuación 2.25 puede expresarse como

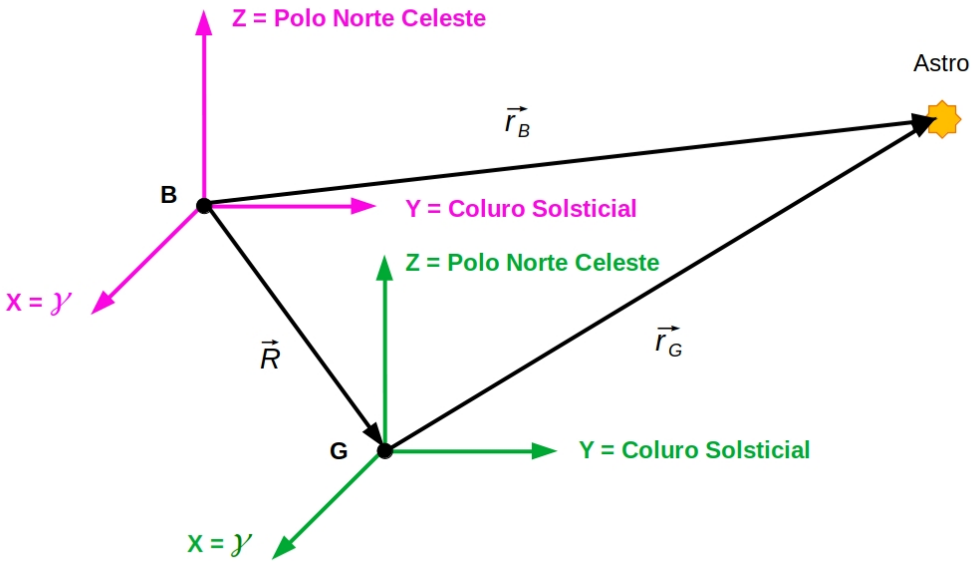
$$|\vec{r}_G|\hat{s}_G=|\vec{r}_B|\hat{s}_B-|\vec{R}|\hat{s}_R \tag{2.26}$$

Si multiplicamos vectorialmente dos veces el versor $\hat{s}_B$ por la Ecuación 2.26 obtenemos que

$$|\vec{r}_G|\hat{s}_B\times(\hat{s}_B\times\hat{s}_G)=-|\vec{R}|\hat{s}_B\times(\hat{s}_B\times\hat{s}_R) \tag{2.27}$$

Figura 2.6.

Sistemas de referencia y vectores posición en el tratamiento vectorial de la paralaje anual.



Nota. Sistemas de referencia celeste baricéntrico en magenta y geocéntrico en verde.

Utilizando identidades vectoriales, es posible reescribir la ecuación anterior en términos de productos escalares, tomando la forma

$$[\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_G) - \hat{s}_G] = -\frac{|\vec{R}|}{|\vec{r}_G|}[\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_R) - \hat{s}_R] \tag{2.28}$$

Dado que para una estrella $|\vec{r}_B| \approx |\vec{r}_G|$ entonces $(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_G) \approx 1$, y $|\vec{R}|/|\vec{r}_B| \approx |\vec{R}|/|\vec{r}_G| \approx \pi_*$, con lo cual la Ecuación 2.28 puede finalmente expresarse como

$$\vec{ds} = \hat{s}_G - \hat{s}_B = \pi_*[\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_R) - \hat{s}_R] \tag{2.29}$$

Esta es la ecuación vectorial con la cual vamos a trabajar para afrontar la resolución de una transformación de coordenadas de una estrella por efectos de paralaje anual.

