APLICACIÓN DE LOS *TABLEAUX ANALÍTICOS* PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS RELACIONES DE ACCESIBILIDAD EN MARCOS DE KRIPKE PARA LA LÓGICA MODAL PROPOSICIONAL

Cecilia Durán; María Inés Corbalán

UNLP

1.- Introducción

A partir de 1960, y debido al desarrollo de las semánticas de Kripke, se establecieron conexiones sencillas entre axiomas de la Lógica Modal y propiedades de la denominada "relación de accesibilidad" entre mundos. La profundización de estos avances desembocó en la formulación de la *Teoría de la Correspondencia.* Según van Benthem dicha teoría tiene como objeto "el estudio sistemático de la definibilidad clásica de fórmulas modales, consideradas como principios relacionales".[1]

Si bien para algunos axiomas de la Lógica Modal resulta sencillo establecer qué condición debe cumplir la relación de accesibilidad para validarlo, esto no puede generalizarse. Además, se ha establecido que no toda fórmula de la Lógica Modal es definible en Lógica de Predicados de Primer Orden con Identidad (LPOI).

Nuestro trabajo está guiado por el interés en hallar un procedimiento que, aplicado a una fórmula cualquiera de la Lógica Modal Proposicional (LMP) nos dé como resultado la condición que debe cumplir la clase de marcos que la valide. Como antecedente, en la literatura se presentan diversos procedimientos que permiten realizar esto. Si bien los mismos están limitados por la estructura lógica de la fórmula modal, por el ordenamiento de la secuencia de operadores modales, o por la limitación general según la cual no toda fórmula es definible en esos términos. De modo que resaltamos en este punto que el método que a continuación desarrollaremos, se aplica a cualquier fórmula de la Lógica Modal pero no arroja como resultado el sistema al cual pertenece la misma sino la condición suficiente para su validez en una clase de marcos.

[1] van Benthem, J., (1984), pág.329.

Como método de prueba hemos adaptado los *tableaux analíticos* para aplicarlos a fórmulas de LPOI que sean traducción de fórmulas de LMP.

2.- Lógica Modal y Modelos de Kripke

Un Modelo de Kripke es una estructura <W, R, V>, siendo *W* un conjunto no vacío de mundos entendidos como los contextos relevantes para la evaluación de las fórmulas del sistema; R la relación binaria de accesibilidad que vincula mundos, y V es una función valuación que asigna a cada letra proposicional un valor de verdad en un mundo perteneciente al conjunto de mundos.

Ciertas fórmulas de LMP son válidas en modelos estándar del tipo mencionado independientemente de las valuaciones que adquieren las proposiciones en mundos. En este caso, se dice que son válidas en un marco F que es una estructura <W, R>.

La *Teoría de la Correspondencia* consiste en el estudio de las propiedades que debe tener F para validar una fórmula de LM.

3.- *Tableaux analíticos*

Un *tableau* es tanto un procedimiento refutatorio como "la búsqueda de modelos que cumplan con ciertas condiciones".[2] En el primer caso, se parte de la negación de la fórmula a probar y se analizan los casos posibles de la misma (etapa expansiva del *tableau*) dando lugar a un diseño arbóreo. Finalmente, y mediante la aplicación de ciertas reglas se procede a cerrar las ramas que contengan los dos literales de una misma fórmula. Un árbol cerrado de la negación de la fórmula X, es decir del supuesto de que X no es válida, es una demostración de X. En el segundo caso, o sea los *tableaux* como búsqueda de modelos, cada rama abierta puede ser considerada como una descripción parcial de un modelo de X. Ambas funciones de los *tableaux*, como procedimiento de prueba y como procedimiento de búsqueda de modelos se vinculan: si empleamos los *tableaux* para buscar modelos en los que X es falsa, y producimos un *tableau* cerrado, dicho modelo no existe, por consiguiente X es válida.

[2] Fitting, M., (1999) cap.1.

