

CAPÍTULO 10

Sistemas y marcos de referencia, modelos y convenciones vigentes

Laura I. Fernández

En este capítulo abordaremos breves reseñas históricas y numerosos detalles técnicos involucrados en la definición, el establecimiento convencional y la materialización de los Sistemas de Referencia Celeste cinemático y Terrestre. En particular nos enfocaremos en los Sistemas de Referencia Celeste Internacional (ICRS, International Celestial Reference System) y Terrestre Internacional (ITRS, International Terrestrial Reference System), resumiendo las circunstancias que motivaron su establecimiento y las sucesivas modernizaciones y actualizaciones. Enfatizamos en las convenciones establecidas tanto por la Unión Astronómica Internacional (IAU, International Astronomical Union) como por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG, International Union of Geodesy and Geophysics) y en el rol del Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y los sistemas de referencia (IERS, International Earth Rotation and reference systems Service). También presentaremos el Sistema de Referencia Celeste Intermediario (CIRS, Celestial Intermediate Reference System) y los Orígenes No Rotantes Celeste (CIO, Celestial Intermediate Origin) y Terrestre (TIO, Terrestrial Intermediate Origin) como herramientas útiles para la transformación entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste (o viceversa). Concluiremos con el desarrollo de las transformaciones matriciales entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste mostrando similitudes y diferencias a tener en cuenta según se trate del Sistema de Referencia Celeste dinámico, i.e. según los modelos de Precesión IAU1976 (Lieske y otros, 1977) y de Nutación IAU1980 (Seidelman, 1982), ó del Sistema de Referencia Celeste cinemático aplicando para ello las convenciones IERS 2010 (Kaplan, 2005; IERS TN36, 2010) junto con los modelos y estándares vigentes al momento de escribir este texto.

Sistema y Marco de Referencia Celeste Internacional (ICRS e ICRF)

Durante la XXI^{era} Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (IAU) celebrada en Buenos Aires en 1991, se establece la necesidad de implementar un Sistema de Referencia Celeste Baricéntrico Convencional basado en la posición observada de objetos extragalácticos (recomendación VI. p. 18, IAU1991, 1991). Además, se especifica que el nuevo sistema coordinado debe ser una continuación del catálogo FK5 (Fricke, et al., 1988) en la época J2000.0 (Kaplan, 2005) y se pone de manifiesto la existencia de varios marcos de referencia que cumplen con estos requisitos. Estos marcos, materializados por diferentes instituciones, eran combinados por el IERS con el fin de obtener un único marco de referencia celeste necesario para el cálculo de los Parámetros de la Orientación Terrestre (EOP, Earth Orientation Parameters). Por lo anterior la recomendación VI antes mencionada, que puede citarse como uno de los primeros hitos del establecimiento del nuevo Marco de Referencia Celeste, en su texto recomendó llevar a cabo la tarea estadística necesaria sobre los diferentes marcos existentes al momento para analizar sus exactitudes pero también sus posibles diferencias sistemáticas. Con este fin, designó al grupo de expertos que llevaría a cabo la tarea y pautó la definición de un nuevo Sistema de Referencia Celeste convencional para ser presentado en una futura Asamblea General de la IAU.

El Sistema de Referencia Celeste Internacional (ICRS) fue adoptado oficialmente por la Unión Astronómica Internacional desde el 1 de enero de 1998 según la Resolución B2 de la XXIII^{era} Asamblea General celebrada en Kyoto en 1997 (IAU1997, 1997; Kaplan, 2005). A través de la resolución B2 de 1997 también quedó establecida su materialización a través del Marco de Referencia Celeste Internacional (ICRF, International Celestial Reference Frame).

Además de poseer direcciones cartesianas alineadas con el FK5 y origen de coordenadas en el Baricentro del Sistema Solar, el plano fundamental del ICRF debía estar próximo al Ecuador Celeste medio J2000.0 (Arias et al., 1995; IERSTN21, 1996). Algunos trabajos publicados en ese momento (Souchay et al., 1995, Charlot et al., 1994) estiman que el apartamiento entre la materialización del Polo del ICRS y el Polo celeste Medio Convencional J2000.0 es inferior a los 20 milésimas de segundo de arco (msa¹) (ver Capítulo 8 para más detalles). Por lo anterior, era esperable que la materialización del Ecuador Celeste medio J2000.0, realizado por el IERS a partir de las observaciones VLBI, resultara diferente del plano fundamental convencional. Este hecho está contemplado en la resolución IAU B2 de 1997 que estipula que la dirección del Polo ICRF sea consistente con la del polo FK5 dentro de las incertezas de este último (IAU1997, 1997; Kaplan, 2005).

¹ 1 msa = 0,001 segundos de arco

Una situación similar se planteó con el origen de las ascensiones rectas (α) del ICRS. La IAU recomendó que éste se ubique próximo al equinoccio dinámico J2000.0 donde *próximo* puede entenderse nuevamente como dentro de las incertezas del sistema dinámico previo FK5. Los primeros cálculos realizados por el IERS a partir de la compilación de catálogos en radio ubicó al origen de α a unas 78 ± 10 msa del equinoccio dinámico J2000.0 cumpliendo así con los requisitos de la IAU (Arias et al., 1995; IERSTN21, 1996). Este corrimiento debe interpretarse como una rotación directa en torno al eje polar, y por lo tanto las sucesivas y posteriores realizaciones del ICRS tuvieron como objetivo minimizar este efecto (Kaplan, 2005).

El ICRF se basa en las coordenadas de radio fuentes extragalácticas observadas con las antenas de la Interferometría de línea de base muy larga (VLBI, Very Long Baseline Interferometry). La estabilidad rotacional del marco se basa en la suposición de que esas fuentes no tienen movimientos propios. Debe aclararse que aunque por convención los ejes del ICRF se ubican muy próximos a los ejes definidos por el Ecuador y Equinoccio medios J2000.0, el ICRS es un sistema *cinemáticamente no rotante* y en tal sentido sus ejes serán direcciones fijas en el espacio (Kaplan, 2005).

En la resolución B2 de la IAU1997 también se estableció que el catálogo Hipparcos (HCRF, Hipparcos Celestial Reference Frame) constituya la materialización primaria del ICRS en longitudes de onda del rango óptico (IAU1997, 1997).

Un grupo de expertos vinculados al IERS, quienes fueron designados por la IAU (*IAU Working group on Reference Frames*), fueron los encargados de la construcción del ICRF. Para tal fin procesaron observaciones VLBI desde 1995, pero además fueron los responsables del vínculo del ICRF con Marcos de Referencia en otras frecuencias, del análisis de nuevas y mejores estrategias de cálculo, del estudio de la estabilidad y la calidad astrométrica de las radiofuentes en el marco, y de su densificación.

La primera realización del ICRF incluyó 608 radiofuentes, de las cuales sólo 212 objetos admitieron ser calificadas como *fuentes de definición* por tener una estructura estable, más de 20 observaciones registradas, errores formales inferiores a 1 msa y haber sido observadas durante período mayor a los 2 años. Sólo el subconjunto de las fuentes de definición tienen un rol fundamental en la determinación del ICRF, siendo estas las responsables de la orientación de los ejes del ICRS.

La primera versión del ICRF mostró por primera vez un rasgo que aún permanece en las sucesivas actualizaciones del marco: una desigual distribución de radiofuentes en los hemisferios norte y sur. Esta peculiaridad está vinculada a la geometría de la red de estaciones VLBI ubicadas mayormente en el hemisferio norte.

El ICRF, esto es, las coordenadas de las fuentes, sus respectivos errores y un análisis técnico de los distintos aspectos de la primera materialización, pueden encontrarse en la nota técnica 23 del IERS (IERSTN23, 1997).

La primera extensión del ICRF (ICRF-Ext.1) tuvo lugar en abril de 1999 y su objetivo principal fue calcular nuevamente las posiciones de las radio fuentes involucradas en el primer cómputo del ICRF. Esta tarea tuvo un doble objetivo ya que, no sólo se refinó la posición calculada del conjunto de fuentes candidatas, sino que también se monitoreó el conjunto total de las radio fuentes para chequear que aún cumplieran con las características necesarias requeridas para formar parte del ICRF. Este nuevo cálculo involucró observaciones realizadas entre diciembre 1994 y abril 1999. Como resultado se comprobó que las posiciones y los errores del conjunto de fuentes de definición no cambió. Además, se agregaron 59 nuevas radio fuentes al número total (Fey y Gaume, 2006).

La segunda extensión del ICRF (ICRF-Ext.2) en 2003 tuvo en cuenta más de 1 millón de nuevas observaciones realizadas en el periodo desde mayo de 1999 hasta mayo de 2002. Estos datos se redujeron para efectuar un nuevo cálculo y brindar posiciones del conjunto original de radio fuentes estimadas en 1995, pero también de aquellas fuentes que formaron parte del ICRF-Ext1. Como resultado se incorporaron 50 nuevas fuentes y se corroboró que las posiciones y la magnitud de los errores para las fuentes de definición no se modificaron respecto del primer ICRF² (Fey y Gaume, 2006). La suma de ambas extensiones agregó 109 nuevas fuentes al marco (Charlot et al., 2020).

Aún cuando ICRF1 representó una mejora cercana a un orden de magnitud en los valores de ruido y en la estabilidad de los ejes con respecto al FK5, también tuvo limitaciones y deficiencias. La debilidad más evidente fue la distribución no uniforme y desigual de las radiofuentes de definición, las que se ubican mayoritariamente en el hemisferio norte. Además, varias de las fuentes de definición originales resultaron tener variaciones sistemáticas y significativas en su posición (IERSTN35, 2009).

