Universidad Nacional de La PLata
Facultad de Ciencias Exactas
Dpto. de Matemáticas

Trabajo de Inicicación a la Investigación:

TEORÍA DE INFINITESIMALES: HISTORIA Y DESARROLLO

María Fernanda Bertero

Director: Dr. Héctor Vucetich
Codirector: Néstor Búcari

Julio de 2006

Agradecimientos

Compartidos[1]:

A Héctor, por aceptar dirigirnos.
A Néstor, por su "*paciencia*", su dedicación y su apoyo.
A Augusto, por estar.

A Diego Tombel, por sus *innumerables* idas y vueltas...
A la Dra. Sandra Molina, por su *ENORME* aporte y generosidad.
A los tíos Héctor y Ester, por *ese viaje memorable...*
A José Luis Castiglioni, por esa página xxx.

A Corita y el Colo, por su *lucha* por el cambio.

A Estela, la bibliotecóloga, por buscar hasta debajo de las baldosas algo que pudiera servirnos y...siempre con buena onda.

A Vero, Naty, Lore, Javier, Laura, Esteban, Alejandra y a todos aquellos que de una u otra manera nos apoyaron.

En lo personal:

A Titi por ser mi complemento matemático y mi hermana elegida.
A mi familia...que me viene bancando hace mucho.
A todos los que de una u otra forma me ayudaron, apoyaron, etc.
A mi pequeña familita: Pablo que lleva años portándose bien y Lolita que desde hace tres meses hace lo propio, portándose muy bien también.
En especial a mami, a quien quiero además dedicárselo, porque comparte conmigo el gusto por las matemáticas...

[1] Con María de las Mercedes Trípoli, por ser parte de este trabajo.

Índice general

Introducción

En la historia de las matemáticas existen momentos en que los matemáticos han manejado con seguridad conceptos cuya naturaleza y propiedades básicas eran incapaces de precisar. Por ejemplo, los "números imaginarios" eran concebidos como unos conceptos ficticios en los que, sin saber cómo ni por qué, se podía "confiar", en el sentido de que al incluirlos en los cálculos llevaban a conclusiones correctas. La razón por lo cual esto sucedía es porque es posible construir los números complejos. En algunos argumentos los físicos han derivado funciones no derivables durante mucho tiempo; la razón por la que estos cálculos con funciones misteriosas que no eran funciones no llevaban a paradojas y contradicciones es porque es posible construir unos objetos (las distribuciones) con las propiedades que los físicos postulaban implícitamente en el uso que hacían de sus "funciones". Los números irracionales también fueron polémicos hasta que Dedekind y Cantor dieron las primeras construcciones explícitas.

Durante tres siglos, el cálculo diferencial avanzó usando ciertos "números ideales" que no era posible definir porque tenían que ser no nulos y a la vez menores que cualquier cantidad positiva.

Los matemáticos del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX no pudieron construir unos objetos que se comportaran como lo hacían los infinitésimos. En cambio introdujeron la noción de límite mostrando que los restantes conceptos del análisis podían expresarse en términos de él. Con esta nueva noción se supuso definitivo el destierro de las cantidades "infinitamente pequeñas" del ámbito de la matemática.

Sin embargo, a finales de los 60, el lógico-matemático Abraham Robinson estableció una teoría en la cual el sistema númerico real pudo ampliarse a un cuerpo ordenado -necesariamente no arquimediano- en el cual tuvieron cabida los números infinitesimales y consecuentemente sus recíprocos: los números infinitamente grandes. El logro de Robinson no fue la construcción de un objeto curioso, sino el desarrollo de una sistemática que permitió un nuevo punto de vista (llamado no-estándar) para numerosas estructuras y teorías centrales de la matemática. El intercambio entre ambos universos -el estándar y el no estándar- regulado por el llamado "principio de transferencia" permitió aplicar fructíferamente los métodos de Robinson a una variedad de campos, reobteniendo resultados conocidos con demostraciones sencillas y más aún resolviendo problemas cuya solución se había resistido a los métodos estándar.

En este trabajo se pretenden abordar diferentes aspectos de la teoría de infinitesimales, los cuales serán desarrollados en los capítulos siguientes.

En el primer capítulo se realiza un trabajo de carácter monográfico que recorre la historia del cálculo desde sus orígenes hasta la formalización de la noción de límite, con énfasis en la presencia del concepto de "cantidad infinitamente pequeña". Se trata de documentar la influencia de esta concepción en el desarrollo de las ideas y en el progreso del tema, así como las dificultades y las críticas que las confrontaron.

En el segundo capítulo se presentan los aspectos principales de la teoría fundada por Abraham Robinson, actualizados según la evolución del tema desde sus trabajos originales de la década de 1960 hasta las versiones más recientes.

Capítulo 1

Los números infinitesimales: su importancia en el desarrollo del cálculo

1.1. Introducción

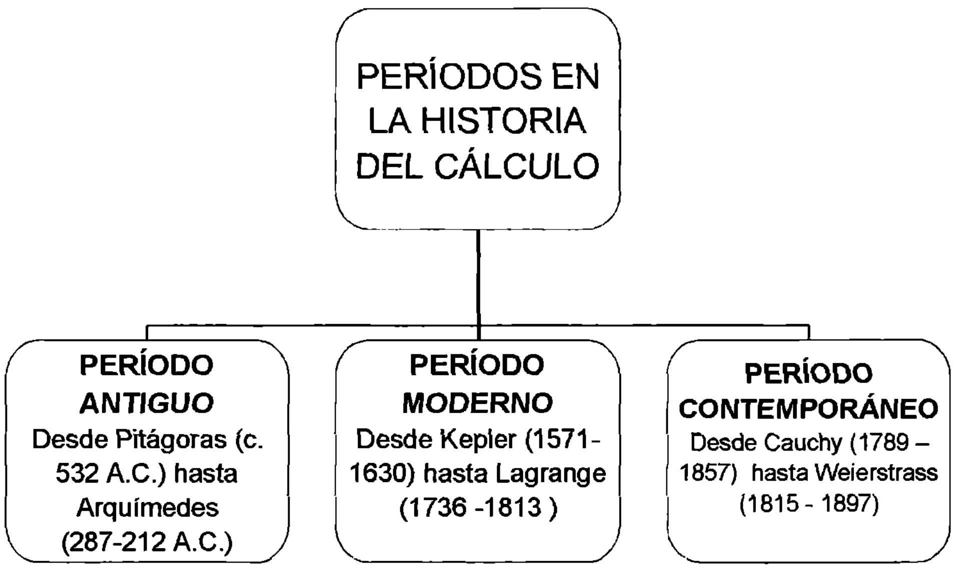
El cálculo infinitesimal (o el cálculo integral y diferencial) ha constituído, desde sus orígenes a la actualidad, la base sobre la que descansa una importante porción del conocimiento matemático. Además, las ideas del cálculo y sus métodos han resultado aptos para el tratamiento de situaciones provenientes tanto de las ciencias exactas como de las ciencias naturales. Estas ideas no surgieron, como podría pensarse, de la ocurrencia genial de una persona o de un grupo en un momento determinado de la historia del pensamiento humano, sino que pueden encontrarse rastros de las mismas durante muchos siglos. Desde los tempranos tiempos de Pitágoras hasta los trabajos de Newton y sus contemporáneos el desarrollo del cálculo ha estado vinculado a la solución de problemas tanto prácticos (cálculo de áreas y volúmenes) como conceptuales (el problema de la velocidad de un móvil en un instante). Podemos sintetizar el contenido del cálculo diciendo que mediante sus métodos se da una solución al problema del área (cálculo integral) y al de la tangente o velocidad instantánea (cálculo diferencial).

¿Nos referimos al mismo cálculo cuando decimos “infinitesimal” o “integral y diferencial”?

Si tomamos en cuenta las ideas de sus fundadores, el cálculo, más que infinitesimal, sería cálculo “con” infinitesimales. Sin embargo, actualmente, tendríamos que llamarlo cálculo integral y diferencial, pues con la instauración del límite como concepto fundamental, se eliminaron los números infinitamente grandes y pequeños que estuvieron presentes en sus orígenes. En este trabajo, nos referiremos a él simplemente como "*el cálculo*".

En este capítulo intentaremos mostrar la influencia de la idea de "número infinitesimal" en el largo proceso de evolución de esta rama de la matemática.

Para el tratamiento pretendido, dividiremos la historia del cálculo en tres períodos[1]:



1.2. Período antiguo

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido
tan profundamente al espíritu del hombre.
David Hilbert - 1921.

En el período de la escuela pitagórica, la matemática griega era esencialmente una matemática discreta, en el sentido de que sólo trataban magnitudes conmensurables; lo que significa que siempre era posible representarlas por medio de números (naturales) o por medio de relaciones entre ellos. Podemos ubicar como una de las primeras apariciones del problema del in-

[1] Las fechas de nacimiento y fallecimiento de los personajes que se mencionan en el presente trabajo fueron tomadas de Historia de la Matemática de J. Rey Pastor y J. Babini [12]

finito al descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables. Por otra parte, al intentar medir longitudes, áreas o volúmenes, se necesita un proceso de aproximación a éstas que es también potencialmente infinito, pues a pesar de que con este proceso obtengamos aproximaciones cada vez más pequeñas, nunca podremos obtener exactamente en un número finito de pasos el valor real de la longitud, área o volúmen, según sea el caso.

Los argumentos de Zenón de Elea (c. 460 A.C) en contra de la pluralidad y el movimiento son considerados críticas dirigidas a las concepciones pitagóricas, al suponer los cuerpos como suma de puntos, el tiempo como suma de instantes y el movimiento como suma de pasajes de un lugar a otro. Estas críticas pusieron en evidencia el peligro que entrañaba el manejo de un concepto vago como el infinito, pués presuponían la divisibilidad infinita de las cantidades. Es posible que la actitud de los matemáticos griegos posteriores de eliminar o reprimir el infinito mediante hábiles recursos técnicos[12] haya sido una consecuencia de esas críticas.

Aristóteles (384-322 A.C) prohibió el infinito en acto: *"no es posible que el infinito exista como ser en acto o como una substancia y un principio"*; pero añadió: *"es claro que la negación absoluta del infinito es una hipótesis que conduce a consecuencias imposibles"* de manera que el infinito *"existe potencialmente* [...] *es por adición o división"*. Así, la regulación del infinito no permite considerar un segmento como una colección de puntos alineados pero si permite dividir este segmento por la mitad tanta veces como queramos.

Fue Eudoxo de Cnido (390-337 o 408-355 A.C.), quien hizo el primer uso "racional" del infinito en las matemáticas. Postuló que *"toda magnitud finita puede ser agotada mediante la substracción de una cantidad determinada"*. Ideó el primer método lógicamente satisfactorio, llamado método de exhaución, que permite demostrar resultados sobre áreas y volúmenes, sin aceptar la existencia de "cantidades infinitamente pequeñas". Lo característico de este método es que obliga a conocer de antemano el resultado a demostrar. Euclides (c. 300 A.C) lo reprodujo en su famosa obra *Elementos.* Podemos describirlo brevemente de la siguiente forma: dada una región de la cual se quiere mostrar que su área X es igual a una magnitud conocida K, se inscriben y circunscriben en ella regiones poligonales que se aproximen cada vez más a la dada y cuyas áreas sean calculables fácilmente. En este proceso el área X queda encerrada entre las áreas inscriptas y circunscriptas. Tanto el suponer que el área buscada sea mayor que K y como que sea menor, conducen a un absurdo.

Este método fue usado y perfeccionado por Arquímedes. Su fama como matemático está ligada a sus admirables descubrimientos geométricos, rigurosamente demostrados con el mencionado método exhaustivo. Se puede decir que fue el primero en utilizar el cálculo integral al estudiar áreas y volúmenes de figuras sólidas, y áreas de figuras planas utilizando infinitesimales. Su gran pasión fue la ciencia; sus obras abarcan vastos campos, desde la aritmética hasta los más diversos problemas de geometría. Contrariamente a la tendencia griega clásica, Arquímedes era un inventor. Alternaba los trabajos de física y matemática con los de ingeniería dedicándose a la construcción de máquinas. Construyó algunas de ataque y defensa para la guerra. Su original método mecánico, donde se saltaba la prohibición aristotélica de usar el infinito en acto, se perdió y sólo fue recuperado en 1906 cuando el historiador de las matemáticas Heiberg encontró su obra denominada El Método. En ella Arquímedes cuenta cómo, usando procedimientos mécanicos no rigurosos, descubría sus geniales teoremas .

1.3. Período moderno

> Mantengo -decía- el objeto de mi investigación constantemente
> presente y espero que la alborada se abra gradualmente,
> poco a poco, en una luz clara y total.
>
> Isaac Newton

El cálculo integral y el diferencial adquirieron gran importancia en los primeros tiempos del siglo XVII con el desarrolo de la física y la astronomía. Las reglas básicas de la diferenciación y la integración fueron descubiertas en este período por un razonamiento informal con infinitesimales. Entre los que contribuyeron a dicho descubrimiento podemos mencionar a Kepler, Fermat (1601-1665) y Barrow (1630-1677). En la segunda mitad del siglo XVII, este desarrollo fue puesto al frente por Newton (1642-1727) y más tarde, aunque independientemente, por Leibniz (1646-1716)[2]. Estos desarrollos aportaron avances en la incipiente industria, la navegación y la guerra, y por otro lado, las *contradicciones de la teoría hicieron necesaria la búsqueda de una fundamentación correcta.*

La matemática de este período estuvo fuertemente influenciada por la matemática griega clásica, y por la del período precedente: ahora se dispone del álgebra, un mecanismo que permite operar con letras y expresiones matemáticas, así como resolver ecuaciones hasta de cuarto grado. Con estos métodos, dotados de una posibilidad de generalización de la que carecían

[2]Se considera que Newton fue el primero en descubrirlo y Leibniz en publicarlo. Sin embargo existió un debate, protagonizado por Newton, Leibniz y sus respectivos seguidores, referente a la prioridad de tal descubrimiento, que trajo como consecuencia el aislamiento entre ellos y la falta de cooperación científica. Esta controversia terminó en 1813 con la creación de la Analitycal Society de Cambridge.

los métodos geométricos, se encontrará con el aporte de Descartes (1596-1650) la manera eficaz de aplicar los métodos infinitesimales a los problemas geométricos y mecánicos.

Dice José Babini [7]: *"En contra de la concepción antigua en la que el camino era más importante que la meta y la demostración más que el resultado, ahora es el resultado lo que interesa. Si un procedimiento o una regla, aplicado a un problema tratado por los antiguos, llegaba al mismo resultado de éstos, se generalizaba sin demostración extendiéndolo a casos nuevos. El infinito, que los matemáticos griegos habrían reprimido mediante el engorroso método de exhaución, ahora es manejado desembozadamente, y comienza una orgía de "infinitamente pequeños", de "incrementos evanescentes", de "cantidades que se desprecian", de "sucesiones infinitas" sin análisis de su convergencia...y si los matemáticos de la época no cayeron en los principios de la contradicción y del absurdo, fue porque su fino olfato matemático les permitió orillarlos".*

Los infinitésimos demostraban ser útiles a la hora de obtener resultados, tanto es así que a la mayoría no les preocupaba lo débil de su fundamentación. Por ejemplo, Johanes Kepler los usó para calcular las proporciones óptimas de un tonel de vino; las contradicciones del método no le preocuparon pués se fiaba en la divina instpiración; escribió: "la naturaleza enseña geometría por sólo instinto, incluso sin raciocinio". El matemático, físico y filósofo Blaise Pascal (1623-1662) contemplaba lo infinitamente grande e infinitamente pequeño como un misterio, como algo que la naturaleza había puesto ante el hombre no para que lo comprendiera, sino para que lo admirara. [6]

Entre las concepciones semejantes a las de Kepler y vinculadas a las investigaciones de Arquímedes, podemos mencionar los "indivisibles" de Cavalieri (1598-1647) que representan entes de una dimensión menor respecto del continuo del cual forman parte. Su método ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas concepciones de Arquímedes, basadas en el método de exhaución y los "métodos infinitesimales" que surgirán con Newton y Leibniz.

La debilidad de los fundamentos persistió hasta la primera mitad del siglo XIX. Sin embargo, el cálculo infinitesimal tuvo en este período su máximo apogeo. Fueron muchos los matemáticos de esta época que formaron parte de su desarrollo, pero sólo nos detendremos en algunos de ellos.

1.3.1. Newton

Como ya hemos mencionado, Newton fue uno de los "inventores" del cálculo infinitesimal. Nació en Whoolstorpe (Inglaterra), en el año 1661 logró ser enviado a Cambridge aunque con la intención de que pudiese ingresar en la Iglesia. Allí tuvo gran influencia de su maestro Barrow, quien lo insitó a que estudiara sobre óptica convirtiéndose en poco tiempo en un experto en la materia, al punto de ser consultado por Barrow cuando publicó un libro en este tema. En el año 1665 se graduó y se vio obligado, debido a una peste, a retirarse al campo donde nació. Se considera que sus grandes ideas fueron concebidas durante este retiro que duró dos años.

Sus descubrimientos principales fueron sobre la luz, en astronomía y en matemáticas, siendo el método de las fluxiones el más destacado en esta última rama. Trató diferentes temas: desarrollos en serie, el tratamiento algorítmico, la relación inversa entre la diferenciación y la integración, la concepción de las variables como expresión de un movimiento en el tiempo y la teoría de las primeras y últimas razones. Esta última con la principal finalidad de evitar el uso de los infinitamente pequeños, que utilizaba en el método de las fluxiones.

Debido a que no poseía una fundamentación satisfactoria del nuevo tema, Newton algunas veces se refería a él mediante infinitesimales, otras mediante "las primeras y últimas razones" y si no haciendo uso de la intuición física. Sus sucesores inmediatos tomaron esto último. Se esforzó en evitar el uso de los infinitesimales por temor a las críticas; en sus palabras: *"no hay nada que desee evitar más en cuestiones de filosofía que la discusión, y ningún tipo de discusión más que la impresa"* y *"veo que un hombre o bien decide no sentar nada nuevo, o se convierte en esclavo para defenderlo"* [10]. Este temor a las críticas demora la publicación de sus Principia (Los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), siendo Halley quien logra convencerlo haciéndose cargo de publicarlo. Este trabajo, considerado una obra maestra, está redactado en el estilo griego: menciona sólo los resultados, los cuales seguramente había obtenido por el método de las fluxiones.

En su artículo "Cuadratura de Curvas"[14] Newton menciona: *"considero las magnitudes matemáticas constituídas, no por partes arbitrariamente pequeñas, sino engendradas por un movimiento continuo"*. Declara además *"las cantidades engendradas, al crecer en tiempos iguales, resultan mayores o menores según la velocidad mayor o menor con que crecen, he buscado un método para determinar la magnitud de las velocidades de los movimientos o de los incrementos con que se engendran. Llamando fluxiones estas velocidades que incrementan el movimiento, y fluentes las cantidades engendradas, logré paulatinamente, en los años 1665 y 1666, el método de las fluxiones para la cuadratura de curvas".*[3]

[3] Whitehead no cree que la idea de cambio que existía en la mente de Newton, haya existido en los que lo precedieron y prepararon al cálculo para su creación; ya que se ocuparon de problemas más abstractos, relacionado con el trazado de tangentes a las curvas, la determinación de las longitudes a las curvas y de las áreas comprendidas por curvas.[16]

Los términos "fluentes" y "fluxiones" indican para Newton cantidades variables respecto del tiempo, el primero es una cantidad que fluye (las funciones actuales) y el segundo es la velocidad de cambio de la fluente con respecto al tiempo (las derivadas).

A continuación mencionaremos una proposición tomada de "The Mathematical Works of Isaac Newton"[14], en la que se muestra cómo calculaba una derivación implícita donde toma todas las variables dependiendo del tiempo.

> Proposición I. Problema I
>
> "Dada una ecuación que contiene un número cualquiera de cantidades fluentes, encontrar las fluxiones"

Luego de dar la solución y una posterior explicación con un ejemplo, da la demostración basada también en él. La ecuación que utiliza es $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$.

> Demostración
>
> Sea o una cantidad extremadamente pequeña, y sean $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, los momentos de las cantidades z, y, x; es decir, los incrementos momentáneamente simultáneos. Si las cantidades que fluyen son z, y, y x, éstas, después de un momento de tiempo aumentadas por sus incrementos $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, serán $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, las cuales sustituídas en la primera ecuación en lugar de z, y, y x, da la ecuación, $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - xyy - o\dot{x}yy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y - xoo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Si se resta de esta ecuación la dada y el resultado se lo divide por o tendremos $3x^2\dot{x} + 3xo\dot{x}\dot{x} + oo\dot{x}^3 - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y - xo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Si la cantidad o es disminuída infinitamente, y se suprimen los términos evanescentes quedará $3x^2\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. Q.E.D.

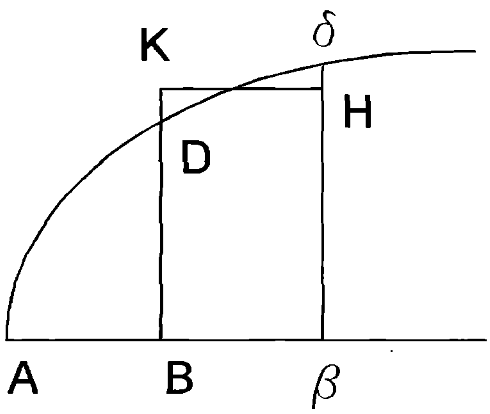
Termina la proposición con lo que llama explicación complementaria, que no es más que otro ejemplo siguiendo los mismos pasos.