Emplearemos los *tableaux* simultáneamente como método de prueba y como búsqueda de modelos pero con una variante diferente a la mencionada por Fitting. Según dicho autor, en el procedimiento refutatorio se parte del supuesto de que X es inválida, mientras que en la búsqueda de modelos se explora la fórmula X mediante su descomposición sintáctica. Nosotras vamos a explorar la afirmación de la invalidez de una fórmula para buscar modelos (o en nuestro caso marcos) que la satisfagan. Al partir de la negación de la fórmula en cuestión, cada rama abierta describe un contramodelo de la primera. Si tomamos conjuntamente la negación de cada contramodelo, obtenemos condiciones que validan la fórmula de partida.

En nuestro caso de aplicación, X será una fórmula de la que represente la traducción de una fórmula de LMP. Por aplicación de las reglas constructivas de los *tableaux* obtendremos las condiciones que debe cumplir la relación de accesibilidad R para validar la fórmula en cuestión.

Las reglas constructivas permiten descomponer la fórmula atendiendo a lo que se sigue de la misma en términos de valuaciones booleanas:

¬¬A A	A ∧ B A B	¬ (A ∧ B) ¬A | ¬B	A ∨ B A | B	¬ (A ∨ B) ¬A ¬B
A → B ¬A | B	¬ (A → B) A ¬B	A ↔ B A | ¬A B ¬B	¬ (A ↔ B) A | ¬A ¬B B	
∀xA A^x_a	¬∀xA (+ restricción) $\neg A^x_a$	∃xA (+ restricción) A^x_a	¬∃xA $\neg A^x_a$	

En el caso de las reglas correspondientes a ¬∀xA y ∃xA se impone la restricción de que el parámetro que la regla introduce sea un parámetro nuevo o que en caso de que se repita un parámetro precedente, el mismo no haya sido introducido por otra aplicación de las mismas reglas, que no aparezca ni en $\neg\forall xA$ ni en $\exists xA$ y que ninguno de los parámetros que aparezcan en las mencionadas fórmulas haya sido introducido por alguna de estas dos reglas.[3][3]

4.- Aplicación de la técnica de los Tableaux analíticos a fórmulas de LMP:

El método consta de 3 etapas:

(1) Traducción de las fórmulas de LPM a LPOI.

(2) Descomposición de la negación de dichas fórmulas según las reglas constructivas de los *tableaux analíticos* (o árboles semánticos).

(3) Interpretación del resultado en términos de condiciones suficientes sobre R tal que se valide la fórmula en cuestión en una clase de marcos.

4.1.- Traducción de las fórmulas de la LMP a LPOI.

Traduciremos fórmulas que contengan los operadores modales y/o ◊ de la siguiente manera:

(1) A se traduce como: (1') $\forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$ y

(2) ◊A se traduce como: (2') $\exists x(Ra_1x \wedge Ax)$.

La letra *A* es una variable metalógica que representa fórmulas proposicionales de cualquier grado de complejidad y las variables o constantes de individuo representan mundos posibles que contienen ciertas proposiciones. De modo que Aa_1[4] significa que la fórmula A es verdadera en el mundo a_1 o, dicho de otro modo, que $A \in a_1$. R representa a la relación de accesibilidad.

En general, la traducción de (1) y (2) debería comenzar con una variable y no con un parámetro, pero evitaremos colocar la primer variable que aparece en la fórmula,

[3] Smullyan, R.M., (1968), pág.54.

[4] En el curso de la discusión las letras de predicado seguidas de *n* constantes y/o de individuo se entenderán como los nombres empleados para referirse a las fórmulas del lenguaje objeto.

reemplazándola por el primer parámetro que se introduzca, a_1, a los efectos de simplificar la construcción de los *tableaux analíticos*.

(1‘) significa: para todo mundo x, si x es accesible a partir de a_1, entonces la fórmula A es verdadera en el mundo x. Esta formulación responde a las condiciones de verdad de las fórmulas A en las semánticas de Kripke, a saber: V(A,w) = 1 sii V(A,w’) = 1 en todo w’ tal que Rww’.