La segunda realización del ICRF (ICRF2) fue oficialmente adoptado a partir del 1 de enero de 2010 según resolución B3 de la XXVII^{ma} Asamblea General de la IAU, celebrada en Brasil (IAU2009, 2009). Entre las razones que justificaron el nuevo cálculo del Marco de Referencia Celeste podemos mencionar la cantidad disponible de observaciones adicionales acumuladas durante 14 años, la inclusión de nuevas sesiones de observación en el hemisferio sur, la mejora de modelos geofísicos y el uso de computadoras más rápidas que permitieron mejoras significativas en el análisis de los datos. Las nuevas mediciones se realizaron con antenas y arreglos más sensibles, entre los que se incluyeron 10 estaciones que contienen arreglos de antenas con línea de base muy larga (VLBA, Very Long Baseline Array), mejorando la calidad de los datos. Esto permitió seleccionar un juego de fuentes mas estables y mejor distribuidas en el cielo para lograr una definición más precisa de los ejes (IERSTN35, 2009).

El ICRF2 posee 3414 radio fuentes compactas, cuyas posiciones se obtuvieron usando casi 30 años de observaciones VLBI acumuladas. En una rápida comparación con respecto al

² En adelante llamaremos ICRF1 a la primera realización

ICRF1, el ICRF2 posee 5 veces más fuentes, resultó ser 5-6 veces más exacto con un ruido de sólo ≈ 40 micro segundos de arco (μs^3) y es 2 veces más estable que su predecesor con una estabilidad de $\approx 10 \mu\text{s}$ en la materialización de sus ejes. La solución final ICRF2 se alineó con el ICRF1-Ext2 a través de 138 fuentes estables y comunes (IERSTN35, 2009).

Con el objetivo de eliminar o reducir las debilidades del ICRF1, el ICRF2 posee 295 nuevas fuentes de definición, más estables en su posición, sin estructuras extensas en su emisión de radio y con una distribución en el cielo más uniforme. Este conjunto de fuentes de definición ICRF2 no dependen de una época, y por lo tanto no poseen una época explícitamente asociada (IERSTN35, 2009).

El conjunto de 295 fuentes de definición ICRF2 sólo incluye 97 fuentes de definición del ICRF1 ubicadas mayormente en el hemisferio norte y por lo tanto susceptible de introducir errores sistemáticos debido a su pobre distribución espacial. Para remediarlo, se añadieron 41 nuevas fuentes de definición (que no pertenecen al conjunto de fuentes de definición del ICRF1), con distribución preferentemente austral dando lugar así al conjunto de 138 objetos comunes de comparación y alineación del ICRF2 con el ICRF1-Ext2 (IERS TN35, 2009).

El Marco de Referencia Celeste actual es el ICRF3 y fue establecido por la IAU según resolución B2 presentada en la XXX^{ma} Asamblea General de la IAU de 2018 (IAU2018, 2018) y está vigente desde el 1 de enero de 2019. Este nuevo marco de referencia posee características únicas con respecto de todos sus predecesores.

Efectivamente, tanto el ICRF2 como los anteriores (ICRF1 y sus extensiones) se basaron en mediciones VLBI realizadas en las frecuencias de 2.3/8.4 GHz⁴. El ICRF3, no sólo contiene la información de 40 años de observaciones VLBI en sus frecuencias estándar, sino que por primera vez, también brinda posiciones en frecuencias mayores (bandas K y X/Ka). Para ello, las observaciones VLBI fueron complementadas con datos VLBA (banda K) durante el período 2002-2018 y datos de la red DSN (Deep Space Network) (banda X/Ka) durante el período 2005-2018 (Charlot et al., 2020, p. 4-5).

Aunque las posiciones determinadas en otras frecuencias diferentes a la banda S/X pasan a formar parte del marco por primera vez, el concepto no es enteramente nuevo. En 1997, y como parte de las resoluciones de la IAU involucradas en la adopción del ICRF original, (ver resolución B2 inciso d en IAU1997, 1997), se sugiere extender el ICRF a otras frecuencias. En respuesta a esta inquietud, se han venido realizando determinaciones astrométricas VLBI en 24, 32 y 43 Ghz. La reducción de estas observaciones proveyó marcos de referencia celestes independientes en otras frecuencias del espectro electromagnético permitiendo que el ICRF2, por ejemplo, fuera sometido a una validación externa comparándolo con esos otros marcos de referencia celestes (IERSTN35, 2009).

³ $1\mu\text{s} = 1\text{E}-06$ segundos de arco

⁴ Banda S/X

El ICRF3 comprende 4588 fuentes en total, pero sólo 600 de ellas tienen posiciones en las tres bandas de frecuencia. Si discriminamos el número de fuentes posicionadas en cada frecuencia, el mayor número corresponde a la frecuencia tradicional de 8,4 GHz. (banda X) con 4536 fuentes. Sin embargo, un subconjunto de sólo 303 fuentes en 8,4 GHz., uniformemente distribuidas en el cielo son *fuentes de definición*. Dicho de otro modo, las posiciones de estas 303 fuentes definen los ejes del ICRF3 en virtud de su ubicación, estabilidad en su posición y tipo de estructura. Entre estas 303 fuentes, aquellas ubicadas en el hemisferio sur, son las que muestran la mayores incertezas en la determinación de su posición (Charlot et al, 2020).

El conjunto total de posiciones discriminadas por frecuencia se completa con 824 fuentes en 24 GHz (banda K) y 678 fuentes en 32 GHz (banda X/Ka). Las posiciones de las fuentes se han determinado de forma independiente en cada una de las frecuencias para preservar el contenido astrofísico de la información. La comparación de las posiciones individuales entre las 3 bandas de frecuencia muestra diferencias significativas sólo para un 5% de las fuentes (Charlot et al., 2020).

La época de referencia es 2015.0 y por primera vez, el ICRF3 calcula el efecto de la aceleración del sistema solar con respecto al centro galáctico estimada directamente a partir de los datos, resultando un valor de 0,0058 msa/año (Titov et al., 2011; Malkin, 2014). Efectivamente, el movimiento del Baricentro del Sistema Solar con respecto a un Marco de Referencia extragaláctico con origen en el centro galáctico puede provocar cambios aparentes en las posiciones de las radiofuentes por aberración. En este movimiento, se calculó sólo la parte no lineal (aceleración) dado que la parte constante de la aberración es absorbida en las posiciones de las fuentes por convención (Sovers et al, 1998). El resultado de no haber incorporado este efecto, que es significativo en escala decenal, habría producido una deformación importante en la red dado que las series temporales VLBI en la banda S/X acumulan casi 40 años de datos (Charlot et al., 2020).

El ruido estimado en las coordenadas individuales de las fuentes ICRF3 es de 0,03 msa. El ICRF3 está alineado con su predecesor, el ICRF2, dentro de las incertezas de este último. Las medianas de las diferencias alcanzan 0,1 msa en ascensión recta y 0,2 msa en declinación. También se compararon las posiciones ICRF3 respecto de las fuentes en el rango óptico del Marco de Referencia Celeste de la misión Gaia (Gaia-CRF⁵). Para ello, se usaron 2983 fuentes en común en la banda S/X, entre las cuales se cuentan 250 fuentes de definición. La comparación de las diferencias en las posiciones individuales ICRF3 en las 3 frecuencias y GAIA-CRF2 en el óptico, son significativas en un 22% de los casos, aunque se sugiere que este efecto podría ser una manifestación de la estructura extendida de las fuentes involucradas (Charlot et al., 2020).

⁵ Gaia Celestial Reference Frame

Extensión al rango óptico: Hipparcos y GAIA - ICRF

Según la resolución B2 inciso c de la XXIII^{era} Asamblea General de la IAU en 1997, se estableció que el catálogo Hipparcos sería la realización primaria del ICRS en el rango óptico del espectro electromagnético. Esta decisión, efectiva desde el 1 de enero de 1998 junto con la primera adopción del ICRF, tiene en cuenta que el Marco coordinado del catálogo Hipparcos está alineado con aquel definido por las radiofuentes extragalácticas con una incerteza de $\pm 0,6$ msa en la época de referencia J1991.25, con una tasa de rotación de $\pm 0,25$ msa/año (IAU1997,1997).

Aún antes del lanzamiento de la misión Gaia, se esperaba que la precisión astrométrica de esta nueva misión pudiera igualar e incluso superar la del ICRF. Fey y Gaume (2006, p. 24) proponen que el éxito de diversas misiones espaciales ópticas astrométricas propuestas en esos años podrían motivar una futura re-definición del ICRF en longitudes de onda ópticas.

El catálogo Hipparcos continuó materializando el ICRS en el rango óptico hasta 2021. Sin embargo y con el paso del tiempo, la comunidad astronómica ha sustituido su uso con el catálogo estelar de Gaia, cuya última realización es Gaia-CRF3.

Gaia-CRF3 refiere a la tercera realización del Marco de Referencia Celeste de la misión Gaia disponible con el tercer lanzamiento temprano de datos (Gaia-EDR3⁶) desde diciembre de 2020. Gaia-CRF3 está alineado con el ICRF con una precisión de aproximadamente 0,01 msa en la época J2016.0 y tiene una tasa de rotación de 0,01 msa/año (Brown et al., 2021, p. 7).

Gaia-CRF3 está constituido exclusivamente por objetos extragalácticos cuasi-estelares proveyendo posiciones y movimientos propios de 1614173 de objetos, y alineado con el ICRF a través de un subconjunto de 2269 de ellos.

Efectivamente, el marco de referencia Gaia-CRF3 en el visible e ICRF3 en radio están alineados en virtud de un juego común de 2269 radiofuentes ICRF3 que emiten en la banda S/X y que a su vez, sus emisiones en el rango óptico han sido identificadas en el tercer lanzamiento temprano de datos Gaia (EDR3) (Lindgren et al., 2021, p. 5). Además, los principios observacionales de Gaia satisfacen los requerimientos del ICRF3 (Brown et al., 2021).