¿Newton creía que su o era una cantidad muy pequeña fija o una cantidad variable? Si era fija como parece al citarla al principio de la demostración ¿cómo es que luego es disminuída infinitamente como si fuera variable?, ¿cómo es que divide por esa cantidad y luego desaparece como si fuera nula?

Según Whitehead[16], cuando Newton dice que "o" ha disminuído indefinidamente, tropezamos con la idea de límite; y piensa que, en realidad, no supone la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas.

Otra cuestión importante que puede verse entre los trabajos de Newton es que ya conocía la relación inversa entre la diferenciación y la integración.

La que sigue es una cita de su "Preparación para la demostración de la 1^o regla"[4] en la que puede apreciarse esta relación:



> Dada una curva $AD\delta$, sea la base $AB = x$ perpendicular a la ordenada $BD = y$, y sea el área $ABD = z$. De la misma manera sea $B\beta = o$, $BK = v$ y sea el rectángulo $B\beta\delta D$.
>
> Entonces $A\beta = x + o$ y $A\delta\beta = z + ov$. Admitiendo esto, de la relación entre x y z, supuesta cualquiera, deduzco y de la siguiente manera.
>
> Sea por ejemplo la ecuación $\frac{2}{3}x^{3/2} = z$ o, $\frac{4}{9}x^3 = z^2$. Entonces sustituyendo x por $x + o$ $(A\beta)$ y z por $z + ov$ $(A\delta\beta)$ se obtendrá (por la naturaleza de la curva) $\frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2v^2$. Eliminando los términos iguales ($\frac{4}{9}x^3$ y z^2), y dividiendo los restantes por o, resultará $\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2$. Si ahora suponemos que $B\beta$ es disminuída infinitamente y se desvanece, o o es nula, v e y serán iguales y todos los otros términos multiplicados por o desaparecerán; obteniéndose por tanto $\frac{4}{9}3x^2 = 2zv$,o $\frac{2}{3}x^2(= zy) = \frac{2}{3}x^{3/2}y$, o $x^{1/2}(= \frac{x^2}{x^{3/2}}) = y$. Inversamente, si $x^{1/2} = y$, será $\frac{2}{3}x^{3/2} = z$.

En sus investigaciones Newton vio la necesidad de aclarar qué entendía por velocidad. Su solución a este problema, que le dio un método matemático para investigar la velocidad de cualquier partícula que se mueve en cualquier

[4] Sea AB la base de una curva AD y BD perpendicular, su ordenada. Llamamos $AB = x$, $BD = y$, y sean a, b, c, etc., y m y n números cualesquiera.

Regla I: Si $ax^{m/n} = y$, será $\frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}$ =Área ABD.

forma continua, lo condujo a lo que hoy llamamos cálculo diferencial. Un problema similar que deriva de las razones, puso en sus manos el cálculo integral. ¿Cómo se puede calcular la distancia total recorrida en un determinado tiempo por una partícula en movimiento cuya velocidad varía continuamente de un instante a otro? Respondiendo a éste y otros problemas similares, algunos planteados geométricamente, Newton ha llegado al cálculo integral. Finalmente, examinando conjuntamente los dos tipos de problemas, hizo un descubrimiento importantísimo: vio que el cálculo diferencial e integral están íntima y recíprocamente relacionados.

1.3.2. Leibniz

Nació en Alemania en julio de 1646 y se lo considera el otro creador del cálculo.

La influencia de su padre, quien era catedrático de filosofía y que murió cuando el tenía 6 años, contribuyó a que su hijo tuviera el interés por todas las ciencias. Precozmente se inició en el estudio de éstas y ya a los 20 años estaba familiarizado con los grandes autores de matemáticas, filosofía, teología y derecho.

Los trabajos publicados por Leibniz entre los años 1684 y 1686, referidos al nuevo cálculo, no produjeron el impacto que podríamos imaginar, debido tal vez a una presentación hermética de las materias tratadas. Les cupo a Jakob (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748), ayudados por la correspondencia que mantenían con Leibniz, realizar una divulgación de los resultados accesible al público informado de la época. Los artículos publicados desde entonces por Leibniz, los Bernoullis y L' Hospital (1661-1704), entre otros, mostraron la importancia del nuevo cálculo y el modo de usarlo.

Fue el matemático Leonhard Euler (1707-1783) quien reestructuró este cálculo convirtiéndolo en un cuerpo de conocimientos matemáticos organizados, mediante sus grandes tratados. Entre ellos, podemos mencionar "Introducción al análisis de los infinitos" (1748) y "Textos sobre el cálculo diferencial" (1755).

Leibniz y sus sucesores basaron el desarrollo de su teoría en cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. A pesar de las inconsistencias, la actitud de Leibniz hacia las cantidades infinitamente pequeñas y grandes en sus cálculos, siguió básicamente inalterada hasta el fin de su vida. Consideraba que los infinitesimales eran elementos ideales o imaginarios, y que podía utilizarlos razonando con ellos sin error. Esto se puede inferir de una carta que escribió poco antes de morir:

> "En cuanto al cálculo de infinitesimales, yo no estoy del todo con-

tento con las expresiones del señor Herman sobre su respuesta al señor Nieuwentijt ni de nuestros otros amigos. Y M. Naudé tiene razón de hacer oposición. Cuando ellos disputaban en Francia con el Abat Gallois, el Padre Gouge y otros, yo les testimonié, que no creía que hubiera verdaderamente infinitesimales, que no eran más que ficción pero ficciones útiles para abreviar y para hablar universalmente... Pero como el marqués de L'Hospital creía que por esto yo traicionaba la causa, ellos me rogaron no decir nada, aparte de lo que yo había dicho en un lugar de las actas de Leipsic, y con placer accedí a sus ruegos. Leibniz [1716]" [13]

También hace referencia a lo anterior en una carta a Fontenelle (la cual fue escrita al dorso de una carta de este último, de mano de Leibniz), de la cual mencionamos sólo una parte:

> "...Es cierto que para mí los infinitos no son todos, y los infinitamente pequeños no son magnitudes. Mi metafísica los destierra de su territorio. Sólo los admite en los espacios imaginarios del cálculo geométrico, en donde estas nociones sólo valen y pasan como las raíces que se llaman imaginarias. La parte que yo he tenido en hacer valer el cálculo de los infinitesimales, no es bastante motivo para que yo me enamore de ellas hasta el punto de llevarlas hasta el más allá de lo que consiente el buen sentido..."[5]

Por último citamos un pasaje de sus escritos, también representativo de este punto de vista:

> "...De donde se sigue, que si alguno no admite puntos de líneas infinitas e infinitamente pequeñas con la rigurosidad metafísica y como cosas reales, se puede servir de ellos como nociones ideales que acortan el razonamiento, semejante a lo que hemos llamado raíces imaginarias del análisis común (como por ejemplo $\sqrt{-2}$)... Es esta también de la misma manera que concebimos espacios de dimensiones más allá de tres..., es todo para establecer ideas propias y acortar los razonamientos y fundarlos en realidades." [13]

Las ideas que motivaron a Leibniz en la invención del cálculo las explica él mismo:

[5] Extraído de: Biblioteca filosófica. Obras de Leibniz, puestas en lengua castellana por D. Patricio de Azcárate. Tomo IV. Madrid, casa Editorial de Medina. 1877

"Desde hace tiempo encontraba gran placer en buscar las sumas de las series de números, para lo cual me había servido de las diferencias que, según un teorema bastante conocido, en una serie decreciente hasta lo infinito el primer término es igual a la suma de todas sus diferencias. Esto me condujo a lo que yo llamaba el triángulo armónico, opuesto al triángulo de Pascal, porque éste había enseñado cómo se pueden dar las sumas de los números figurados que resultan al buscar las sumas y las sumas de las sumas de los términos de la progresión aritmética natural, y yo encontré que las fracciones de los números figurados son las diferencias y las diferencias de las diferencias de los términos de la progresión aritmética natural, y que así pueden dar las sumas de las series de las fracciones figuradas, como

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$, etc.,

y

$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}$, etc.,

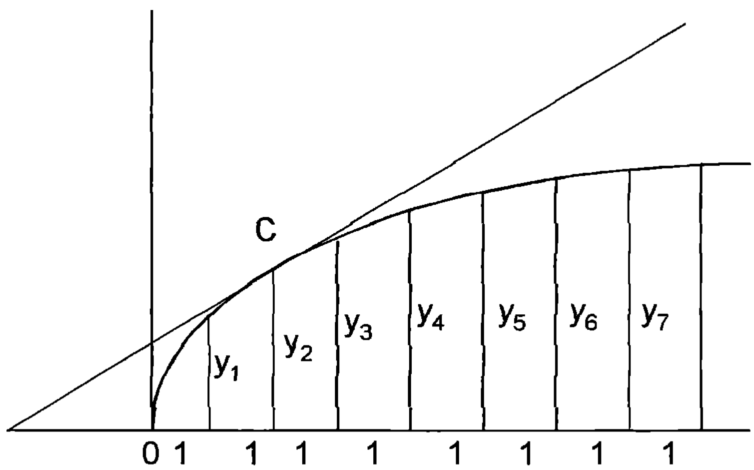
y reconociendo, pues, esta diferencia y viendo cómo se puede expresar la ordenada de la curva por medio del cálculo de Descartes, advertí que encontrar las cuadraturas o las sumas de las ordenadas no es otra cosa que encontrar una ordenada - de la cuadratriz - cuya diferencia sea proporcional a la ordenada dada. También advertí inmediatmane que encontrar las tangentes no es otra cosa que diferenciar, y encontrar las cuadraturas no es otra cosa que sumar, siempre que se supongan las diferencias incomparablemente pequeñas. Vi también que la magnitudes diferenciales se encuentran necesariamente fuera de la fracción o fuera del *vinculum* y que así se pueden dar las tangentes sin acudir a los irracionales y fracciones. Esta es la historia del origen de mi método, *methodus differentials*".[15]

Leibniz tomaba sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, ...$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_3 - a_4, ...$. Se había dado cuenta que $b_1 + b_2 + ... + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Este descubrimiento lo usó para resolver el problema que le había planteado Huygens en 1672, consistente en sumar la serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...$,donde los denominadores son los llamados "números triangulares" $\frac{r(r+1)}{2}$.Descubrió que los términos de la serie pueden expresarse como diferencias, $\frac{2}{r(r+1)}=\frac{2}{r}-\frac{2}{r+1}$, de donde $\sum_{r=1}^{n}\frac{2}{r(r+1)}=2-\frac{2}{n+1}$. Y en particular la serie infinita dada tiene como suma 2.

A partir de este resultado, como él mismo menciona, se vió impulsado a estudiar todo un sistema de sucesiones de sumas y diferencias relacionadas con ésta, que resumió en el denominado "triángulo armónico", en el que las filas oblicuas son las sucesivas sucesiones de diferencias de la primera de ellas, de modo que su suma pueden ser fácilmente obtenidas del diagrama:

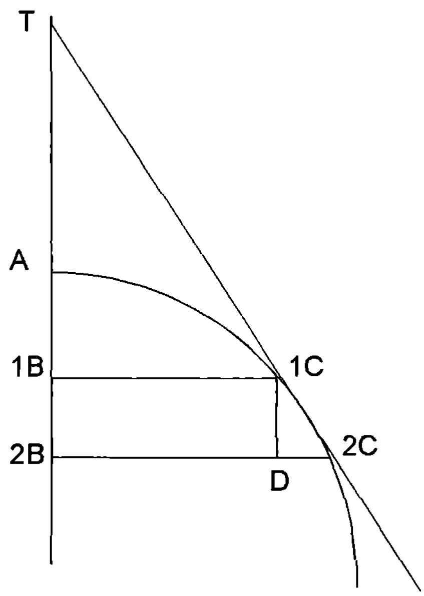
$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

Estos resultados hicieron darse cuenta a Leibniz de que el formar las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas eran operaciones inversas una de la otra. Esta idea adquirió significado al aplicarla a la geometría.



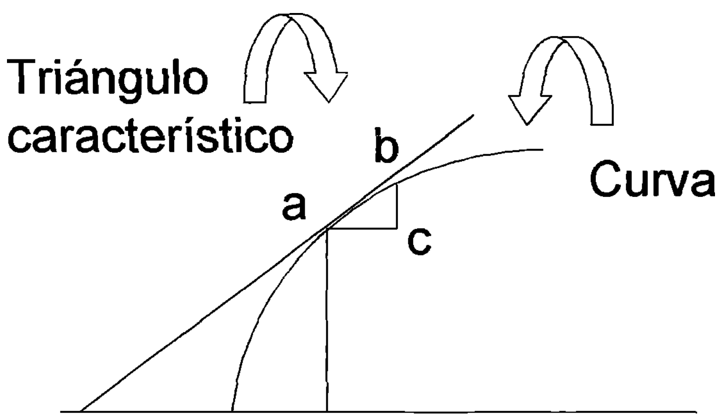
La curva en la figura define una sucesión de ordenadas equidistantes y. Si su distancia es 1, la suma de estas ordenadas da una aproximación de la cuadratura de curvas, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente. Más aún, cuando más pequeña se elija la unidad 1, mejor es la aproximación. Leibniz dedujo de esto que si la unidad pudiera ser tomada infinitamente pequeña, estas aproximaciones se harían exactas; en este caso la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. De esta manera, de la reciprocidad de las operaciones de tomar sumas y diferencias, Leibniz llegó a la conclusión de que las determinaciones de cuadraturas y tangentes eran operaciones inversas una de la otra.

Haciendo referencia a lo anterior, podemos citar un extracto de otra carta de Leibniz del 21 de junio de 1677 a Oldenburg (para trasmitir a Newton) donde cuenta lo siguiente:

> "...Hace tiempo que he tratado el tema de las tangentes de una manera más general utilizando la diferencia de las ordenadas:
>
> 
>
>
> Así $T\ 1B$, que es el intervalo tomado sobre el eje entre la tangente y la ordenada, es a la abcisa $1B\ 1C$, como $1C\ D$, que es la diferencia de las dos abcisas $A\ 1B$ y $A\ 2B$, es a $D\ 2C$, que es la diferencia entre las ordenadas $1B\ 1C$ y $2B\ 2C$. No es necesario conocer el ángulo formado por las dos ordenadas con el eje. De ahí que determinar la tangente no es sino determinar la diferencia de las ordenadas, una vez fijada la igualdad de las diferecias de las abcisas ($1B\ 2B = 1C\ D$). Indicando luego con dx la diferencia entre las dos x más próximas (es decir, $A\ 1B$ y $A\ 2B$) y con dy (o sea $D\ 2C$) la diferencia entre las dos y más próximas (es decir, la diferencia entre la primera ordenada $1B\ 1C$ y la segunda ordenada $2B\ 2C$), obtendremos $dy^2 = 2ydy$; $dy^3 = 3y^2dy$, y así sucesivamente. Sean en efecto las dos y muy próximas entre

sí (es decir, con una diferencia infinitamente pequeña), o sea A $1B = y$, y A $2B = y + dy$. Como dy^2 es la diferencia entre los dos cuadrados construídos sobre esos dos segmentos, la ecuación será $dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Por tanto, suprimidos $y^2 - y^2$ que se eliminan recíprocamente, y suprimido también el cuadrado de la cantidad infinitamente pequeña (por las razones conocidas por el método de los máximos y los mínimos), tendremos $dy^2 = 2ydy$. Lo mismo ocurrirá para las demás potencias. De aquí se podrán deducir las diferencias de cantidades constituídas por distintos valores indefinidos, dados en su relación recíproca como $dxy = ydx + xdy$ y $dy^2x = 2xydy + y^2dx$."[7]

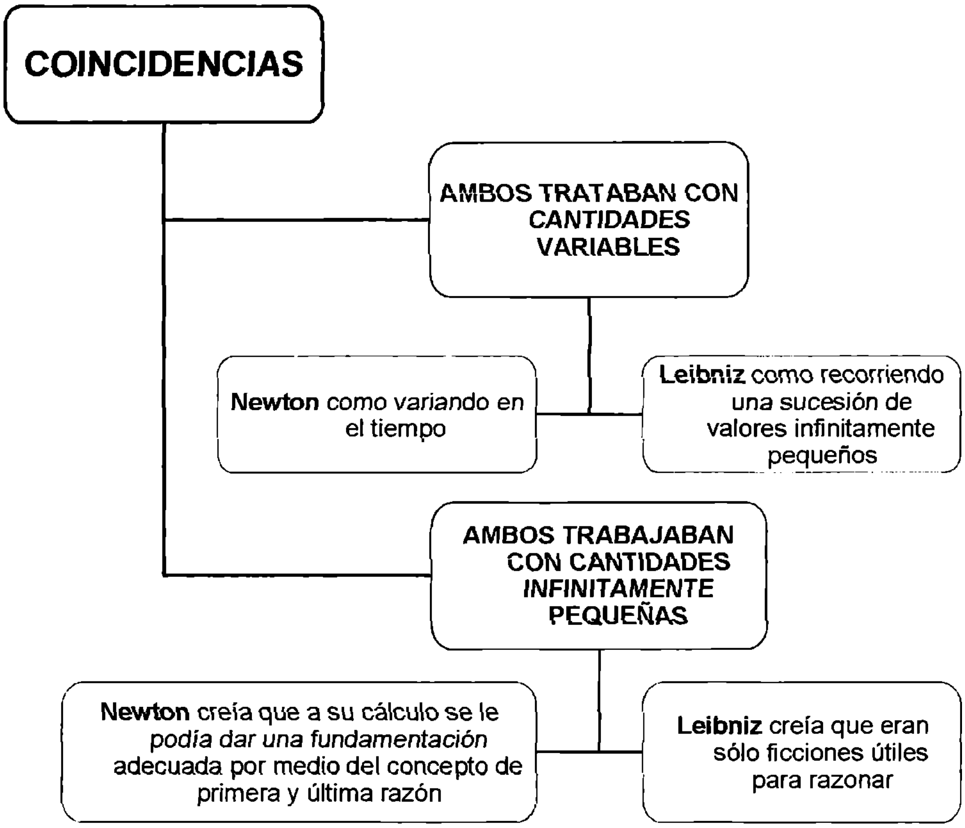
Así como Newton creía que las curvas son engendradas por un movimiento continuo, para Leibniz, son líneas poligonales compuestas por una infinidad de segmentos rectilíneos infinitamente pequeños y el punto de contacto de una tangente a la curva es una de estas líneas cuya extensión - infinitamente pequeña - se puede medir por la recta - ordenada - infinitamente próxima al eje y por el intervalo - abcisa - infinitamente pequeño también, comprendido entre esas dos rectas, construyendo el que después se ha llamado triángulo característico.



Lo que se le reprochó a Leibniz fue el emplear la expresión "infinitamente pequeña" sin haberla definido previamente y dejar la duda, si consideraba el cálculo como riguroso en absoluto o como un simple método para obtener resultados.

Frente a esto, Leibniz y sus seguidores se contentaron con hacer ver la fecundidad del método resolviendo problemas difíciles.

1.3.3. Newton y Leibniz: coincidencias y diferencias.



DIFERENCIAS

Tenían espíritus diferentes

Newton era físico, y mecánica, dotado de una capacidad matemática extraordinaria. Fiel a la tradición griega, preocupado por la precisión y objetividad, y receloso de las generalizaciones. Realista.

Leibniz es más lógico y matemático. Soñaba con una combinatoria universal, de visión amplia y segura. Idealista.

Usaban distinta notación

La notación **newtoniana** consistía en indicar las fluxiones (derivadas) sucesivas mediante puntos colocados *encima de las fluentes (función)* correspondientes; la fluxión de

y *era* $\dot{y}$.

La notación diferencial **leibniziana** es la utilizada en la actualidad, dy)/(dx

Tenían visiones diferentes sobre *los conceptos fundamentales* del cálculo.

Newton tenía como concepto *principal el de fluxión*, la velocidad finita o rapidez de cambio de la variable con respecto *al* tiempo

Leibniz tenía como concepto *principal la diferencial*, es decir, diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos.

Tenían diferencia en el concepto de integración y el papel del teorema fundamental

Para **Newton** el objeto de la integración era hallar la cantidad fluente de una fluxión dada; así el teorema fundamental era una *consecuencia inmediata y trivial* de la definición de integral.

Leibniz veía la integración como suma, y el teorema fundamental era una consecuencia de la relación inversa que hay entre las *operaciones de sumar y tomar* diferencias.

1.3.4. Los Bernoulli y de L´Hospital

El marqués de L´Hospital fue autor del primer libro de texto del cálculo diferencial: "Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas" cuya primera edición fue publicada en 1696. Éste permitió una gran divulgación del cálculo de Leibniz, pués como ya mencionamos sus primeras publicaciones no eran del todo claras.