(2’) significa: existe por lo menos un mundo x tal que x es accessible a partir del mundo a_1, y la fórmula *A* es verdadera en el mundo *x*. Esta formulación responde a las condiciones de verdad de las fórmulas ◊A en las semánticas de Kripke, a saber: V(◊A,w) = 1 sii V(A,w’) = 1 en al menos un w’ tal que Rww’.

Aplicando estos códigos podemos traducir fórmulas más complejas como es el caso de las expresiones con operadores anidados o con operadores apilados; por ejemplo:

(3) $\Diamond \; A \rightarrow \; A$; se traduce como: (3’) $\exists x(Ra_1x \wedge \forall y(Rxy \rightarrow Ay)) \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$.

4.2. -Determinación de las condiciones sobre R mediante la técnica de los Tableaux

Aplicaremos el método a las traducciones de fórmulas de la LMP realizadas según el código estipulado precedentemente. Esperamos obtener una lectura de las ramas abiertas del *tableau* respectivo en términos de las condiciones que debe soportar la R en F tal que que se valide la fórmula en cuestión.

Solamente cerrarán todas las ramas del *tableau* cuando se trate de fórmulas del sistema K, el más débil de los Sistemas Modales Normales, ya que es el único sistema que no impone ninguna restricción sobre R.

Resultará más sencillo explicar el método partiendo del análisis de un caso de aplicación, por ejemplo:

(4) $A \rightarrow \; \Diamond A$ (axioma característico de B), cuya traducción es:

(4’) $Aa_1 \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ay))$

El *tableau analítico* que se genera parte de la negación de la fórmula en cuestión:

(4’1) $\neg(Aa_1 \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ay)))$

a la que se debe aplicar la regla del condicional negado (o falsedad del condicional), originando dos líneas en el tronco del árbol (4’2) y (4’3) :

(4’2) Aa_1 (4’1, $\neg\rightarrow$)

(4’3) $\neg\forall x(Ra_1x \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ay))$ (4’1, $\neg\rightarrow$)

Ahora se puede procesar la fórmula (4’3) según la regla $\neg\forall$, introduciendo el parámetro a_2:

(4’4) $\neg (Ra_1a_2 \rightarrow \exists y(Ra_2y \wedge Ay))$ (4’3,$\neg\forall$)

Ahora, aplicando $\neg\rightarrow$, obtenemos las líneas (4’5) y (4’6):

(4’5) Ra_1a_2 (4’4, $\neg\rightarrow$)

(4’6) $\neg\exists y(Ra_2y \wedge Ay)$ (4’4, $\neg\rightarrow$)

En este punto podemos elegir el parámetro que reemplazará a la variable *y*. Dado que nuestro objetivo consiste en determinar condiciones para marcos y clases de marcos, debemos tratar de cancelar la mayor cantidad de ramas que contengan valuaciones en mundos como nos sea posible. En este caso, como debemos aplicar la regla $\neg\exists$ nos convendrá instanciar la variable *y* que aparece en (4’6) con el parámetro a_1, dado que el mismo aparece en (4’2), y nos permitirá cancelar ulteriormente una rama que expresará valuaciones en mundos. Obtenemos:

(4’7) $\neg(Ra_2a_1 \wedge Aa_1)$ (4’6, $\neg\exists$)

Ahora, aplicando $\neg\wedge$ a (4’7) obtenemos dos ramas:

(4’8) $\neg Ra_2a_1$ (4’7, $\neg\wedge$) | (4’9) $\neg Aa_1$

(4’7, $\neg\wedge$)

Finalmente (4’9) se cancela por contradecir al literal (4’2).