Teniendo en cuenta lo anterior, recientemente la IAU a través de la Resolución B3 de la XXI^a Asamblea General en 2021 estableció que GAIA-CRF3 sea la realización fundamental del ICRS en el rango óptico desde el 1 de enero de 2022 (IAU2021b, 2021).

⁶ Early Data Release 3

Sistema y Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRS e ITRF)

En general, definimos al Sistema de Referencia Terrestre (TRS, Terrestrial Reference System) como un Sistema de Referencia espacial que gira con la Tierra en su movimiento diurno. En este sistema, las coordenadas de las posiciones de los puntos sobre la superficie terrestre sólo sufrirán variaciones con el tiempo debido a los distintos efectos geofísicos tanto periódicos y modelados (mareas) como súbitos e inesperados (movimientos tectónicos/sísmicos), (IERSTN36, 2010).

Dado que cada una de las Técnicas de la Astrometría y Geodesia Espacial (TAGE, i.e. GPS⁷, VLBI, SLR, DORIS) a través de su respectivo centro de análisis asociado (i.e. IGS, IVS, ILRS, IDS) definen y realizan su propio Sistema de Referencia Terrestre (TRS) al procesar sus observables, fue necesario *uniformar convencionalmente* el Sistema de Referencia Terrestre. Este hecho motivó a la Unión Internacional de Geofísicos y Geodestas (IUGG) y a la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) a adoptar convencionalmente un único TRS que denominó Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS) (Geodesist's Handbook, 1992 p. 125; Altamimi et al., 2002).

Por esta razón, siguiendo los modelos y las convenciones establecidos por la resolución 2 de la XX^{ma} Asamblea General de la IUGG 1991, en acuerdo con lo establecido en la XXI^a Asamblea General de la IAU en 1991 (Geodesist's Handbook, 1992 p. 128) y la resolución 2 de la XXIV^a Asamblea General IUGG en 2007 (IERSTN36, 2010, p. 171), el TRS se modela como *una terna directa ortogonal y con origen en el Geocentro*, entendiendo el Geocentro como el centro de masa de todo el sistema terrestre, incluidos los océanos y la atmósfera (GTRS, Geocentric Terrestrial Reference System). *Las orientaciones de sus ejes están relacionadas, idealmente, con el Ecuador de la Tierra y su eje de la figura*⁸, este último asociado al eje \hat{z} . Además, se define el *GTRS como co-rotante con la Tierra y su evolución temporal se ajusta a la condición NNR*⁹, con respecto a los movimientos tectónicos horizontales de toda la Tierra. Dicho de otra manera, la condición NNR establece que el momento angular total de todas las placas tectónicas debe ser cero (Dehant y Mathews, 2015, p. 26).

La unidad de longitud es el metro del sistema internacional (SI) y en el marco de la relatividad general (IERSTN36, 2010, p. 34) la coordenada temporal en el GTRS es el Tiempo Coordinado Geocéntrico (TCG¹⁰).

⁷ Si bien en los primeros ITRF, GPS era el único sistema satelital de posicionamiento global, hoy día corresponde referirnos a GNSS

⁸ Eje del máximo momento de inercia de la Tierra

⁹ No-Net-Rotation, también conocida como *condición de Tisserand*

¹⁰ Geocentric Coordinate Time

Las coordenadas cartesianas de cualquier punto definidas en un dado sistema TRS1 admiten ser transformadas a otro sistema TRS2, si aplicamos una Transformación tridimensional de Similaridad¹¹. Para ello necesitamos de siete parámetros a saber: tres componentes de traslación, un factor de escala y tres ángulos de rotación. Dado que los parámetros involucrados son funciones del tiempo, sus variaciones temporales vincularán las velocidades del punto en ambos sistemas (ver ecuaciones 4.3 y 4.4 en IERSTN36, 2010, p. 31). Por esta razón, las sucesivas realizaciones de ITRS también proveen los juegos de parámetros necesarios para vincular sus resultados con las realizaciones precedentes (ejemplo para ITRF2014 e ITRF2008 en https://itrf.ign.fr/ITRF_solutions/2014/tp_14-08.php).

Como hemos visto en el capítulo 1, el Marco de Referencia Terrestre (TRF, Terrestrial Reference Frame) se definirá como la realización o materialización del TRS. Para ello es necesario materializar su origen, orientación de los ejes, escala, y evolución temporal. El proceso se logra a través de la realización de un conjunto de puntos físicos con coordenadas en el TRS, con una precisión específica determinada por la técnica de medición y los errores propios de los métodos matemáticos de reducción y cálculo.

El Marco de Referencia más importante será el ITRF, entendido como la materialización del GTRS mediante un conjunto de coordenadas (y velocidades) instantáneas de puntos de referencia distribuidos en toda la superficie topográfica de la Tierra (Dehant y Mathews, 2015, p. 26). Estos productos serán el resultado de estrategias de combinación con el objetivo de minimizar los sistematismos y bias asociados con cada técnica particular de observación.

Aunque las posiciones y velocidades de los puntos del ITRF se brindan en coordenadas cartesianas, en la práctica suelen usarse coordenadas geodésicas o geográficas. Por lo anterior, es común expresar la orientación del eje x sobre el plano ecuatorial y en el meridiano convencional de Greenwich o meridiano internacional¹². Siendo este último el origen de las longitudes, que se miden positivas hacia el Este. Convencionalmente, la orientación inicial del ITRF corresponde a la del Sistema Terrestre del BIH¹³ (Bureau International de l'Heure) en la época de 1984.0. A su vez y para establecer una continuidad con los sistemas de referencia terrestres anteriores, esta primera alineación fue próxima al Ecuador medio de 1900 (IERSTN36, 2010, p. 34, Dehant y Mathews, 2015, p. 26).

El procedimiento usado por el IERS para determinar el ITRF consiste principalmente en dos pasos. En el primero de ellos cada uno de los Centros de Análisis asociados a una técnica de medición calculan su TRF individual y contribuyen no sólo con su solución, sino también con la información de las correcciones convencionales aplicadas por el centro. En el segundo paso,

¹¹ Transformación de siete parámetros

¹² También conocido como primer meridiano

¹³ Antecesor del actual IERS

es necesario combinar de modo estadísticamente óptimo cada combinación TRF individual y fijar el datum¹⁴ (IERSTN36, 2010).

El organismo encargado de las sucesivas materializaciones de ITRS es el IERS a través del Centro de Productos ITRS (ITRS-PC¹⁵). Hasta la fecha se produjeron 13 versiones del ITRF, siendo la primera el ITRF1988 y la última ITRF2014¹⁶ (IERSTN36, 2010; Altamimi et al., 2016). Desde la primera realización y hasta el ITRF2000, las soluciones provinieron de ajustes geodésicos globales de las series temporales de coordenadas y las velocidades de las estaciones terrestres estimadas individualmente desde los observables realizados con distintas técnicas entre las TAGE, en particular VLBI, SLR, GPS y DORIS. La combinación llevada a cabo en los primeros ITRF resultaba de la doble combinación simultánea de las posiciones y velocidades de las estaciones utilizando matrices de varianza/covarianza completas y una transformación de Helmert o de siete parámetros (Boucher et al., 1998, p. 4).

A partir del ITRF2000 cambia la estrategia de cálculo, minimizando las restricciones a las soluciones geodésicas y asegurando así una definición del dato a nivel de 1 mm. El origen del ITRF2000 está definido por el Geocentro determinado por la técnica de SLR y la escala determinada por SLR y VLBI. Su orientación está alineada con su precursor (ITRF97) y la evolución temporal de su orientación sigue por convención el modelo NNR-NUVEL-1A manteniendo la condición NNR (Altamimi et al., 2002). A partir del ITRF2005, la construcción del Marco de Referencia no sólo incorpora las series temporales de las coordenadas de las estaciones sino también los parámetros de la orientación terrestre (IERSTN36, 2010).

El ITRF14 incorpora características únicas con respecto a sus predecesores. Por primera vez, el marco se genera a partir de un modelado de los movimientos no lineales de las observaciones. Esto incluye señales estacionales (anuales y semestrales) y deformaciones post-sísmicas en los lugares que sufrieron grandes terremotos. Los modelos de deformación post-sísmica se estimaron utilizando datos GNSS/GPS y se brindan como un producto asociado al marco a través del IERS (Altamimi et al., 2016). Para el cálculo del ITRF14 se usó el historial completo de observaciones disponibles desde las cuatro técnicas de las TAGE (VLBI, GNSS, SLR, DORIS). Más específicamente, se utilizaron series temporales de las posiciones de las estaciones re-procesadas semanalmente para SLR y DORIS, diariamente para GNSS y sesiones de 24 horas de VLBI, además de los EOP que se incorporan al cómputo desde el ITRF2005 (Altamimi et al., 2016, IERSTN38, 2017).

El ITRF14 está caracterizado por su origen, su escala y su orientación. El origen ITRF14 es el Geocentro del sistema terrestre tal y como lo detectan las observaciones SLR durante el periodo comprendido entre 1993.0 y 2015.0. Concuerda con el origen del ITRF2008 dentro de los 3 mm y se define de forma tal que los parámetros de traslación sean nulos en la época

¹⁴ Conjunto de puntos de referencia y modelos adoptados (ejemplo: elipsoide de referencia)

¹⁵ International Terrestrial Reference System – Product Center

¹⁶ *Al momento de esta redacción se anuncia el lanzamiento de ITRF2020* (<https://itrf.ign.fr/en/solutions/itrf2020>)

2010.0. La escala ITRF14 está definida por las soluciones SLR y VLBI y es nula en la época 2010.0. Finalmente, la orientación de los ejes ITRF2014 se define de tal manera que los parámetros de rotación serán nulos en la época 2010.0 y las tasas de rotación también serán cero entre el ITRF14 y su predecesor ITRF2008. Estas dos condiciones se aplicaron sobre un conjunto de 127 estaciones de referencia (Altamimi et al., 2016, IERSTN38, 2017).