H.J.M. Bos [4] cuenta que Johann Bernoulli le daba clases a L' Hospital, para las cuales hicieron un contrato que le exigía a Bernoulli, a cambio de un elevado salario mensual, las siguientes condiciones:

- Contestar todas las preguntas que le hiciera el Marqués.
- Enviarle todos sus descubrimientos.
- No comunicarle a nadie más sus hallazgos.

Cuando L' Hospital publica su libro, Bernoulli encuentra en él gran parte de "sus" clases particulares. Muchos años más tarde se supo la verdad, al encontrarse los manuscritos originales de estas lecciones. Vemos que en realidad el mérito del Marqués fue su habilidad para trasmitir en forma de tratado los conocimientos que provenían de Bernoulli..

De L´Hospital fue un discípulo leal de Leibniz. Su libro es un tratado para el uso de los infinitesimales en contextos algebraicos y geométricos. En él comienza dando las definiciones de las variables y de sus diferenciales, así como postulados para estas diferenciales[4]:

> Definición 1: Cantidades variables son aquellas que crecen o decrecen continuamente; constantes o cantidades fijas son aquellas que continúan siendo las mismas cuando las demás varían.
>
> Definición 2: La parte infinitamente pequeña que se obtiene cuando la variable crece y decrece continuamente se llama diferencial.

De estas definiciones surge el corolario de que la diferencial de una cantidad constante es cero. Más adelante establece los dos siguientes postulados:

> Postulado 1: Dos cantidades cuya diferencia sea una cantidad infinitamente pequeña pueden emplearse la una por la otra indistintamente.
>
> Postulado 2: Una línea curva puede considerarse como compuesta por un número infinito de segmentos infinitesimales de recta. Es decir, una curva puede considerarse como una poligonal con un número infinito de lados, cada uno de los cuales es de longitud infinitesimal.

Podemos ver, que al igual que Leibniz, siguen sin ser definidas las "cantidades infinitamente pequeñas".

El texto de L´Hospital sigue la estructura clásica de Euclides y Arquímedes; entiende por definición una explicación de un concepto dado previamente y entendido intuitivamente y por axioma una declaración verdadera que resulta más tarde obtenida intuitivamente. Queda claro que se presupone la existencia de los objetos mencionados (por ejemplo: diferenciales) la cual como se ha visto, Leibniz no estuvo dispuesto a conceder.[6]

El primer postulado establece las reglas usuales del cálculo, por ejemplo:

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x+dx)(y+dy)-xy \\ &= xdy+ydx+dxdy \\ &= xdy+ydx \end{aligned}$$

A pesar que las lecciones dadas por Bernoulli, referidas al cálculo diferencial, las había publicado el mismo de L'Hospital, Johann publicó en 1742 sus obras completas en donde, además, mostraba el método de integrales. A diferencia de Leibniz, definió la integral como la inversa de la diferencial.

1.3.5. Las críticas de Berkeley

La mayoría de los matemáticos que trabajaban en esta nueva creación, "el cálculo", a principios del siglo XVIII, no se preocupaban por los fundamentos. Entre las críticas a este nuevo dominio de las matemáticas, una de las más conocida fue realizada por el obispo George Berkeley (1685-1753), la cual aparece en el tratado titulado The Analyst (El Analista), publicado en 1734. En su portada dice:

EL ANALISTA

> *O un discurso dirigido a un matemático infiel. Donde se examina si el objeto, principios e inferencia del análisis moderno son concebidos más claramente o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y los asuntos de la fe.[12]*

Se supone que el matemático infiel al cual estaba dirigido era el astrónomo Edmund Halley (1656-1742), amigo de Newton, quien financió la publicación

[6] Las definiciones, postulados y características del libro publicado por L 'Hospital fueron tomadas de "Desarrollo conceptual del cálculo", de Ricardo Cantoral Urquiza y Rosa María Farfán Márquez.[1]

de los Principia y ayudó a prepararlos para la imprenta. También se cree que persuadió a un amigo de Berkeley de la "incomprensibilidad de las doctrinas del cristianismo", uno de los motivos que seguramente hicieron que cuestionara el cálculo para defender la religión. Escribe: *...reclamaré el privilegio de un libre pensador; y me tomaré la libertad de investigar el objeto, principios de demostración admitidos por los matemáticos en la época presente, con la misma libertad que usted presume al tratar los principios y misterios de la religión...[10]*

...Hábil polemista, Berkeley, se dirige entonces hacia los objetos mismos de la ciencia que Halley profesa, mostrando triunfalmente que aquellos que se quejan sin razón de la incomprensibilidad científica de la religión, aceptan una ciencia que en su raíz misma es incomprensible, y cuyas conclusiones se apoyan en raciocinios que la lógica no acepta [12].

Berkeley no negó la utilidad de los nuevos inventos ni la validez de los resultados obtenidos sino que decía que los matemáticos no habían dado ninguna explicación legítima de su procedimiento. Su mayor ataque fue al concepto de "infinitésimo fijo", que en su método para calcular fluxiones (las derivadas actuales), Newton los consideraba como pequeñas cantidades no nulas al momento de tomarlas como denominadores de un cociente, y como nulas cuando aparecían como sumandos. Así expone la vaguedad que rodea a las cantidades infinitamente pequeñas, a los incrementos evanescentes y las razones, a las diferenciales y las fluxiones de orden superior:

> Ahora bien, así como nuestros Sentidos se ven forzados y desconcertados en la percepción de Objetos extremadamente pequeños, también así la Imaginación, cuya Facultad deriva de los sentidos, se ve muy forzada y confundida para formar Ideas claras de las mínimas Partículas de tiempo, o los Incrementos mínimos engendrados durante ellas: y mucho más para comprender los Momentos, o aquellos Incrementos de las cantidades fluyentes *in statu nascenti*, en su mismísimo origen o comienzo de existencia, antes de que hayan llegado a convertirse en Partículas finitas. Y parece más difícil concebir las Velocidades abstractas de tales imperfectas Entidades nascentes. Pero las Velocidades de las Velocidades, la segunda, tercera, cuarta y quinta Velocidades, etc., exceden, si no me equivoco, todo el Entendimiento Humano. Cuanto más analiza y persigue la Mente estas Ideas fugitivas, más se ve perdida y confundida; los Objetos, al principio fugaces y diminutos, pronto se desvanecen a la vista. Ciertamente, en cualquier Sentido, un segundo o tercer Fluxión parece un Obscuro Misterio. La Celeridad incipiente de una Celeridad incipiente, el Aumento

naciente de un Aumento naciente, es decir, de una cosa que no tiene Magnitud: Tomadlo a la luz que os plazca, la clara concepción de ello, si no me equivoco, se revelará imposible, y si eso es así o no me remito al juicio de cualquier Lector pensante. Y si una segunda Fluxión es inconcebible, ¿qué debemos pensar de la tercera, cuarta, quinta Fluxiones, y así sucesivamente sin fin?[4]

Reproducimos un párrafo de The Analyst donde se muestra lo anterior con un ejemplo y posterior cuestionamiento:

> ...Supongamos que la cantidad x fluctúa uniformemente y que nos proponemos hallar el diferencial de diferencial de x^n. Al mismo tiempo que x se convierte, al fluctuar, en $x+o$, la potencia x se convierte en $(x+o)^n$, esto es, por el método de las series infinitas
>
> $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$+etc.
>
> y los incrementos
>
> o y $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$+etc.
>
> son entre sí como
>
> 1 es a $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2}$+etc.
>
> Hagamos desaparecer ahora los incrementos y su última proporción será como 1 es a nx^{n-1}.

Ante esto, Berkeley escribe:

> Pero debería parecer que este razonamiento no es claro o definitivo. Pués cuando se dice, hagamos desaperecer los incrementos, esto es, que los incrementos no sean nada, o que no haya incrementos, se destruye la suposición anterior de que los incrementos eran algo, o de que había incrementos y, no obstante, se conserva una consecuencia de la suposición, esto es, una expresión obtenida en virtud de aquella. Lo que, según el lema precedente[7], es una forma de razonamiento falsa. Ciertamente cuando suponemos que los incrementos desaparecen, debemos suponer que con ellos desaparecen sus proporciones, sus expresiones y todo lo que se deriva

[7] El lema a que hace referencia es:"Si, en vistas a demostrar cualquier proposición se supone cierto punto, en virtud del cual pueden alcanzarce ciertos otros puntos: y dicho punto supuesto se destruye o se rechaza por un supuesto contrario; en este caso, todos los puntos así alcanzados, y consecuentes, así como, desde entonces en adelante no pueden suponerse ni aplicarse más en la demostración"

> de la suposición de su existencia... No tengo ninguna discrepancia en cuanto a sus conclusiones, sino sólo en cuanto a su lógica y método, ¿cómo lo demuestra?, ¿de qué objeto se ocupa? y,¿los concibe claramente?, ¿sobre qué principios procede?, ¿cuán válidos pueden ser? y ¿cómo los aplica? [10]

Se ve aquí, claramente, que los cuestionamientos hechos por Berkeley eran totalmente pertinentes, así como también los resultados obtenidos por Newton.

Berkeley entendía que, a pesar de las inconsistencias, el cálculo conducía a conclusiones correctas, y explicaba esto mediante una "compensación de errores", impresionado por el hecho de que fundándose sobre principios y demostraciones tan desleznables los nuevos métodos lograran resultados correctos. [12]

Aunque no sepamos exactamente cuáles fueron sus propósitos, logró con su crítica mostrar las contradicciones y promover la búsqueda de una fundamentación satisfactoria.

1.3.6. Lagrange y D´Alembert

Por cincuenta años el método de Leibniz tuvo el dominio sobre el continente Europeo. Pero, en la segunda mitad del siglo XVIII la falta evidente de validez de la teoría condujo a buscar alguna fundamentación.

Por el año 1759, Lagrange había sido influenciado por Berkeley en cuanto a la existencia de la "compensación de errores"[4]. *"La misma idea del Cálculo diferencial,-decía Lagrange- aunque justa en sí misma, no es bastante clara para servir de principio a una ciencia cuya certeza debe fundarse en la evidencia y, sobre todo, para ser presentado a los principiantes. Además, me parece, que tal como se emplean, consideran y calculan las cantidades infinitamente pequeñas o que se suponen infinitamente pequeñas, la verdadera metafísica de este cálculo consiste en que el error resultante de esta falsa suposición está corregido o compensado por lo que nace de los mismos procedimientos del cálculo, según los cuales se retienen en la diferenciación las cantidades infinitamente pequeñas del mismo orden. Por ejemplo, considerando una curva como un polígono de infinitos números de lados infinitamente pequeños, y cuya prolongación es la tangente, es claro que se hace una suposición errónea; pero el error queda corregido en el cálculo por la omisión que se hace de las cantidades infinitamente pequeñas. Esto es fácil de hacerlo por medio de ejemplos, pero acaso sería difícil demostrarlo..."[15].* Sin embargo, años más tarde (1772) propone una alternativa de fundamentación basando la teoría sobre la supuesta existencia de una serie de Taylor (ya conocida por Newton, Leibniz y otros) para toda función continua. Creyó que así el cálculo podría ser desarrollado independientemente de "toda consideración de infinitamente pequeños o de límites o de fluxiones". Sin embargo no muchos compartieron sus puntos de vista y aunque no sirvió mucho para la fundamentación, logró considerar al cálculo como una teoría de funciones y sus derivadas, las cuales eran también funciones. En un párrafo de su texto Théorie des fonctions analytiques de la segunda edición de 1813 escribe:

> "Llamamos función de una o varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria...La palabra función utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces el significado de esta palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de una manera arbitraria a partir de otra cantidad...Cuando le atribuimos un incremento cualquiera a la variable de una función sumándole una cantidad indeterminada, entonces, podemos, si la función es algebraica, desarrollarla según las potencias de esta [cantidad] indeterminada, por medio de las reglas usuales del Álgebra. El primer término del desarrollo sería la función propuesta, a la que llamaremos la función primitiva; los términos siguientes estarán formados por diferentes funciones de la misma variable multiplicadas por las sucesivas potencias de la [cantidad] indeterminada. Estas nuevas funciones dependen únicamente de la función primitiva de la que se derivan, y podemos llamarlas funciones derivadas...En este libro veremos que el análisis que usualmente recibe el nombre de trascendental o infinitesimal no es otra cosa, en su raíz, que el Análisis de las funciones primitivas y derivadas, y que los Cálculos diferencial e integral se reducen, propiamente hablando, al cálculo de esas mismas funciones"[4].

Sólo pudo obtener derivadas por medio de métodos algebraicos para el caso de funciones sencillas.

Siguiendo con la búsqueda de la fundamentación, el enfoque más importante fue el uso de la idea de límite. Uno de los que basó el cálculo sobre esta noción fue D´Alembert (1717-1783) como se puede apreciar en alguno de los artículos de la Encyclopédie Méthodique (Mathématiques):

> "Nosotros decimos que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximar a la primera en menos que cualquier magnitud dada, por pequeña que ésta sea, se tiene

> por tanto que la magnitud que aproxima, jamás superará a la magnitud a la que se aproxima, de manera que la diferencia de cantidades iguales a ese límite es absolutamente inasignable..."
>
> "La teoría de límites es la base de la verdadera metafísica del cálculo diferencial...Hablando apropiadamente el límite no coincide jamás, ni será jamás igual, a la cantidad de la cual es el límite; pero ésta se aproxima siempre más y más y puede diferir tan poco como se quiera..."[13]

A simple vista, esta definición de límite dada por D´Alembert es muy semejante a la utilizada en la actualidad salvo por la insistencia al mencionar que una cantidad que tiende a un límite nunca es igual al límite. Esta condición es extremadamente inconveniente en la práctica. Por ejemplo, con su definición será incorrecto decir que $xsen(\frac{1}{x})$ tiende a cero cuando x tiende a cero, ya que esta función toma el valor cero sobre un conjunto de valores distintos en su argumento pero con cero como límite. Tal vez, el origen de esta restricción fue motivada por la idea que, si una cantidad tiende a un límite, ella no puede haber estado allí antes.[13]

¿Porqué fue necesario esperar tanto tiempo para que se reconociese la teoría de límites? Consideró sólo límite de variables y era necesario esperar que el concepto se aplicase a funciones.[4]. Desde un punto de vista histórico, lo importante de la intervención de D´Alembert fue dirigir a la matemática continental hacia la noción de límite como concepto central del análisis.

1.4. Período contemporáneo

> Buscan los hombres a tientas durante siglos, guiados simplemente por un confuso instinto e intrigados por la curiosidad, hasta que al fin "surge alguna verdad".
>
> A. N. Whitehead.

Recién en el siglo XIX el cálculo surge con el rigor lógico como se había construído la geometría de Euclides, sustituyendo la débil base que lo sostenía por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas y un concepto adecuado de paso al límite. Bolzano (1781-1848) y Cauchy definieron con precisión límites y derivadas, Cauchy y Riemann (1826-1866) hicieron lo propio con las integrales, mientras que Dedekind (1831-1916) y Weiertrass se encargaron de los números reales.

Esto condujo gradualmente a abandonar las cantidades infinitamente pequeñas como parte esencial de las matemáticas, sobreviviendo sólo como una forma de hablar, por ejemplo: en la declaración que una variable tiende a infinito. Sin embargo, existen físicos, ingenieros, matemáticos que se dedican a la matemática aplicada, que consideran útil razonar a base de infinitesimales. En tal sentido, podemos mencionar el libro "Curso de Física General. Mecánica Física y Molecular" de L. Landau, A. Ajiezer y E. Lifshitz de la editorial Mir Moscú, editado en el año 1973, en el cual encontramos definiciones que no hacen referencia al límite: *...cuando el movimiento es variado y cambia de dirección, la velocidad de la partícula hay que determinarla como un vector igual al cociente de dividir el vector desplazamiento infinitamente pequeño ds de la partícula por el correspondiente intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt. Por consiguiente, designando con v el vector velocidad, tendremos que* $v = \frac{ds}{dt}$*... Supongamos que en el intervalo dt la velocidad ha variado dv. Si referimos esta variación a la unidad de tiempo, obtendremos el vector aceleración del punto material, que designaremos mediante* ω: $\omega = \frac{dv}{dt}$. *Así tenemos que la aceleración determina la variación de la velocidad de la partícula y es igual a la derivada de la velocidad respecto del tiempo.*

Muy frecuentemente de esta forma se llega rápidamente a resultados que pueden ser demostrados de manera rigurosa por métodos considerados "adecuados".

1.4.1. Cauchy

Podríamos suponer que, siguiendo el rechazo hacia la teoría de Leibniz por parte de Lagrange y D´Alembert, las cantidades infinitamente pequeñas y grandes no tendrían lugar entre las ideas de Cauchy, considerado generalmente como el fundador del enfoque moderno. Citamos algunas cuestiones de Cours d´Analyse de Cauchy (Analyse Algébrique), donde podemos inferir que ésto es erróneo:

> "Nosotros llamamos cantidad variable a aquella que consideramos que pueda tomar sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros...Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que termine por diferir tan poco como uno quiera, esto último se llamará límite de todos los otros"
>
> "Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que bajan por debajo de cualquier número dado, esta variable es la que llamaremos un infinitamente pequeño o cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero por límite".
>
> "Cuando los valores numéricos de una misma variable crecen más y más, de manera que se elevan más allá de todo número dado,

diremos que esta variable tiene por límite al infinito positivo..." [13]

Vemos aquí que Cauchy no sólo definió cantidad infinitamente pequeña sino que lo hizo no como fija sino como una cantidad variable. Así comparte con Newton la cuestión "dinámica" de los infinitésimos en término de valores que pasan a cero como valor límite, en contraste con el tipo "estático" de los infinitésimos de Leibniz.

Respecto de la continuidad de funciones, citamos el siguiente párrafo:

> "...la función $f(x)$ será, entre dos límites asignados a la variable x, función continua de esa variable, si, para cada valor de x intermedio entre esos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con α. En otros términos, la función $f(x)$ será continua para x entre límites dados, si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función" [13]

Se puede ver aquí la importancia de las cantidades infinitamente pequeñas en la aproximación del análisis de Cauchy. Considera su teoría como una fundamentación satisfactoria para la teoría de límites y no los introduce para reemplazar las cantidades infinitamente pequeñas; su procedimiento comprende a ambos.

Cauchy, en su mencionado libro, expone la teoría de límites con más detalle que nadie antes que él.

Hay que destacar que estas definiciones no se apoyan en consideraciones geométricas. Utilizando la teoría de límites como punto de partida de las definiciones de propiedades básicas, y la aritmética de desigualdades como mecanismo principal de las desmostraciones, consiguió Cauchy llevar al análisis matemático a una situación de autonomía respecto a la geometría y al álgebra. Un detalle de su *Cours d' analyse* es que no utiliza ni una sola figura.[4]

Ahora consideraremos la definición de Cauchy de la derivada:

> "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y le asignamos a esa variable comprendida entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño, atribuido a la variable, se produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consecuencia, si ponemos $dx = i$, los dos términos de la razón de la diferencia
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

> serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x ,..." [13]

Generaciones posteriores han pasado por alto el hecho que en esta definición tanto Δy como Δx fueron explícitamente supuestos como infinitamente pequeños. En la actualidad tomamos $f(x)$ como el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero, sin hacer mención alguna de cantidades infinitamente pequeñas. De hecho, al *considerar el límite sería redundante mencionar que* las cantidades Δy y Δx son infinitamente pequeñas.[13]

En la introducción de su *Résumé* aparece una crítica a Lagrange, el cual había muerto unos años atrás, en la que cuestiona la creencia de éste en la serie de Taylor como fundamentación del cálculo, poniendo de relieve el peligro que supone el considerar garantizada automáticamente su convergencia.[4]

Por esto, Cauchy exigía que el estudio de las series infinitas viniera precedida por un análisis de convergencia. De hecho él se dedicó a estudiar este tema.

1.4.2. Weierstrass

Según Robinson, el crédito del método conocido como ϵ, δ es de Weierstrass, quien le dio apariencia formal. Sin embargo, existen antecedentes de este método de aproximación en Cauchy y Bolzano.

Como sabemos, por el método de Weiertrass, para calcular una velocidad instantánea (derivada de una función posición), se la define como un límite hacia el cual tienden los cocientes de incrementos finitos y no (como en sus comienzos) mediante el cálculo directo de un cociente. Mediante esta definición se logra eliminar toda referencia a números que no sean finitos. Se evita además, toda tentativa de hacer directamente el incremento de la variable independiente igual a cero (que estaba en un principio como denominador del cociente), logrando esquivar las contradicciones manifestadas por el obispo Berkeley en su artículo The Analyst. Pero, *una magnitud intuitivamente clara y físicamente mensurable como la velocidad instantánea queda sometida a la noción sorprendentemente sutil de "límite"[6].* Así, la velocidad instantánea queda definida por una relación entre dos nuevas cantidades, ϵ y δ, que en cierto sentido nada tienen que ver con la velocidad instantánea propiamente dicha. Aceptamos una definición mucho más difícil de comprender que el concepto que se está definiendo sólo por tener una coherencia lógica.

El método de Weiertrass es cercano al método de exhaución de los griegos más que a los de Newton, Leibniz o Cauchy.

La introducción del enfoque de Weierstrass en análisis, la aritmetización del sistema de números reales, y el descubrimiento de la teoría de conjuntos por Cantor (1845-1918) ocurrieron dentro de un corto período de tiempo y estuvieron mutuamente relacionados.