Intuitivamente, de la lectura del árbol, secuenciando los nodos desde la raíz hacia las ramas, obtenemos que el condicional material $Ra_1a_2 \rightarrow \neg Ra_2a_1$ satisface a la fórmula (4'1) y constituye un contramodelo de (4'). De modo que si agregáramos la negación de esa posibilidad lo que obtenemos es: $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$. Si en F, R cumple con la condición expresada por la fórmula precedente, entonces se valida la fórmula B.

En verdad, cabe preguntarse a esta altura, por qué cuantificamos universal y no existencialmente el condicional precedente, por qué instanciamos la variable *y* con a_1 y no con otro parámetro, y cómo evitar que la relación se cumpla para modelos y no para marcos. El resto del trabajo consiste en la estandarización de una serie de reglas estratégicas y de procedimiento que proponemos agregar a las reglas constructivas de los *tableaux* a fin de mecanizar el procedimiento de obtención de las condiciones sobre R.

5.- Sacudiendo los árboles:

Las reglas que agregaremos son las siguientes:

Regla 1: siempre que sea posible elegir un parámetro para instanciar una variable, proceder de la siguiente manera:

(a) Si algún parámetro figura en alguna fórmula del árbol que exprese una valuación en un mundo, y la fórmula a instanciar expresa ella misma o alguna de sus subfórmulas, la negación de dicha valuación, o llevará a su negación mediante sucesivas aplicaciones de otras reglas, instanciar la variable con ese parámetro. Este es el caso del *tableau* que acabamos de analizar para la fórmula B. Al generar la fórmula (4'7) colocamos el parámetro a_1, pues la subfórmula Aa_1 que se inscribe generará una contradicción entre (4'2): Aa_1 y (4'9): $\neg Aa_1$. Si bien este es un procedimiento general en la construcción de los *tableau*, queremos advertir que los parámetros que introducimos son elegidos prioritariamente para cancelar las fórmulas que expresen valuaciones en mundos y no relaciones de accesibilidad entre mundos. O sea, si en un *tableau* cualquiera tuviéramos la siguiente secuencia:

Ra_1a_2

$\neg Aa_1$

$\forall x(\neg Ra_1x \vee Ax)$

procederíamos a instanciar x con a_1 y no con a_2, pues así podríamos cancelar la rama Aa_1.

$\neg Ra_1a_1 \vee Aa_1$

$\neg Ra_1a_1 \mid Aa_1$

X

En caso de que no se procediera de esta manera habría que remitirse a lo indicado por la Regla 3.

(b) Si no se da el caso (a), debemos instanciar con un parámetro diferente. El fundamento teórico de este caso es que permite obtener condiciones para R que sean más generales, en vez de casos particulares de las mismas. Por ejemplo:

(5) A → A, se traduce como: (5') $\forall x(Ra_1x \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)) \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$

cuyo *tableau* comienza de la siguiente forma:

(5'1) $\neg(\forall x(Ra_1x \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)) \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow Ax))$

(5'2) $\forall x(Ra_1x \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay))$ (5'1$\neg\rightarrow$)

(5'3) $\neg\forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$ (5'1$\neg\rightarrow$)

(5'4) $\neg(Ra_1a_2 \rightarrow Aa_2)$ (5'3, $\neg\forall$)

(5'5) Ra_1a_2 (5'4, $\neg\rightarrow$)

(5'6) $\neg Aa_2$ (5'4, $\neg\rightarrow$)

Ahora debemos procesar (5'2), cuyo signo principal es $\forall$, lo cual nos permitiría elegir el parámetro que reemplace a la variable *x*. Si eligiéramos alguno de los parámetros que ya figuran el en árbol, por ejemplo a_2, obtendríamos como condición de R, reflexividad secundaria:

(5'7) $Ra_1a_2 \rightarrow \forall y(Ra_2y \rightarrow Ay)$ (5'2,$\forall$)

(5'8) $\neg Ra_1a_2$ (5'7, $\rightarrow$) | (5'9) $\forall y(Ra_2y \rightarrow Ay)$ (5'7, $\rightarrow$)

X (5'10) $Ra_2a_2 \rightarrow Aa_2$ (5'9, $\forall$)