Actualmente, el ITRF proporciona no sólo coordenadas y velocidades de los puntos que realizan el sistema, sino también y a través del IERS, provee las correcciones y modelos convencionales para estimar las posiciones en el sistema terrestre con gran precisión. Conocida la posición y velocidad de una dada estación en la época de referencia, el modelo antes mencionado será una función lineal a trozos que tiene en cuenta: movimiento de las placas tectónicas, el rebote post-glacial y los desplazamientos sísmicos (IERSTN36, 2010, p. 35; Dehant y Mathews, 2015, Altamimi et al., 2016, p. 6128-6129).

Sistema de referencia celeste intermediario y orígenes no rotantes

Capitaine y colaboradores (1986) aplican el concepto de origen no rotante introducido por B. Guinot en 1979. Para ello, asume conocidos tanto el Sistema de Referencia Celeste (CRS, Celestial Reference System) como el Sistema de Referencia Terrestre (TRS). Donde el TRS se define con la condición de no poseer “ninguna rotación o traslación neta entre la superficie de la Tierra y este sistema de referencia” (Capitaine et al, 1986 p. 285).

Antes de continuar es importante resaltar que la resolución B1.3 adoptada en la XXIV^a Asamblea General de la IAU (IAU2000¹⁷, 2000) define dos CRS: uno con origen en el Baricentro del Sistema Solar (BCRS, Barycentric Celestial Reference System) y otro con origen en el centro de masas de la Tierra o Geocentro (GCRS, Geocentric Celestial Reference System). Ambos están definidos en el marco de la relatividad general, y aunque la relación matemática entre ellos excede los tópicos abarcados en el presente texto, presentaremos algunas de sus diferencias.

Según Kaplan (2005 p. 3) el BCRS es el sistema natural para expresar no sólo las efemérides de los objetos del sistema solar, sino también las posiciones y los movimientos de los objetos en nuestra galaxia y extragalácticos. Mientras que el GCRS “es un sistema de referencia local” utilizado para mediciones realizadas desde la Tierra.

Una lectura de las resoluciones IAU2000 no ofrece una definición clara y distintiva de su orientación relativa pero si establece que ambos son “cinemáticamente no rotantes”, esto es,

¹⁷ En adelante nos referiremos a este conjunto de resoluciones como “resoluciones IAU2000”

que sus ejes no presentan rotaciones sistemáticas con respecto a las radio fuentes que materializan el ICRF. Por lo tanto adoptaremos la interpretación de Kaplan (2005, p. 3) quien asume que el BCRS esta orientado según los ejes de ICRS. Por otro lado, dado que la orientación espacial del GCRS se deriva desde el BCRS y los ejes del GCRS deben ser cinemáticamente no rotantes con respecto al BCRS, y por lo tanto al ICRS, resultará que el GCRS tendrá la misma orientación pero origen en el Geocentro.

En resumen, y con la excepción de los diferentes orígenes, el CRS tendrá 3 direcciones mutuamente perpendiculares (ver figura 10.1): el eje X que indica el origen de las ascensiones rectas (Σ_0), el eje Z esta orientado en la dirección del Polo celeste e Y completando la terna directa (Capitaine et al., 2000).

Recordamos algunos detalles del TRS que ya ha sido presentado en secciones previas: tiene origen geocéntrico y la evolución temporal de la orientación de sus ejes debe ser tal que no presente rotaciones globales residuales con respecto a la corteza terrestre (Boucher, 1990 citado en Capitaine et al., 2000). Sus ejes están orientados (ver Figura 10.3): eje w hacia los polos geográficos, eje u hacia el origen de las longitudes¹⁸ (Π_0), y el eje v estará orientado hacia $\lambda=90^\circ$ Este sobre el plano del Ecuador, completando una terna directa (Capitaine et al, 2000, p. 399).

Orígenes no rotantes y localizadores

Sabemos que debido a la rotación terrestre la orientación del TRS con respecto al CRS será una función del tiempo. La intersección del eje de la rotación terrestre con la esfera celeste determina un eje instantáneo de rotación o Polo celeste Intermediario (CIP, Celestial Intermediate Pole) cuya posición variará con el tiempo. Podemos asignar a este eje un plano fundamental que denominaremos Ecuador del *Sistema de Referencia Celeste Intermediario* (CIRS) y contendrá al origen no rotante del sistema celeste (CIO), comúnmente denominado con σ . La definición cinemática de σ establece que a medida que el CIP se desplace en el GCRS, el movimiento de σ sobre el Ecuador móvil del CIRS *no tendrá componente de rotación instantánea con respecto al eje z del GCRS*.

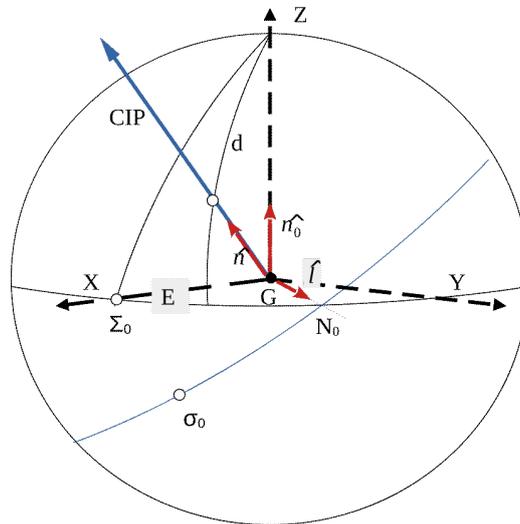
De acuerdo con la resolución B1.7 de las resoluciones IAU2000, la posición variable en el tiempo del CIP se define en el GCRS y se expresa en términos de sus cosenos directores ($X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$), como funciones de sus coordenadas polares E y d

$$X(t) = \sin(d) \cos(E) \quad Y(t) = \sin(d) \sin(E) \quad Z(t) = \cos(d) \quad (10.1)$$

¹⁸ Meridiano convencional de Greenwich

Figura 10.1.

Coordenadas polares del CIP en el GCRS para un dado instante t_0 .



Nota. El origen no rotante del sistema celeste (CIO, σ_0), se ubica en el Ecuador del Sistema Celeste Intermediario (CIRS) dibujado en azul. Adaptado de “A non-rotating origin on the instantaneous Equator: definition, properties and use” (p. 287), de Capitaine N., Guinot B. y Souchay J., 1986, *Celestial Mechanics*, 39.

Según lo dicho en el párrafo anterior, es claro que para un dado instante la posición de σ estará definida por el movimiento del CIP. En la Figura 10.2 consideremos CIP_0 y σ_0 , CIP_1 y σ_1 a la posición del Polo celeste Intermediario y su correspondiente CIO en la época fundamental t_0 y en el instante posterior t_1 , respectivamente.

Sean N_0 y N_1 los respectivos nodos ascendentes de los Ecuadores del CIRS en la época t_0 y en el instante t_1 en el Ecuador del GCRS. La posición de σ_1 en el instante t_1 sólo podrá determinarse si se conoce la posición del CIO en la referencia temporal precedente, en este caso $\sigma_0 = \sigma(t_0)$. Luego el desplazamiento del CIO desde t_0 a t_1 se obtiene resolviendo (Capitaine et al, 1986, 2000),

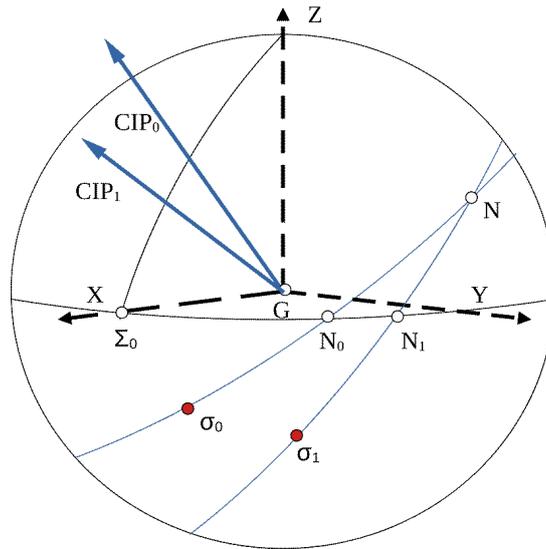
$$s = (\sigma_1 N_1 - \Sigma_0 N_1) - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0) \quad (10.2)$$

donde s se denomina *localizador del CIO*. Para deducir s haremos uso de la definición cinemática del CIO.

Según Capitaine y colaboradores (1986) denominamos \hat{n} , \hat{n}_0 , \hat{l} a los versores en la dirección del CIP, el eje z del GCRS y en la dirección \overrightarrow{ON}_0 al nodo ascendente N_0 , respectivamente (ver Figura 10.1).

Figura 10.2.