1.5. Abraham Robinson y el cálculo no estándar

> Hay verdades que chocan inmediatemente a todos los espíritus precisos y cuya demostración rigurosa, sin embargo, escapa mucho tiempo a los más hábiles.
> Reflexions sur la métaphisique du Calcul infinitésimal.
> Lazare Nicolas Marguerite Carnot.

En 1934, la construcción del lógico noruego Thoraf Skolem (ahora llamada la construcción de ultraproductos) fue extendida a una clase extensa de estructuras, incluyendo la construcción de los números hiperreales desde los reales. El sistema de los números hiperreales está constituído por los números reales a los que se les incorporan los números infinitamente pequeños (infinitesimales) e infinitamente grandes (infinitos). Skolem descubrió que hay estructuras matemáticas que verifican todos los axiomas de la artimética, pero que son mucho más grandes que el sistema de los números naturales.[8]

En 1960, el lógico Abraham Robinson, haciendo uso de la lógica matemática, descubrió que los números hiperreales pueden ser usados para dar un tratamiento riguroso del cálculo con infinitesimales. Estos números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática que Robinson elaboró, "más amplia"que la axiomática de los reales, pero compatible con ella. En esta estructura numérica, el axioma de Arquímedes no se satisface[9], ya que

[8] El proceso seguido por Skolem, podemos describirlo de la siguiente manera: sea una teoría matemática determinada, por ejemplo, los números naturales ordinarios y su aritmética, que llamaremos "universo estándar", y lo designaremos por $\mathcal{N}$. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje en el cual hablaremos de $\mathcal{N}$. Cualquier enunciado en $\mathcal{L}$ es una proposición concerniente a $\mathcal{N}$, la cual es falsa o verdadera. Denominaremos $Teo\mathcal{N}$, al conjunto de todos los enunciados verdaderos en $\mathcal{N}$. Se dice que $\mathcal{N}$ es un modelo para $Teo\mathcal{N}$, es decir que $\mathcal{N}$ es una estructura matemática, tal que todo enunciado de $Teo\mathcal{N}$, al ser interpretado como una proposición de $\mathcal{N}$ es verdadera.

Skolem demostró que exiten otros modelos para $Teo\mathcal{N}$, es decir estructuras $^*\mathcal{N}$, esencialmente diferentes de $\mathcal{N}$, llamados "modelos no estándar".

[9] El axioma de Arquímedes o propiedad arquimediana de los números reales, dice lo siguiente: Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n / $nx >$

el producto de un infinitesimal por cualquier número real o por otro infinitesimal es siempre menor que cualquier fracción ordinaria positiva. El cálculo de Robinson está inspirado en el espíritu del viejo cálculo infinitesimal de Leibniz, aunque hay diferencias; por ejemplo, Leibniz define la derivada como la proporción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde Δx es infinitesimal, mientras Robinson define la derivada como la parte estándar de la proporción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde Δx es infinitesimal.

Ahora es también posible el uso de infinitesimales por un camino preciso. Los infinitesimales en el sentido de Robinson son aplicados no sólo en el cálculo sino en el extenso dominio del análisis. Ellos conducen a nuevos resultados y problemas en investigación matemática. Robinson llamó al nuevo dominio "Análisis no estándar" (Él llamó a los números reales, "estándar" y a los números hiperreales, "no estándar").

Al ampararse en la teoría de modelos de la lógica matemática para construir su modelo no estándar de los números reales, donde los números infinitos tienen sentido, Robinson está siguiendo el juego de la legalidad matemática. Al mismo tiempo nos está insinuando que la forma de legislar en la matemática no es de ninguna manera absoluta.

---

y. Geométricamente significa que cada segmento, tan largo como se quiera, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud positiva dada, tan pequeña como se quiera. Arquímedes, considerando ésta como una propiedad fundamental de la línea recta, lo consideró como uno de los axiomas de la geometría. Se apelaba a este principio para justificar que cantidades infinitamente grandes e infinitesimales no eran números.

Bibliografía

[1] Cantoral Uriza, Ricardo y Farfán Márquez, Rosa María. Desarrollo conceptual del cálculo. Thomson. 2004.

[2] Bell E. T. Los grandes matemáticos. Editorial Losada, S. A. Bs. As. 1948.

[3] Bourbaki, Nicolas. Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Editorial. 1976.

[4] Compilación de I. Grattan-Guinness. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Alianza Editorial. 1984.

[5] Cortés Plá. Isaac Newton. Espasa Calpe Argentina. 1945.(págs. 67-96).

[6] Davis, Philip J. y Hersh, Reuben. Experiencia Matemática. Editorial Labor, S.A.1989.

[7] El Cálculo Infinitesimal: Origen-Polémica. Introducción de José Babini. Ed.Universitaria de Bs.As. Segunda Edición. 1977.

[8] González, Kemel George. Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. Revista Educación y Pedagogía. Vol. XV Nº 35. 2003.

[9] Imaz Jahnke, Carlos. ¿Qué pasa con el infinito?. Avance y perspectiva. Vol 20. 2001.

[10] Newman, James R. El Mundo de las Matemáticas. Tomo 1. Grijalbo. Décima edición.1985.

[11] Recalde, Luis Cornelio. La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.

[12] Rey Pastor, J. y Babini, José. Historia de la matemática. Espasa-Calpe Argentina, S.A. Primera edición. 1951.

[13] Robinson, Abraham. Non-Standard Analysis. North-Holland Publishing Company Amsterdam-London. Segunda Edición. 1970.(págs. 260-282).

[14] The Mathematical works de Isaac Newton. Volumne 1. Johnson Reprint Corporation. 1964.

[15] Vera, Francisco. Historia de las matemáticas. Tomo II. Editorial El Gráfico. Bogotá. 1947.

[16] Whitehead, A. N. Introducción a las matemáticas. Emecés Editores, S.A.. Buenos Aires. 1944. (págs 231-250).

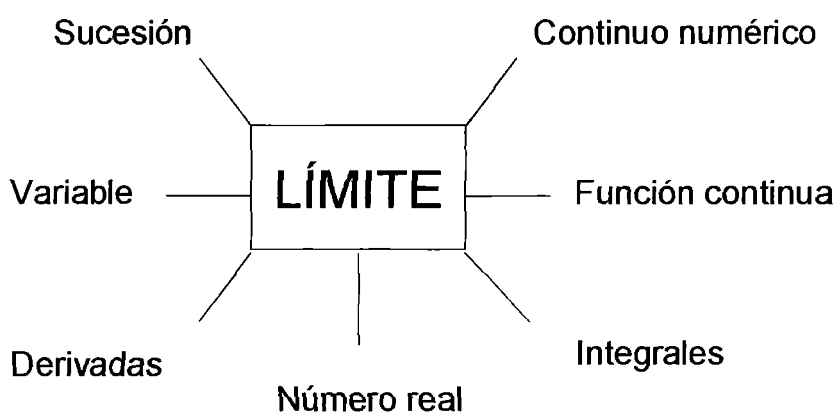
Capítulo 2

Análisis no estándar

2.1. Introducción

El concepto principal del Análisis es el de *límite*, ya que a partir de él se construye la fundamentación del cálculo diferencial e integral. De él dependen nociones tales como continuidad de una función, derivadas e integrales, suma de series infinitas, etc.

La noción de límite no se desarrolló en forma independiente y autónoma sino que es parte de una red integrada por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones vecinas al cálculo: variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo geométrico. El límite surge, como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, con el fin de darle una base sólida al cálculo infinitesimal.



Veremos en lo que sigue, con algunos ejemplos, cómo el análisis no estándar (en contraposición con el par $\epsilon - \delta$, del límite) puede resultar más intuitivo, más manejable, y más cercano a las ideas primitivas que dieron origen al cálculo.

Supondremos la existencia de los números infinitesimales o infinitésimos ϵ (como fueron pensados en los inicios del cálculo: mayores que cero y menores que cualquier número real positivo). A partir de los infinitesimales ϵ, consideraremos los números infinitamente grandes $\omega = \frac{1}{\epsilon}$, conservando las propiedades algebraicas y de orden. Además, que si multiplicamos un infinitesimal por un número real obtenemos un infinitesimal y decir que la diferencia entre a y b es infinitamente pequeña.(es decir, su diferencia es infinitesimal) se notará $a \cong b$.

Cálculo de límites por medio de infinitesimales e infinitos.

- ¿Cómo comprobaríamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ siendo $|a| < 1$ y $|a| \ncong 1$?

Nuestro problema se reduciría a calcular a^ω, con ω infinito.

Sea $b = 1/|a|$, $0 \neq a < 1$ y $a \ncong 1$, así $b = 1 + c$, c finito, no infinitesimal y positivo. Como $b^\lambda > \lambda c$, entonces $0 < |a|^\lambda < 1/(\lambda c) = (1/c)(1/\lambda)$ un infinitesimal número de veces, cuando λ es infinito, así $a^\lambda \cong 0$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

En el análisis que usamos actualmente, procederíamos de la siguiente manera: con la teoría de los $\epsilon - \delta$, deberíamos ver que para todo número positivo ϵ, exista un número natural N, de manera que a^n permanezca menor que ϵ.

- ¿Cómo justificaríamos en análisis no estándar que el $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe?

La respuesta es muy sencilla, se reduce a dos cálculos. Ya que aquí existen dos tipos de infinitos en los hipernaturales, veríamos qué ocurre para a^Ω, cuando $\Omega = 2v$ y para $\Omega = 2v + 1$, con v infinito:

$(-1)^{2v} = ((-1)^2)^v = (1)^v = 1$ y $(-1)^{2v+1} = (-1)^{2v}(-1)^1 = (1)(-1) = -1$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe.

Continuidad de una función

Cuando hablamos de la continuidad de la función, por ejemplo $f(x) = x^2$, nos resulta natural ver, gracias seguramente a nuestro "entrenamiento", que f es continua es $x = a$ pués:

> Para todo número positivo ϵ, la diferencia $f(x) - f(a)$ es en valor absoluto menor que ϵ para toda diferencia entre x y a en valor

absoluto que permanezca menor que otro número positivo δ. En símbolos: $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Sin embargo, intuitivamente diríamos que f es continua en $x = a$ pués un cambio infinitesimal en a produce un cambio infinitesimal sobre f. Si tomamos un infinitesimal ϵ, se tiene que de $x = a$ a $x = a + \epsilon$ se produce un cambio infinitesimal ϵ, y de $f(a) = a^2$ a $f(a+\epsilon) = (a+\epsilon)^2 = a^2 + 2a\epsilon + \epsilon^2 = a^2 + \epsilon(2a+\epsilon)$ se tiene un cambio, que también es infinitesimal, igual a $\epsilon(2a+\epsilon)$, como veremos más adelante.

Además, teniendo en cuenta que en el análisis no estándar contamos con números infinitos, se puede ver que $f(x) = x^2$ no es continua para estos números. Así, si ω es un número infinito, como resulta que $1/\omega$ es un infinitesimal, de $x = \omega$ a $x = \omega + 1/\omega$, tenemos un cambio infinitesimal , pero de $f(\omega) = \omega^2$ a $f(\omega + 1/\omega) = (\omega + 1/\omega)^2 = \omega^2 + 2 + 1/\omega^2$ el cambio no resulta infinitesimal pués es $2 + 1/\omega^2$.

Podemos mencionar como funciones que permanecen continuas en todo el campo hiperreal, a las lineales.

Una función que es discontinua, en $x = 0$, es la función llamada signo, la que está definida de la siguiente manera: $sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Tomamos ϵ un infinitesimal positivo, entonces $sgn(0+\epsilon) = 1$, mientras que si tomamos $-\epsilon$, entonces $sgn(0-\epsilon) = -1$, y así cambios infinitesimales en $x = 0$, producen cambios finitos en la función, con lo cual es dicontinua en $x = 0$

Derivabilidad de una función

Pensando en otras nociones de las mencionadas que surgen del concepto de límite, miremos cómo calculamos la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = a$.

Lo que hacemos en la actualidad es definir la derivada como el límite hacia el cual tienden los cocientes de los incrementos finitos. Si $\Delta f(a)$ es el incremento de la función en $f(a)$ y Δx el incremento de la variable independiente en $x = a$, entonces $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ es la cantidad variable $2a + \Delta x$; y tomando Δx suficientemente pequeño podemos hacer que $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ tome valores tan cercanos de $2a$ como se quiera, y así, por definición, la derivada en $x = a$ es exactamente $2a$. Para comprobar que el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = 2a$, tenemos que ver que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que si $|\Delta x| < \delta \rightarrow \left|\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - 2a\right| < \epsilon$.

En cambio, en análisis no estándar, tomamos $\epsilon \neq 0$ un infinitesimal y consideramos el cociente entre un cambio infinitesimal de la función y un cambio infinitesimal en $x = a$, es decir:

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \frac{(a+\epsilon)^2 - a^2}{\epsilon} = 2a + \epsilon$$

Si tomamos un *infinitesimal* diferente a ϵ, el cociente anterior es diferente pero no se ve la diferencia a menos que lo estemos mirando por un microscopio potente. Luego, la pendiente de la recta tangente buscada será $2a$.

Cálculo de series numéricas

- Sea $x \in {}^*\mathbb{R}$ (un hiperreal) y $v, \lambda \in {}^*\mathbb{N}$ (hipernaturales), la suma $*$-finita (suma hiperreal) $\sum_{n=v}^{\lambda} x^n$ está definida punto a punto como $\left(\sum_{n=v}^{\lambda} x^n\right)(j) = \sum_{n=v(j)}^{\lambda(j)} x(j)^n$. Como $v, \lambda \in {}^\sigma\mathbb{N}$ (naturales estándar) la suma coincide con la ordinaria, pero λ puede ser infinito.

Cuando $|x| < 1$ y $x \not\cong 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ pués $\sum_{n=0}^{\Omega} x^n = (1 - x^{\Omega+1})/(1-x)$, y ya sabemos que cuando Ω es infinito $x^\Omega \cong 0$, así $\sum_{n=0}^{\Omega} x^n = 1/(1-x)$ para todo infinito Ω.

- La serie *armónica infinita* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ *diverge pués las sumas no estándar* $\sum_{k=1}^{\Omega} 1/k$ y $\sum_{k=1}^{\omega} 1/k$ no están todas cerca del mismo número finito. Por ejemplo:
$\sum_{k=1}^{2^{\omega+1}} 1/k - \sum_{k=1}^{2^\omega} 1/k = \sum_{k=2^\omega+1}^{2^{\omega+1}} 1/k = \sum_{h=1}^{2^\omega} 1/(2^\omega + h) > \sum_{h=1}^{2^\omega} 1/(2^{\omega+1}) = 2^\omega/2^{\omega+1} = 1/2$

Naturaleza de la recta geométrica

Antes de meternos de lleno en la construcción de los números hiperreales, podemos mencionar que la teoría no estándar sostiene que la línea geométrica los puede albergar, teniendo ésta así un conjunto de puntos más rico que el de los reales estándar. Según los autores de Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics [1] esta es la idea básica o descubrimiento de este nuevo análisis.

Considerando la recta como "soporte" de números, en la que comenzamos poniendo los naturales y terminamos con los reales, quienes ya no dejarían "huecos" en ella, se establece así una aplicación biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta. Cantor y Dedekind entendieron que los racionales constituían la materia prima indispensable para la construcción de la totalidad del conjunto de los números reales. Dado que los racionales se podían construir rigurosamente a partir de los naturales, la dificultad provenía de los irracionales, cuya identidad numérica estaba en entredicho. La idea de Cantor y Dedekind fue formalizar y generalizar el proceso de aproximación de algunos irracionales típicos a partir de los racionales. Dedekind a partir de la cortaduras y Cantor a través de la noción de sucesión fundamental.

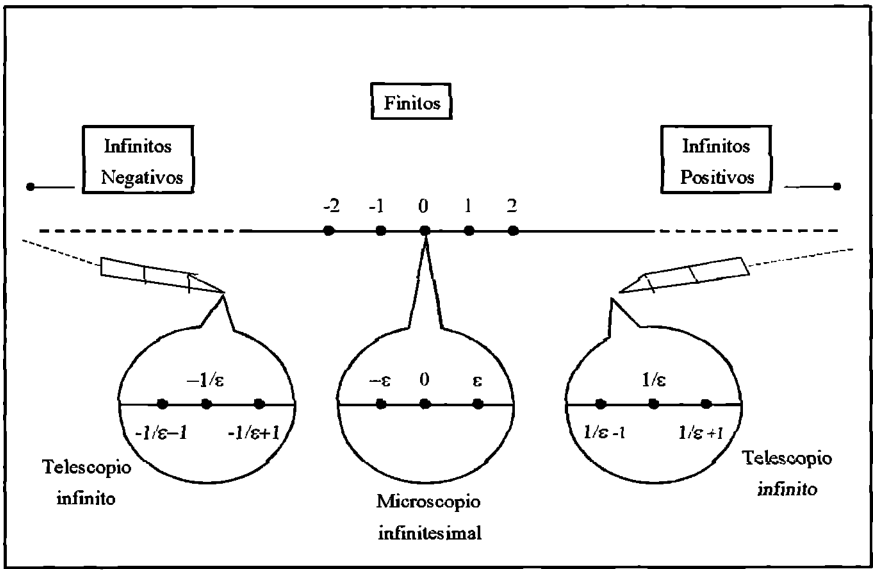
Cantor señaló que la identificación del sistema de los números con los puntos sobre la recta era una asunción que no podía ser demostrada, aunque parecía plausible y parece psicológicamente convincente. El axioma que introduce para garantizar la correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta afirma que, fijados un punto como origen y una unidad de medida, cada cantidad numérica tiene un punto determinado sobre la línea recta, cuya coordenada es igual a esa cantidad.

También Dedekind reconoce que la continuidad de la recta es necesario expresarla mediante algún axioma: "Si todos los puntos de la recta se descomponenen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes".

Puede haber otras interpretaciones de la recta a partir del desarrollo de nuevas estructuras numéricas acompañadas por la elección de una axiomática adecuada.

En el análisis no estándar de Robinson, que presentaremos aquí, se trabaja con una estructura numérica (el sistema de los números hiperreales) constituída por los números reales usuales conjuntamente con los números infinitésimos e infinitos. Los números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática, elaborada por Robinson, "más amplia" que la axiomática de $\mathbb{R}$ pero compatible con ella.

La recta hiperreal contiene, además de los números reales, los infinitésimos y los infinitos. Keisler [7] representa estos números en la recta geométrica con ayuda de dos metáforas: "un microscopio infinitesimal" y "un telescopio infinito" para sugerir, respectivamente los infinitésimos y los infinitos.



Tenemos pues, que con la construcción de modelos no estándar[1], Skolem demostró algo muy profundo epistemológica y filosóficamente hablando, demostró que los modelos matemáticos no tienen naturaleza categórica y que en última instancia, elegir tal o cual teoría es cuestión de gustos, tradición, comodidad o requerimientos técnicos. Por supuesto que existen modelos oficiales que los matemáticos nos esforzamos por resguardar, eso es innegable, pero eso no significa que sean absolutos.

2.2. El conjunto de los hiperreales

2.2.1. Preliminares

Los números reales pueden ser construídos desde los racionales por varios caminos. Uno de los métodos es adicionar a $\mathbb{Q}$ nuevos puntos que representan límites de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Recordemos brevemente esta construcción: si C es el conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy[2], y $\equiv$ es la relación de equivalencia definida en C por: $(a_n) \equiv (b_n)$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, entonces $\mathbb{R} = C/\equiv$ (el conjunto de las clases de equivalencia de C por la relación $\equiv$). Las operaciones algebraicas de adición y multiplicación se definen componente a componente, y

[1] Ver en la Sección 1.5 del Capítulo 1.

[2] Una sucesión de Cauchy de números racionales es una sucesión $(a_1, a_2, ...)$ de números racionales tales que $\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{Z}$: si $n, m \geq N_\epsilon$, entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$.

el orden sobre $\mathbb{R}$ poniendo $(a_n) < (b_n)$ si existe $\epsilon \in \mathbb{Q}$ tal que $a_n < b_n + \epsilon$ para todo n suficientemente grande. Por último, identificamos $\mathbb{Q}$ con un subconjunto de $\mathbb{R}$ mediante la aplicación $r \rightarrow (r, r, ...)$, con $r \in \mathbb{Q}$, siendo $(r, r, ...)$ la sucesión constante.

La construcción de los hiperreales que expondremos sigue el mismo esquema, adicionando a los reales, infinitesimales e infinitamente grandes por medio de sucesiones de números reales. Así como en la construcción de los reales unimos puntos que representan cierta equivalencia clásica de sucesiones convergentes, en este nuevo proceso prestaremos atención además a la rapidez de convergencia; esta distinción entre los distintos comportamientos de convergencia nos dará un conjunto de puntos más rico. [1]

Para poder hacer la construcción empezaremos dando algunas definiciones, teoremas y propiedades necesarios para tal efecto.

En nuestra exposición, consideraremos conocidas nociones básicas sobre teoría de conjuntos.

En adelante X denotará un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X.

Definición 1 *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$* ***es un filtro sobre*** *X si y sólo si:*

i. *Si A, $B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

ii. *Si $A \subseteq B \subseteq X$ y $A \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{F}$.*

iii. *$\emptyset \notin \mathcal{F}$.*

Definición 2 .