(5'11) $\neg Ra_2a_2$ (5'10,$\rightarrow$)|(5'12)Aa_2 (5'10, $\rightarrow$)

X

Si $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryy)$, entonces $V_F($ $A \rightarrow$ $A) = 1$

Sólo si respetamos la Regla 1b, obtendremos una formulación más general de la condición que debe cumplir R, a saber, densidad débil ($\forall x\forall y\exists z(Rxy\rightarrow(Rxz \wedge Rzy))$). Y reflexividad secundaria es un caso particular de densidad débil:

(5'7') $Ra_1a_3 \rightarrow \forall y(Ra_3y \rightarrow Ay)$ (5'2,$\forall$)

(5'8') $\neg Ra_1a_3$ (5'7', $\rightarrow$) | (5'9') $\forall y(Ra_3y \rightarrow Ay)$ (5'7', $\rightarrow$)

(5'10') $Ra_3a_2 \rightarrow Aa_2$ (5'9', $\forall$)

(5'11')$\neg Ra_3a_2$ (5'10',$\rightarrow$)|(5'12')Aa_2(5'10', $\rightarrow$)

X

Sintetizando, de acuerdo a la Regla 1 (elección de los parámetros) la elección de los parámetros que sustituyan variables debe orientarse a cancelar ramas que expresen valuaciones en mundos y a evitar obtener casos particulares de propiedades generales de R.

Regla 2: Una vez que se procesa la fórmula de partida hay que estructurar la fórmula resultante que impondrá condiciones a R. Esta última tendrá como subfórmulas todos los nodos en los que aparece R bajo la forma de un literal (o R-fórmula) y que pertenecen a una o más ramas abiertas. Como cada rama abierta es un caso particular en el que la fórmula testeada no queda satisfecha, la fórmula resultante tendrá la estructura de la conjunción de todas las R-fórmulas que aparezcan en todas las ramas abiertas. Pero, debe tenerse en cuenta que el objetivo consiste en validar la fórmula de partida sin la negación, lo cual equivale a cerrar todas las ramas del *tableau* en cuestión , o, dicho de otro modo a la negación de la conjunción obtenida. A los efectos de que esta fórmula sea más legible, la sustituiremos por su equivalente lógico expresado en términos de un condicional cuyo antecedente es la conjunción de todas las R-fórmulas que pertenezcan al tronco y cuyo consecuente sea la conjunción de las negaciones de todas las R-fórmulas terminales de las ramas abiertas. En caso de que no haya ninguna R-fórmula en el tronco, sólo quedará la conjunción. Y en caso de que haya subramas, se anidarán condicionales para expresar la subordinación de las mismas. Obviamente, en ciertas ocasiones es conveniente sustituir esta fórmula por otra lógicamente equivalente que sea más legible. Una vez estructurada la fórmula en cuestión, hay que sustituir los parámetros por variables y cuantificarla. La regla general para cuantificar la fórmula se basa en que si durante la construcción del *tableau* y en virtud de la Regla 1 se instanció una variable con un parámetro específico no arbitrariamente elegido, esto equivale a la instanciación de una variable cuantificada existencialmente. Por ejemplo, si en la fórmula $\neg Ra_1a_2$ el parámetro a_2 no es arbitrario, consideraremos que equivale a obtenerlo instanciando $\exists x \neg Ra_1x$. Como lo que necesitamos configurar es la negación de esta fórmula , es decir $\neg\exists x \neg Ra_1x$, se aprecia que a_2 debe cuantificarse universalmente, es decir se obtiene $\forall x Ra_1x$. En caso de que el parámetro elegido sea arbitrario, deberá cuantificarse existencialmente. De modo que la cuantificación de la fórmula resultante dependerá de las aplicaciones de la Regla 1 al momento de instanciar las variables.