Posición del CIO en instante t_1 (σ_1) con respecto a su posición en la época de referencia t_0 (σ_0)



Luego la tasa de rotación ($\vec{\Omega}$) de un movimiento instantáneo del CIP en el GCRS puede escribirse como (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 287-288)

$$\vec{\Omega} = \frac{dE}{dt} \hat{n}_0 + \frac{dd}{dt} \hat{l} - \left(\frac{dE}{dt} + \frac{ds}{dt} \right) \hat{n} \quad (10.3)$$

La componente de $\vec{\Omega}$ a lo largo del eje z del GCRS será $\vec{\Omega} \cdot \hat{n}$. Desarrollando

$$\vec{\Omega} \cdot \hat{n} = \frac{dE}{dt} \cos(d) - \frac{dE}{dt} - \frac{ds}{dt} \quad (10.4)$$

Si aplicamos la definición cinemática de origen no rotante, debe cumplirse que $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} = 0$ y la expresión anterior quedará,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} \cos(d) - \frac{dE}{dt} - \frac{ds}{dt} &= 0 \\ \frac{dE}{dt} (\cos(d) - 1) &= \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Despejando quedará

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(d) - 1] \frac{dE}{dt} dt \quad (10.6)$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(d) - 1] \frac{dE}{dt} dt - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0) \quad (10.7)$$

donde la incógnita (s) refiere a la localización del CIO en t_1 , $(\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0)$ refiere a la localización del CIO en la época t_0 . En la expresión (10.7) consideraremos $\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0$ por convención (Capitaine et al, 1986, 2000).

Recordando que $\hat{n} = (\sin d \cos E, \sin d \sin E, \cos d)$; $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$, aplicando regla de la cadena y operando algebraicamente sobre el producto mixto de vectores puede demostrarse que la ecuación (10.7) puede reescribirse como (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 288)

$$s = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\hat{n} \times \hat{n}) \cdot n_0}{1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_0} dt \quad (10.8)$$

donde el punto refiere a la derivada temporal. De modo equivalente, aplicando la ecuación (10.1) para expresar \hat{n} y operando sobre (10.8) quedará (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 288)

$$s = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{X\dot{Y} - \dot{X}Y}{1+Z} dt \quad (10.9)$$

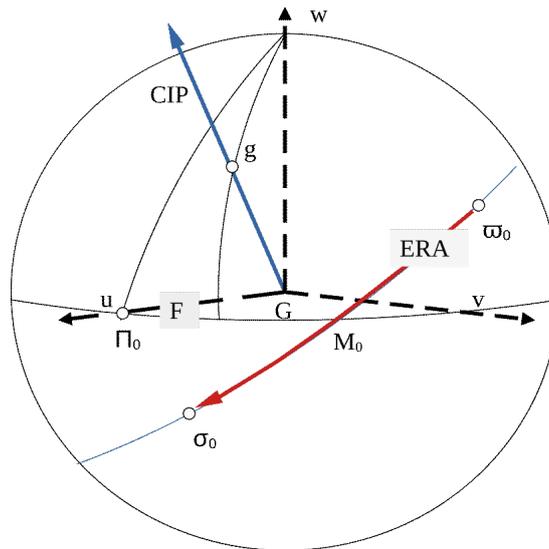
Por otro lado, la posición de CIP en el ITRS quedará determinada por $(u(t), v(t), w(t))$ y aunque su uso no está extendido, sus cosenos directores también admiten ser expresados en términos de sus coordenadas polares análogas F y g (ver Figura 10.3).

Además, debe notarse que si $(x_p(t), y_p(t))$ son las coordenadas del polo, entonces se cumple que (Capitaine et al, 2000)

$$x_p(t)=u(t) \quad y_p(t)=-v(t) \tag{10.10}$$

Figura 10.3.

Coordenadas polares del CIP en el TRS para un dado instante t_0 .



Nota. El origen no rotante del sistema terrestre (TIO, ϖ_0) se ubica en el Ecuador del Sistema Celeste Intermediario (CIRS), dibujado en azul. El ángulo ERA se dibuja en rojo.

Análogamente podemos definir el Origen No Rotante en el Sistema Terrestre (TIO), designado por ϖ , que será el origen de las longitudes instantáneas medidas sobre el Ecuador móvil del Sistema Intermediario (Capitaine et al, 1986). Luego el correspondiente localizador del TIO (s') se calculará geoméricamente para un instante t_i según (Capitaine et al, 1986, p. 289).

$$s' = \varpi_i M_i - \Pi_0 M_i \tag{10.11}$$

donde M_i es el nodo ascendente del Ecuador del CIP en t_i sobre el Ecuador del TRS. De modo análogo, si denominamos \hat{n} al versor en la dirección del CIP expresado en términos de sus respectivas coordenadas polares en el TRS y $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$ al versor en dirección al eje z del TRS, y aplicando regla de la cadena puede deducirse (Capitaine et al, 1986, p. 289)

$$s' = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(g) - 1] \frac{dF}{dt} dt \quad (10.12)$$

donde se aplicó una convención similar a la anterior ($\varpi_0 M_0 = \Pi_0 M_0$). Considerando que $\hat{n} = (u, v, 1)$ con error inferior a 10^{-6} segundos de arco en varios siglos (Capitaine et al., 2000), podemos proceder de modo análogo a la deducción de las ecuaciones (10.8) y (10.9). Como resultado, la ecuación (10.12) puede escribirse

$$s' = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{u \dot{v} - \dot{u} v}{2} dt \quad (10.13)$$

Nótese que el movimiento exacto de ϖ dependerá del movimiento del polo y por lo tanto es impredecible (Kaplan, 2005 p. 54).

De acuerdo a la resolución B1.7 de las resoluciones IAU 2000 (IAU2000, 2000) el CIP es el Polo de un Sistema de Referencia Intermediario que por convención posee movimientos diferentes en el ITRS (parte terrestre) y en el GCRS (parte celeste). El movimiento celeste del CIP puede expresarse matemáticamente a través de los modelos de Precesión - Nutación e incluye a todos los términos de variación con periodos superiores a 2 días en el GCRS, es decir, frecuencias entre -0,5 y +0,5 ciclos por día sidéreo (cpds). Por otro lado, el movimiento terrestre del CIP está asociado al Movimiento del Polo e incluye todos los términos con frecuencias menores que -1,5 cpds o mayores que +0,5 cpds en el ITRS (IERSTN36, 2010, p. 46).

Se denomina *ángulo de la rotación terrestre* (ERA, Earth Rotation Angle¹⁹), comúnmente denominado como θ , al ángulo geocéntrico medido positivo en dirección retrógrada desde el TIO (ϖ) hacia el CIO (σ) (ver Figura 10.3) sobre el Ecuador del Sistema Intermediario (Capitaine et al., 2000). Ajustándonos a la definición de Orígenes No Rotantes, el TIO girará a medida que la Tierra rota mientras que el CIO no tendrá ninguna rotación instantánea. Por lo tanto ERA (θ) representa una medida directa de la rotación de la Tierra y su variación en el tiempo será $d\theta/dt = \omega$, siendo ω la velocidad angular media de rotación terrestre (Capitaine et al., 2000).

A través de la resolución B1.8 de las resoluciones IAU2000 (IAU2000, 2000), la IAU redefinió TU1 en función de ERA de modo tal que se asegura la continuidad en fase y tasa de variación con los valores de TU1 obtenidos convencionalmente a partir de su relación con Tiempo Sidéreo Medio en Greenwich (TSMG).

¹⁹ También conocido como *ángulo estelar*

$$\theta(\text{TU1})=2\pi[0,7790572732640+1,00273781191135448\times(\text{JD}-2451545,0)] \quad (10.14)$$

donde JD es instante de TU1 expresado en día Juliano y fracción (Capitaine et al., 2000; 2003a). En virtud de la expresión matemática (10.14) queda claro que las variaciones a la velocidad angular de rotación terrestre (ΔLOD^{20}) que afectan a TU1 afectarán de igual modo a θ (Kaplan, 2005).

La posición y el desplazamiento temporal del CIP en el Sistema de Referencia Celeste está determinado básicamente por la Precesión y la Nutación. En un capítulo anterior hemos presentado el origen dinámico de estos efectos, exponiendo además el desarrollo de los modelos de Precesión IAU 1976 (Lieske et al., 1977) y Nutación IAU 1980 (Seidelman, 1982), y su respectiva influencia en la variación de las coordenadas.

Williams (1994) mostró que la teoría de Precesión General IAU 1976 presenta un error aproximado de -300 msa por siglo juliano²¹ en longitud (Hilton et al., 2006, p. 353) y -25 msa/siglo en oblicuidad de la Eclíptica. Por otra parte, los valores de la oblicuidad en J2000.0 disponibles en 1976 se derivaron de observables de LLR (Lunar Laser Ranging) y observaciones planetarias con un error de 0",04. Finalmente, el uso de los valores IAU 1976 para las masas planetarias en la solución de Newcomb que explica el movimiento de la eclíptica también introdujo errores no despreciables (Capitaine et al., 2003a, p. 570).

En el año 2000 la IAU, a través de su resolución B1.6 (IAU2000, 2000), recomendó que tanto el modelo de Precesión general IAU 1977 como el de Nutación IAU 1980 sean reemplazados a partir del 1 de enero del año 2003 por un nuevo modelo denominado *modelo de Precesión - Nutación IAU2000* basado en parámetros estimados desde observaciones VLBI. Este modelo, basado en el trabajo de Mathews y colaboradores (2002), posee 2 versiones: IAU2000A que modela parámetros con nivel de ruido estimado en 0,2 msa e IAU2000B, una versión acortada con un nivel de ruido estimado en 1 msa, útil para los usuarios que no requieran de la máxima precisión (IERSTN36, 2010, Capitaine et al., 2003b).

La parte de Precesión del modelo IAU2000A sólo incorpora correcciones a las tasas de Precesión del modelo IAU1976, sin embargo la parte de Nutación incorpora 678 nuevos términos lunisulares y 687 términos planetarios a la teoría de Nutación IAU1980 (Capitaine et al., 2003b, p. 570).