- *Sea $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$. $[A] = \{x : x \subseteq X \text{ y } A \subseteq x\}$ es llamado* ***filtro principal sobre*** *X* ***generado por*** *A*
- *Sea X un conjunto infinito.*

  Entonces $C_X = \{x : x \subseteq X \text{ y } X - x \text{ es finito}\}$ es llamado ***filtro cofinito o filtro de Fréchet en*** *X También se anota $\mathcal{F}_r$.*

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son dos filtros sobre X, diremos que $\mathcal{F}'$ **es más fino que** $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, es decir, si $(\forall E)(E \in \mathcal{F} \rightarrow E \in \mathcal{F}')$. Si además $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}'$ **es estrictamente más fino que** $\mathcal{F}$.

El conjunto de todos los filtros de X está ordenado por la relación "$\mathcal{F}'$ **es más fino que** $\mathcal{F}$". Esta relación es la inducida por la inclusión entre subconjuntos de X. Si "$\mathcal{F}'$ **es más fino que** $\mathcal{F}$" escribiremos $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$[3].

[3] Esta relación es una relación de orden ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 3 *Un filtro $\mathcal{U}$ sobre X es llamado* ***ultrafiltro*** *si no existe un filtro sobre X que es estrictamente más fino que $\mathcal{U}$. Es decir, si existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Así los ultrafiltros son elementos maximales*[4] *de la familia de todos los filtros ordenados por la relación $\leq$.*

Teorema 4 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces, siempre existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{\mathcal{H} : \mathcal{F} \leq \mathcal{H} \wedge \mathcal{H}$ es filtro sobre $X\}$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es cualquier cadena con respecto a la inclusión en $\mathcal{G}$. Mostraremos que $\cup\mathcal{C}$ es un filtro que es claramente una cota superior para esta cadena que está contenida en $\mathcal{G}$.

$\cup\mathcal{C} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \subset \cup\,\mathcal{C}$.

Sean A, $B \in \cup\mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{G}$ (pués $\mathcal{C}$ es una cadena con respecto a la inclusión en $\mathcal{G}$) tal que A, $B \in \mathcal{F}_1$. Luego $A \cap B \in \mathcal{F}_1$ pués $\mathcal{F}_1$ es un filtro. Así $A \cap B \in \cup\mathcal{C}$.

Sea $A \subset B \subset X$ y $A \in \cup\mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{F}_1 \subset \cup\mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{F}_1$. Luego $B \in \mathcal{F}_1$ ya que $\mathcal{F}_1$ es un filtro. Así $B \in \cup\mathcal{C}$.

Claramente $\emptyset \notin \cup\,\mathcal{C}$ pues $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Como consecuencia, $\cup\mathcal{C}$ es un filtro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$.

Por el Lema de Zorn[5], existe un miembro de $\mathcal{G}$ que es un maximal $\mathcal{U}$ con respecto a la inclusión.

Si $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro, entonces existe un filtro $\mathcal{U}_1$ que no es igual a $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}_1$. Pero entonces $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{G}$ en contradicción con la propiedad maximal para $\mathcal{U}$ con respecto a la inclusión.

Por lo tanto dado un filtro, existe un ultrafiltro que lo contiene[6]. ■

Proposición 5 *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *Si $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$*
3. *Si $A \subset X$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$*

[4] A es **maximal** de $\mathcal{A}$ si $\forall X \in \mathcal{A}$ tal que $A \leq X$, entonces $X = A$.

[5] **Lema de Zorn:** Si en un conjunto ordenado A todo subconjunto de A totalmente ordenado tiene cota superior en A, entonces existe un elemento maximal en A.

$B \subset A$ está **acotado superiormente o tiene cota superior** si $\forall a \in B \;\; \exists b \in A$ / $a \leq b$ (donde $\leq$ es la relación de orden del conjunto A)

[6] La inclusión en $\mathcal{G}$ a la que se hace referencia en esta demostración es la relación que definimos anteriormente entre filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ sobre X como "$\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ " si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Demostración. .

1⇒2) Supongamos que $A \notin \mathcal{F}$ y $B \notin \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{G} = \{x : (x \subseteq X) \wedge (A \cup x \in \mathcal{F})\}$. Mostraremos que $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X.

Como $X \in \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \neq \emptyset$.

Sean x, $y \in \mathcal{G}$. Entonces $A \cup x$, $A \cup y \in \mathcal{F}$ y $(A \cup x) \cap (A \cup y) \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro. Además $(A \cup x) \cap (A \cup y) = A \cup (x \cap y) \in \mathcal{F}$ luego $x \cap y \in \mathcal{G}$.

Sea $x \in \mathcal{G}$ y $x \subseteq y \subseteq X$. Entonces $A \cup x \subseteq A \cup y$ y $A \cup x \in \mathcal{F}$ por lo tanto $A \cup y \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro. Así $y \in \mathcal{G}$.

Como $A \notin \mathcal{F}$ entonces $A \cup \emptyset \notin \mathcal{F}$, luego $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

Por consiguiente $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X.

Sea $C \in \mathcal{F}$. Como $C \subseteq A \cup C$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces $A \cup C \in \mathcal{F}$ y esto implica que $C \in \mathcal{G}$. Luego $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Como $A \cup B \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{G}$, además $B \notin \mathcal{F}$ así $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Esto contradice la definición de ultrafiltro. Luego $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

2⇒3) Sea $A \subset X$. Entonces $X = A \cup (X - A) \in \mathcal{F}$, luego $A \in \mathcal{F}$ o $X - A \in \mathcal{F}$. Ambos no podrían estar pues sería contradictorio con la definición de filtro ya que estaría el $\emptyset = A \cap (X - A)$.

3⇒1) Supongamos que para cada $A \subset X$, $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ no ambos. Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces $X - A \notin \mathcal{G}$, luego $X - A \notin \mathcal{F}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$, con lo que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. En consecuencia $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. ■

Teorema 6 *Sea $p \in X$. Entonces, $[p]$ es un ultrafiltro sobre X.*

Teorema 7 *Si $\mathcal{U}_X$ no es un ultrafiltro principal, entonces $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.*

Para las demostraciones de los dos teoremas anteriores ver el apéndice A.

A los ultrafiltros que contienen a $\mathcal{C}_X$ se los llama **libres**. Se tiene, entonces, que los ultrafiltros son principales o libres.

Mencionaremos dos resultados (demostrados en el apéndice A) que nos van a permitir caracterizar los ultrafiltros libres sobre distintos conjuntos. Ellos son:

- $\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \emptyset$ y,
- $\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\nexists F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, tal que $F \in \mathcal{U}_X$.

2.2.2. Construcción de $^*\mathbb{R}$.

Como objeto básico para el análisis, $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado arquimediano y completo, es decir una estructura de la forma $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de elementos de la estructura (los números reales), $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias de adición y multiplicación y $\leq$ es la relación de orden. Además la estructura incluye la relación $=$, que es la igualdad o identidad entre miembros de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones reales, las cuales las denotaremos $A = (A_n) = (A_1, ..., A_n, ...)$ con $A_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (o equivalentemente, el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Se introduce la adición $\oplus$ y la multiplicación $\odot$ como sigue:

Adición: $A \oplus B = (A_n) \oplus (B_n) = (A_1 + B_1, ..., A_n + B_n, ...)$

Multiplicación: $A \odot B = (A_n) \odot (B_n) = (A_1 \cdot B_1, ..., A_n \cdot B_n, ...)$

Con estas operaciones $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un anillo conmutativo con unidad $1 = \{1, 1, ...\}$ y cero $0 = \{0, 0, ...\}$[7].

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene divisores de cero, es decir $A \odot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo, $\{1, 0, 1, 0, ...\}, \{0, 1, 0, 1, ...\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ambas distintas de cero y $\{1, 0, 1, 0, ...\} \odot \{0, 1, 0, 1, ...\} = \{0, 0, 0, 0, ...\}$.

Por lo anterior podemos concluir que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no es un cuerpo.

Haremos algunas consideraciones para obtener un cuerpo totalmente ordenado a partir de las sucesiones mencionadas.

En adelante $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ será siempre un ultrafiltro libre fijo sobre $\mathbb{N}$ y U será usado para representar miembros de $\mathcal{U}$.

Definición 8 *Sean A, $B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Decimos que A **y** B **son iguales respecto a** $\mathcal{U}$ si $\{n : A_n = B_n\} = U \in \mathcal{U}$ y lo denotaremos $A =_{\mathcal{U}} B$.*

Se puede ver que la relación $=_{\mathcal{U}}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Así, para cada $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el conjunto $[A] = \{B : (B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \wedge (B =_{\mathcal{U}} A)\}$ es la **clase de equivalencia** de A por la relación $=_{\mathcal{U}}$ .Recordamos que el conjunto formado por las clases de equivalencia es el conjunto cociente de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por la relación de equivalencia $=_{\mathcal{U}}$ y se anota $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}} = \{[A] : A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$. Además las clases de equivalencia constituyen una partición en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es decir:

1. Cada clase de equivalencia es no vacía.

[7] Recordando la definición de anillo conmutativo con unidad - conjunto A dotado de dos leyes internas, la primera ley de grupo abeliano o conmutativo, y la segunda asociativa y doblemente distributiva con respecto a la primera; con unidad si tiene neutro respecto de la segunda ley y conmutativo si lo es además también respecto de la segunda - se tiene que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo es tomando la adición como primera ley y la multiplicación como segunda, donde las propiedades necesarias para esto se cumplen pués se usan las propiedades de $\mathbb{R}$

2. Para cada $A, B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ocurre una de las dos situaciones, $[A] = [B]$ o $[A] \cap [B] = \emptyset$. [8]

3. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \cup\{[A] : A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Uno puede usar cualquier miembro del conjunto $[A]$ para generar la clase. Esto es, si B, $C \in [A]$, entonces $[A] = [B] = [C]$. Cuando no nos interesa quien genera la clase de equivalencia las denotaremos por letras minúsculas $a, b, c, \ldots$.

Definición 9 *El **conjunto de los números hiperreales** $^*\mathbb{R}$ es el de todas las clases de equivalencia de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por la relación $=_{\mathcal{U}}$, es decir, $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$.*[9]

Tenemos $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$, con $=_{\mathcal{U}}$ relación de equivalencia. Se puede ver que esta relación es compatible con las operaciones de suma y multiplicación definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ver el apéndice B). Luego, existen en el conjunto cociente $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ dos leyes de composición internas $^*+$ y $^*\cdot$ tal que la aplicación canónica $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to {^*\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ es un homomorfismo, es decir $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A)\ {^*+}\ \varphi(B)$ y $\varphi(A \odot B) = \varphi(A)\ {^*\cdot}\ \varphi(B)$. Además las propiedades de $\oplus$ y $\odot$ se transfieren a $^*+$ y $^*\cdot$ en $^*\mathbb{R}$. Al transferirse las propiedades de las operaciones y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ser un anillo conmutativo con unidad, entonces $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ es un anillo conmutativo con unidad. Además $^*\mathbb{R}$ es un cuerpo, o sea, sus elementos no nulos admiten un inverso multiplicativo: sea $a \in {^*\mathbb{R}}$,

---

[8] Acá el $=$ es la igualdad entre conjuntos.

[9] Lindstrom [5] define los hiperreales también a partir de sucesiones con valores reales pero no con ultrafiltros.

Primero considera una medida fija finitamente aditiva m sobre $\mathbb{N}$ tal que :

1. $\forall A \subset \mathbb{N}$, $m(A)$ está definida como 0 o 1.
2. $m(\mathbb{N}) = 1$ y $m(A) = 0\ \forall A \subset \mathbb{N}$ finito.

Finitamente aditiva quiere decir que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B \neq \emptyset$.

La medida m divide los subconjuntos de los naturales en dos clases, una con medida 1 y otra con medida 0.

La existencia de esta medida es una consecuencia del Lema de Zorn.

Se puede observar que para $A \subset \mathbb{N}$, $m(A) = 1$ o $m(A^c) = 1$ pero no ambos. Además, si $m(A) = 1$ y $m(B) = 1$ entonces $m(A \cap B) = 1$.

Considera una relación de equivalencia sobre el conjunto de las sucesiones de números reales como: $(A_n) \sim (B_n)$ si y sólo si $m(\{n : A_n = B_n\}) = 1$. Así define los hiperreales como el conjunto de las clases de equivalencia de las sucesiones reales sobre esta relación.

Se puede ver que existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los ultrafiltros de los naturales y el del conjunto de las medidas 0-1 valuadas finitamente aditivas sobre los naturales.

$a \neq 0$, entonces $\{n : A_n = 0_n\} \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\{n : A_n \neq 0_n\} \in \mathcal{U}$. Sea $b \in {}^*\mathbb{R} : B_n = \begin{cases} A_n^{-1} & \text{si } A_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } A_n = 0 \end{cases}$. Luego, $\{n : A_nB_n = 1_n\} = \{n : A_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$, entonces $[A \odot B] = [A] \,{}^* \cdot [B] = [1]$, entonces $a \,{}^* \cdot b = 1$.

Definición 10 *Decimos que* a ***es menor que*** b *o* ***que*** b ***es mayor que*** a, *si y sólo si existen* $A \in a$ *y* $B \in b$ *tales que* $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$. *Esta relación la denotaremos como* ${}^* \leq$.

La relación ${}^* \leq$ está bien definida. Luego, la estructura formada por ${}^*\mathbb{R}$ con su adición, multiplicación y orden, $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq \rangle$, es un cuerpo totalmente ordenado (ver apéndice B).

¿Por qué la utilización de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ para definir la relación de equivalencia $=_{\mathcal{U}}$?

Como sabemos, al ser $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un anillo conmutativo con unidad, una condición necesaria y suficiente para que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{M}$ sea un cuerpo es que $\mathcal{M}$ sea un ideal maximal. Rosinger [12] muestra la estrecha relación que existe entre ideales maximales de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y ultrafiltros de $\mathbb{N}$, lo que permite ver por qué utilizamos en nuestra construcción ultrafiltros. (ver apéndice C)

¿Qué sucede si usamos para la construcción de los hiperreales un ultrafiltro de los naturales que no es libre?

Si hiciéramos esto, es decir si el ultrafiltro usado no extiende al filtro cofinito, o sea, $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ sería principal, entonces $\mathcal{U} = [n_0] = \{E \subset \mathbb{N} : n_0 \in E\}$. Y, en este caso, la construcción de ${}^*\mathbb{R}$ colapsa, en el sentido que ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} \simeq \mathbb{R}$. Por ejemplo, si $n_0 = 1, \{1\} \in \mathcal{U}$, entonces identificaríamos todas las sucesiones que compartan el primer elemento; así, todas las clases de equivalencia tendrán por representante alguna sucesión constante.

Comentario 11 *Se dio una construcción de un modelo no estándar* ${}^*\mathbb{R}$ *del sistema de números reales, o más precisamente, del sistema de axiomas de la teoría de cuerpos totalmente ordenados. De las propiedades de* ${}^*\mathbb{R}$ *se sigue que el sistema de axiomas es incompleto en el sentido de Gödel, pués por ejemplo,* $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad de ser arquimediano y en* ${}^*\mathbb{R}$ *la negación de esta propiedad es verdadera. Así, los modelos* $\mathbb{R}$ *y* ${}^*\mathbb{R}$ *son dos modelos del sistema de axiomas de cuerpos totalmente ordenados que no son isomorfos. En general, existen muchos modelos mutuamente no isomorfos de la aritmética del sistema de números reales. La construcción que se presentó de* ${}^*\mathbb{R}$ *recibe el nombre de ultrapotencia.[9]*

¿Cuántos diferentes sistemas $^*\mathbb{R}$ pueden ser obtenidos eligiendo diferentes ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$? Bajo la hipótesis del continuo se puede mostrar que los sistemas $^*\mathbb{R}$ obtenidos son isomorfos.(En [9], pág. 20)[10]

Definición 12 *Se define* ***el valor absoluto*** *de un elemento de* $^*\mathbb{R}$ *como sigue: si* $a \in {}^*\mathbb{R}$, *entonces* $^*|a| = b$ *si y sólo si* $\{n : |A_n| = B_n\} \in \mathcal{U}$.

Las propiedades de valor absoluto de los números reales se verifican en los hiperreales.

Comentario 13 *Como ya lo hemos mencionado* $^*\mathbb{R}$ *es no arquimediano. En efecto, consideremos la sucesión* $A_n = n$. *Entonces* $[A] \in {}^*\mathbb{R}$. *Como el ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *es libre, entonces no contiene conjuntos finitos. Así, para cada* $m \in \mathbb{N}$, $\{n : A_n \leq m\} \notin \mathcal{U}$ *y como* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro,* $\{n : A_n > m\} \in \mathcal{U}$. *Esto quiere decir que* $[A] > [M] = m$. *Como* m *es arbitrario, entonces* $[A] > m = [M]$, *para cada* $m \in \mathbb{N}$. *Luego, no se cumple la propiedad arquimediana para* $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq \rangle$.

Se pueden identificar los miembros de la estructura $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ con miembros de la estructura $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq \rangle$ donde las relaciones $+, \cdot, \leq$ puedan ser consideradas como ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq$ pero restringidas a $\mathbb{R}$. Para ello, definimos una función inyectiva $^*: \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ tal que $^*x = [X]$, donde $X = (x, x, x, ...)$, es decir, $X_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión se llama la **sucesión constante** que representa a x en $^*\mathbb{R}$. Se puede considerar $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ como una subestructura de $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq \rangle$. Bajo esta identificación la $*$ puede ser suprimida de ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq$.

Definición 14 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, *sea* $^*x = [X] \in {}^*\mathbb{R}$, *donde* $\{n : X_n = x\} = \mathbb{N}$ *(la sucesión constante). Entonces para* $X \subset \mathbb{R}$, *sea* ${}^\sigma X = \{{}^*x : x \in X\} \subset {}^*\mathbb{R}$ *para* $n > 1$ *y para cada* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *sea* $^*x = ({}^*x_1, ..., {}^*x_n) \in {}^*(\mathbb{R}^n)$. *Para* $X \subset \mathbb{R}^n$, ${}^\sigma X = \{{}^*x : x \in X\} \subset {}^*(\mathbb{R}^n)$. *Tanto* $^*x$ *como* ${}^\sigma X$ *son llamados* ***objetos estándar*** *de* $^*\mathbb{R}$ *o* $^*(\mathbb{R}^n)$. *Así,* ${}^\sigma\mathbb{R}$ *es el conjunto identificado con los números reales.*

Entonces, cuando hablemos de **elemento estándar** (en $^*\mathbb{R}$) estamos nombrando a un miembro de $\mathbb{R}$. Cualquier otro elemento será llamado **no estándar.**

[10]Más precisamente es un resultado que se sigue de: Erdös, P., Gillman and M. Henriksen. An isomorphism theorem for real-closed fields. Annals of Mathematics 61. 542-544 (1955). No es algo que demostraremos en este trabajo aunque nos parece importante mencionar el resultado.

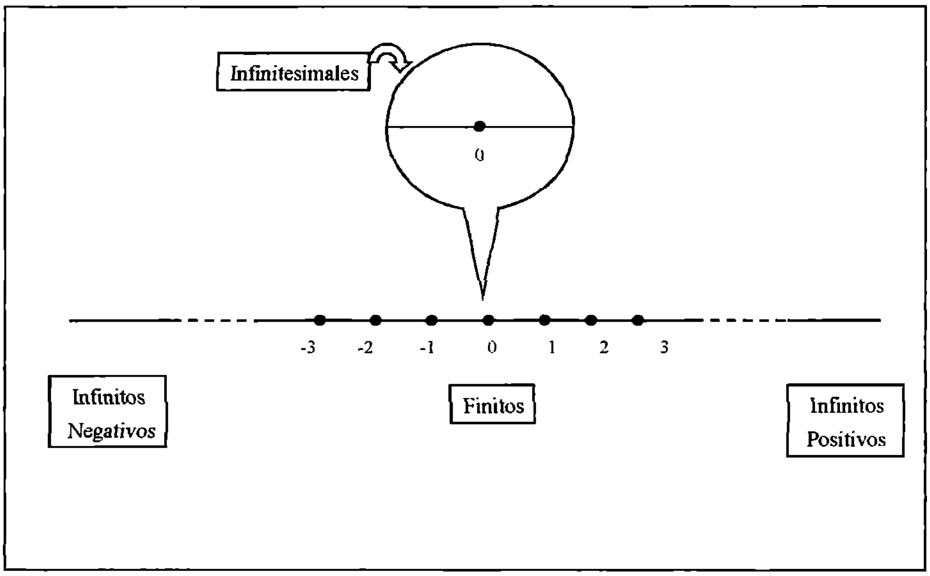
Definición 15 .

i. $a \in {}^*\mathbb{R}$ *es* ***infinitamente grande o un número infinito o infinito*** *si y sólo si* $|a| > {}^*x$ *para todo* ${}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}$.

ii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ *es un* ***infinitesimal o infinitamente pequeño*** *si y sólo si* $|a| < {}^*x$ *para todo* ${}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}^{+}$[11].

iii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ *es* ***finito o limitado*** *si y sólo si no es infinito, es decir si* $\exists\ {}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}^+$ *tal que* $|a| < {}^*x$.[12]

En la siguiente figura, ilustramos la línea hiperreal:



Ejemplo 16 .