Así, la Regla 2 que rige la cuantificación de las fórmulas en las que aparece R puede resumirse como sigue: las variables de individuo correspondientes a parámetros impuestos (por Regla 1) se cuantifican universalmente y las correspondientes a parámetros elegidos arbitrariamente (por Regla 1) se cuantifican existencialmente.

Ahora podemos justificar por qué cuantificamos universalmente los dos parámetros que aparecen en la condición que debe cumplir R para validar (4) $A \rightarrow \Diamond A$ (axioma característico de B). Dado que a_1 fue impuesto constructivamente en (4'1) y a_2 fue impuesto por la regla $\neg\forall$ en (4'4), las variables que los sustituyen en la fórmula resultante: $Ra_1a_2 \rightarrow Ra_2a_1$ deben ser cuantificadas universalmente. Mientras que el parámetro a_3 que sustituye a la variable x en la fórmula correspondiente al *tableau* de (5'), fue elegida arbitrariamente (por Regla 1) en (5'7'), y por ello debe instanciarse existencialmente.

Regla 3: esta regla se refiere a la expresión de la identidad (o de su negación) entre mundos en la fórmula que expresa la propiedad que debe cumplir R. Hay diversas maneras de "sacudir el árbol" para expresar esto. Cuando en una rama terminal abierta de un *tableau* queda consignada una fórmula que expresa una valuación en un mundo en particular, debe eliminarse ese literal para que la fórmula resultante exprese la condición que debe cumplir R en un marco y no en un modelo. Si en una rama abierta figuran 2 fórmulas que expresan valuaciones opuestas en mundos diferentes, es evidente que si expresaran valuaciones para el mismo mundo, se cancelarían. Precisamente la Regla 3 es la que permite esta maniobra.

Regla 3: Si en el extremo de una rama abierta figura una fórmula que expresa una valuación en un mundo y siguiendo en forma ascendente en la misma rama se encuentra otra fórmula que expresa la valuación contraria a la anterior pero en un mundo diferente, se incluye la identidad entre esos dos mundos en la cláusula que expresa la condición sobre R. En caso de que esto no sea posible, recurrir a la Regla 4.

Ejemplo:

(6) $A \rightarrow \quad A$ (= T_c) (6') $Aa_1 \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$

(6'1) $\neg (Aa_1 \rightarrow \forall x(Ra_1x \rightarrow Ax))$

(6'2) Aa_1 (6'1, $\neg\rightarrow$)

(6'3) $\neg\forall x(Ra_1x \rightarrow Ax)$ (6'1, $\neg\rightarrow$)

(6'4) $\neg(Ra_1a_2 \rightarrow Aa_2)$ (6'3, $\neg\forall$)

(6'5) Ra_1a_2 (6'4, $\neg\rightarrow$)

(6'6) $\neg Aa_2$ (6'4, $\neg\rightarrow$)

El tableau cerraría si (6'2) y (6'6) tuvieran el mismo parámetro, de modo que al cuantificarla se expresa la identidad entre las variables que sustituyen a dichos parámetros.

Si R satisface vacuidad, $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow (x = y))$, entonces $V_F(A \rightarrow \quad A) = 1$

Regla 4 (poda de los árboles): si en una terminal de una rama se expresan valuaciones en mundos y no puede aplicarse la Regla 3, se debe podar dicha rama hasta llegar a algún nodo en el que haya solamente una R-fórmula y formular la condición impuesta a R a partir de la misma.

Por ejemplo: (7) $A \rightarrow \Diamond A$ (D)

Traducción: (7')$\forall x\ (Ra_1x \rightarrow Ax) \rightarrow \exists x(Ra_1x \wedge Ax)$

(7'1) $\neg (\forall x\ (Ra_1x \rightarrow Ax) \rightarrow \exists x(Ra_1x \wedge Ax))$

(7'2) $\forall x\ (Ra_1x \rightarrow Ax)$ (7'1, $\neg\rightarrow$)

(7'3) $\neg\exists x(Ra_1x \wedge Ax)$ (7'1, $\neg\rightarrow$)