Capitaine y colaboradores (2003b) muestran que el modelo IAU2000A de Precesión - Nutación no es consistente con la teoría dinámica y proponen nuevas expresiones para la Precesión consistentes con el modelo IAU2000A aceptado sólo algunos años antes. Por esta razón, la Resolución B1 de la XXVI Asamblea General de la IAU (IAU2006_B1, 2006), introduce

²⁰ Exceso en la duración del día verdadero con respecto a un día medio de 86400 segundos si la Tierra rotara a velocidad angular constante.

²¹ Formado por 36525 días julianos de TT (Tiempo Terrestre)

el modelo conocido como *teoría de precesión P03* que Capitaine y colaboradores proponen previamente (Capitaine et al., 2003b).

Para entender porque el modelo recientemente aceptado no es consistente con la teoría dinámica debemos considerar que VLBI es la técnica más precisa para observar los efectos de la Precesión y la Nutación. Dado las observaciones VLBI sólo son sensibles a la parte lineal de la Precesión e insensibles a posición de la Eclíptica, los coeficientes de orden superior de la teoría de Precesión y la orientación de la Eclíptica deben derivarse de la teoría dinámica. A esto debe sumarse que el modelo de Precesión y Nutación IAU2000A enfatiza en los términos periódicos (Nutación), corrigiendo sólo la parte lineal de la Precesión a partir de observaciones VLBI (Hilton et al., 2006). Al haber ignorado los términos de segundo orden de la Precesión, la solución no era coherente con la teoría dinámica y acumulaba errores.

En resumen, la teoría P03 deriva la Precesión sobre la Eclíptica usando cantidades de una teoría analítica previa (VSOP87, Bretagnon y Francou 1988) y parámetros de las efemérides planetaria y lunar DE406 producidas por el Jet Propulsion Laboratory²² (ver referencias en Capitaine et al., 2003b), con el objeto de mejorar términos polinómicos en la expresión del momento angular del Baricentro Tierra-Luna con respecto a una Eclíptica fija.

Además, calcularon nuevamente el valor de la oblicuidad media de la Eclíptica en J2000 a partir de un ajuste de la teoría de la Luna usando datos de LLR, y el desplazamiento del equinoccio en el GCRS usando EOP calculados desde observaciones VLBI (Capitaine et al., 2003b). Finalmente, para re-calcular la Precesión sobre el Ecuador, resolvieron las ecuaciones dinámicas de Precesión usando las estimaciones de las tasas de precesión calculadas por Mathews y colaboradores (2002) en acuerdo con el modelo IAU 2000A.

Uno de los puntos más relevantes de estas modificaciones involucra un cambio en la terminología asociada al fenómeno de Precesión que durante muchos años se utilizó, y está vinculada al modelo IAU1976 (Lieske et al., 1977). Dado que los resultados de los nuevos modelos de Precesión y Nutación basados en observaciones VLBI han mostrado que la influencia que la atracción gravitacional de los planetas ejerce sobre la Tierra contribuye de modo significativo al movimiento del Ecuador, se recomienda abandonar los términos *Precesión lunisolar* y *Precesión Planetaria* por erróneos (IAU2006_B1, 2006). En su lugar adopta *Precesión del Ecuador* y *Precesión de la Eclíptica* (Capitaine et al., 2003b; Hilton et al, 2006; IAU2006_B1, 2006).

Esta modificación entró en vigencia a partir del 1 de enero de 2009 (IAU2006_B1, 2006) y específicamente establece que desde esa fecha, la componente de Precesión de IAU 2000A sea reemplazada por la *Teoría de Precesión P03* de Capitaine y colaboradores (2003b). En particular, para la *Precesión del Ecuador* se adoptan las expresiones (Capitaine et al, 2003b, p. 581, ecuación 37)

²² Laboratorio dependiente de NASA, USA

$$\begin{aligned}\psi_A &= 5038, ''481507t - 1, ''0790069t^2 - 0, ''00114045t^3 + 1, ''328E-04t^4 - 9, ''517E-08t^5 \\ \omega_A &= \varepsilon_0 - 0, ''025754t + 0, ''0512623t^2 - 0, ''00772503t^3 - 4, ''67E-07t^4 + 3, ''337E-07t^5\end{aligned}\quad (10.15)$$

donde $\varepsilon_0 = 84381, ''406$, y t refiere a la fracción de siglo juliano en TDB²³, aunque establece qué, por razones prácticas y al exceder la exactitud requerida, se considere fracción de siglo juliano en TT desde J2000.0.

Por otro lado, y considerando que $P = \sin \pi \sin \Pi$ y $Q = \sin \pi \cos \Pi$, donde π y Π son los elementos osculadores del Baricentro de la órbita Tierra-Luna²⁴ (Capitaine et al., 2003b, p. 573), se adoptan las siguientes expresiones para la *Precesión de la Eclíptica* (Capitaine et al., 2003b, p. 581, ecuación 38)

$$\begin{aligned}P_A &= +4, ''199094t + 0, ''1939873t^2 - 2, ''2466E-04t^3 - 9, ''12E-08t^4 + 1, ''2E-08t^5 \\ Q_A &= -46, ''811015t + 0, ''0510283t^2 + 5, ''2413E-04t^3 - 6, ''46E-07t^4 - 1, ''72E-08t^5\end{aligned}\quad (10.16)$$

donde t como antes se cuenta en fracción de siglo juliano de TT desde J2000.0.

Estos parámetros, junto con los desarrollos polinomiales de parámetros adicionales y/o complementarios²⁵, se utilizarán en las transformaciones entre Sistemas Terrestre a Celeste (o viceversa) tanto en la transformación basada en el CIO como en la transformación basada en el equinoccio, como se verá a continuación.

Resumiendo, el modelo de Precesión - Nutación finalmente aceptado resulta de las resoluciones B1.6 (IAU2000, 2000) y la resolución B1 de la (IAU2006_B1, 2006) y se conoce como: *Modelo de Precesión - Nutación IAU2006/2000*. (IERSTN36, 2010).

Al momento de escribir este texto, y habiendo transcurrido más de 10 años desde el establecimiento de este modelo, la presentación preliminar de la resolución B2 presentada en la XXXIª Asamblea General de la IAU durante 2021 enfatiza en la necesidad de una constante mejora en la precisión y consistencia de teoría de la rotación terrestre y resuelve fomentar esas mejoras atendiendo su coherencia con respecto a los marcos de referencia, resoluciones y estándares adoptados, no sólo por la IAU, sino también por la IUGG a través de la IAG (IAU2021a, 2021).

²³ Tiempo Dinámico Baricéntrico

²⁴ π es la inclinación con respecto eclíptica y Π longitud del nodo ascendente

²⁵ Por ejemplo, nuevos ángulos de Newcomb

Transformación entre sistemas de referencia terrestre y celeste

Presentamos a continuación las operaciones necesarias para transformar un vector posición entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste. Para ello desarrollaremos el método de cálculo paso a paso utilizando las nuevas convenciones IAU2000/2006 (IERSTN36, 2010) aplicables a un Marco de Referencia Celeste cinemático, pero también desarrollaremos la corrección *clásica*, i.e. las convenciones IERSTN21 (1996) adecuadas al Marco de Referencia Celeste dinámico basado en el Ecuador y Equinoccio. Se mostrarán las equivalencias y diferencias en términos de precisión entre ambas aproximaciones.

En primer lugar las dos transformaciones se basan en diferentes puntos origen de las ascensiones rectas (α). Para la transformación clásica el origen es el equinoccio vernal (γ) y se define geoméricamente como uno de los nodos entre el Ecuador instantáneo y la Eclíptica de la fecha. Su movimiento es complejo y comparativamente rápido a lo largo del Ecuador instantáneo a consecuencia del movimiento del Ecuador pero también de la Eclíptica (Capitaine et al., 2003b, p. 568). En cambio, en términos de las nuevas convenciones introducidas por la IAU desde el año 2000, el nuevo origen corresponde al CIO, Origen No Rotante del Sistema de Referencia Celeste cuya definición y características ya fueron desarrolladas en párrafos precedentes. Debe notarse que, según lo resuelto por el grupo de trabajo de Nomenclatura para la Astronomía fundamental y aprobado por la XXVI Asamblea General de la IAU en 2006 (NFA, 2006, p. 120), en un caso nos referiremos a " α con respecto al equinoccio" y en el otro a " α con respecto al CIO". En general es usual nombrar indistintamente a cualquiera de ellas como α , lo cual es correcto siempre y cuando consideremos sus diferentes orígenes.

Como regla general, la transformación que relaciona el ITRS con el GCRS para una dada fecha t será

$$\vec{r}_{GCRS}(t) = Q(t)R(t)W(t)\vec{r}_{ITRS}(t) \quad (10.17)$$

donde $Q(t)$ es la matriz de transformación que tiene en cuenta el movimiento del Polo celeste en el Sistema de Referencia Celeste, $R(t)$ y $W(t)$ son las matrices de transformación que consideran la rotación de la Tierra y del Movimiento del Polo, respectivamente (IERSTN36, 2010, p. 43). Nótese que esta transformación es genérica y válida para cualquier polo y cualquier origen. La distinción quedará establecida a través de la construcción de las respectivas matrices.

Transformación basada en el Equinoccio

La transformación basada en el equinoccio es similar a la transformación tradicional que se utilizó durante muchos años para transformar entre un Sistema de Referencia Terrestre y el Sistema de Referencia Celeste dinámico, sólo que debemos incorporar nuevas matrices y/o valores de los coeficientes matriciales con el fin de adaptarse a los modelos IAU2000/2006. Partiendo de la ecuación (10.17), la aplicación de $W(t)$ transformará la posición en el sistema terrestre a una posición referida al Ecuador y equinoccio verdadero de la fecha.

$$W(t) = R_y(x_p) R_x(y_p) \quad (10.18)$$

La operación anterior corrigió el efecto del Movimiento del Polo, o dicho de otro modo, logró una coincidencia entre el Ecuador terrestre y el Ecuador celeste instantáneo, haciendo coincidir los respectivos polos. Sin embargo, el eje x resultante aún apuntará al primer meridiano²⁶. Por lo tanto el próximo paso deberá alinear el eje x con el equinoccio verdadero de la fecha

$$R(t) = R_z(-TSAG) \quad (10.19)$$

donde $TSAG$ refiere al Tiempo Sidéreo Aparente en Greenwich. La expresión adecuada para satisfacer la precisión de a 0,1 microsegundos, se obtiene del modelo P03 (Capitaine et al, 2003b, p. 582, ec. 43).