1. *Consideremos* $A = (A_n) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ *miembro de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *y sea* ${}^*x = (x, x, x, ...) \in {}^\sigma\mathbb{R}$, *luego existe algún* $m \in \mathbb{N} : |{}^*x| < m$; *por lo tanto,* $|{}^*x| = |x| < |A_m| = m$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *lo que implica que* $\{n : A_n > |x|\} \supset$

[11] Tomaremos $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales sin el cero. (Y sus equivalencias)

[12] Las siguientes son formas equivalentes de las definiciones dadas:

i. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **infinitamente grande** si y sólo si $|a| > n\ \forall n \geq 1$.

ii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **infinitesimal** si y sólo si $|a| < 1/n\ \forall n \geq 1$.

iii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **finito** si y sólo si $\exists n \in \mathbb{N} : |a| < n$.

$\{m, m+1, ...\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Así, $a = [A]$ es un número infinito. El número $c = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ también es un número infinito que es mayor que el anterior.

2. *Como infinitesimal podemos nombrar a ^{*0}. Sea la sucesión $B = (B_n) = (1/n)$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $B_0 = 0$. Entonces $b = [B] \neq 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe algún $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ tal que $0 < 1/m < x$. Así $^*0 < (1/m) = |B_m| < |x| = {}^*x$ Como $\mathbb{N} - \{n : B_n \geq x\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, entonces $\{n : 0 < B_n < x\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ y b es así infinitesimal. El número $d = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ también es infinitesimal.*

3. *Las clases representadas por las sucesiones constantes son números finitos. Si $A_n = (1 + 1/n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$, entonces $a = [A]$ es finito pués $\exists\ ^*3 \in {}^\sigma\mathbb{R}^+ : \{n : |A_n| < 3_n\} = \{n : |1 + 1/n| < 3_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, es decir $|a| < {}^*3$.*

Notación 17 *Al conjunto de los números finitos lo denotaremos por $G(0)$ y lo llamaremos **galaxia** de $^*\mathbb{R}$ y es donde vive $^\sigma\mathbb{R}$.*
El conjunto de los infinitesimales será $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0})$

Se puede verificar fácilmente que los conjuntos $\mu(0)$ y $G(0)$ son subanillos totalmente ordenados de $^*\mathbb{R}$ sin divisores de cero y $G(0)$ tiene identidad. De igual modo, el conjunto de infinitesimales $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$.(ver apéndice B)
A partir de estas afirmaciones podemos obtener los siguientes resultados:
Si ϵ, δ son infinitesimales y a, b son finitos, entonces:

1. $-\epsilon$ es infinitesimal y $-a$ es finito.

2. $\epsilon + \delta$ es infinitesimal, $a + \epsilon$ es finito y $a + b$ es finito.

3. $\epsilon \cdot \delta$ es infinitesimal, $a \cdot \epsilon$ es infinitesimal y $a \cdot b$ es finito.

De ahora en adelante, cuando no haya confusión usaremos x en lugar de $^*x$.

Definición 18 *Sea $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$. Entonces la **mónada de** x es el conjunto $\mu(x) = \{x + \epsilon : \epsilon \in \mu(0)\}$.*

Se ve claramente que el único elemento estándar en $\mu(x)$ es x.
Podemos ver ahora, que la notación para representar al conjunto de los infinitesimales, tiene aquí su explicación, ya que cualquier infinitesimal está en la mónada del cero.

Teorema 19 *Sea A_n una sucesión de números reales. Entonces, $[A] \in \mu(x)$ para todo ultrafiltro libre si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = x$.*[13]

¿Qué nos permite decir el teorema anterior?

Siempre que tengamos una sucesión convergente a un cierto número x, esa sucesión va a estar en la mónada de dicho x, sea cual fuere el ultrafiltro libre que hallamos elegido al principio de la construcción.

¿Qué sucede con las sucesiones divergentes?

Si la sucesión tiende a infinito, sea positivo o negativo, la identificaremos con un número infinito; si la sucesión, en cambio, diverge por otra causa, se tendrán distintos casos que dependerán del ultrafiltro elegido. Por ejemplo: la sucesión definida como: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, se identificará con la sucesión constante 1, si los pares están en el ultrafiltro, y con un infinito, si son los impares los que están en el ultrafiltro.

Sea $\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R} - G(0)$ el conjunto de los números infinitos. Es claro que si $a, b \in \mathbb{R}_\infty$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}_\infty$. Si $0 < a \in \mathbb{R}_\infty$ y $a < b$, entonces $b \in \mathbb{R}_\infty$. De igual modo si $a < 0$ y $b < a$.

Se pueden verificar fácilmente las siguientes propiedades:

Teorema 20 i *Si $b \in \mathbb{R}_\infty$, entonces $1/b \in \mu(0)$.*

ii. *Si $0 \neq \epsilon \in \mu(0)$, entonces $1/\epsilon \in \mathbb{R}_\infty$.*

iii. *Sea $\epsilon \in \mu(0)$, $b \in \mu(x)$. Entonces $\epsilon + b \in \mu(x)$ y $\epsilon \cdot b \in \mu(0)$.*

iv. *Si $b \in \mathbb{R}_\infty$, y ${}^*x \neq {}^*0$, entonces $b \cdot {}^*x \in \mathbb{R}_\infty$. Si $a \in G(0) - \mu(0)$, entonces $b \cdot a \in \mathbb{R}_\infty$.*

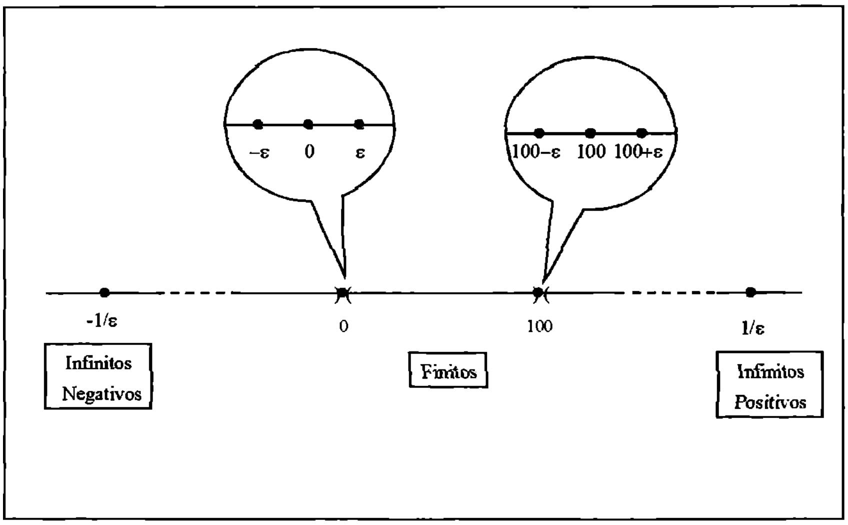
v. *Si ${}^*x < {}^*y$, entonces ${}^*x + \epsilon < {}^*y + \lambda$ para cada $\epsilon, \lambda \in \mu(0)$.*

Definición 21 *a **es infinitamente cerrado para** b si y sólo si $a - b \in \mu(0)$. Esta relación la anotamos $a \approxeq b$.*

La figura siguiente muestra un dibujo de la línea hiperreal como la ha representado Keisler [7]. Alrededor de cada número real c se encuentra una porción de la línea hiperreal compuesta de los números infinitamente cerrados

[13] Para la demostración de este teorema ver el apéndice B.

para c (se muestra bajo un microscopio infinitesimal para $c = 0$ y $c = 100$), es decir, los que componen la mónada de c. Las partes finita e infinita de la línea hiperreal están separadas una de otra por líneas de puntos.



Se tiene que la colección $\{\mu(x) : x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}\}$ es una partición de $G(0)$:

Primero veremos que $\mu(x) \cap \mu(y) \neq \emptyset$ implica que $\mu(x) = \mu(y)$.

Supongamos que existe $a \in \mu(x) \cap \mu(y)$, entonces $a \in \mu(x)$ y $a \in \mu(y)$, entonces $a = x + \epsilon$ y $a = y + \lambda$, con $\epsilon, \lambda \in \mu(0)$ y $x, y \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$. Luego, $x + \epsilon = y + \lambda$, entonces $\epsilon - \lambda = y - x$ y como $y - x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$ entonces $\epsilon - \lambda = 0$, así $y = x$. Por lo tanto, $\mu(x) = \mu(y)$.

Ahora veremos que $\cup\{\mu(x) : x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}\} = G(0)$.

$\subset$) Sea $a \in \cup\{\mu(x) : x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}\}$, entonces $a \in \mu(x)$ para algún $x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$, entonces $a = x + \epsilon$, con $x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mu(0)$. Luego, $|a| = |x + \epsilon| \leq |x| + |\epsilon| < |x| + 1$. Así $a \in G(0)$.

$\supset$) Sea $a \in G(0)$, entonces existe $x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}^{+} : |a| < x$.Sea $S = \{y \in {}^{\sigma}\mathbb{R} : y < a\}$. $S \neq \emptyset$ pues $-x \in S$. Como S está acotado superiormente tiene supremo $z \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$.

Supongamos que $|z - a|$ no es infinitesimal, entonces existe $w \in {}^{\sigma}\mathbb{R}^{+} : |z - a| > w$.

Se tiene que $z \neq a$. Luego $z < a$ ó $z > a$.

Por ser z supremo de S, no puede ocurrir que $z > a$ siendo a cota superior de S.

Si $z < a$ entonces $a - z > w$, entonces $a > w + z$, entonces $w + z \in S$ y $w + z > z$; absurdo pues z no podría ser supremo de S.

Luego, $|z - a|$ es infinitesimal, entonces $z - a = \epsilon$, entonces $a = z - \epsilon$, entonces $a \in \mu(z)$, entonces $a \in \cup\{\mu(x) : x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}\}$.

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 22 *Existe una función st de $G(0)$ en ${}^{\sigma}\mathbb{R}$ tal que, para cada $\mu(x)$, $st(\mu(x)) = {}^*x \leftrightarrow x$. La función st es llamada el* ***operador parte estándar.***
El número estándar $st(a)$ de a, será llamado ***parte estándar de*** *a*

Si $st : G(0) \to {}^{\sigma}\mathbb{R}$ es el operador parte estándar, entonces para cada $a, b \in G(0)$, se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

Teorema 23

i. $st(a \pm b) = st(a) \pm st(b)$

ii. $st(a \cdot b) = st(a) \cdot st(b)$

iii. *Si $a \leq b$, entonces $st(a) \leq st(b)$*

iv. $st(|a|) = |st(a)|$, $st(máx\{a, b\}) = máx\{st(a), st(b)\}$, $st(mín\{a, b\}) = mín\{st(a), st(b)\}$

v. $st(a) = 0$ *si y sólo si* $a \in \mu(0)$

vi. $\forall x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$, $st(x) = x$

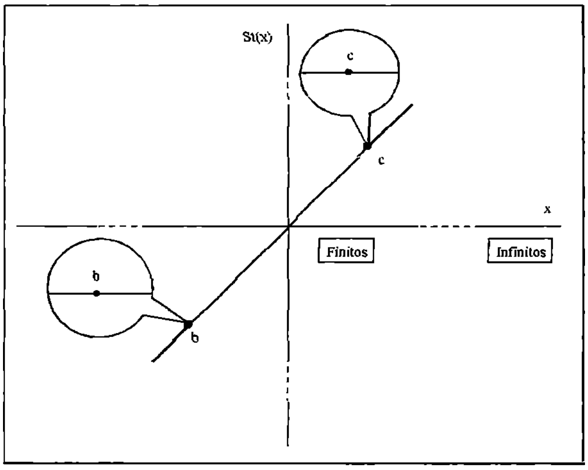
vii. $st(a) \geq 0$ *si y sólo si* $|a| \in \mu(st(a))$

viii. $a \cong b$ *si y sólo si* $a - b \in \mu(0)$ *si y sólo si* $st(a) = st(b)$

ix. *Si $st(a) \leq st(b)$, entonces $a - b \in \mu(0)$ o $a < b$*

x. *Si ${}^*0 < c$ (resp. $c < {}^*0$) y $c \in {}^*\mathbb{R}_\infty$, entonces para $a \geq {}^*0$, ${}^*0 < c + a \in {}^*\mathbb{R}_\infty$ (resp. $a \leq {}^*0$, $c + a \in {}^*\mathbb{R}_\infty$)*

Podemos ver en el siguiente esquema como sería la representación del gráfico de la función u operador parte estándar st. Recordemos que el dominio son sólo los números finitos. Además, bajo un microscopio, se puede ver la imagen de una mónada que es una línea horizontal.



Definición 24 *Para cada* $C \subset \mathbb{R}$ *(una relación* 1*-aria), el conjunto de todos los* $b \in {}^*\mathbb{R}$ *para los cuales existe un elemento* $B \in b$ *tal que* $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$*.se llama* ***extensión no estándar de*** C *y se denota por* ${}^*C$.

Sea ϕ *una relación k-aria, es decir,* $\phi \subset \mathbb{R}^k$ *(*$k > 1$*),* $(a_1, ..., a_k) = ([A_1], ..., [A_k]) \in {}^*\phi$ *si y sólo si* $\{n : (A_1(n), ..., A_k(n)) \in \phi\} \in \mathcal{U}$*.* ${}^*\phi$ *es llamada* ***extensión no estándar de*** ϕ*.*

En particular tenemos la extensión de una función, que es una relación: Si $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *es una función, la función* ${}^*F$ *se extiene de la siguiente manera,* ${}^*F(a_1, ..., a_k) = b$ *si y sólo si* $\{n \in \mathbb{N} : F(A_1(n), ..., A_k(n)) = B(n)\} \in \mathcal{U}$*.* *(*$(a_1, ..., a_k) = ([A_1], ..., [A_k])$*)*[14]

En general, se muestra que estas extensiones no estándar están bien definidas, entonces podemos agregar a nuestra estructura las relaciones adicionales n-arias ϕ_i, y conseguir las estructuras $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, \phi_i \rangle$ y $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, {}^*\phi_i \rangle$. En cuyo caso, tendríamos que $\phi \subset {}^*\phi$ pues todas estas relaciones se definen a partir de miembros de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 25 .

1. *Sea* $C = (0, 1] \subset \mathbb{R}$*, entonces* $b \in {}^*C$ *si y sólo si* $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$*. Se puede ver que* ${}^*0 \notin {}^*C$ *ya que* $\{n : 0_n \in C\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$*. En cambio* $b = (1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in {}^*C$ *pues* $\{n : 1/n \in C\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$*, así como los demás infinitesimales positivos. Podemos decir que se encuentran las mónadas de los* $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$ *con* $x \in (0, 1]$*, exceptuando el* 0 *y los infinitesimales negativos en la mónada del cero, y en la mónada del* 1 *sólo tenemos los valores de la forma* $1 + \epsilon$ *con* $\epsilon \leq 0$*, infinitesimales.*

[14] Puede verificarse que la extensión no estándar de una función es efectivamente una función.

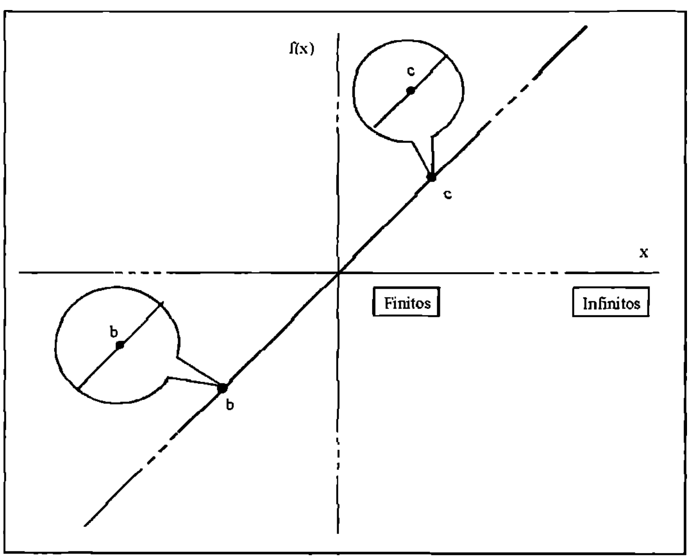
2. *Si C es cualquier conjunto finito, $^*C$ no tendrá más elementos que C pues:*

   Sea $C = \{c_1, ..., c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $b \in {}^*C$ si y sólo si $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$.

   $\{n : B_n \in C\} = \{n : B_n \in \{c_1, ..., c_k\}\} = \{n : B_n = c_1 \vee .... \vee B_n = c_k\} = \bigcup_{i=1}^{k}\{n : B_n = c_i\} \in \mathcal{U}$, entonces existe $i = 1, ..., k$ tal que $\{n : B_n = c_i\} \in \mathcal{U}$, entonces $b = [c_i]$ para algún $i = 1, ...k$. Es decir, que si $b \in {}^*C$ entonces b es una sucesión constante identificada con un elemento de C.

3. *Como ejemplo de extensión no estándar de una relación k-aria damos el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos una relación binaria ϕ definida por: $(x, y) \in \phi \leftrightarrow (\exists r)(r \in \mathbb{Q} \wedge x - y = r)$ que es de equivalencia. Su extensión no estándar toma la forma: $(x, y) \in {}^*\phi \leftrightarrow (\exists r)(r \in {}^*\mathbb{Q} \wedge x - y = r)$. Tendremos representantes nuevos de clases viejas como: $\left[(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3})\right]$, $\left[(\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n^2})\right]$. Y permanecen sin estar objetos tales como $\left[(\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})\right]$.*

4. *Como mencionamos al ser una función un caso particular de relación, tendremos una extensión de ésta. Así, si f es la función identidad sobre los números reales, su extensión $^*f$ estará definida, y $^*f(x) = x$ para todo hiperreal x. En la siguiente figura mostramos el grágico de $^*f$.*



Comentario 26 *Aunque el gráfico anterior es similar con el del operador parte estándar, se pueden observar diferencias como el dominio: el de st sólo es $G(0)$ y en cambio el de ${}^*f$ es ${}^*\mathbb{R}$; además de lo diferente que se ven con el microscopio infinitesimal.*

Un detalle importante es que st no es extensión de ninguna función estándar sino que es una función no estándar pura.

Se tienen las siguientes propiedades:

Teorema 27

i. ${}^*\emptyset = \emptyset$

ii. *Si* $X \subset \mathbb{R}$ *[respectivamente* $\mathbb{R}^n$*], entonces* ${}^\sigma X \subset {}^*\mathbb{R}$ *[respectivamente* ${}^*(\mathbb{R}^n)$*].*

iii. *Si* $X \subset \mathbb{R}$*, entonces* ${}^*x \in {}^\sigma X$ *si y sólo si* $x \in X$ *si y sólo si* ${}^*x \in {}^*X$.

iv *Sea* $X \subset \mathbb{R}$*. Entonces,* $X \neq \emptyset$ *y finito si y sólo si* ${}^*X = {}^\sigma X$.

v. *Sean* $X, Y \subset \mathbb{R}$*,entonces* $X \subset Y$ *si y sólo si* ${}^*X \subset {}^*Y$.

vi. *Sean* $X, Y \subset \mathbb{R}$*,entonces* ${}^*(X - Y) = {}^*X - {}^*Y$.

vii. *Sean* $X, Y \subset \mathbb{R}$*,entonces* ${}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y$*. Además* ${}^*(X \cap Y) = = {}^*X \cap {}^*Y$.

viii. *Sea* $X_1, ..., X_n \subset \mathbb{R}$*. La relación n-aria* $\phi = (X_1 \times .... \times X_{n-1}) \times X_n$ *si y sólo si* ${}^*\phi = {}^*(X_1 \times .... \times X_{n-1}) \times {}^*X_n$.

Se tiene que ${}^*(X_1 \times .... \times X_{n-1}) \times {}^*X_n = ({}^*X_1 \times .... \times {}^*X_{n-1}) \times {}^*X_n$*. Así,* ${}^*(\mathbb{R}^n) = ({}^*\mathbb{R})^n$.

ix. *Las declaraciones **iii.**, **iv.**, **v.**, **vi.**y **vii.** son verdaderas para* $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

2.3. Lógica formal y principio de transferencia

Ya hemos visto que $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son similares en muchos aspectos; por ejemplo, ambos son cuerpos totalmente ordenados. Mostraremos ahora en qué sentido $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son similares, es decir, especificaremos en más detalle cuáles propiedades de $\mathbb{R}$ se trasladan a ${}^*\mathbb{R}$. A este resultado se lo conoce como **Principio de Transferencia del Análisis No-estándar.**

Consideremos la estructura $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, |\cdot|, 0, 1 \rangle$, la cual está asociada a un lenguaje simple $L(\mathbb{R})$ que puede ser usado para describir el tipo de propiedades de $\mathbb{R}$ que son preservadas bajo la aplicación $^* : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$.