(7'4) $\neg(Ra_1a_2 \wedge Aa_2)$ (7'3, $\neg\exists$)

(7’5) $Ra_1a_2 \rightarrow Aa_2$ (7’2, $\forall$)

(7’6) $\neg Ra_1a_2$ (7’4, $\neg \wedge$)	(7’7) $\neg Aa_2$ (7’4, $\neg \wedge$)
(7’8)$\neg Ra_1a_2$ (7’5, $\rightarrow$)|(7’9) Aa_2 (7’5, $\rightarrow$)	(7’10) $\neg Ra_1a_2$ (7’5, $\rightarrow$)|(7’11) Aa_2 (7’5, $\rightarrow$)

✂ X

La Regla 4 nos permite eliminar (7’8) y (7’9), obteniendo como resultado que si un marco F es serial, $\forall x \exists y Rxy$, entonces $V_F($ $A \rightarrow \Diamond A) = 1$

6.- Casos de aplicación y problemas:

Al aplicar el método de los *tableaux* adaptados según las reglas precedentes hemos obtenido los mismos resultados que figuran en la literatura sobre el tema respecto de las fórmulas K, D, T, 4, B, 5 y G, y de las conversas de las primeras 6 fórmulas. La ventaja de este método respecto de otros procedimientos mecanizables consiste en que no está limitado por la estructura de la fórmula como es el caso de los procedimientos de Lemmon y Scott[5] por un lado y el de Sahlqvist por el otro.[6]

Hemos hallado que el método de los tableaux adolece de la dificultad de ser demasiado abarcativo, dado que arroja condiciones sobre R formulables en LPOI para fórmulas que no son definibles en Primer Orden. En este momento estamos analizando estos casos en particular a fin de detectar un procedimiento para aislar estas fórmulas y poder apreciar, a partir del *tableau*, el tipo de problema que presentan. Ejemplos de estos casos son G_C (Axioma Mc Kinsey), el axioma de Löb, y la fórmula (8) $(\Diamond p \wedge \ (p \rightarrow \ p)) \rightarrow p$ Van Benthem[7][7] señala que la fórmula (8) en conjunción con el axioma Mc Kinsey y la fórmula T, impone sobre R la condición de atomicidad $\forall x \forall y(Rxy \leftrightarrow (x = y))$.

Y si se toma (8) junto con T, lo que se obtiene, según van Benthem es *regreso seguro*: $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \exists n \exists z_1,...,z_n(Rxz_1 \wedge ... \wedge Rxz_n \wedge Tyz_1 \wedge ... \wedge Rz_nx))$ que significa que

5 Véase, Chellas, B., (1980), págs 85-86.
6 Hughes, G., y Cresswell, M. (1984), pág.46
7 van Benthem, J., (1984), pág.347ss.

de todo sucesor y de x se puede regresar a x mediante alguna cadena finita de R-sucesores de x.

A los efectos de señalar la línea que estamos indagando actualmente consignamos que si aplicamos nuestro método a (8), lo que obtenemos es un caso de regreso seguro: cuando x carece de sucesores, regreso seguro es simetría.

(8) $(\Diamond A \wedge \ \ (A \rightarrow \ \ A)) \rightarrow A$

(8') $(\exists x(Ra_1x \wedge Ax) \wedge \forall x(Ra_1x \rightarrow (Ax \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)))) \rightarrow Aa_1$

(8'1) $\neg((\exists x(Ra_1x \wedge Ax) \wedge \forall x(Ra_1x \rightarrow (Ax \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)))) \rightarrow Aa_1)$

(8'2) $\exists x(Ra_1x \wedge Ax) \wedge \forall x(Ra_1x \rightarrow (Ax \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)))$ (8'1, $\neg\rightarrow$)

(8'3)

$\neg Aa_1$ (8'1, $\neg\rightarrow$)

(8'4) $\exists x(Ra_1x \wedge Ax)$

(8'2, $\wedge$)