A partir de aquí sabemos que la aplicación de la inversa de la matriz de Nutación transformará las coordenadas referidas a Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha en coordenadas referidas al Ecuador y Equinoccio medios de la fecha. Como ya hemos visto, la elección del número de términos involucrados en el desarrollo en series temporales de los parámetros $\Delta\psi$ y $\Delta\varepsilon$ impactará en la precisión de los resultados y determinará el uso de IAU2000A o IAU2000B según se requiera.

Luego, la aplicación de la inversa de la matriz de Precesión transformará las coordenadas referidas al Ecuador y Equinoccio medios de la fecha en coordenadas referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la época fundamental J2000.0. Aquí debe tenerse en cuenta que los coeficientes de estas matrices estarán expresados en términos de los ángulos de Newcomb calculados según el modelo de precesión P03 (Capitaine et al, 2003b, p. 582, ec. 40) como series de tiempo expresado en fracción de siglo juliano de TDB (o TT) dados por $T = (JD(TDB) - 2451545,0) / 36525$ donde JD refiere al día Juliano.

Para completar la transformación, sin embargo, será necesaria una última rotación adicional que transforme los datos referidos al Ecuador y Equinoccio medio dinámico inercial J2000.0 al GCRS. A tal fin usaremos la *matriz de frame Bias (B)* (Kaplan, 2005, p. 27). La matriz B estará

²⁶ Meridiano instantáneo en Greenwich

formada por 3 rotaciones. Dos de ellas involucran a los Celestial Pole Offsets del Polo Medio J2000.0 en el GCRS descriptos por el modelo de Precesión y Nutación (ξ_0, η_0) . El tercero refiere al corrimiento del Equinoccio ($d\alpha_0$), entendido como la ascensión recta GCRS del Equinoccio medio J2000 calculado a partir del modelo de Precesión y Nutación (Capitaine et al. 2000, p. 1148). Nótese que (ξ_0, η_0) no pueden calcularse desde la teoría, sino que se estiman a partir de un ajuste del modelo de Precesión y Nutación a las observaciones VLBI. En cambio, $d\alpha_0$ no puede derivarse de las observaciones VLBI dado que la técnica es insensible a la ubicación de la Eclíptica y por lo tanto deben usarse observables adicionales que materialicen este plano fundamental (Capitaine et al. 2000). Luego, la matriz B se construye como (Capitaine et al., 2003a)

$$B = R_x(-\eta_0) R_y(\xi_0) R_z(d\alpha_0) \quad (10.20)$$

donde los respectivos valores de los coeficientes en segundos de arco son: $\xi_0 = -0,0166170 \pm 1 \times E - 05$, $\eta_0 = -0,0068192 \pm 1 \times E - 05$ (IERSTN32, 2003, p. 43) y $d\alpha_0 = -0,01460 \pm 0,00050$ (IERSTN32, 2003, p. 41; IERSTN36, 2010, p. 56).

A primer orden, la matriz B puede expresarse (Kaplan, 2005, p. 28)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & d\alpha_0 & -\xi_0 \\ -d\alpha_0 & 1 & -\eta_0 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

De esta manera, la matriz $Q(t)$ necesaria para completar la transformación resultará del producto de las matrices antes mencionadas

$$Q(t) = B^{-1} P^{-1} N^{-1} \quad (10.22)$$

Los valores diarios de los elementos de la matriz combinada NPB aparecen listados en The Astronomical Almanac (Kaplan, 2005).

Transformación basada en Orígenes No Rotantes

Hemos visto que la IAU, a través de la resolución B1.8 entre las resoluciones IAU2000 (IAU2000, 2000), estableció el uso del TIO y del CIO con el fin de materializar el Sistema Celeste Intermediario (CIRS) y permitir la transformación entre el ITRS y el GCRS y viceversa

(Capitaine, 2004). A continuación explicaremos la construcción de cada de las matrices involucradas en (10.17) para la transformación basada en el CIO y consistente con las resoluciones IAU2000/2006 (IERSTN36, 2010).

La matriz $W(t)$ que relaciona al ITRS con el TIRS admite ser escrita como,

$$W(t) = R_z(-s') R_y(x_p) R_x(y_p) \quad (10.23)$$

donde x_p e y_p son las coordenadas del polo que describen la posición del CIP en el ITRS y s' es el localizador del TIO, que me brinda la posición del Origen No Rotante del TIRS²⁷.

En el próximo paso tendremos en cuenta la rotación terrestre, vinculando la posición del TIO con el CIO sobre el Ecuador del CIRS²⁸. Nótese que el Ecuador del TIRS y el Ecuador del CIRS coinciden y ese plano fundamental también admite ser llamado Ecuador del CIP

$$R(t) = R_z(-ERA) \quad (10.24)$$

donde, por definición, el uso del ángulo ERA asegura una representación rigurosa de la rotación terrestre.

Finalmente, una vez ubicado el CIO en el GCRS, la matriz que nos indica el movimiento del CIP en el GCRS completa la transformación,

$$Q(t) = R_z(-E) R_y(-d) R_z(E) R_z(s) \quad (10.25)$$

donde la posición del CIP en el GCRS queda expresada en función de sus coordenadas polares. Si en cambio utilizamos las coordenadas cartesianas del CIP en el GCRS (Ec. 10.1), la ecuación anterior se transforma en

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} R_z(s) \quad (10.26)$$

donde $a = 1/2 + 1/8(X^2 + Y^2)$, con una exactitud de $1\mu\text{as}$ ²⁹ (IERSTN36, 2010).

Referencias

²⁷ Sistema de referencia terrestre cuyo plano fundamental es el *Ecuador del CIP*, eje x hacia el TIO y CIP como eje z

²⁸ Sistema de referencia celeste cuyo plano fundamental es el *Ecuador del CIP*, eje x hacia el CIO y CIP como eje z

²⁹ Microsegundos de arco = $1\text{E}-06$ segundos de arco

- Altamimi, Z., Sillard, P., & Boucher, C. (2002). ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107(B10), ETG-2.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., & Collilieux, X. (2016). ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(8), 6109-6131.
- Arias, E. F., Charlot, P., Feissel, M., & Lestrade, J. F. (1995). The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. *Astronomy and Astrophysics*, 303, 604-608.
- Boucher C., Altamimi Z., Sillard P. (1998) Results and Analysis of the ITRF96. *IERS Technical Note 24*. <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn24.html?nn=94912>.
- Bretagnon, P., & Francou, G. (1988). Planetary theories in rectangular and spherical variables- VSOP 87 solutions. *Astronomy and astrophysics*, 202, 309-315.
- Brown, A. G., Vallenari, A., Prusti, T., De Bruijne, J. H. J., Babusiaux, C., Biermann, M., ... & Bauchet, N. (2021). Gaia Early Data Release 3-Summary of the contents and survey properties. *Astronomy & Astrophysics*, 649, A1.
- Capitaine, N., Guinot, B., Souchay, J. (1986). A non-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use. *Celestial mechanics*, 39(3), 283-307.
- Capitaine, N., Guinot, B., McCarthy, D. D. (2000). Definition of the celestial ephemeris origin and of UT1 in the international celestial reference frame. *Astronomy and Astrophysics*, 355, 398-405.
- Capitaine, N., Wallace, P. T., McCarthy, D. D. (2003a). Expressions to implement the IAU 2000 definition of UT1. *Astronomy & Astrophysics*, 406(3), 1135-1149.
- Capitaine, N., Wallace, P. T., Chapront, J. (2003b). Expressions for IAU 2000 precession quantities. *Astronomy & Astrophysics*, 412(2), 567-586.
- Capitaine, N. (2004). Microsecond models for the celestial motions of the CIP and CEO. *Proceedings of the Journées 2003" Systèmes de référence spatio-temporels": Astrometry*, 18-23.
- Dehant, V., Mathews, P. M. (2015). *Precession, nutation and wobble of the Earth*. Cambridge University Press.
- Charlot, P., Sovers, O., Williams, J., & Newhall, X. (1994). Precession and nutation from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging observations, *Astrophys. J.* 109, 418.
- Charlot, P., Jacobs, C. S., Gordon, D., Lambert, S., de Witt, A., Böhm, J., ... & Gaume, R. (2020). The third realization of the International Celestial Reference Frame by very long