Trabajando en un sistema ecuatorial celeste, el versor asociado a la posición baricéntrica de una estrella se escribe como $\hat{s}_B = (\cos\delta_B \cos\alpha_B, \cos\delta_B \operatorname{sen}\alpha_B, \operatorname{sen}\delta_B)$, siendo α_B y δ_B la ascensión recta y la declinación baricéntricas de la misma. Teniendo en cuenta que el versor asociado a la posición baricéntrica del Geocentro en el sistema ecuatorial celeste se expresa como $\hat{s}_R=(s_{R,x}, s_{R,y}, s_{R,z})$, y que el vector diferencial $\vec{ds}=\hat{s}_G-\hat{s}_B$ está dado por

$$ds_x=-\operatorname{sen}\delta_B\cos\alpha_B\, d\,\delta-\cos\delta_B\operatorname{sen}\alpha_B\, d\,\alpha \tag{2.30}$$

$$ds_y=-\operatorname{sen}\delta_B\operatorname{sen}\alpha_B\, d\,\delta+\cos\delta_B\cos\alpha_B\, d\,\alpha \tag{2.31}$$

$$ds_z=\cos\delta_B\, d\,\delta \tag{2.32}$$

es posible escribir los cambios $d\,\alpha$ y $d\,\delta$ en las coordenadas ecuatoriales celestes de una estrella por efecto de la paralaje anual mediante (Green, 1985, p. 189)

$$d\,\alpha=\alpha_G-\alpha_B=\pi_*(s_{R,x}\operatorname{sen}\alpha_B-s_{R,y}\cos\alpha_B)\sec\delta_B \tag{2.33}$$

$$d\,\delta=\delta_G-\delta_B=\pi_*(s_{R,x}\operatorname{sen}\delta_B\cos\alpha_B+s_{R,y}\operatorname{sen}\delta_B\operatorname{sen}\alpha_B-s_{R,z}\cos\delta_B) \tag{2.34}$$

Trabajando en un sistema de referencia ecliptical es posible obtener relaciones análogas para los cambios $d\,\lambda$ y $d\beta$ en las coordenadas eclipticales de una estrella por efecto de la paralaje anual. Recordando que el versor asociado a la posición baricéntrica de una estrella en un sistema de referencia ecliptical se escribe como $\hat{s}_B=(\cos\beta_B\cos\lambda_B, \cos\beta_B\operatorname{sen}\lambda_B, \operatorname{sen}\beta_B)$, siendo λ_B y β_B la longitud y latitud ecliptical baricéntricas de la misma, respectivamente, y que además, el versor asociado a la posición baricéntrica del Geocentro en el sistema de referencia ecliptical se expresa como $\hat{s}_R=(s^e_{R,x}, s^e_{R,y}, s^e_{R,z})$, es posible escribir los cambios $d\,\lambda$ y $d\beta$ por efecto de la paralaje anual por

$$d\,\lambda=\lambda_G-\lambda_B=\pi_*(s^e_{R,x}\operatorname{sen}\lambda_B-s^e_{R,y}\cos\lambda_B)\sec\beta_B \tag{2.35}$$

$$d\beta=\beta_G-\beta_B=\pi_*(s^e_{R,x}\operatorname{sen}\beta_B\cos\lambda_B+s^e_{R,y}\operatorname{sen}\beta_B\operatorname{sen}\lambda_B-s^e_{R,z}\cos\beta_B) \tag{2.36}$$

Fórmulas aproximadas de corrección: elipse paraláctica

Si asumimos la hipótesis de que el Geocentro se mueve sobre una órbita circular y sin perturbaciones, las Ecuaciones 2.35 y 2.36 se verán simplificadas. En efecto, tal como nos muestra la Figura 2.7, si el Geocentro G cumple con dichas condiciones, el vector posición baricéntrico del Geocentro $\vec{R}$ en el sistema ecliptical se escribe como $\vec{R}=|\vec{R}|\hat{s}_R$, donde $|\vec{R}|=1\,\mathrm{UA}$ y

