

Modelado de cuasigeoide mediante métodos FFT y determinación de cuadrículas regulares de distintos tipos de anomalías de gravedad

Quasigeoid modelling through FFT methods and different types of gravity anomaly grids

Agustín R Gómez^{1,2}, Claudia N Tocho^{1,3} & Ezequiel D Antokoletz¹

Resumen Una de las estrategias principales para establecer el Marco de Referencia Internacional de Alturas (IHRF) se basa en la determinación de modelos de cuasigeoide regionales de alta precisión. El esquema más utilizado para el modelado de cuasigeoide se denomina remover-calcular-restaurar (RCR). Entre las múltiples etapas de RCR, la denominada “calcular” consiste en una integración de las anomalías de gravedad residuales. Esta integración puede realizarse por métodos FFT, los cuales requieren que las anomalías residuales estén dispuestas en una cuadrícula, la cual debe construirse a partir de datos gravimétricos. En este trabajo se analizan dos metodologías para determinar las cuadrículas regulares y los métodos de integración FFT esférico y FFT 1D. En el primer caso, las anomalías residuales se interpolan sobre cada nodo. La segunda cuadrícula fue determinada interpolando las anomalías de Bouguer completas. Posteriormente, el efecto gravimétrico de la topografía fue calculado y restaurado para obtener una cuadrícula de anomalías de aire libre. Finalmente, los efectos de un modelo geopotencial global (GGM) y del modelado residual de terreno (RTM) fueron removidos de cada nodo. Cada cuadrícula fue utilizada en ambos métodos por separado, dando lugar a cuatro modelos de cuasigeoide, calculados en el concepto de marea zero-tide, que fueron validados con puntos GNSS/Nivelación. Los resultados demuestran que los modelos generados mediante la cuadrícula construida con la segunda estrategia son 1 cm más precisos que aquellos construidos con la primera estrategia. A su vez, las diferencias entre los modelos construidos con FFT esférico y FFT 1D son del orden del mm y, por ende, no significativas.

Palabras clave Modelado de cuasigeoide, FFT esférico, FFT 1D, interpolación de anomalías de gravedad residuales, Argentina.

Abstract *One of the main strategies for the establishment of the International Height Reference Frame (IHRF) is based on determining high-precision quasigeoid models. The most widely used scheme for quasigeoid modelling is called remove-compute-restore (RCR). Among the multiple stages of RCR, the “compute” stage consists of an integration of the residual gravity anomalies. This integration can be done with FFT methods, which require that residual anomalies be arranged on a grid, which must be obtained from gravity data. Two methodologies for determining the regular grids and the spherical FFT and 1D FFT integration methods are discussed in this paper. In the first case, residual gravity grids were interpolated onto each node. The second grid was determined by interpolating the complete Bouguer anomalies. Afterwards, the gravimetric effect of the topography was computed and restored to obtain a free-air anomaly grid. Finally, the effects of a global geopotential model (GGM) and of residual terrain model (RTM) were removed from each node. Each grid was used as input in both integration methods separately, resulting in four quasigeoid models, which were validated against GNSS/Levelling data. The results show that models generated using the grid constructed with the second strategy are 1 cm more accurate than those constructed with the first strategy. At the same*

¹Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata (FCAG-UNLP), Argentina. Email: agusgo-mez@fcaglp.unlp.edu.ar

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

³Comisión de Investigaciones Científicas (CIC), Buenos Aires, Argentina.

time, the differences between the models built with spherical FFT and 1D FFT are of the order of mm and, therefore, not significant.

Keywords Quasigeoid modeling, spherical FFT, 1D FFT, residual gravity anomaly gridding, Argentina.

INTRODUCCIÓN

El Sistema de Referencia Internacional de Alturas (IHRF; [Ihde et al. \(2017\)](#)), junto con su realización, el Marco de Referencia Internacional de Alturas (IHRF), fueron definidos en el año 2015 por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) en su Resolución N°1 ([Drewes et al., 2016](#)) como la referencia global para la determinación de alturas físicas. Una de las estrategias principales para la determinación de coordenadas en el IHRF es a través de modelos de geoides o cuasigeoides gravimétricos puros de alta precisión ([Sánchez et al., 2021](#)).

En Argentina, el modelo de geoides oficial es GEOIDE-Ar 16 ([Piñón, 2016](#)), desarrollado en el año 2016. A pesar de su buena precisión, GEOIDE-Ar 16 no es óptimo para la determinación de coordenadas IHRF por dos motivos. Por un lado, este modelo no es gravimétrico puro, sino híbrido, es decir, ajustado a los puntos en los que la altura elipsoidal ha sido determinada mediante Sistemas Satelitales de Navegación Global (GNSS) y la altura física mediante nivelación geométrica y gravimetría (puntos GNSS/Nivelación). Por otro lado, desde su oficialización como modelo de geoides para el territorio argentino, se han puesto a disposición nuevos modelos geopotenciales globales (GGMs), modelos digitales de elevación (MDEs), datos gravimétricos, y puntos GNSS/Nivelación con mejor resolución y precisión. Esto implica que el desarrollo de un nuevo modelo de geoides o cuasigeoides gravimétrico puro de alta precisión en la República Argentina es de fundamental importancia para la determinación de coordenadas IHRF.

Los modelos de geoides determinan las ondulaciones del geoides. Los modelos de cuasigeoides permiten determinar la anomalía de altura ζ , definida como la distancia a lo largo de la línea de la plomada normal entre el teluroide y la topografía (Figura 1). El teluroide se define como el conjunto de puntos Q tales que, para cada punto P sobre la topografía,

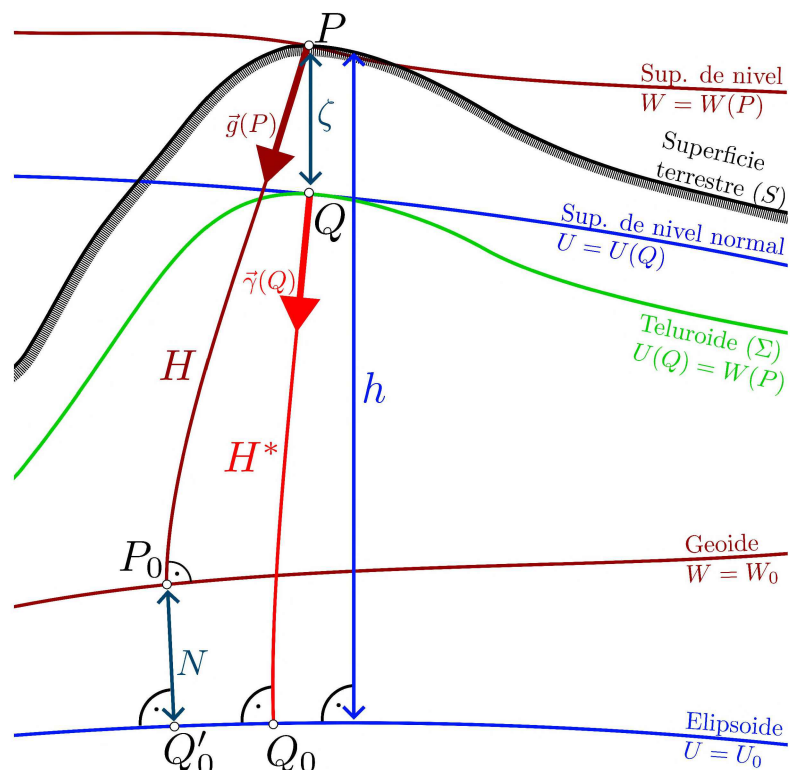


Figura 1. Relación entre alturas elipsoidales (h), alturas normales (H^*), alturas ortométricas (H), ondulaciones geoidales (N) y anomalías de altura (ζ).

$$W(P) = U(Q), \quad (1)$$

donde $W(P)$ es el potencial de gravedad de la Tierra y $U(Q)$ es el potencial de gravedad normal generado por un elipsoide de referencia (Cap. 8 de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#)). La altura normal se define como la distancia entre el elipsoide y el teluroide (Figura 1), y, a partir de las anomalías de altura, puede obtenerse como

$$H^* \approx h - \zeta, \quad (2)$$

donde h es la altura elipsoidal (Figura 1).

Las anomalías de altura surgen como solución al Problema de Valores de Contorno Geodésico (GBVP) escalar y libre de Molodensky (Cap. 8 de [Heiskanen & Moritz \(1967\)](#)). Este GBVP utiliza anomalías de aire libre de Molodensky, definidas como la diferencia entre la gravedad observada en la topografía y la gravedad normal en el teluroide. La solución del GBVP de Molodensky es más compleja de implementar que la del GBVP de Stokes, a partir de la cual se determinan ondulaciones geoidales.

Uno de los esquemas más comúnmente utilizados para la determinación gravimétrica de anomalías de altura sobre una región delimitada se denomina remover-calcular-restaurar (RCR; [Sansò & Sideris \(2013\)](#)), el cual consiste en tres etapas. En la primera etapa (remover), se remueven de las anomalías de aire libre los efectos de larga longitud de onda mediante un GGM y los de corta longitud de onda (asociados a la topografía) mediante el modelado residual de terreno (RTM), para construir anomalías de gravedad residuales. En la segunda etapa (calcular), las anomalías de altura residuales son calculadas a partir de una integración sobre la región delimitada. Finalmente, en la tercera etapa (restaurar), los efectos del GGM y RTM se restauran a las anomalías de altura residuales, para obtener la anomalía de altura completa.

La determinación de un modelo de cuasigeoide requiere distintos tipos de datos y productos, como GGMs, MDEs, puntos GNSS/Nivelación, datos gravimétricos y de altimetría satelital, entre otros, los cuales se combinan en múltiples etapas de cálculo. Para que la precisión de los modelos de cuasigeoide determinados sea lo más alta posible, es necesario que los datos y productos utilizados sean de alta calidad, y que se combinen adecuadamente en cada etapa. En este sentido, es importante estudiar el impacto que cada etapa de cálculo tiene sobre la precisión del modelo final.