(8'5) $\forall x(Ra_1x \rightarrow (Ax \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Ay)))$ (8'2, $\wedge$)

(8'6) $Ra_1a_2 \wedge$

Aa_2 (8'4, $\exists$)

(8'7)

Ra_1a_2 (8'6, $\wedge$)

(8'8)

Aa_2 (8'6, $\wedge$)

(8'9) $Ra_1a_2 \rightarrow (Aa_2 \rightarrow \forall y(Ra_2y \rightarrow Ay))$ (8'5,

$\forall$)

(8'10) $\neg Ra_1a_2$ (8'9, $\rightarrow$) | (8'11) $Aa_2 \rightarrow \forall y(Ra_2y \rightarrow Ay))$ (8'9, $\rightarrow$)

X (8'12) $\neg$ Aa_2 (8'11, $\rightarrow$) | (8'13) $\forall y(Ra_2y \rightarrow Ay))$ (8'11, $\rightarrow$)

X (8'14) $Ra_2a_1 \rightarrow Aa_1$

(8'13, $\forall$)

(8'15) $\neg Ra_2a_1$ (8'14, $\rightarrow$) | (8'16) Aa_1

(8'14, $\rightarrow$)

X

Si R es simétrica, $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$, entonces $V_F((\Diamond A \wedge \quad (A \rightarrow \quad A)) \rightarrow A) = 1$

7.- Conclusiones:

A manera de conclusión consignamos que:

1) Hemos logrado adaptar el método de los *tableau analítico*s para determinar cuál es la condición que debe cumplir R para validar una fórmula cualquiera de la Lógica Modal Proposicional en un marco F. Lo novedoso de esta aplicación es que la determinación no queda restringida a fórmulas que tengan una estructura en particular como es el caso de los métodos que se registran en la literatura.

2) Para adaptar el método a esta aplicación diseñamos 4 reglas que, junto con las reglas constructivas usuales de los *tableau*, permiten obtener la condición sobre R, cuantificada en forma apropiada y eliminando (siempre que la fórmula realmente lo permita) las valuaciones en mundos, es decir, aplicable a marcos. Con ello se ganan todas las ventajas analíticas que tiene la incorporación de los *tableaux*. Por ejemplo, una extensión de nuestro método consistiría en guiar en forma mecánica la construcción de contramodelos de las fórmulas de la Lógica Modal Proposicional.

3) Por último, señalamos que la limitación que encontramos en esta fase de desarrollo del método consiste en que no discrimina apropiadamente entre fórmulas definibles y no definibles en LPOI.

Bibliografía

Benthem, J. van, (1984a), “Possible Worlds Semantics: A Research Program that Cannot Fail?”, *Studia Logica*, XLIII, 4, pp.379-392.

Benthem, J. van, (1984) “Correspondence Theory”, en Gabbay y Guehthner (eds.), (1984) pp.167-247

Chellas, B., (1980), 1995, *Modal Logic*, Cambridge, Cambridge University Press.

D’Agostino, Gabbay, D.M., Hähnle, R., y Posegga, J. (eds.), (1999), *Handbook of Tableau Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Fitting, M. (1999) en *Handbook of Tableau Methods*.

Gabbay, D. y Guenthner, F. (eds), (1984) *Handbook of Philosophical Logic* (vol II): *Extensions of Classical Logic,* Dordrecht, D. Reidel.

Hughes, G., y Cresswell, M. (1973) *Introducción a la lógica modal*, Madrid, Tecnos.

Hughes, G., y Cresswell, M. (1984) *A companion to modal logic,* London, Methuen.

Orayen, R., (1995) “Lógica modal” en: Alchourrón, C. (ed.) *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía,* Tomo 7, pp. 289-322, Madrid, Trotta.

Palau, G., (2002) *Introducción a las lógicas no clásicas,* Barcelona, Gedisa.

Smullyan, R.M., (1968), *First-Order Logic*, Berlin, Springer-Verlag.