Las fórmulas elementales de $L(\mathbb{R})$ son expresiones de la forma:

i. $t_1 + t_2 = t_3$

ii. $t_1 \cdot t_2 = t_3$

iii. $|t_1| = t_2$

iv. $t_1 = t_2$

v. $t_1 < t_2$

vi. $t_1 \in X$

donde t_1, t_2, t_3 son las constantes 0 o 1 o una variable para un número arbitrario $r \in \mathbb{R}$, y X es una variable para un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Con las fórmulas elementales generamos todas las fórmulas o expresiones de $L(\mathbb{R})$ usando los conectivos proposicionales:
$\wedge$ (conjunción),
$\vee$ (disyunción),
$\sim$ (negación),
$\to$ (implicación),
y los cuantificadores:
$\forall x$ (para todo $x \in \mathbb{R}$, cuantificador universal) y
$\exists x$ (para algún $x \in \mathbb{R}$, cuantificador existencial),
por las reglas:

vii. Si Φ y Ψ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$, entonces $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\sim \Phi$, $\Phi \to \Psi$ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

viii. Si Φ es una fórmula de $L(\mathbb{R})$ y x es una variable numérica, entonces $\forall x \Phi$ y $\exists x \Phi$ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

Donde fuera necesario agregaremos corchetes a las fórmulas de $L(\mathbb{R})$ para evitar confusiones.

El lenguaje $L(\mathbb{R})$ es básicamente un lenguaje de primer orden, es decir, se permite cuantificación de números pero no cuantificación de conjuntos.

El lenguaje $L(\mathbb{R})$ es potencialmente expresivo: $(x + 1) \cdot y = z$ no es una fórmula elemental en nuestro sentido; sin embargo, podemos escribir fácilmente una fórmula de $L(\mathbb{R})$ que tome el significado de esta expresión: $\exists x_1[x + 1 = x_1 \wedge x_1 \cdot y = z]$.

Otro ejemplo, en el lenguaje $L(\mathbb{R})$, se pueden escribir propiedades como:

Reflexividad: $\forall x[x \leq x]$

Antisimetría: $\forall x \forall y[x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y]$

Transitividad: $\forall x \forall y \forall z[[x \leq y \wedge y \leq z] \rightarrow x \leq z]$

Totalidad: $\forall x \forall y[x \leq y \vee x = y \vee y \leq x]$

También podemos escribir en una fórmula $\Phi(X)$ que X es un conjunto abierto:

$$\Phi(X) =_{def} \forall y[y \in X \rightarrow \exists z[z > 0 \wedge \forall y_1[|y - y_1| < z \rightarrow y_1 \in X]]] \qquad (2.1)$$

Una fórmula Φ de $L(\mathbb{R})$ es en general de la forma $\Phi = \Phi(X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n)$, donde $x_1, ..., x_n$ son variables numéricas libres de Φ, es decir, variables que no se encuentran afectadas por los cuantificadores $\forall$ o $\exists$, y $X_1, ..., X_m$ variables de conjuntos libres de Φ. Cada fórmula en $L(\mathbb{R})$ tiene una interpretación inmediata en la estructura $\mathbb{R}$; por ejemplo, si $\Phi(X)$ es la fórmula **2.1** y $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\Phi(A)$ expresa el hecho que A es un abierto en $\mathbb{R}$.

Pero toda fórmula de $L(\mathbb{R})$ puede además ser interpretada en la estructura extendida ${}^*\mathbb{R}$:

- Para interpretar las declaraciones elementales mencionadas en **i.** y **ii,** usaremos las definiciones dadas de adición y multiplicación en ${}^*\mathbb{R}$.
- Para interpretar **iii,** usaremos la definición de valor absoluto.
- Para interpretar **iv.**y **v.**usaremos las definiciones de igualdad respecto al ultrafiltro y de orden, respectivamente.
- Para interpretar **vi,** usaremos la definición de extensión no estándar de un objeto estándar.

Dado que los simbolos lógicos tienen un significado fijo sobre cualquier dominio, entonces cada fórmula Φ en $L(\mathbb{R})$ tiene una interpretación en $\mathbb{R}$ y otra en ${}^*\mathbb{R}$. Volviendo a la fórmula **2.1** $\Phi(X)$; dado $A \subseteq \mathbb{R}$, ya hemos explicado que queremos decir con $\Phi(A)$. Ahora podemos interpretar también $\Phi({}^*A)$ bajo ${}^*\mathbb{R}$ como que ${}^*A$ es abierto en ${}^*\mathbb{R}$.

Ya podemos establecer el resultado principal acerca de las extensiones de los ultrafiltros, el cual tiene como corolario el principio general de transferencia.

Teorema 28 (Teorema de Los) *Sea $\Phi(X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n)$ una fórmula de $L(\mathbb{R})$. Entonces para cada $A_1, ..., A_m \subseteq \mathbb{R}$ y $a_1, ..., a_n \in {}^*\mathbb{R}$, se tiene que $\Phi({}^*A_1, ..., {}^*A_m, a_1, ..., a_n)$ si y sólo si $\{k \in \mathbb{N} : \Phi(A_1, ..., A_m, a_1(k), ..., a_n(k))\} \in \mathcal{U}$.*

Teorema 29 (Principio de Transferencia) *Sea $\Phi(X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n)$ una fórmula de $L(\mathbb{R})$. Entonces para cada $A_1, ..., A_m \subseteq \mathbb{R}$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Phi(A_1, ..., A_m, r_1, ..., r_n)$ es verdadero en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\Phi({}^*A_1, ..., {}^*A_m, {}^*r_1, ..., {}^*r_n)$ es verdadero en ${}^*\mathbb{R}$.*

Las demostraciones de los dos teoremas anteriores se pueden encontrar en Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics [1].

La existencia de la aplicación $^* : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ satisfaciendo el principio del transferencia es todo lo que necesitamos para el análisis no estándar elemental.

Para ver cómo usaremos el principio de transferencia, consideremos la siguiente proposición: si $\mu(r) \subseteq {}^*E$, para todo $r \in E$, entonces $E \subseteq \mathbb{R}$ es abierto. Podemos demostrarlo por dos caminos:

1. Supongamos que E no es abierto, entonces $\exists r \in E : \forall U_r$ (entorno de r), $U_r \cap E^C \neq \emptyset$. Encontraremos un elemento $x \in \mu(r) : x \notin {}^*E$: para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos $r_n \notin E : |r - r_n| < 1/n$. Sea $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $A(n) = r_n$. Por la definición de extensión no estándar de un objeto estándar se tiene que $a = [A] \notin {}^*E$ (pués $r_n \notin E$) . Pero $a \in \mu(r)$ ya que por su construcción $|{}^*r - a| < \delta$, donde δ es el infinitesimal asociado con la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En la prueba anterior trabajamos dentro del modelo, ahora usamos transferencia: sea $a \in E$, como $\mu(a) \subseteq {}^*E$, la declaración $\Phi(X, x) = \exists z[0 < z \wedge \forall y[|x - y| < z \to y \in X]]$ es verdadera en ${}^*\mathbb{R}$ cuando X es interpretado como ${}^*E$ y x como ${}^*a$. Por transferencia $\Phi(E, a)$ es verdadero en $\mathbb{R}$, lo que quiere decir que algún entorno estándar de a está contenido en E, es decir, E es abierto.

Otros ejemplos en los que usaremos transferencia:

Ejemplo 30 *Ya dijimos que si tenemos una función f podemos extenderla a una función ${}^*f$, pero nos quedaba comprobar que realmente ${}^*f$ es una función, esto lo vemos usando el principio de transferencia de la siguiente manera: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces se tiene que la declaración $\forall x \forall y \forall z(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \wedge (f(x) = y \wedge f(x) = z) \to y = z)$ es verdadera. Por* *transferencia* $\forall x \forall y \forall z(x \in {}^*\mathbb{R}, y \in {}^*\mathbb{R}, z \in {}^*\mathbb{R} \wedge ({}^*f(x) = y \wedge {}^*f(x) = z) \rightarrow y = z)$ *también es verdadera (donde* ${}^*f$ *es la extensión de* f*), entonces* ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ *es también una función.*

Ejemplo 31 *Sea* f *una función real definida sobre un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*. La función* f *tiene un máximo absoluto sobre* I *si y sólo si existe un punto* $s \in I$ *tal que* ${}^*f(x) \leq f(s)\ \forall x \in {}^*I$*.*
Demostración. $\Rightarrow$) *Si* f *tiene un máximo absoluto sobre* I*, entonces* $\exists s \in I : f(x) \leq f(s)\ \forall x \in I$*. Por transferencia* ${}^*f(x) \leq {}^*f(s) = f(s)\ \forall x \in {}^*I$*, con* $s \in I$ *como queríamos.*
$\Leftarrow$) *Si* $\exists s \in I : {}^*f(x) \leq f(s)\ \forall x \in {}^*I$*, en particular para* $x \in I$*. Entonces* $f(x) \leq {}^*f(x) \leq f(s)$ *y así* f *tiene un máximo absoluto sobre* I*.* ■

2.4. Universo extendido

Para trabajar en análisis más general que el cálculo, necesitamos considerar sistemas matemáticos que contengan entidades correspondientes a conjuntos de conjuntos, conjuntos de espacios de funciones, etc. Por ejemplo, si queremos probar teoremas que involucren el conjunto de los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, o el conjunto de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Para ello introduciremos el concepto de superestructura.

2.4.1. Superestructuras

Partiendo de un conjunto básico X, construiremos una superestructura $V(X)$ que contiene todas las entidades encontradas normalmente en la matemática.

Además, generalizaremos la construcción de ultrapotencia y de la aplicación $^* : X \rightarrow {}^*X$ para superestructuras, obteniendo una superestructura $V({}^*X)$ y una aplicación $^* : V(X) \rightarrow V({}^*X)$.

Definición 32 *Sea* X *un conjunto no vacío que contiene al menos los números naturales y sean:*

$$\begin{aligned} V_0(X) &= X \\ V_{n+1}(X) &= V_n(X) \cup \mathcal{P}(V_n(X)), n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

La ***superestructura sobre X*** *es la unión numerable* $V(X) = \bigcup_n V_n(X)$*.*

El análisis clásico vive dentro de $V(\mathbb{R})$.

Definición 33 *Los elementos de X se llaman* ***individuales.***

Los elementos de $V(X)$ se llaman ***entidades.***

Si $x \in V(X)$, el ***rango de x*** *es el menor n tal que $x \in V_n(X)$.*

Ejemplo 34 *Si $X = \mathbb{N}$.*

Algunas entidades de $V_1(\mathbb{N})$ son $7, \{7\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$.

Algunas entidades de $V_2(\mathbb{N})$ son $7, \{7\}, \{\{7\}\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}$, $\{A \subset \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$.

Comentario 35 *Si $X \subseteq Y$ entonces $V(X) \subseteq V(Y)$.*

$X = V_0(X) \subseteq V_1(X) \subseteq .... \subseteq V(X)$

$X = V_0(X) \in V_1(X) \in .... \in V(X)$

$X = V_0(X), V_1(X), ... \in V(X)$

Proposición 36 .

1. *El conjunto vacío es una entidad es decir, $\emptyset \in V(X)$*
2. *$\forall A \subseteq V(X)$, $A \in V(X)$ si y sólo si $A \subseteq V_n(X)$, para algún $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si A es una entidad pero no es un individual, entonces es un subconjunto de $V(X)$. Es decir si $A \in V(X) - X$ entonces $A \subseteq V(X)$.*
4. *$V(X)$ es transitivo en el siguiente sentido: si A es una entidad y $a \in A$, entonces a es una entidad. Es decir, si $A \in V(X)$ y $a \in A$, entonces $a \in V(X)$.*
5. *Si A es una entidad y $B \subseteq A$ entonces B es una entidad. Es decir, si $A \in V(X)$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in V(X)$.*
6. *Si A es una entidad $\mathcal{P}(A)$ es una entidad.*
7. *$a_1, ..., a_m \in V_n(X)$ entonces $\{a_1, ..., a_m\} \in V_{n+1}(X)$.*
8. *Si $A_i \in V_n(X) - X$ entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in V_n(X)$.*
9. *$A \in V_{n+1}(X)$, $A \cap X = \emptyset$ entonces $\bigcup\limits_{B \in A} B \in V_n(X)$.*

Comentario 37 *Se tiene que $A \subseteq V(X)$ no implica que $A \in V(X)$. Por ejemplo: si $a \in X$, entonces $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, ...\} \subseteq V(X)$ y $A \notin V(X)$, pues $A \in V(X)$ si $A \in V_n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

El universo extendido de análisis no estándar será obtenido postulando una extensión ${}^*\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}$ y una aplicación $^* : V(\mathbb{R}) \to V({}^*\mathbb{R})$ que tendrá propiedades similares a la aplicación $^* : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ construída anteriormente.

Extenderemos la construcción de ultrapotencia para demostrar que la aplicación entre superestructuras $^* : V(\mathbb{R}) \to V({}^*\mathbb{R})$ satisface un principio de transferencia análogo al dado para la estructura ${}^*\mathbb{R}$.

Haremos esta construcción en dos partes: primero construiremos una ultrapotencia acotada de $V(\mathbb{R})$ usando un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ (similar a lo hecho para ${}^*\mathbb{R}$). Luego aplicaremos la ultrapotencia acotada sobre la superestructura $V({}^*\mathbb{R})$ de tal manera que la aplicación $^* : V(\mathbb{R}) \to V({}^*\mathbb{R})$ obedezca el principio de transferencia.

1) Construcción de la ultrapotencia acotada:

Definición 38 *Una **sucesión** $(A_1, A_2, ...)$ **de elementos de** $V(\mathbb{R})$ **es acotada** si existe un $n \in \mathbb{N}$ fijo tal que $A_i \in V_n(\mathbb{R})$ $\forall i \in I, I$ un conjunto infinito de índices.*[15]

Definición 39 *Dos **sucesiones** A **y** B **son equivalentes con respecto al ultrafiltro libre** $\mathcal{U}$ si y sólo si $\{i \in \mathbb{N} : A_i = B_i\} \in \mathcal{U}$, lo anotamos $A =_{\mathcal{U}} B$.*

Es claro que la relación definida anteriormente es una relación de equivalencia entre elementos de $V(\mathbb{R})$.

Notación 40 *Anotamos $A_{\mathcal{U}}$ a la clase de equivalencia de A, es decir $A_{\mathcal{U}} = \{B : A =_{\mathcal{U}} B\}$.*

Definición 41 *Se llama **ultrapotencia acotada** a:*

$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} = \{A_{\mathcal{U}} : A$ *es una sucesión de* $V(\mathbb{R})$ *acotada*$\}$

Definición 42 *Se tiene la siguiente **relación número de miembros** $\in_{\mathcal{U}}$ en la ultrapotencia:*

$A_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} B_{\mathcal{U}}$ *si y sólo si* $\{i \in \mathbb{N} : A_i \in B_i\} \in \mathcal{U}$.

[15] Por ejemplo, $A_n = (0, 1/n)$ es una sucesión de elementos de $V(\mathbb{R})$ acotada pues existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (con $I = \mathbb{N}$).

En cambio, la sucesión definida de la siguiente manera:

$A_0 = 1$

$A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{\{1\}\}$, y así siguiendo...

no es acotada ya que $A_n \in V_n(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Existe una aplicación propia natural $i : V(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ tal que $i(A) = (A, A, ...)_{\mathcal{U}}$, la clase de equivalencia correspondiente a la sucesión constante.

2) Aplicación $^*V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ sobre $V(^*\mathbb{R})$:

$^*\mathbb{R}$ es la ultrapotencia (acotada) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$. Pero $^*V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ no será lo mismo que la superestructura completa $V(^*\mathbb{R})$ sino se que tendrá $^*V(\mathbb{R}) \subset V(^*\mathbb{R})$.

Construimos una aplicación $j : {}^*V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} \rightarrow V(^*\mathbb{R})$ tal que:

1. j es la identidad sobre $^*\mathbb{R}$.
2. Si $A_{\mathcal{U}} \notin {}^*\mathbb{R}$ entonces $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) : B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$.

La aplicación j se construye en etapas:

Sea $V_k(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})/ =_{\mathcal{U}} =\{A_{\mathcal{U}} : A$ es una sucesión de $V_k(\mathbb{R})\}$. La ultrapotencia acotada es la unión de la cadena $^*\mathbb{R} = V_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} \subseteq .... \subseteq V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} \subseteq ....$ y podemos definir j por inducción.

Para $k = 0$, j es la identidad.

Si $A_{\mathcal{U}} \in V_{k+1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ y $A_{\mathcal{U}} \notin {}^*\mathbb{R}$, entonces $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) : B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$ pues si $B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}$, se tiene que $B_{\mathcal{U}} \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$, que quiere decir que $j(B_{\mathcal{U}})$ está definido en la etapa previa de la construcción por inducción, que es la hipótesis inductiva.

Combinando i y j tenemos un modelo del universo no estándar extendido:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \\
V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{j} & V(^*\mathbb{R}) \\
i \nwarrow & & \nearrow * \\
 & V(\mathbb{R}) &
\end{array}
$$

donde $^*A = j(i(A))$, para todo $A \in V(\mathbb{R})$.

La aplicación * satisface las siguientes propiedades:

1. * preserva $\in$: si A es una entidad de $V(X)$ y $a \in A$, $^*a \in {}^*A$.

2. * preserva igualdad: si A es una entidad de $V(X)$, $^*\{(x,x) : x \in A\} = \{(y,y) : y \in {}^*A\}$.

3. * preserva conjuntos finitos: $^*\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{^*a_1, {}^*a_2, ..., {}^*a_n\}$, para $a_1, a_2, ..., a_n \in V(X)$.

4. * preserva operaciones básicas de conjuntos:

   - $^*\emptyset = \emptyset$
   - $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$
   - $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$
   - $^*(A - B) = {}^*A - {}^*B$
   - $^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$

   donde A y B son entidades.

5. * produce una extensión propia: $^*A \supseteq {}^{\sigma}A$ con la igualdad si y sólo si A es un conjunto finito.

La estructura $\mathbb{R}$ tiene asociado un lenguaje elemental $L(\mathbb{R})$, que usamos para dar la precisión necesaria al principio de transferencia; necesitamos una herramienta formal similar para extenderlo.

2.4.2. El lenguaje restringido $L(V(\mathbb{R}))$ y el principio de transferencia extendido

El lenguaje $L(V(\mathbb{R}))$ será una extensión del lenguaje $L(\mathbb{R})$. Adicionamos a nuestro stock de fórmulas elementales expresiones de la forma $X \in Y$, donde X e Y son variables para conjuntos arbitrarios en $V(\mathbb{R})$. Mantenemos los símbolos lógicos de $L(\mathbb{R})$, pero adicionamos cuantificadores limitados de conjuntos: $\forall X \in Y$ (para todos los conjuntos X que son elementos de Y), $\exists X \in Y$ (para algún conjunto X que es elemento de Y). Fórmulas Φ de $L(V(\mathbb{R}))$ son entonces construídas exactamente de la misma manera que las fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

Una fórmula Φ de $L(V(\mathbb{R}))$ puede ser interpretada de manera natural en cada una de las estructuras $V(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ y $V(^*\mathbb{R})$; notar que en $V(\mathbb{R})$ y $V(^*\mathbb{R})$ tenemos la interpretación estándar del símbolo $\in$, en $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/ =_{\mathcal{U}}$ usamos $\in_{\mathcal{U}}$ como se introdujo antes.

Dada una fórmula $\Phi = \Phi(X_1, ..., X_n)$ con $X_1, ..., X_n$ parámetros libres de conjuntos, y dados conjuntos $A_1, ..., A_n \in V(\mathbb{R})$, tenemos que $\Phi(A_1, ..., A_n)$

es una declaración en $V(\mathbb{R})$ obtenida dando a las variables libres $X_1, ..., X_n$ los valores $A_1, ..., A_n$, respectivamente. De manera similar interpretamos $\Phi(^*A_1, ...,^* A_n)$ como una condición sobre $V(^*\mathbb{R})$ obtenida dando a cada X_k el valor $^*A_k = j(i(A_k)), k = 1, ..., n$.

Teorema 43 (Principio de transferencia extendido) *Sea $A_1, ..., A_n \in V(\mathbb{R})$. Toda declaración Φ en $L(V(\mathbb{R}))$ que es verdadera para $A_1, ..., A_n$ en $V(\mathbb{R})$ es verdadera para $^*A_1, ...,^* A_n$ en $V(^*\mathbb{R})$, y recíprocamente.*

2.4.3. Conjuntos internos

Una de las cosas que hacemos cuando introducimos una nueva estructura matemática es buscar las clases de conjuntos "buenos" (como conjuntos abiertos y funciones continuas en topología, conjuntos y funciones medibles en teoría de la medida). En análisis no estándar los conjuntos "buenos" son llamados internos.

Definición 44 *Sea $A \in V(^*\mathbb{R})$, entonces:*

i. *A se llama **estándar** si $A = {}^*B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$,*

ii. *A se llama **interno** si $A \in {}^*B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$, y*

iii. *A se llama **externo** si A no es interno.*

Cada conjunto estándar es interno pues: si A es un conjunto estándar, entonces $A = {}^*B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$. Luego, como $B \in \mathcal{P}(B)$ y * preserva la relación de pertenencia, $^*B \in {}^*\mathcal{P}(B)$. Así $A \in {}^*\mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(B) \in V(\mathbb{R})$, con lo que A es interno.