En el esquema RCR, la etapa de calcular involucra una integración numérica que puede realizarse mediante múltiples métodos. Entre los más utilizados se encuentran los basados en la Transformada Rápida de Fourier (FFT; [Schwarz et al. \(1990\)](#)). Estos métodos son muy eficientes computacionalmente pero requieren que, previo a su aplicación, los datos gravimétricos sean interpolados a una cuadrícula regular mediante alguna estrategia de interpolación.

En este trabajo, estudiamos el impacto sobre la precisión de modelos de cuasigeoide de dos estrategias para la determinación de cuadrículas de anomalías de gravedad residual y dos métodos FFT. La primera cuadrícula se determinó a partir de la interpolación de anomalías de gravedad residuales previamente calculadas sobre las estaciones gravimétricas. En cambio, la determinación de la segunda cuadrícula se basó en la interpolación de anomalías de Bouguer completas sobre los puntos con gravedad conocida. Los métodos de integración elegidos fueron FFT esférico ([van Hees, 1991](#)) y FFT 1D ([Haagmans, 1993](#)). Cada método fue implementado utilizando ambas cuadrículas por separado, dando lugar a cuatro modelos de cuasigeoide gravimétricos.

Los cuatro modelos fueron determinados sobre una región de la provincia de Buenos Aires ubicada entre las latitudes 32°S y 36°S y las longitudes 63°O y 61°O, la cual se caracteriza por su buena distribución de datos gravimétricos y baja variabilidad topográfica. Con el objetivo de verificar qué estrategia de interpolación y método FFT produjo los mejores resultados, se realizó una validación absoluta de cada uno de los cuatro modelos en puntos GNSS/Nivelación.

METODOLOGÍA

Problema de valores de contorno de Molodensky

Este trabajo se basa en la determinación de un modelo de cuasigeoide resolviendo el Problema de Valores de Contorno Geodésico (GBVP) escalar y libre de Molodensky (Cap. 8 de [Heiskanen & Moritz \(1967\)](#)). La incógnita principal de este GBVP es el potencial anómalo

$$T(P) = W(P) - U(P), \quad (3)$$

donde $W(P)$ es el potencial de gravedad de la Tierra, y $U(P)$ es el potencial de gravedad normal generado por el elipsoide de referencia Geodetic Reference System 1980 (GRS80; [Moritz \(2000\)](#)). Por fuera de las masas topográficas, el potencial anómalo satisface la ecuación de Laplace (Cap. 2 de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#))

$$\nabla^2 T = 0, \quad (4)$$

Las anomalías de gravedad de Molodensky se definen como

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q), \quad (5)$$

donde $g(P)$ es la gravedad en la superficie topográfica y $\gamma(Q)$ es la gravedad normal en el teluroide. A partir de la altura normal H^* , $\gamma(Q)$ puede obtenerse mediante ([Heiskanen & Moritz, 1967](#))

$$\gamma(Q) = \gamma_0(\varphi) \left[1 - 2 \left(1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi \right) \frac{H^*}{a} + 3 \left(\frac{H^*}{a} \right)^2 \right], \quad (6)$$

siendo φ la latitud geodésica, f el aplanamiento geométrico del elipsoide de referencia, m el cociente entre las fuerzas centrífuga y gravitacional en el ecuador, y a el semieje mayor del elipsoide de referencia. $\gamma_0(\varphi)$ es la gravedad normal sobre el elipsoide, y puede calcularse mediante la fórmula de Somigliana (ec. (2-146) de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#))

$$\gamma_0(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (7)$$

donde γ_a y γ_b son las gravedades normales sobre el elipsoide en el ecuador y en los polos, respectivamente, y b es el semieje menor.

El GBVP de Molodensky se define a partir de la ecuación (4), imponiendo una condición de contorno y otra de regularidad. La condición de contorno del GBVP de Molodensky, linealizada y en aproximación esférica, es válida sobre el teluroide y está dada como (ec. (8-38) de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#))

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T, \quad (8)$$

donde R es un radio medio de la Tierra, que en general es determinado a partir de los semiejes del elipsoide de referencia como $R = (a^2 b)^{1/3}$. Por su parte, la condición de regularidad es

$$\lim_{r_P \rightarrow \infty} T(P) = 0, \quad (9)$$

donde r_P es la distancia geocéntrica de P . La solución completa al GBVP está dada como (Sección 45 de [Moritz \(1980\)](#))

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\Delta g(P') + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(P, P') \right] S(\psi_{PP'}) d\sigma_{P'}, \quad (10)$$

donde σ es el área de integración y $\psi_{PP'}$ es la distancia esférica entre el punto de cálculo P y el punto de integración P' . La función

$$S(\psi) = 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (11)$$

se denomina función (o núcleo) de Stokes. Los términos G_n de la ecuación (10) se definen a partir de la relación recursiva

$$G_0 = \Delta g(P'),$$

$$G_n(P, P') = - \sum_{m=1}^n \frac{(H^*(P') - H^*(P))^m}{n!} L^n(G_{n-m}) \quad \text{si } n > 0. \quad (12)$$

El término L^n refiere a n aplicaciones sucesivas del operador

$$L(K) = \frac{\partial K}{\partial r}(P) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{K(P') - K(P)}{\left(2R \sin \frac{\psi_{PP'}}{2}\right)^3} d\sigma_{P'}, \quad (13)$$

donde K es una función arbitraria (ec. (45-31) de [Moritz \(1980\)](#)).

A partir del potencial anómalo T , la anomalía de altura puede determinarse mediante (ec. (2-237) de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#))

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(Q)}, \quad (14)$$

conocida como fórmula de Bruns. En la práctica, el desarrollo en serie de la ec. (10) se trunca en $n = 1$. Por lo tanto, se tiene que

$$\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\gamma(Q)} \iint_{\sigma} [\Delta g(P') + G_1(P, P')] S(\psi_{PP'}) d\sigma_{P'}. \quad (15)$$

La integral presente en la ec. (15) se denomina integral de Molodensky.

Técnica remover-calcular-restaurar

Para determinar anomalías de altura mediante la integral de Molodensky (ec. (15)), las anomalías de gravedad deben estar distribuidas de forma continua sobre toda la superficie terrestre, por lo que no

es posible utilizar esta integral cuando se cuenta con datos gravimétricos puntuales que solo están disponibles sobre una región limitada. Por un lado, al no contar con anomalías de gravedad sobre toda la superficie, las largas longitudes de onda no pueden ser calculadas apropiadamente mediante la ec. (15). Por otro lado, el fenómeno de *aliasing* generado por la discretización de los datos provoca que las cortas longitudes de onda tampoco puedan resolverse.

Para abordar las problemáticas asociadas a la aplicación de la integral de Molodensky sobre datos gravimétricos, la determinación de anomalías de altura se realiza en la práctica mediante la técnica remover-calcular-restaurar (RCR). Esta consiste en remover de las anomalías de gravedad las cortas y largas longitudes de onda para construir un campo de anomalías de gravedad residuales. A partir de estas anomalías residuales se calcula la anomalía de altura residual mediante la ec. (15). Finalmente, se restauran los efectos de larga y corta longitud de onda al campo de anomalías de altura residuales, dando lugar a un modelo de cuasigeoide.

Los modelos geopotenciales globales (GGM) permiten calcular las largas longitudes de onda de la anomalía de gravedad Δg_{GGM} y la anomalía de altura ζ_{GGM} en cualquier punto de la Tierra a partir de su longitud λ , latitud φ y distancia geocéntrica r , mediante

$$\Delta g_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (16)$$

$$\zeta_{GGM} = \frac{GM}{\gamma(Q)r} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \zeta_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (17)$$

donde ΔC_{nm} y ΔS_{nm} son las diferencias entre los coeficientes de grado n y orden m de los desarrollos en armónicos esféricos del potencial gravitacional dado por el GGM y del potencial gravitacional normal del elipsoide de referencia, P_{nm} son las funciones asociadas de Legendre de grado n y orden m (ec. (3-58) de Sansò & Sideris (2013)), y GM es la constante de gravitación universal multiplicada por la masa de la Tierra, la cual es también provista por el GGM. La longitud de onda máxima Δ que el GGM puede resolver se relaciona con su grado máximo n_{max} a través de (ec. (3-145) de Sansò & Sideris (2013)):

$$\Delta [^\circ] \approx \frac{180^\circ}{n_{max}}. \quad (18)$$

Las longitudes de onda cortas se asocian al efecto gravimétrico de la topografía. Éste se determinó mediante el modelado residual de terreno (RTM; Forsberg (1984)). En este esquema, se calcula la contribución gravimétrica de las masas topográficas ubicadas entre la topografía real y una versión suavizada de la misma, denominada superficie de elevación media (Figura 2). El efecto RTM de las anomalías de gravedad y de las anomalías de altura puede determinarse, en aproximación planar, mediante (ecs. (8-73) y (8-76) de Sansò & Sideris (2013)):

$$\Delta g_{RTM}(P) = G\rho \iiint_E \int_{H_{ref}^*(x',y')}^{H^*(x',y')} \frac{z' - H^*(P)}{[(x' - x_P)^2 + (y' - y_P)^2 + (z' - H^*(P))^2]^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz', \quad (19)$$

$$\zeta_{RTM}(P) = \frac{G\rho}{\gamma(Q)} \iiint_E \int_{H_{ref}^*(x',y')}^{H^*(x',y')} \frac{1}{[(x' - x_P)^2 + (y' - y_P)^2 + (z' - H^*(P))^2]^{\frac{1}{2}}} dx' dy' dz', \quad (20)$$

donde x_P, y_P son las coordenadas cartesianas de P , $H^*(P)$ es la altura normal de P , (x', y', z') son las coordenadas cartesianas de la variable de integración, $H^*(x', y')$ es la altura normal en el punto (x', y') ,