- baseline interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, 644, A159. Disponible en: <https://www.aanda.org/articles/aa/pdf/2020/12/aa38368-20.pdf>
- Fey y Gaume, (2006) Future Realizations of the ICRF: Radio and Optical *en IERS Technical Note 34: The International Celestial Reference System and Frame*. ICRS Center Report for 2001–2004. J. Souchay y M. Feissel-Vernier (eds.), 21-27.
- Fricke, W., Schwan, H., Lederle, T., Bastian, U., Bien, R., Burkhardt, G., ... & Walter, H. G. (1988). Fifth fundamental catalogue (FK5). part 1. the basic fundamental stars. *Veroeffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, 32, 1-106.
- Geodesist's Handbook (1992). *Bull. Geod.*, 66, office.iag-aig.org/doc/5d7f91f62a359.pdf
- Hilton, J. L., Capitaine, N., Chapront, J., Ferrandiz, J. M., Fienga, A., Fukushima, T., ... & Williams, J. (2006). Report of the international astronomical union division I working group on precession and the ecliptic. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(3), 351-367.
- IAU1997 (1997). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU1997_French.pdf
- IAU2000 (2000). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2000_French.pdf
- IAU2006_B1 (2006). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2006_Resol1.pdf
- IAU2009 (2009). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2009_English.pdf
- IAU2018 (2018) Resolution B2 XXX General Assembly. Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2018_ResolB2_English.pdf
- IAU2021a (2021) Resolution B2 XXXI General Assembly *Improvement of the Earth's Rotation Theories and Models*. <https://www.iau.org/static/archives/announcements/pdf/ann21040b.pdf>
- IAU2021b (2021) Resolution B3 XXXI General Assembly *On the Gaia Celestial Reference Frame*. <https://www.iau.org/static/archives/announcements/pdf/ann21040c.pdf>
- IERSTN21 (1996) *IERS Technical Note 21: IERS Conventions 1992*. McCarthy D.D. (ed.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote21/tn21.pdf>
- IERSTN23 (1997) *IERS Technical Note 23: Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects*. Ma C. y Feissel M. (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote23/tn23.pdf>
- IERSTN32 (2003) *IERS Technical Note 32: IERS Conventions (2003)*. D. D. McCarthy y G. Petit (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn32.html>
- IERSTN35 (2009) *IERS Technical Note 35: The Second Realization of the International Celestial Reference Frame by Very Long Baseline Interferometry*, Presented on behalf of the IERS / IVS Working Group, Alan Fey, David Gordon, and Christopher S. Jacobs (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn35.html>

- IERSTN36 (2010) IERS Technical Note 36: IERS Conventions (2010). G. Petit and B. Luzum (eds.) Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36.html>
- IERSTN38 (2017) *IERS Technical Note 38: Analysis and results of ITRF2014*. Z. Altamimi, P. Rebischung, L. Métivier, X. Collilieux (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn38.html?nn=94912>
- Kaplan G. H. (2005) *The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models Explanation and Implementation*. United States Naval Observatory circular N°. 179. Washington: USNO. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0602086.pdf>
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., & Morando, B. (1977). Expressions for the precession quantities based upon the IAU/1976/system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58, 1-16.
- Lindgren, L., Klioner, S. A., Hernández, J., Bombrun, A., Ramos-Lerate, M., Steidelmüller, H., ... & Vecchiato, A. (2021). Gaia Early Data Release 3-The astrometric solution. *Astronomy & Astrophysics*, 649, A2.
- Malkin, Z. (2014). On the implications of the Galactic aberration in proper motions for the Celestial Reference Frame. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(1), 845-849.
- Mathews, P. M., Herring, T. A., Buffett, B. A. (2002). Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107(B4), ETG-3.
- NFA (2006) *Division 1 working group on Nomenclature for Fundamental Astronomy*. Transactions IAU, Volume XXVIB. Proc. XXVIth IAU General Assembly. K.A. van der Hucht (ed.). Disponible en: https://synte.obspm.fr/iauWGnfa/NFA_WG_GA06.pdf
- Seidelmann, P. K. (1982). 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU working group on nutation. *Celestial mechanics*, 27(1), 79-106.
- Sovers, O. J., Fenselow, J. L., & Jacobs, C. S. (1998). Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results. *Reviews of Modern Physics*, 70(4), 1393.
- Titov, O., Lambert, S. B., & Gontier, A. M. (2011). VLBI measurement of the secular aberration drift. *Astronomy & Astrophysics*, 529, A91.
- Souchay, J., Feissel, M., Bizouard, C., Capitaine, N., Bougeard, M. (1995). Precession and nutation for a non-rigid Earth: comparison between theory and VLBI observations. *Astronomy and Astrophysics*, 299, 277.
- Williams, J. G. (1994). Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation. *The Astronomical Journal*, 108, 711-724.

Anexo A: Vectores

Sean 3 vectores genéricos: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

– *Producto Mixto de vectores:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (\text{A.1})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (\text{A.3})$$

✓ *Propiedad del producto mixto:*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (\text{A.4})$$

– *Producto vectorial triple:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{A.5})$$

Dado que se cumple $(\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{c} \times \vec{b})$, entonces

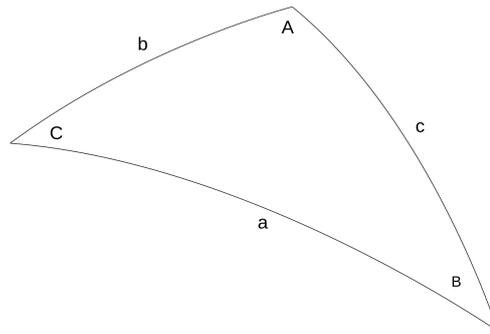
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{A.6})$$

Luego

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (\text{A.7})$$

Anexo B: Fórmulas auxiliares de la trigonometría esférica

Sea un triángulo esférico genérico de lados a , b , c y ángulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C}



– *Fórmula del seno*

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\hat{B})}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(c)} \quad (\text{B.1})$$

– *Fórmula del coseno*

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(c)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.2})$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \text{sen}(a)\text{sen}(c)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.3})$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.4})$$

– *Fórmula de los cinco elementos*

$$\text{sen}(a)\cos(\hat{B}) = \cos(b)\text{sen}(c) - \text{sen}(b)\cos(c)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{sen}(a)\cos(\hat{C}) = \cos(c)\text{sen}(b) - \text{sen}(c)\cos(b)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.6})$$

$$\text{sen}(b)\cos(\hat{A}) = \cos(a)\text{sen}(c) - \text{sen}(a)\cos(c)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{sen}(b)\cos(\hat{C}) = \cos(c)\text{sen}(a) - \text{sen}(c)\cos(a)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.8})$$

$$\text{sen}(c)\cos(\hat{A}) = \cos(a)\text{sen}(b) - \text{sen}(a)\cos(b)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.9})$$

$$\text{sen}(c)\cos(\hat{B}) = \cos(b)\text{sen}(a) - \text{sen}(b)\cos(a)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.10})$$

– *Fórmula de las cuatro partes*

Aplicando la fórmula del coseno B.3 y reemplazando $\cos(c)$ por B.4 y $\sin(c)$ por B.1 queda

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \cos^2(a)\cos(\hat{b}) + \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) \\ &+ \sin(a)\cos(\hat{B})\sin(b)\sin(\hat{C})\sin^{-1}(\hat{B})\end{aligned}\tag{B.11}$$

Si dividimos ambos miembros de B.11 por $[\sin(a)\sin(b)]$ y operamos algebraicamente obtenemos la *fórmula de las cuatro partes*.

$$\cotg(b)\sin(a) = \cos(a)\cos(\hat{C}) + \sin(\hat{C})\cotg(\hat{B})\tag{B.12}$$

Glosario

BCRS (Baricentric Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Baricéntrico

BIH (Bureau International de l'Heure): Oficina Internacional de la Hora

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures): Oficina Internacional de Pesos y Medidas

CEP (Celestial Ephemeris Pole): Polo Celeste Efemérides

CIO (Celestial Intermediate Origin): Origen Celeste Intermediario

CIP (Celestial Intermediate Pole): Polo Celeste Intermediario

CIRF (Celestial Intermediate Reference Frame): Marco de Referencia Celeste Intermediario

CIRS (Celestial Intermediate Reference System): Sistema de Referencia Celeste Intermediario

CPO (Celestial Pole Offsets): Corrimientos del Polo Celeste

CRF (Celestial Reference Frame): Marco de Referencia Celeste

CRS (Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste

DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite): Orbitografía Doppler y Radioposicionamiento Integrado por Satélite

EOP (Earth Orientation Parameters): Parámetros de la Orientación Terrestre

ERA (Earth Rotation Angle): Ángulo de la Rotación Terrestre

ESAA (Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac): Suplemento Explicativo del Almanaque Astronómico

GCRS (Geocentric Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Geocéntrico

GNSS (Global Navigation Satellite System): Sistema Global de Navegación por Satélite

GPS (Global Positioning System): Sistema de Posicionamiento Global

GTRS (Geocentric Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Geocéntrico

IAG (International Association of Geodesy): Asociación Internacional de Geodesia

IAU (International Astronomical Union): Unión Astronómica Internacional

ICRF (International Celestial Reference Frame): Marco de Referencia Celeste Internacional

ICRS (International Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Internacional

IDS (International DORIS Service): Servicio Internacional DORIS

IERS (International Earth Rotation and reference systems Service): Servicio Internacional de la Rotación de la Tierra y los sistemas de referencia

IGS (International GNSS Service): Servicio Internacional GNSS

ILRS (International Laser Ranging Service): Servicio Internacional de Teledetección Láser

ITRF (International Terrestrial Reference Frame): Marco de Referencia Terrestre Internacional

ITRS (International Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Internacional

IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics): Unión Internacional de Geodesia y Geofísica

IVS (International VLBI Service for Geodesy and Astrometry): Servicio Internacional VLBI para la Geodesia y la Astronomía

LLR (Lunar Laser Ranging): Teledetección Láser a la Luna

LOD (Length-Of-Day): Longitud del día

NNR (No-Net-Rotation): Sin Rotación Neta

SLR (Satellite Laser Ranging): Teledetección Láser a Satélite

TIO (Terrestrial Intermediate Origin): Origen Terrestre Intermediario

TIRS (Terrestrial Intermediate Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Intermediario

TRF (Terrestrial Reference Frame): Marco de Referencia Terrestre

TRS (Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre

VLBI (Very Long Baseline Interferometry): Interferometría de línea de Base Muy Larga