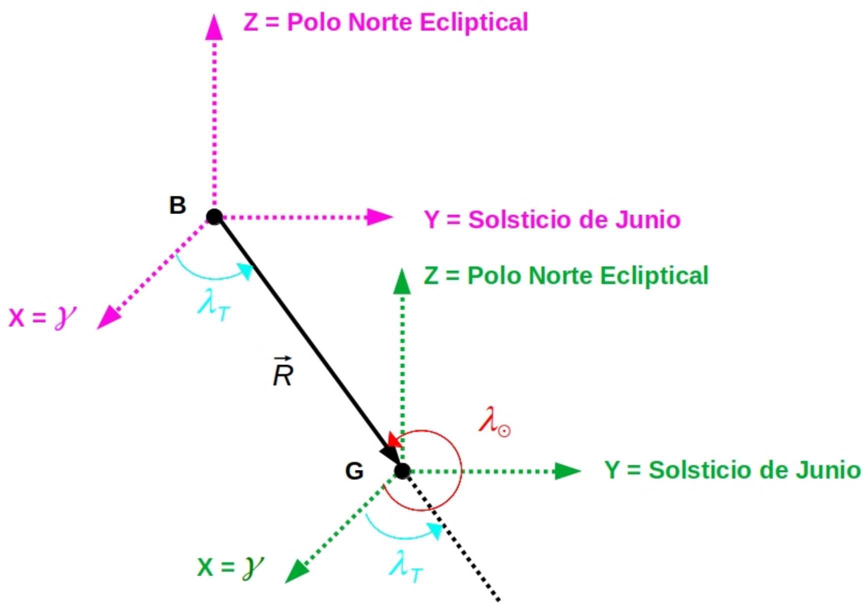
$$\hat{s}_R=(s^e_{R,x}, s^e_{R,y}, s^e_{R,z})=(\cos\lambda_T, \operatorname{sen}\lambda_T, 0) \tag{2.37}$$

siendo λ_T la longitud ecliptical del Geocentro. Ya que $\lambda_T=\lambda_\odot-180°$, siendo $\lambda_\odot$ la longitud ecliptical del Sol, entonces (Green, 1985, p. 191)

$$s_R=(s^e_{R,x}, s^e_{R,y}, s^e_{R,z})=(-\cos\lambda_\odot, -\operatorname{sen}\lambda_\odot, 0) \tag{2.38}$$

Figura 2.7.

Representación esquemática de la longitud ecliptical de la Tierra λ_T *y el Sol* $\lambda_\odot$.



Trabajando bajo las hipótesis mencionadas y teniendo en cuenta la Ecuación 2.38, las Ecuaciones 2.35 y 2.36 podrán escribirse como

$$d\lambda=\lambda_G-\lambda_B=-\pi_* \operatorname{sen}(\lambda_B-\lambda_\odot)\sec\beta_B \tag{2.39}$$

$$d\beta=\beta_G-\beta_B=-\pi_* \cos(\lambda_B-\lambda_\odot)\operatorname{sen}\beta_B \tag{2.40}$$

(Green, 1985, p. 191). Estas ecuaciones muestran que el efecto de la paralaje anual producirá un cambio periódico en las coordenadas eclipticales de la estrella. El período de variación es de un año, el cual está lógicamente asociado al movimiento orbital de la Tierra.

Para entender la geometría de este efecto, situemos un par de ejes cartesianos (x, y) con origen en la posición baricéntrica de la estrella, de modo que x se ubique paralelo al plano de la Eclíptica e y sobre el meridiano ecliptical de la estrella.