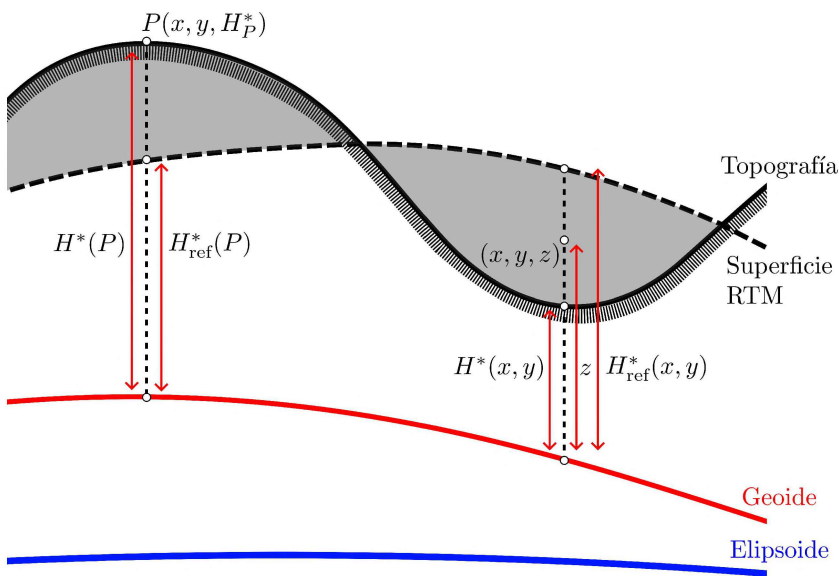


Figura 2. Superficie de elevación media y alturas utilizadas en el modelo residual de terreno (RTM). $H^*(P)$: altura normal del punto P . $H^*(x', y')$: altura normal de la variable de integración.

$\rho = 2.67 \text{ g cm}^{-3}$ es la densidad media de la topografía, E es la región de integración y $H_{\text{ref}}^*(x', y')$ es la altura de la superficie de elevación media. Tanto $H^*(x', y')$ como $H_{\text{ref}}^*(x', y')$ se obtienen a partir de un modelo digital de elevaciones (MDE). La superficie de elevación media se construye aplicando un filtro pasa-bajos al MDE (Figura 2). En este trabajo, las integrales fueron calculadas numéricamente mediante el método de integración por prismas (Forsberg, 1984).

Las anomalías de gravedad obtenidas del GGM y las calculadas con el método RTM se remueven de las observadas para construir las anomalías residuales (ec. (4-36) de Sansò & Sideris (2013))

$$\Delta g_{\text{res}} = \Delta g - \Delta g_{\text{GGM}} - \Delta g_{\text{RTM}}. \quad (21)$$

La etapa de calcular consiste en utilizar las anomalías de gravedad residuales en la integral de Molodensky (ec. (15)) para determinar a partir de ellas las anomalías de altura residuales ζ_{res} . Una ventaja de utilizar anomalías de gravedad residuales en la ec. (15) es que el término G_1 es despreciable (Sección 14.4 de Sansò & Sideris (2013); Yildiz et al. (2012)).

Posteriormente, en la etapa de restaurar, los efectos del GGM y RTM (ζ_{GGM} y ζ_{RTM} , respectivamente) sobre el campo de anomalías de altura son calculados y sumados a las anomalías de altura residuales previamente determinadas.

Finalmente, a las anomalías de altura debemos sumar el término de orden cero, dado como

$$\zeta_0 = \frac{GM - GM^{\text{GRS80}}}{\gamma(Q)r} - \frac{W_0 - U_0^{\text{GRS80}}}{\gamma(Q)}, \quad (22)$$

donde M_{GRS80} y U_0^{GRS80} son la masa y el valor de la superficie equipotencial de referencia del elipsoide GRS80 respectivamente, y W_0 es el valor de una equipotencial de referencia del campo de gravedad de la Tierra (Sánchez et al., 2021). Las anomalías de altura quedan determinadas como

$$\zeta = \zeta_{\text{res}} + \zeta_{\text{GGM}} + \zeta_{\text{RTM}} + \zeta_0, \quad (23)$$

El valor de la constante W_0 determina el datum vertical al cual las anomalías de altura derivadas del modelo están referidas. En este trabajo se tomó la equipotencial con valor $W_0 = U_0^{\text{GRS80}}$, puesto que el valor de W_0 no afecta a la precisión de los modelos, de manera que el segundo término de la ec. (22) es cero.

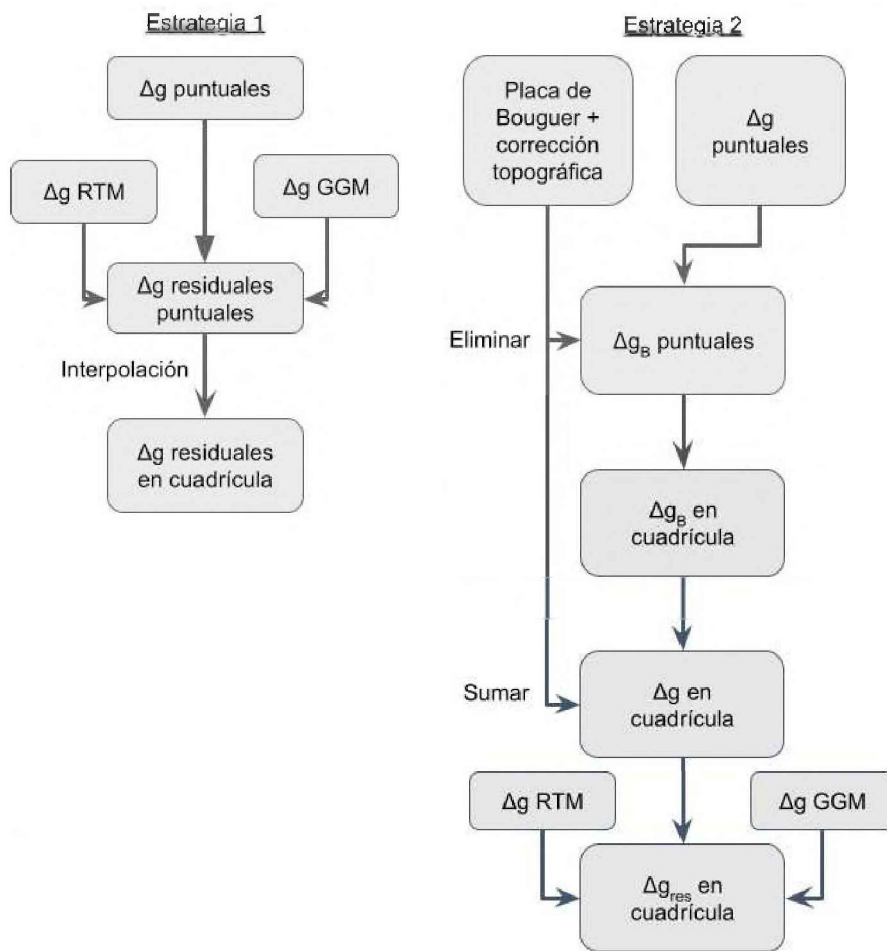


Figura 3. Diagramas de flujo de las dos estrategias para la determinación de cuadrículas de anomalías de gravedad residuales.

Interpolación de anomalías de gravedad residuales a una cuadrícula regular

Los métodos FFT requieren necesariamente que las anomalías de gravedad residuales estén dispuestas en una cuadrícula. Sin embargo, en la práctica se cuenta con datos gravimétricos puntuales, distribuidos irregularmente en la región de estudio. Estos datos deben interpolarse a una cuadrícula de $N \times M$ nodos P_{ij} con coordenadas (φ_i, λ_j) , $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$, regularmente distribuidos sobre la región de estudio, con un intervalo de muestreo $\Delta\varphi$ en latitud y $\Delta\lambda$ en longitud.

En este trabajo, se plantearon dos estrategias distintas para la construcción de cuadrículas de anomalías de gravedad residuales. Las estrategias propuestas siguen los diagramas de flujo presentados en la Figura 3.

La primera cuadrícula se determinó calculando las anomalías de gravedad residuales Δg_{res} sobre los puntos con gravedad conocida (anomalías residuales puntuales), y posteriormente interpolando dichas anomalías sobre los nodos de la cuadrícula.

La segunda cuadrícula se determinó mediante una estrategia descrita por Featherstone & Kirby (2000). El primer paso consiste en calcular las anomalías de Bouguer completas en las estaciones gravimétricas (anomalías de Bouguer puntuales). La anomalía de Bouguer completa se define como

$$\Delta g_B(P) = g(P) - \delta g_B(P) - \gamma(Q), \tag{24}$$

donde P es el punto correspondiente a la estación gravimétrica y $\delta g_B(P)$ es el efecto gravimétrico de las masas topográficas, que se determina mediante

$$\delta g_B(P) = 2\pi G\rho H^*(P) + TC(H^*(P)), \quad (25)$$

donde $\rho = 2.67 \text{ kg m}^{-3}$ es la densidad topográfica y $H^*(P)$ es la altura del punto P . El primer término corresponde al efecto gravimétrico de una placa de Bouguer de altura $H^*(P)$. El término $TC(P)$ es la corrección topográfica, que calcula el efecto gravimétrico asociado a los excesos y déficits de masa respecto de la placa de Bouguer, y está dado como (ec. (8-5) de Sansò & Sideris (2013))

$$TC(H^*(P)) = G\rho \iint_E \int_{H^*(P)}^{H^*(x',y')} \frac{z - H^*(P)}{[(x_p - x')^2 + (y_p - y')^2 + (z_p - H^*(P))^2]^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz', \quad (26)$$

La corrección topográfica fue determinada a través del método de integración por prismas en el dominio espacial (Forsberg, 1984) utilizando un MDE. Al estar corregidas por el efecto gravimétrico de la topografía, las anomalías de Bouguer completas son mucho más suaves que las anomalías de aire libre, lo que facilita su interpolación.

El segundo paso consiste en interpolar las anomalías de Bouguer completas puntuales a cada uno de los $N \times M$ nodos de la cuadrícula para obtener anomalías de Bouguer completas interpoladas, denotadas Δg_B^g . El efecto gravimétrico de la placa de Bouguer y la corrección topográfica son calculados en cada uno de los nodos y restaurados para convertir la cuadrícula de anomalías de Bouguer a una de aire libre mediante

$$\Delta g^g(P_{ij}) = \Delta g_B^g(P_{ij}) + 2\pi G\rho H_{\text{MDE}}^*(P_{ij}) + TC(H_{\text{MDE}}^*(P_{ij})), \quad (27)$$

donde el subíndice MDE indica que las alturas normales de los puntos P_{ij} fueron obtenidas de un modelo digital de elevaciones.

Finalmente, en cada nodo el efecto del GGM y RTM es determinado y removido de las anomalías de aire libre, para obtener finalmente la cuadrícula de anomalías residuales.

En ambas estrategias, la interpolación de las anomalías puntuales (residuales en el primer caso, y de Bouguer completas en el segundo) se realizó mediante el método de interpolación por mínimos cuadrados (LSC; Moritz (1978)). Este método de interpolación consiste en determinar en un punto arbitrario P la anomalía de gravedad a partir de las anomalías residuales determinadas en N puntos P_i , $i = 1, 2, \dots, N$ con gravedad conocida, mediante (ec. (9-67) de Hofmann-Wellenhof & Moritz (2006))

$$f(P) = C_{Pk} C_{Ik}^{-1} f_k, \quad (28)$$

donde C_{Pk} es el vector de covarianzas entre el punto P y los N puntos P_i , C_{ik} es la matriz de covarianzas asociada a cada par de estaciones gravimétricas, y $f_k = f(P_k)$ es la anomalía de gravedad en la estación gravimétrica del punto P_i .

La función de covarianza de las anomalías residuales y de las anomalías de Bouguer completas fue determinada a partir de, en primera instancia, calcular las covarianzas empíricas y posteriormente ajustar a dichas covarianzas un modelo de Markov de segundo orden dado como (Moritz, 1978)

$$C(s) = C_0(1 + s/D) \exp(-s/D), \quad (29)$$

donde s es la distancia entre dos puntos, C_0 es la estimación de la varianza de los datos y D es un parámetro relacionado con la longitud de correlación.

Las dos cuadrículas construidas de acuerdo con las estrategias descritas fueron utilizadas en los

métodos FFT esférico y FFT 1D, dando lugar a cuatro modelos de cuasigeoide gravimétricos puros.

Integración por métodos FFT

Si las anomalías de gravedad residuales están dispuestas en una cuadrícula de $N \times M$ puntos, la integral de Molodensky discretizada está dada como (Cap. 10 de Sansò & Sideris (2013))

$$\zeta_{\text{res}}(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma(Q)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \Delta g_{\text{res}}(\varphi_i, \lambda_j) S(\varphi_i, \lambda_j, \varphi_l, \lambda_k) \cos \varphi_i \Delta\varphi \Delta\lambda, \quad (30)$$

donde $\Delta\varphi$ y $\Delta\lambda$ son los espaciamientos en latitud y longitud entre nodos de la cuadrícula respectivamente, $l = 0, 1, \dots, N - 1$ y $k = 0, 1, \dots, M - 1$. La ec. (30) es una convolución discreta 2D entre las anomalías de gravedad residuales y el núcleo de Stokes. Esta convolución puede evaluarse mediante métodos basados en el algoritmo FFT. La importancia de estos métodos radica principalmente en la rapidez con la que la integral puede ser evaluada computacionalmente, comparada con otros métodos de integración (Cap. 10 de Sansò & Sideris (2013)).

Existen diversos métodos basados en FFT, que se diferencian por la manera en la cual se aproxima al núcleo de Stokes (Cap. 10 de Sansò & Sideris (2013)). Entre los más utilizados, se encuentra el método FFT de aproximación planar (Schwarz et al., 1990), en el cual se desprecian efectos de la curvatura terrestre. Sin embargo, en este trabajo se utilizaron dos métodos FFT que sí consideran la curvatura de la Tierra. El primero se denomina FFT de núcleo esférico aproximado (van Hees, 1991), o simplemente FFT esférico. En este método, el núcleo de Stokes se modifica utilizando en la ec. (11) la relación aproximada

$$\sin^2 \frac{\psi_{PP'}}{2} \approx \sin^2 \frac{\varphi_P - \varphi_{P'}}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_P - \lambda_{P'}}{2} \cos^2 \varphi_M, \quad (31)$$

donde φ_M es la latitud media del área de integración. Esto da lugar a una función de Stokes aproximada, denotada $\hat{S}(\psi_{PP'})$. Luego, la anomalía de altura puede calcularse mediante (ec. (10.47) de Sansò & Sideris (2013))

$$\zeta(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma(Q)} F^{-1} \left[F \left[\Delta g_{\text{res}}(\varphi_i, \lambda_j) \cos \varphi_i \right] \cdot F \left[\hat{S}(\varphi_i, \lambda_j, \varphi_l, \lambda_k) \right] \right], \quad (32)$$

donde F es el operador de la Transformada de Fourier 2D y F^{-1} su operador inverso.

La ec. (32) es exacta sobre todos los puntos ubicados en la latitud central del área de trabajo φ_M . Sin embargo, el error numérico en la determinación de la anomalía de altura generado por la aproximación de la ec. (31) aumenta para puntos más alejados de la latitud central. Para minimizar este efecto, Forsberg & Sideris (1993) propusieron dividir el área de trabajo en N bandas latitudinales y aplicar la ec. (32) en cada banda, donde ahora φ_M es la latitud central de cada sector. La solución surge de aplicar la ec. (32) sobre la latitud central de cada banda y luego realizar una interpolación. La anomalía de altura de un punto P ubicado entre las latitudes φ_{M_i} y $\varphi_{M_{i+1}}$ está dada como

$$\zeta(\varphi) = \frac{\varphi - \varphi_M^i}{\varphi_M^i - \varphi_M^{i+1}} \zeta_i + \frac{\varphi_M^{i+1} - \varphi}{\varphi_M^i - \varphi_M^{i+1}} \zeta_{i+1}, \quad (33)$$

donde ζ_i y ζ_{i+1} son las anomalías de altura calculadas mediante la ec. (32) en las latitudes φ_M^i y φ_M^{i+1} respectivamente.

El segundo método FFT, basado en el trabajo de Haagmans (1993), se conoce como *método FFT 1D*

o de *núcleo exacto*. Este método se fundamenta en la validez de la ecuación (25) sin la necesidad de aproximar el núcleo de Stokes cuando los puntos en los que se calcula la anomalía de altura están situados en la latitud central del área de estudio. Como resultado, la anomalía de altura puede determinarse mediante la ec. (10.51) de [Sansò & Sideris \(2013\)](#).

$$\zeta(\varphi, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma(Q)} F_1^{-1} \left[F_1 [\Delta g_{\text{res}}(\varphi_i, \lambda_k) \cos \varphi_i] \cdot F_1 \left[\hat{S}(\varphi_i, \varphi, \lambda_k) \right] \right], \quad (34)$$

donde F_1 es el operador de la Transformada de Fourier 1D y F_1^{-1} su operador inverso.

Como su nombre indica, la ventaja de esta técnica sobre la de núcleo aproximado es que esta expresión es exacta, con lo cual ninguna aproximación sobre el núcleo de Stokes es necesaria ([Sansò & Sideris, 2013](#)).

Modificación del núcleo de Stokes

Como fue mencionado anteriormente, el hecho de que los datos gravimétricos utilizados solo se encuentren disponibles en una superficie limitada introduce un error en la determinación de anomalías de altura. Para minimizar este error, es común modificar la función de Stokes.

El núcleo de Stokes admite el desarrollo en serie (ec. (2-236) de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#))

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1} \right) P_n(\cos \psi) \quad (35)$$

donde P_n son los polinomios de Legendre (ec. (1-57) de [Hofmann-Wellenhof & Moritz \(2006\)](#)). Se han propuesto muchas modificaciones a la ec. (35) para minimizar el error por truncamiento ([Featherstone et al., 1998](#)). En este trabajo, se utilizó la modificación propuesta por [Wong & Gore \(1969\)](#), que consiste en utilizar en la integral de Molodensky el núcleo definido como

$$S_{WG}(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^{N_2} \alpha(n) \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (36)$$

donde

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \leq n \leq N_1, \\ \frac{N_2-n}{N_2-N_1} & \text{si } N_1 \leq n \leq N_2, \\ 0 & \text{si } n > N_2. \end{cases} \quad (37)$$

Los parámetros N_1 y N_2 deben ser determinados empíricamente. El núcleo modificado de Stokes es utilizado en las ecuaciones (32) y (34). Si las anomalías de gravedad fueron previamente reducidas por un GGM hasta un grado N_{GGM} , entonces es necesario que $N_2 \leq N_{GGM}$ ([Wong & Gore, 1969](#)).