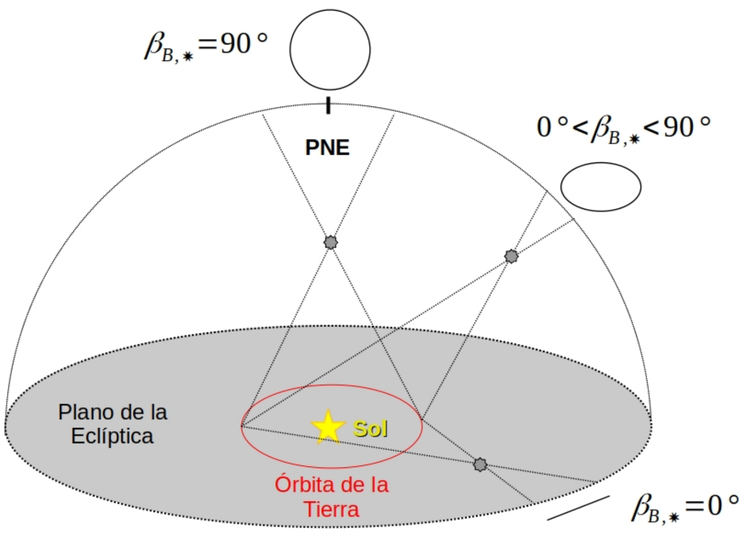
De acuerdo con esto, $x = d\lambda \cos\beta_B$ mientras que $y = d\beta$. A partir de las Ecuaciones 2.39 y 2.40 es posible mostrar que

$$\frac{(d\lambda\cos\beta_B)^2}{\pi_*^2} + \frac{(d\beta)^2}{(\pi_* \operatorname{sen}\beta_B)^2} = 1 \tag{2.41}$$

(Green, 1985, p. 191), la cual representa la ecuación de una elipse.

Figura 2.8.

Representación esquemática de la elipse paraláctica



Nota. Se muestran estrellas con diferentes latitudes eclipticales baricéntricas. Adaptado de *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Annual-parallax-ellips.png*, D. Klimushkin, 2014. CC0 1.0.

En efecto, la ecuación general de una elipse a lo largo del eje x tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.42}$$

donde a y b representan el semieje mayor y menor de la elipse, respectivamente, los cuales nos permiten calcular la excentricidad e de la misma a partir de la expresión $e=\sqrt{1-(b/a)^2}$.

De acuerdo con esto, la Ecuación 2.41 nos permite concluir que, para cada estrella, su posición geocéntrica describe una elipse anual alrededor de su posición baricéntrica, la cual se caracteriza por un semieje mayor $a=\pi_*$, un semieje menor $b=\pi_* \operatorname{sen}\beta_B$, y una excentricidad $e=\cos\beta_B$. En efecto, el semieje mayor de esta elipse paraláctica dependerá de la distancia a la estrella, mientras que la excentricidad de la ubicación relativa de la misma respecto al plano de la eclíptica. La dependencia de la excentricidad con la latitud ecliptical baricéntrica nos muestra que dichas elipses se verán más excéntricas para estrellas más cercanas a la eclíptica. Este resultado nos permite distinguir dos casos extremos de particular interés. Por un lado, la posición geocéntrica de estrellas ubicadas en los polos eclipticales describe una circunferencia de radio π_* alrededor de su posición baricéntrica ya que la excentricidad de la elipse paraláctica resulta ser nula. Por otra parte, la posición geocéntrica de estrellas ubicadas sobre la Eclíptica describe un segmento de extensión $2\pi_*$ sobre el plano ecliptical alrededor de su posición baricéntrica ya que, tal como se observa de la Ecuación 2.40, la latitud ecliptical no experimenta ningún cambio. La Figura 2.8 nos permite ver una representación esquemática de la elipse paraláctica para estrellas con diferentes latitudes eclipticales baricéntricas.

Referencias

Chambers, J. E. (1999) A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304, 793

Everhart, E. (1985) An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings, Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, en Proceedings of IAU Colloq. 83, Carusi A. y Valsecchi G.B. eds. *Astrophysics and Space Science Library. Volume 115,* 185.

Gaia Collaboration et al. (2016). The Gaia mission*, A&A* 595, A1.

Gaia Collaboration et al. (2021). Gaia EDR3: Summary of the contents and survey properties, *A&A,* 649, A1.

Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.

Smart W. M. (1977) *Text-Book on Spherical Astronomy,* Sexta Edición, Cambridge University Press.