Validación de los modelos de cuasigeoide con puntos de doble altura

La validación absoluta de un modelo de cuasigeoide consiste en comparar las anomalías de altura del modelo ζ con las derivadas en puntos GNSS/Nivelación, $\zeta_{h/H^*} = h - H^*$, donde h es la altura elipsoidal y H^* la altura normal. La comparación se realiza calculando las diferencias de ambas anomalías de altura en cada punto GNSS/Nivelación, y ajustando dichas diferencias a un modelo de transformación. En este trabajo, se eligió un modelo de transformación de cuatro parámetros, dado como ([Fotopoulos et al., 2000](#))

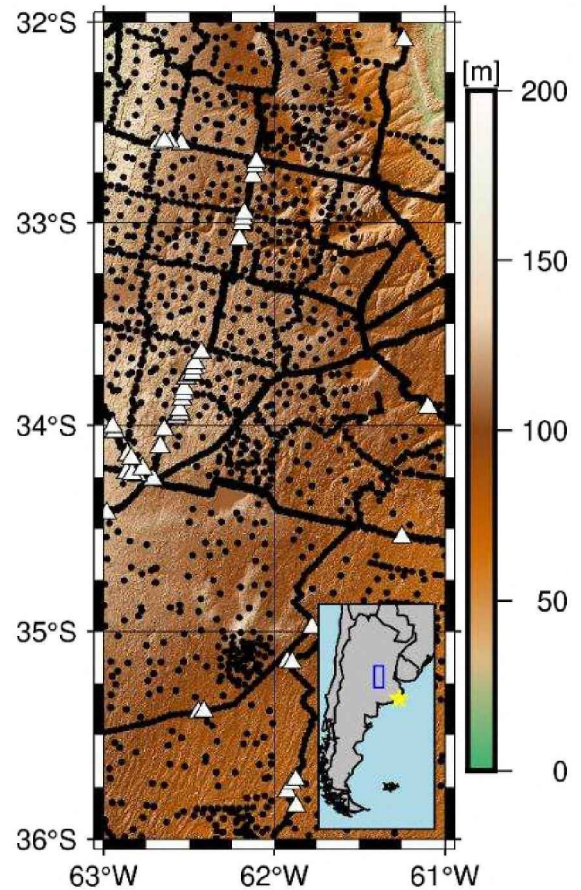


Figura 4. Área de trabajo y distribución de datos. Puntos negros: datos gravimétricos. Triángulos blancos: estaciones de doble altura. Fondo: topografía según MDE-Ar v2.1. Estrella amarilla: datum de SRVN16.

$$\Delta\zeta(P_i) = \zeta_{h/H^*}(P_i) - \zeta(P_i) = a_0 + a_1 \cos \phi_i \cos \lambda_i + a_2 \cos \phi_i \sin \lambda_i + a_3 \sin \phi_i + v_i \quad (38)$$

donde P_i es la posición del i -ésimo punto GNSS/Nivelación. Los parámetros a_0 , a_1 , a_2 , y a_3 se determinan a partir de un ajuste por mínimos cuadrados que minimiza el cuadrado de los residuos v_i .

El modelo de transformación absorbe tanto las discrepancias en los distintos *datums* de las alturas como errores de larga longitud de onda. Por su parte, los residuos son una combinación de los errores asociados a las alturas normales, a las alturas elipsoidales y a las anomalías de altura determinadas del modelo de cuasigeoide gravimétrico puro. Al no incluir los sesgos absorbidos por el modelo de transformación, las estadísticas de los residuos v_i luego del ajuste describen más adecuadamente el acuerdo entre los datos GNSS/Nivelación y el modelo de cuasigeoide y, por ende, dan una medida de la precisión del modelo determinado (Fotopoulos et al., 2000).

ÁREA DE TRABAJO Y PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

El área de trabajo consiste en una región ubicada entre las latitudes de 36°S y 32°S y longitudes 63°O a 61°O (ver Figura 4). Esta zona fue seleccionada por su buena disponibilidad y distribución de datos gravimétricos y de puntos de doble altura. La topografía de la zona es plana, con alturas normales que no superan los 200 m. Con el objetivo de disminuir errores asociados a efectos de borde en la determinación de los modelos de cuasigeoide, los datos gravimétricos, el GGM y el MDE fueron seleccionados en una región un grado más grande en dirección N-S y E-O.

El conjunto de datos gravimétricos cuenta con 8018 observaciones referidas a las Redes Gravimétricas de Primer y Segundo Orden de la República Argentina (Antokoletz, 2017), con una separación promedio de 4 km. Puesto que la masa del elipsoide de referencia GRS80 contiene la masa de la

atmósfera, mientras que las observaciones de gravedad están medidas sobre la superficie topográfica, la corrección atmosférica (ec. (3) de [Hinze et al. \(2005\)](#))

$$\delta g_{\text{atm}}[\text{mGal}] = 0.874 - 9.9 \times 10^{-5}H[\text{m}] + 3.56 \times 10^{-9}H[\text{m}^2], \quad (39)$$

debe sumarse a los valores de gravedad observados. Se realizó una detección de *outliers* a partir de calcular las anomalías de Bouguer completas en cada punto y, posteriormente, aplicando un criterio de 3σ . En total, 101 *outliers* fueron removidos. Los datos restantes fueron interpolados a dos cuadrículas de $1' \times 1'$ mediante las metodologías previamente descritas.

Para la validación de los modelos de cuasigeoide se cuenta con 58 puntos GNSS/Nivelación. Las alturas elipsoidales están referidas al marco de referencia Posiciones Geodésicas Argentinas 2007 (POSGAR07; [Cimbaro et al. \(2009\)](#)), el cual es, a su vez, una densificación de IGS05 ([Johnston et al., 2017](#)). Estas alturas tienen una precisión estimada de 1.5 cm (Instituto Geográfico Nacional, com. pers., 2023). POSGAR07 adopta como elipsoide de referencia a WGS84 ([Johnston et al., 2017](#)), por lo que las alturas elipsoidales fueron convertidas al elipsoide GRS80.

Por su parte, las alturas normales fueron calculadas a partir de números geopotenciales referidos al Sistema de Referencia Vertical Nacional 2016 (SRVN16; [Instituto Geográfico Nacional \(2016\)](#)), determinados mediante un ajuste que involucra nivelación geométrica y gravimetría. Los números geopotenciales están definidos como

$$C(P) = W_0^{\text{SRVN16}} - W(P) \quad (40)$$

donde W_0^{SRVN16} es el valor de la equipotencial de referencia realizada por el *datum* local de SRVN16 ([Tocho & Vergos, 2015](#)), y la relación entre números geopotenciales y alturas normales es

$$H^*(P) = \frac{C(P)}{\gamma_0} \left[1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) \frac{C(P)}{a\gamma_0} + \left(\frac{C(P)}{a\gamma_0} \right)^2 \right], \quad (41)$$

donde γ_0 es la gravedad normal en el elipsoide GRS80.

El MDE utilizado para la determinación de anomalías de aire libre, la determinación de las anomalías de Bouguer completas, y el cálculo del efecto RTM fue el Modelo Digital de Elevaciones de la Argentina versión 2.1 (MDE-Ar v2.1; [Instituto Geográfico Nacional \(2021\)](#)). Este modelo cuenta con una resolución de 30 m y una precisión estimada de 1.6 m en la región de trabajo. El *datum* al cual refieren las alturas derivadas de MDE-Ar v2.1 coincide con el de SRVN16.

El GGM elegido fue XGM2019e ([Zingerle et al., 2020](#)), cuyo grado máximo es 2159. La elección de este GGM se basó en los resultados obtenidos por [Tocho et al. \(2022\)](#), que demostraron que XGM2019e presenta el mejor acuerdo con datos de doble altura de Argentina cuando se lo compara con otros GGMs de alta resolución. El grado óptimo del GGM utilizado fue determinado a partir de calcular anomalías de gravedad residuales utilizando el GGM hasta los grados 300, 760 y 2159, y verificar qué grado da como resultado las anomalías residuales con menor valor medio y desviación estándar. Una vez determinado el grado óptimo, los efectos del GGM sobre las anomalías de gravedad y las anomalías de altura fueron calculados mediante las ecuaciones (16) y (17) respectivamente, utilizando las alturas normales obtenidas de MDE-Ar v2.1.

El GBVP de Molodensky asume que no hay masas por fuera de la superficie topográfica. Sin embargo, los distintos tipos de datos pueden incorporar el efecto de la componente estacionaria de los efectos de marea (marea permanente). Para mantener la validez del GBVP y evitar inconsistencias entre distintos tipos de datos, todos los conjuntos de datos y modelos (gravedad observada, alturas elipsoidal y normal, GGM y MDE) deben transformarse al concepto de marea permanente *tide-free* (TF) o *zero-tide*

(ZT).

En este trabajo, los modelos de cuasigeoide fueron determinados en el sistema ZT, por lo que todos los datos y modelos utilizados fueron previamente convertidos al concepto ZT. Tanto las gravedades observadas como el GGM utilizado están dados en este concepto, por lo que no se aplicaron correcciones adicionales. Las alturas normales derivadas de MDE-Ar v2.1, que fueron utilizadas para el cálculo de las anomalías de gravedad, están dadas en el concepto *mean-tide* (MT), por lo que fueron convertidas a ZT sumándoles la expresión (ec. (21) de [Mäkinen \(2021\)](#))

$$\Delta H_T^*[\text{mm}] = -99.40 + 295.41 \sin^2 \phi + 0.42 \sin^4 \phi. \quad (42)$$

Para la validación de los modelos, es necesario que las alturas elipsoidales de los puntos GNSS/Nivelación estén dadas en el concepto ZT. Estas fueron convertidas a ZT mediante la expresión (ec. (23) de [Mäkinen \(2021\)](#))

$$h_{ZT}[\text{mm}] = h_{TF}[\text{mm}] + 60.34 - 179.01 \sin^2 \phi - 1.81 \sin^4 \phi, \quad (43)$$

donde h_{ZT} y h_{TF} son las alturas elipsoidales dadas en los sistemas ZT y TF respectivamente.

Los modelos de cuasigeoide fueron determinados utilizando el paquete de rutinas GRAVSOF (Forsberg & Tscherning, 2008). Los efectos del GGM en las anomalías de gravedad y de altura (ecs. (16) y (17)) fueron calculados mediante la rutina GEODOL. Los efectos RTM fueron determinados mediante la rutina TC, y la superficie de elevación media utilizada para calcular estos efectos se obtuvo mediante TCGRID. Los métodos FFT 1D y FFT esférico se implementaron mediante las rutinas SP1D y SPFOUR, respectivamente.

RESULTADOS

Determinación del grado óptimo del GGM

El grado óptimo del GGM XGM2019e fue elegido removiendo de las anomalías de aire libre calculadas en todas las estaciones gravimétricas el efecto del GGM truncado en los grados 300, 760 y 2159. Los resultados se observan en la Tabla 1. En la primera fila, se presenta la estadística de las anomalías de gravedad. Entre la segunda y séptima fila, se muestran las anomalías determinadas mediante XGM2019e (ec. (16)) en los grados elegidos.

Puede observarse que el grado que más disminuye la desviación estándar es 760, por lo que este grado fue utilizado para la determinación de las anomalías de gravedad residuales. Por su parte, el grado máximo utilizado, 2159, no reduce más las anomalías de gravedad. Esto puede deberse a que las anomalías de gravedad en las estaciones gravimétricas, debido a la baja variabilidad topográfica de la región de trabajo, ya son lo suficientemente suaves sin la necesidad de incluir grados muy altos. De esta forma, la inclusión de grados muy altos en la reducción de las anomalías puede introducir un error de comisión que afecte negativamente las estadísticas.

DETERMINACIÓN DE CUADRÍCULAS DE ANOMALÍAS RESIDUALES

Para la cuadrícula determinada a partir de la primera estrategia, se determinaron previamente los valores de anomalías de aire libre residuales en cada una de las estaciones gravimétricas. Para esto, se calculó el efecto del GGM hasta grado y orden 760 y el efecto RTM sobre cada punto de las estaciones gravimétricas, y fueron removidos de las anomalías de aire libre. La Figura 5 muestra la dispersión de las anomalías residuales en función de la altura normal de la estación.

Tabla 1. Estadísticas de anomalías de aire libre reducidas por XGM2019e utilizando n_{max} hasta 300, 760 y 2159. Unidad: [mGal].

Anomalías	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Δg	-17.57	48.38	7.62	10.46
Δg_{300}^{GGM}	-10.80	30.94	7.25	7.73
$\Delta g - \Delta g_{300}^{GGM}$	-29.68	27.34	0.37	7.70
Δg_{760}^{GGM}	-15.06	34.75	7.82	9.12
$\Delta g - \Delta g_{760}^{GGM}$	-24.54	22.97	-0.20	5.09
Δg_{2159}^{GGM}	-13.44	44.05	7.99	9.72
$\Delta g - \Delta g_{2159}^{GGM}$	-29.18	25.92	-0.37	5.54

Por un lado, se observa que, al remover el efecto del GGM, la correlación de las anomalías de gravedad con la altura se reduce considerablemente. Por otro lado, debido a la baja topografía del área de trabajo, el efecto RTM no es tan significativo, pero igualmente reduce la dispersión de las anomalías de gravedad. Las anomalías residuales fueron interpoladas mediante el método LSC a los nodos de una cuadrícula con espaciamiento de $1' \times 1'$. Las estadísticas de las anomalías residuales puntuales e interpoladas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Estadísticas de las anomalías de gravedad residuales. Unidad: [mGal].

Anomalías	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Δg puntuales	-18.47	45.74	6.28	10.11
Δg_{GGM} puntuales	-15.00	34.85	7.83	9.11
Δg_{RTM} puntuales	-5.35	8.79	0.32	1.39
$\Delta g - \Delta g_{GGM}$ puntuales	-24.18	23.59	-1.56	5.09
Δg_{res} puntuales	-26.23	23.58	-1.24	5.01
Δg_{res} interpoladas (primera estrategia)	-20.99	21.45	-1.20	4.84

En la segunda estrategia, las anomalías de Bouguer completas, que previamente fueron determinadas en los puntos con gravedad conocida, fueron interpoladas a los nodos de la cuadrícula. Al igual que en la estrategia anterior, la interpolación se realizó mediante el método LSC, y la cuadrícula resultante tiene una resolución de $1' \times 1'$. La Tabla 3 presenta las estadísticas de las distintas anomalías calculadas en cada etapa de la segunda estrategia.

La primera y segunda fila muestran las anomalías de Bouguer completas sobre las estaciones gravimétricas y sobre los nodos de la cuadrícula, respectivamente. La tercera fila muestra las estadísticas

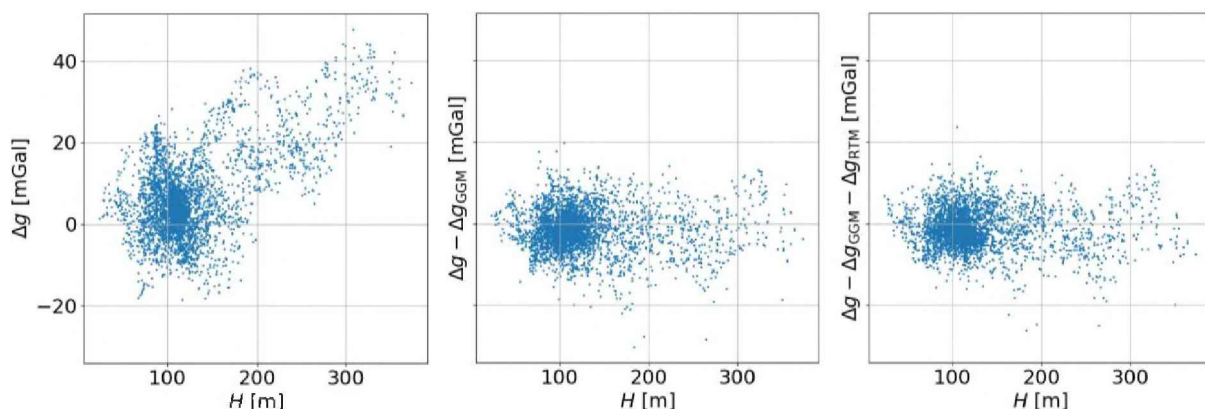


Figura 5. Anomalías de gravedad residuales en función de la altura.

Tabla 3. Estadísticas de las anomalías de Bouguer. Unidad: [mGal].

Anomalías	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Δg_B puntuales	-31.77	15.45	-5.57	6.55
Δg_B interpoladas	-30.12	15.57	-6.52	6.28
Δg_B (ec. (25))	-0.67	39.38	10.94	5.89
Δg	-16.97	45.07	4.42	8.92
Δg_{GGM}	-15.20	35.01	6.07	6.92
Δg_{RTM}	-4.27	7.75	0.90	1.39
$\Delta g - \Delta g_{GGM}$	-31.45	17.17	-1.65	5.82
Δg_{res} interpoladas (segunda estrategia)	-30.88	15.86	-1.56	4.74

del efecto gravimétrico topográfico δg_B calculado sobre la cuadrícula de acuerdo con la ec. (25). En la cuarta fila, se tienen las anomalías de aire libre de cuadrícula, calculadas a partir de restaurar los efectos topográficos a las anomalías de Bouguer completas interpoladas. En la quinta y sexta fila, se cuentan con los efectos del GGM y RTM, respectivamente, los cuales fueron removidos de la cuadrícula de anomalías de aire libre. Finalmente, en la séptima y octava fila, se presentan las anomalías de aire libre reducidas por el GGM, y las anomalías residuales de la cuadrícula.

DETERMINACIÓN Y VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE CUASIGEOIDE

Se determinaron cuatro modelos de cuasigeoide. Los modelos A_{SP} y A_{1D} fueron determinados con la cuadrícula de anomalías construida mediante la primera estrategia, utilizando los métodos FFT esférico y FFT 1D, respectivamente.

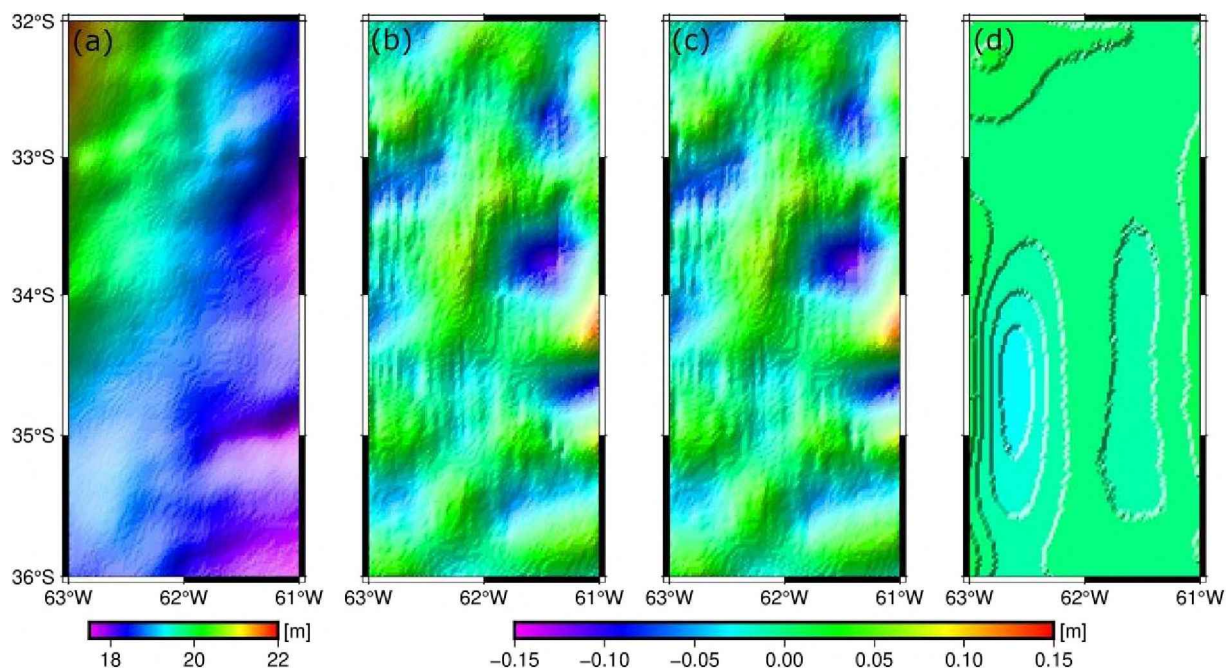


Figura 6. a) Modelo de cuasigeoide gravimétrico B_{1D} . b) Diferencias de los modelos A_{SP} , c) A_{1D} y d) B_{SP} , respecto de B_{1D} .

Los modelos B_{SP} y B_{1D} se generaron con la cuadrícula de anomalías residuales correspondiente a la segunda estrategia, mediante los métodos FFT esférico y FFT 1D, respectivamente. Para todos los modelos generados, se aplicó una transformación de Wong-Gore (ec. (36)) con $N_1 = 300$ y $N_2 = 310$. Estos parámetros fueron determinados empíricamente analizando distintos valores de N_1 y N_2 entre 0 y 760, y dependen del tamaño del área de trabajo, de la calidad del GGM en el área de trabajo, y

de la calidad de los datos gravimétricos.

En la Figura 6, se observa el modelo gravimétrico B_{1D} (Figura 6a), y las diferencias respecto a este modelo de A_{SP} , A_{1D} , y B_{SP} (Figura 6b, c y d, respectivamente), de manera que B_{1D} se utilizó como referencia para comparar el resto de los modelos. Las diferencias entre B_{1D} y ambos modelos determinados con la primera cuadrícula es del orden de 0.1 m, mientras que la diferencia máxima entre B_{1D} y B_{SP} es un orden de magnitud menor.

Los cuatro modelos fueron validados de forma absoluta en los puntos GNSS/Nivelación de acuerdo con la ec. (38), y los resultados de la validación se presentan en la Tabla 4 antes y después del ajuste del modelo de transformación de cuatro parámetros. En la Figura 7, se presentan los residuos antes (Figura 7a, b, c y d) y después del ajuste (Figura 7e, f, g y h) para cada uno de los modelos, y para XGM2019e hasta grado y orden 760.

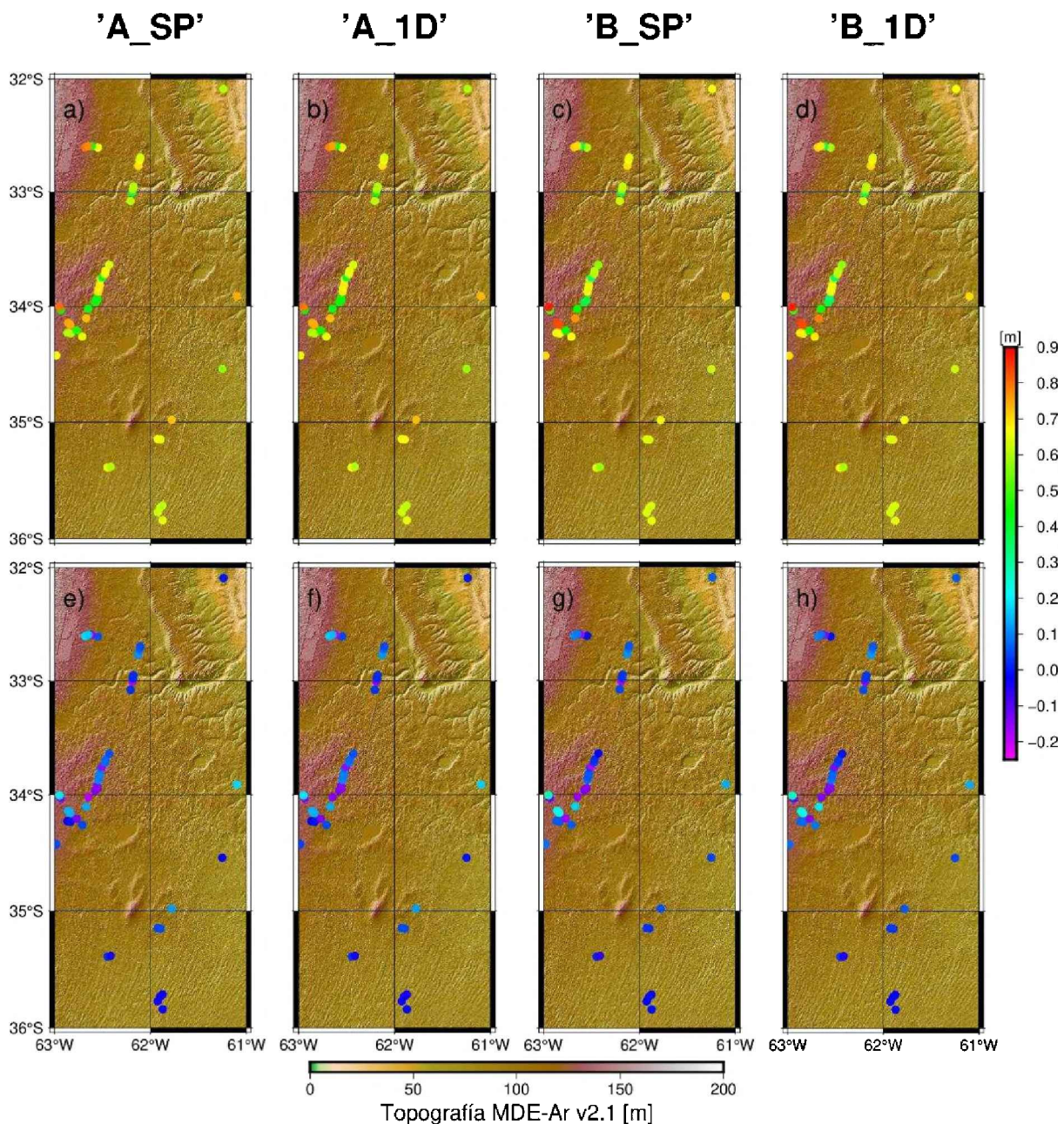


Figura 7. Diferencias entre anomalías de alturas determinadas mediante GNSS y nivelación geométrica con gravimetría y derivadas de los modelos A_{SP} , A_{1D} , B_{SP} , y B_{1D} , respectivamente.

DISCUSIÓN

Precisión de los modelos de cuasigeoide

La precisión de los modelos de cuasigeoide está limitada por la calidad del GGM en la zona de trabajo, la precisión y resolución del MDE utilizado, la calidad y distribución de los datos gravimétricos, y cómo estos modelos y datos son combinados en el esquema RCR. Para estimar la precisión, los modelos fueron validados mediante puntos GNSS/Nivelación utilizando un modelo de transformación de cuatro parámetros. El modelo de transformación utilizado absorbe los posibles errores de larga longitud de onda del modelo de cuasigeoide y elimina las discrepancias entre los *datums* de los distintos tipos de alturas, aunque la precisión estimada de esta manera sí incluye los errores asociados a las alturas elipsoidales y normales (Fotopoulos et al., 2000).

Las alturas elipsoidales generalmente tienen errores del orden de cm e incluso del mm, por lo que no impactan significativamente en la estimación de la precisión de los modelos. Sin embargo, las alturas normales pueden tener errores del orden de 10 cm. En este sentido, la desviación estándar de las diferencias es una combinación de los errores del modelo y de las alturas normales.

Los modelos A_{SP} y A_{1D} tienen precisiones estimadas de 0.141 m y 0.139 m, respectivamente, mientras que tanto B_{SP} como B_{1D} alcanzan precisiones de 0.128 m (Tabla 4).

Tabla 4. Estadísticas de las diferencias entre las alturas elipsoidales, alturas normales y anomalías de altura obtenidas con los modelos de cuasigeoide y XGM2019e antes y después del ajuste del modelo de transformación de cuatro parámetros. Las desviaciones estándar más bajas se muestran en negrita. Unidad: [m].

Diferencia	Condición	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
$\Delta\zeta_{GGM}$	Sin ajustar	0.686	0.161	0.328	1.025
	Ajustado	0.000	0.155	-0.361	0.329
$\Delta\zeta_{A_{SP}}$	Sin ajustar	0.669	0.146	0.433	0.948
	Ajustado	0.000	0.141	-0.237	0.278
$\Delta\zeta_{A_{1D}}$	Sin ajustar	0.669	0.142	0.428	0.948
	Ajustado	0.000	0.128	-0.196	0.276
$\Delta\zeta_{B_{SP}}$	Sin ajustar	0.674	0.131	0.464	0.956
	Ajustado	0.000	0.128	-0.216	0.276
$\Delta\zeta_{B_{1D}}$	Sin ajustar	0.671	0.131	0.481	0.954
	Ajustado	0.000	0.128	-0.196	0.276

Estrategias de interpolación de anomalías de gravedad

Los resultados de la validación absoluta de los modelos A_{SP} y B_{SP} muestran una diferencia en la desviación estándar de 0.013 m, indicando que B_{SP} es un modelo 1.3 cm más preciso que A_{SP} (Tabla 4). Entre A_{1D} y B_{1D} las diferencias son análogas, con una diferencia entre desviaciones estándar de 0.012 m, indicando que B_{1D} es 1.2 cm más preciso que A_{1D} .

Estos resultados indican que la estrategia utilizada para la determinación de la cuadrícula de anomalías de gravedad residuales influye significativamente en la precisión de los modelos, independientemente del método de integración numérica utilizado posteriormente. Esto también puede observarse en la Figura 6, donde se tiene la comparación de los modelos A_{SP} , A_{1D} y B_{SP} con B_{1D} . Las diferencias entre los modelos desarrollados con distintas estrategias (Figura 6b y c) tienen diferencias máximas del orden de 0.1 m.

Los modelos generados con la segunda estrategia, la cual requiere una determinación previa de una cuadrícula de anomalías de Bouguer completas a la que luego se le restaura el efecto topográfico de

la placa de Bouguer y la corrección topográfica, muestran un mejor acuerdo con los puntos de doble altura que la primera estrategia. Esto puede deberse a que la segunda estrategia tiende a ser más eficaz cuando la distribución de datos gravimétricos no es lo suficientemente regular. En el área de trabajo, la distribución de datos gravimétricos en la región sur es mucho menor con respecto a la de la región norte, con lo cual es esperable que esta metodología de interpolación de lugar a modelos de cuasigeoide más precisos.

Efecto del método de integración sobre los modelos de cuasigeoide

Para estudiar el impacto de cada método de integración numérica utilizado para la determinación de anomalías de altura residuales, se compararon las precisiones obtenidas para los modelos A_{SP} con A_{1D} por un lado y B_{SP} con B_{1D} por otro lado (Tabla 4).

La precisión del modelo A_{SP} es 0.02 m menor que A_{1D} , luego de la aplicación de la transformación de cuatro parámetros. En el caso de B_{SP} , su precisión coincide con la de B_{1D} . Es esperable que la precisión de los modelos determinados mediante el método FFT 1D sea mayor, puesto que el FFT esférico introduce una aproximación en la función de Stokes (ec. (31)). Sin embargo, la mejora en la precisión es milimétrica, y por lo tanto menor a la precisión de las alturas elipsoidales y normales determinadas mediante nivelación.

CONCLUSIONES

En este trabajo se determinaron cuatro modelos de cuasigeoide gravimétricos puros mediante los métodos FFT esférico y FFT 1D. Cada método fue aplicado sobre cuadrículas de anomalías de gravedad residuales construidas mediante dos estrategias distintas. La primera estrategia consistió en calcular en los puntos con gravedad conocida las anomalías de gravedad residuales. Posteriormente, estas anomalías fueron utilizadas para determinar el valor de las anomalías residuales en cada nodo mediante interpolación. La segunda estrategia consistió en calcular en cada estación gravimétrica las anomalías de Bouguer completas. Luego, estas anomalías fueron interpoladas sobre una cuadrícula, y convertidas a anomalías de aire libre restaurando el efecto gravimétrico y la corrección topográfica en cada nodo. Finalmente, la cuadrícula de anomalías residuales fue construida removiendo el efecto GGM y RTM de los nodos.

Los resultados demuestran que la estrategia utilizada para la construcción de la cuadrícula de anomalías residuales tiene un efecto importante sobre la precisión del modelo de cuasigeoide. Se observa que la segunda estrategia mejora la precisión del modelo en el orden de 1 cm respecto de la primera estrategia. Por lo tanto, se recomienda esta estrategia para la construcción de cuadrículas de anomalías de gravedad residuales.

Por su parte, la elección del método FFT utilizado es irrelevante en cuanto al impacto sobre la precisión de los modelos. Si bien el método FFT 1D, a diferencia de FFT esférico, no involucra aproximaciones matemáticas, esta ventaja teórica no se vio reflejada de forma significativa en los resultados de los modelos determinados con cada método.

Los resultados de este trabajo tienen una gran importancia para la determinación de modelos de cuasigeoide regionales mediante el esquema RCR. Para la construcción de cuadrículas de anomalías de gravedad residuales, se recomienda utilizar la estrategia de interpolación basada en las anomalías de Bouguer completas. Como trabajo a futuro, se utilizarán estos resultados para la determinación de un modelo de cuasigeoide para todo el territorio argentino, que permita la determinación de coordenadas IHRF en las estaciones argentinas.

Agradecimientos Al Instituto Geográfico Nacional (IGN), que proveyó los datos gravimétricos, los datos GNSS/Nivelación y el modelo MDE-Ar v2.1 utilizados en este trabajo. Los autores quisieran

extender su agradecimiento por los comentarios y correcciones que los revisores han realizado a este trabajo, que sirvieron para mejorar significativamente la calidad del mismo.

REFERENCIAS

- Antokoletz, E. D.** (2017). *Red Gravimétrica de Primer Orden de la República Argentina*. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/60950>. Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata
- Cimbaro, S., Lauría, E., & Piñón, D.** (2009). Adopción del nuevo marco de referencia geodésico nacional. Reporte técnico, Instituto Geográfico Militar, Buenos Aires, Argentina. https://ramsac.ign.gob.ar/posgar07_pg_web/documentos/POSGAR_07_RAMSAC.pdf
- Drewes, H., Kuglitsch, F. G., Adám, J., & Rózsa, S.** (2016). The Geodesist's Handbook 2016. *Journal of Geodesy*, 90(10), 907–1205. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0948-z>
- Featherstone, W. E., Evans, J. D., & Olliver, J. G.** (1998). A Meissl-modified Vaníček and Kleusberg kernel to reduce the truncation error in gravimetric geoid computations. *Journal of Geodesy*, 72, 154–160. <https://doi.org/10.1007/s001900050157>
- Featherstone, W. E. & Kirby, J. F.** (2000). The reduction of aliasing in gravity anomalies and geoid heights using digital terrain data. *Geophysical Journal International*, 141(1), 204–212. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2000.00082.x>
- Forsberg, R.** (1984). *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*, volumen 5. Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying.
- Forsberg, R. & Sideris, M. G.** (1993). Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach. *Manuscripta Geodaetica*, 18, 82–82.
- Forsberg, R. & Tscherning, C. C.** (2008). An overview manual for the GRAVSOFTE geodetic gravity field modelling programs. Reporte técnico, DTU Space. http://cct.gfy.ku.dk/publ_cct/cct19_36.pdf
- Fotopoulos, G., Kotsakis, C., & Sideris, M. G.** (2000). A new Canadian geoid model in support of levelling by GPS. *Geomatica*, 54(1), 53–62. <https://doi.org/10.5623/geomat-2000-0006>
- Haagmans, R. E.** (1993). Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1d FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. *Manuscripta Geodaetica*, 18, 227–241.
- Heiskanen, W. A. & Moritz, H.** (1967). Physical Geodesy. *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, 86(1), 491–492.
- Hinze, W. J., Aiken, C., Brozena, J., Coakley, B., Dater, D., Flanagan, G., et al.** (2005). New standards for reducing gravity data: The North American gravity database. *Geophysics*, 70(4), J25–J32. <https://doi.org/10.1190/1.1988183>
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H.** (2006). *Physical Geodesy*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-211-33545-1>
- Ilde, J., Sánchez, L., Barzaghi, R., Drewes, H., Foerste, C., Gruber, T., et al.** (2017). Definition and proposed realization of the International Height Reference System (IHR). *Surveys in Geophysics*, 38, 549–570. <https://doi.org/10.1007/s10712-017-9409-3>
- Instituto Geográfico Nacional** (2016). Sistema de Referencia Vertical Nacional de la República Argentina. Reporte técnico, Buenos Aires, Argentina. https://ramsac.ign.gob.ar/posgar07_pg_web/documentos/Informe_Red_de_Nivelacion_de_la_Republica_Argentina.pdf
- Instituto Geográfico Nacional** (2021). Modelo Digital de Elevaciones de la República Argentina. Reporte técnico, Buenos Aires, Argentina. https://www.ign.gob.ar/archivos/Informe_MDE-Ar_v2.1_30m.pdf
- Johnston, G., Riddell, A., & Hausler, G.** (2017). The International GNSS Service. *Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems*, Springer Handbooks. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1_33
- Moritz, H.** (1978). Least-squares collocation. *Reviews of Geophysics*, 16(3), 421–430. <https://doi.org/10.1029/RG016i003p00421>
- Moritz, H.** (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Advances in Planetary Geology.
- Moritz, H.** (2000). Geodetic reference system 1980. *Journal of Geodesy*, 74(1), 128–133. <https://doi.org/10.1007/BF02521480>
- Mäkinen, J.** (2021). The permanent tide and the International Height Reference Frame (IHRF). *Journal of Geodesy*, 95(9), 106. <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01541-5>
- Piñón, D.** (2016). *Development of a precise gravimetric geoid model for Argentina*. Universidad RMIT, Alemania. https://researchrepository.rmit.edu.au/view/pdfCoverPage?instCode=61RMIT_INST&filePid=13248372990001341&download=true. Tesis de doctorado

- Sansò, F. & Sideris, M. G., editores (2013). *Geoid Determination: Theory and Methods*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74700-0>
- Schwarz, K. P., Sideris, M. G., & Forsberg, R. (1990). The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophysical Journal International*, 100(3), 485–514. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1990.tb00701.x>
- Sánchez, L., Ågren, J., Huang, J., et al. (2021). Strategy for the realisation of the International Height Reference System (IHRs). *Journal of Geodesy*, 95, 33. <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01481-0>
- Tocho, C. & Vergos, G. S. (2015). Estimation of the Geopotential Value W_0 for the Local Vertical Datum of Argentina using EGM2008 and GPS/Levelling Data. *IAG 150 Years*, volumen 143 of *International Association of Geodesy Symposia*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/1345_2015_32
- Tocho, C. N., Antokoletz, E. D., Gómez, A. R., Guagni, H., & Piñon, D. A. (2022). Analysis of high-resolution global gravity field models for the estimation of International Height Reference System (IHRs) coordinates in Argentina. *Journal of Geodetic Science*, 12(1), 131–140. <https://doi.org/10.1515/jogs-2022-0139>
- van Hees, G. S. (1991). Stokes formula using Fast Fourier Techniques. *Determination of the Geoid*, volumen 106 of *International Association of Geodesy Symposia*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3104-2_47
- Wong, L. & Gore, R. (1969). Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophysical Journal International*, 18(1), 81–91. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1969.tb00264.x>
- Yıldız, H., Forsberg, R., Ågren, J., Tscherning, C., & Sjöberg, L. (2012). Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of Stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the Auvergne test area. *Journal of Geodetic Science*, 53–64. <https://doi.org/10.2478/v10156-011-0024-9>
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., & Oikonomidou, X. (2020). The combined global gravity field model XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94, 1–12. <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0>