Sin embargo, no todo conjunto interno es estándar, por ejemplo, $[0, 1]$ es un conjunto interno pues $[0, 1] \in {}^*[0, 1]$ y sin embargo $[0, 1] \neq {}^*B$ cualquiera sea $B \in V(\mathbb{R})$.

Cada elemento de un conjunto interno es interno pues: si $A \in V(^*\mathbb{R}) \Longrightarrow$ para algún k, $A \subseteq V_k(^*\mathbb{R}) \Longrightarrow A \in V_{k+1}(^*\mathbb{R}) \Longrightarrow$ (por ser A interno) $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$. Sea $D \in A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ entonces $D \in {}^*(V_k(\mathbb{R}) \Longrightarrow D$ es interno.

Comentario 45 *Describiremos en detalle los conjuntos internos en el modelo: sea A interno, entonces $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ para algún $k \geq 0$. Esto quiere decir que A será de la forma $A = j(A_{\mathcal{U}})$, para algún $A_{\mathcal{U}}$. Por la construcción de j, tenemos que $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ si y sólo si $j(A_{\mathcal{U}}) \in j(i(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ si y sólo si $A_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} i(V_{k+1}(\mathbb{R}))$, donde i es la aplicación de $V(\mathbb{R})$ sobre la ultrapotencia. Por la definición de $\in_{\mathcal{U}}$ se tiene que $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ si y sólo si*

$\{i \in \mathbb{N} : A_i \in V_{k+1}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{U}$, *donde* $(A_1, A_2, ...)$ *es la sucesión acotada que define a* $A_{\mathcal{U}}$. *Así los conjuntos internos son precisamente los objetos obtenidos comenzando con una sucesión acotada arbitraria* $(A_1, A_2, ...)$; *los objetos estándar son obtenidos comenzando de una sucesión constante* $(A, A, ...)$.

Como un ejemplo consideremos la sucesión $(A_1, A_2, ..., A_n, ...)$, donde $A_n = [0, n] \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto interno (pero no estándar) definido por esta sucesión es el intervalo $[0, \omega] \subseteq {}^*\mathbb{R}$, donde ω es el número infinito en ${}^*\mathbb{R}$ definido por la sucesión $(1, 2, ..., n, ...)$; es decir, un número $x \in {}^*\mathbb{R}$ está en $[0, \omega]$ si y sólo si $0 \leq x \leq \omega$.

Tenemos la siguiente propiedad de conjuntos internos.

Proposición 46 .

i. *Cada subconjunto interno no vacío de* ${}^*\mathbb{N}$ *tiene un menor elemento.*

ii. *Cada subconjunto interno no vacío de* ${}^*\mathbb{R}$ *con cota superior tiene supremo.*

iii. *Si* A *es interno y* $\mathbb{N} \subseteq A$, *entonces* A *contiene algún número natural infinito, es decir, un elemento de* ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

iv. *Si* A *es interno y cada infinito* $n \in {}^*\mathbb{N}$ *está en* A, *entonces* A *contiene algún estándar* $n \in \mathbb{N}$.

v. *Si un conjunto interno* A *contiene a todo infinitesimal positivo, entonces* A *contiene algún estándar real positivo.*

vi. *Si un conjunto interno* A *contiene a todo estándar real positivo, entonces* A *contiene algún positivo infinitesimal.*

Ejemplo 47 .

De ***i.*** *se sigue que* ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *es externo ya que no existe menor elemento en* ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{R}$ *son externos por* ***ii.***: $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$ *y está acotado superiormente por un* $a \in {}^*\mathbb{N}$, *y sin embargo no tiene supremo; lo mismo para* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{R}$.

Las mónadas también son externas pues están acotadas y no tienen supremo.

También se tiene que si A, B son internos, entonces $A \cup B, A \cap B, A - B$ y $A \times B$ son internos.

¿Cómo reconocemos un conjunto como interno? Para ello tenemos el siguiente principio:

Proposición 48 (Definición de principio interno) *Sean $A_1, ...A_n$ conjuntos internos en $V(^*\mathbb{R})$ y sea $\Phi(X_1, ..., X_n, x)$ una declaración en $L(V(\mathbb{R}))$. Entonces el conjunto $\{x \in A_1 : \Phi(A_1, ..., A_n, x)\}$ es interno.*

Ejemplo 49 *Sean las funciones f y g internas, es decir, internas como conjuntos en $V(^*\mathbb{R})$. Supongamos que tenemos probado que para todo $t \in {}^*[0,1]$ existe algún infinitesimal $\delta_t > 0$ tal que $|f(t) - g(t)| < \delta_t$. ¿Existe δ tal que $|f(t) - g(t)| < \delta$ para todo $t \in {}^*[0,1]$?*

La respuesta es si y se sigue inmediatamente. El conjunto $A = \{r \in {}^*\mathbb{R} : r > 0 \wedge \forall t \in {}^*[0,1](|f(t) - g(t)| < r)\}$ es interno por la definición de principio interno. Además A contiene cada positivo estándar real, por lo tanto, por la proposición 46 vi., contiene algún infinitesimal positivo δ como queríamos..

2.4.4. Límite, continuidad y derivada

Para terminar este capítulo daremos algunas definiciones que nos van a permitir entender formalmente los ejemplos presentados en la introducción del mismo.

Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una aplicación $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con lo cual tiene una extensión a una aplicación ${}^*a : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$. Para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$ escribimos $a_n = {}^*a(n)$. Usamos $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ para denotar la sucesión extendida.

En la siguiente proposición caracterizamos la noción de límite en términos no estándar y además damos una definición de qué quiere decir que una sucesión estándar converja.

Proposición 50 *$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ si y sólo si $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.*

Demostración. Notar que el lado izquierdo de la equivalencia tiene su significado estándar dentro de $V(\mathbb{R})$. El lado derecho es una declaración sobre el universo extendido $V(^*\mathbb{R})$.

$\Longrightarrow$) Si $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que la siguiente declaración es verdadera en $V(\mathbb{R}) : \forall m \in \mathbb{N}\ (m \geq n \to |a - a_m| < \epsilon)$. Por el principio de transferencia, la declaración $\forall m \in {}^*\mathbb{N}\ (m \geq n \to |a - a_m| < \epsilon)$ es verdadera en $V(^*\mathbb{R})$. Si $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces $|a - a_\omega| < \epsilon$ es verdadero en $V(^*\mathbb{R})$. Como esto es verdadero para todo estándar $\epsilon > 0$, quiere decir que la diferencia $|a - a_\omega|$ es infinitesimal, es decir, $a_\omega \cong a$.

$\Longleftarrow$) Si $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces, en particular, la siguiente declaración es verdadera en $V({}^*\mathbb{R})$, donde $\epsilon > 0$ es algún real estándar: $\Phi(\epsilon, {}^*\mathbb{N})$ sii $\exists n \in {}^*\mathbb{N}\, \forall m \in {}^*\mathbb{N}\, (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \epsilon)$. Por transfrencia $\Phi(\epsilon, \mathbb{N})$ es verdadera en $V(\mathbb{R})$. Como ϵ es arbitrario esto quiere decir que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ en el sentido estándar.[16]

■

Ahora vemos brevemente continuidad. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real estándar, donde I es algún intervalo en $\mathbb{R}$.

Proposición 51 *f es continua en $a \in I$ sii $f(x) \cong f(a)$ para todo $x \in {}^*I$ tal que $a \cong x$.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del principio de transferencia, teniendo las correspondientes declaraciones. La condición suficiente puede ser demostrada también de la siguiente forma:

Supongamos que $f(x) \cong f(a)$ para todo $x \in {}^*I$ tal que $a \cong x$. Fijamos un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, es decir, $\epsilon > 0$. El conjunto $A = \{\delta \in {}^*\mathbb{R}/\forall x \in {}^*I(|a - x| < \delta \rightarrow |f(a) - f(x)| < \epsilon)\}$ es interno por la definición de principio interno y contiene todo infinitesimal positivo. Por la proposición 46 v., se tiene que A contiene algún positivo $\delta \in \mathbb{R}$; se tiene la continuidad en el sentido estándar.

■

Ahora introducimos la versión no estándar de la derivada.

Definición 52 *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea dx un infinitesimal diferente de cero. Llamamos $dy = f(a+dx) - f(a)$ la diferencial de f en $a \in I$. Si la parte estándar de dy/dx existe y es la misma para todo dx no nulo, entonces f tiene derivada en a y $f'(a) = st(dy/dx)$.*

Volviendo al ejemplo presentado en la introducción donde queríamos calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = a$, dado $dx \neq 0$ un infinitesimal y considerando el cociente entre un cambio infinitesimal de la función y un cambio infinitesimal en $x = a$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} = \frac{(a+dx)^2 - a^2}{dx} = 2a + dx$$

[16] Podría ser demostrado también de la siguiente manera:
Sea $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ y fijamos $\epsilon > 0$ en $\mathbb{R}$. El conjunto $A = \{n \in {}^*\mathbb{N}$ tal que $|a - a_m| < \epsilon$, $m \geq n, \forall\, m \in {}^*\mathbb{N}\}$ es interno por la definición de principio interno. Por la proposición 46 iv. A contiene algún finito $n_\epsilon \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces convergencia en el sentido estándar.

Luego, la pendiente de la recta tangente buscada será $2a$, que es la parte estándar de $2a + dx$.

¿Cómo vemos que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$?

Sea $dx > 0$ un infinitesimal, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} = \frac{f(dx)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$ y $st(1) = 1$.

Sea $dx < 0$ un infinitesimal, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} = \frac{f(dx)}{dx} = -\frac{dx}{dx} = -1$ y $st(-1) = -1$.

Luego, la parte estándar de dy/dx es distinta para distintos infinitesimales, entonces f no es derivable en 0.

Bibliografía

[1] Albeverio Sergio, Hoegh-Krohn Raphael, Fenstad Jens Erik, Lindstrom Tom. Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Academic Press, Inc. 1986.

[2] Coriat Moisés y Scaglia Sara. Representación de los números reales en la recta.

[3] Herrmann Robert A. Nonstandard analysis. A simplified approach (arXiv:math.GM/0310351 v2 1 Nov 2003).

[4] Hurd, Alberte E y Loeb, Peter A. An introduction to Nonstandard Real Analysis. Academic Press. 1985.

[5] Ivorra, Carlos. Análisis no estándar.

[6] K. D. Stroyan y W. A. J. Luxemburg. Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press, Inc. 1976.

[7] Keisler H. Jerome. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals On-line Edition.

[8] Lindstrom Tom. An invitation to nonstandard analysis. Department of Mathematics. University of Trondheim. N-7034 Trondheim.NTH, Norway.

[9] Luxemburg W. A. J. Non-standard analysis. Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers. Mathematics Departmet. California Institute of Technology. Pasadena, California 1973.

[10] Recalde, Luis Cornelio. La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.

[11] Robinson, Abraham. Non-Standard Analysis. North-Holland Publishing Company Amsterdam-London. Segunda Edición. 1970.

[12] Rosinger Elemér E. Short introduction to nonstandard analysis (arXiv:math.GM/0407178 v1 10 Jul 2004).

[13] Scarfiello Roque. Análisis no estándar y Mecánica cuántica. Julio de 1992 (Notas).

Apéndice A

Filtros y ultrafiltros

Aquí demostraremos, para el lector interesado, algunos resultados que hemos usado a lo largo del trabajo.

Teorema 53 *Sea $p \in X$. Entonces $[p]$ es un ultrafiltro sobre X.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$. Entonces $p \in A$ o $p \in X - A$. Así, ($A \subseteq X$ y $\{p\} \subseteq A$) o ($A \subseteq X$ y $\{p\} \subseteq X - A$), entonces $A \in [p]$ o $X - A \in [p]$. Por lo tanto, por la proposición 5, $[p]$ es un $\mathcal{U}_X$ pues $[p]$ es un filtro. ■

Teorema 54 *Si $\mathcal{U}_X$ no es un ultrafiltro principal, entonces $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.*

Demostración. Sea $\{p_0, ..., p_k\} \subset X$ un conjunto arbitrario finito no vacío. Como $X - (X - \{p_0, ..., p_k\}) = \{p_0, ..., p_k\}$ finito, entonces $X - \{p_0, ..., p_k\} \in \mathcal{C}_X$. Como $\mathcal{U}_X$ no es principal, entonces $\mathcal{U}_X \neq [p_i]$, $i = 0, ..., k$. Por lo tanto, para cada $i = 0, ..., k$ existe algún $A_i \subseteq X$ tal que $A_i \in \mathcal{U}_X$ y $A_i \notin [p_i]$, o sea $p_i \notin A_i$ (pues si $p_i \in A_i$ para algún $A_i \in \mathcal{U}_X$, entonces $[p_i] \subseteq \mathcal{U}_X$ y como $\mathcal{U}_X$ es ultrafiltro, sería $\mathcal{U}_X = [p_i]$), luego $\{p_0, ..., p_k\} \cap (A_0 \cap A_1 \cap .... \cap A_k) = \emptyset$. Además $(A_0 \cap A_1 \cap .... \cap A_k) \in \mathcal{U}_X$ pues $\mathcal{U}_X$ es un filtro, entonces $\{p_0, ..., p_k\} \notin \mathcal{U}_X$ (si no fuese así, $\{p_0, ..., p_k\} \cap (A_0 \cap A_1 \cap .... \cap A_k) = \emptyset$ estaría en $\mathcal{U}_X$). Por lo tanto se tendrá que $X - \{p_0, ..., p_k\} \in \mathcal{U}_X$ (por la proposición 5). Así $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$. ■

Proposición 55 *$\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \emptyset$.*

Demostración. .

$\Rightarrow$) $\mathcal{U}_X$ es libre, entonces, $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.

$$\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \underbrace{\cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}}_{=\emptyset^1} \cap\{F : F \in \mathcal{U}_X - \mathcal{C}_X\} = \emptyset$$

$\Leftarrow$) Queremos ver que $\mathcal{U}_X$ es libre, es decir que contiene a $\mathcal{C}_X$, o equivalentemente que $\mathcal{U}_X$ no es principal.

Supongamos que $\mathcal{U}_X$ es principal, entonces $\mathcal{U}_X = [A] = \{B \subset X \wedge A \subset B\}$, con $A \subset X$ no vacío. Luego $\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\}$ debe contener a A, lo que contradice la hipótesis. ∎

Proposición 56 *$\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\nexists F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, tal que $F \in \mathcal{U}_X$.*

Demostración. .

$\Rightarrow$) Sea $F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, entonces $X - F \in \mathcal{C}_X$ (por definición del filtro cofinito), luego $X - F \in \mathcal{U}_X$ (por ser $\mathcal{U}_X$ libre) y así $F \notin \mathcal{U}_X$, por ser un ultrafiltro.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}_X$ no es libre, entonces $\mathcal{C}_X \nsubseteq \mathcal{U}_X$, luego $\exists A \in \mathcal{C}_X$ tal que $A \notin \mathcal{U}_X$ y así $X - A$ es finito y $X - A \in \mathcal{U}_X$, en contradicción con la hipótesis. ∎

[1] Se tiene que $X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} \subset X$. Si $a \in X$ entonces $X - \{a\} \in \mathcal{C}_X$ luego $X - (X - \{a\}) = \{a\} \subset X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}$ pues $X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} = \cup\{X - F : F \in \mathcal{C}_X\}$ y así $X \subset X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}$ con lo cual son iguales y $\cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} = \emptyset$.

Apéndice B

Algunos resultados de ${}^*\mathbb{R}$

Sea ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$, con $=_{\mathcal{U}}$ relación de equivalencia. Se tiene que la relación $=_{\mathcal{U}}$ es compatible con las operaciones de suma y multiplicación definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- ¿Si $A =_{\mathcal{U}} B$ y $C =_{\mathcal{U}} D$ entonces $A \oplus C =_{\mathcal{U}} B \oplus D$?

  Como $A =_{\mathcal{U}} B$ entonces $U_1 = \{n : A_n = B_n\} \in \mathcal{U}$, y como $C =_{\mathcal{U}} D$ entonces $U_2 = \{n : C_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Además, $U_1 \cap U_2 \subset \{n : A_n + C_n = B_n + D_n\} = U_3$.

  Como $\mathcal{U}$ es un filtro se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ al igual que U_3.

  Luego, $A \oplus C =_{\mathcal{U}} B \oplus D$, y así $=_{\mathcal{U}}$ es compatible con la suma definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- ¿Si $A =_{\mathcal{U}} B$ y $C =_{\mathcal{U}} D$ entonces $A \odot C =_{\mathcal{U}} B \odot D$?

  Como $A =_{\mathcal{U}} B$ entonces $U_1 = \{n : A_n = B_n\} \in \mathcal{U}$, y como $C =_{\mathcal{U}} D$ entonces $U_2 = \{n : C_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Además, $U_1 \cap U_2 \subset \{n : A_n \cdot C_n = B_n \cdot D_n\} = U_3$.

  Como $\mathcal{U}$ es un filtro se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ al igual que U_3.

  Luego, $A \odot C =_{\mathcal{U}} B \odot D$, y así $=_{\mathcal{U}}$ es compatible con la multiplicación definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposición 57 *La relación dada por* ${}^* \leq$ *está bien definida (no depende de las sucesiones elegidas en las clases).*

Demostración. Sean $A, C \in a$ y $B, D \in b$. Luego, $A =_{\mathcal{U}} C$ y $B =_{\mathcal{U}} D$, es decir $\{n : A_n = C_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Queremos ver que $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ si y sólo si $\{n : C_n \leq D_n\} \in \mathcal{U}$.

Por ser $\mathcal{U}$ un filtro $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : A_n = C_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : A_n = C_n\} \subset \{n : C_n \leq B_n\}$, entonces $\{n : C_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$.

Como $\{n : C_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n = D_n\} \subset \{n : C_n \leq D_n\}$, entonces $\{n : C_n \leq D_n\} \in \mathcal{U}$.

De la misma manera sale la otra implicación.. ■

Teorema 58 *La estructura* $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq\rangle$ *es un cuerpo totalmente ordenado.*

Demostración. Se tiene que la estructura $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, \rangle$ es un cuerpo, hay que ver que $^*\leq$ es un orden total y que se verifican las leyes de monotonía de la adición y multiplicación:

i. $\{n : A_n \leq A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, entonces $a\ {}^*\leq a$. Así $^*\leq$ es reflexiva.

ii. Sean $[A]\ {}^*\leq [B]$ y $[B]\ {}^*\leq [A]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n \leq A_n\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n \leq A_n\} \subset \{n : B_n = A_n\} \in \mathcal{U}$. Luego, $[A] =_{\mathcal{U}} [B]$ y así $^*\leq$ es antisimétrica.

iii. Sean $[A]\ {}^*\leq [B]$ y $[B]\ {}^*\leq [C]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n \leq C_n\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n \leq C_n\} \subset \{n : A_n \leq C_n\} \in \mathcal{U}$. Luego, $[A]\ {}^*\leq [C]$ y así $^*\leq$ es transitiva.

Por los puntos anteriores tenemos que $^*\leq$ es un orden sobre $^*\mathbb{R}$. Probaremos que se cumple la ley tricotómica:.

Sean $[A]$, $[B] \in {}^*\mathbb{R}$. Supongamos que $[A]\ {}^*\not\leq [B]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \notin \mathcal{U}$ y por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $\{n : B_n < A_n\} \in \mathcal{U}$, por lo tanto se cumple la ley tricotómica y así $[B]\ {}^*< [A]$ ó $[A]\ {}^*< [B]$ ó $[A] =_{\mathcal{U}} [B]$.

Luego $^*\leq$ es un orden total sobre $^*\mathbb{R}$.

Falta ver que se satisfacen las dos propiedades relativas a este orden y los hiper-operadores, es decir, las leyes de monotonía:

i. Sean $[A]$, $[B]$, $[C] \in {}^*\mathbb{R}$ y $[A]\ {}^*\leq [B]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : A_n \leq B_n\} \subset \{n : A_n + C_n \leq B_n + C_n\} \in \mathcal{U}$ por ser $\mathcal{U}$ un filtro. Así $[A]\ {}^*+ [C]\ {}^*\leq [B]\ {}^*+ [C]$.

ii. Sean $[A], [B], [C] \in {}^*\mathbb{R}, [A]\ {}^*\leq [B], [0]\ {}^*\leq [C]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : 0 \leq C_n\} \in \mathcal{U}$ Luego $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : 0 \leq C_n\} \subset \{n : A_n \cdot C_n \leq B_n \cdot C_n\} \in \mathcal{U}$, por ser $\mathcal{U}$ un filtro. Así, $[A]\ {}^*\cdot [C]\ {}^*\leq [B]\ {}^*\cdot [C]$.

Finalmente, podemos concluir que $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq\rangle$ es un cuerpo totalmente ordenado. ■

Teorema 59 *Los conjuntos $\mu(0)$ y $G(0)$ son subanillos totalmente ordenados de $^*\mathbb{R}$ sin divisores de cero y $G(0)$ tiene identidad.*

Demostración. Para verificar que $G(0)$ es un anillo totalmente ordenado sin divisores de cero sólo nos resta ver que es cerrado bajo las operaciones, ya que el resto de las condiciones se verifican en $^*\mathbb{R}$

Como $^*1 \in G(0)$, éste tiene unidad.

Mencionaremos primero que la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ también se transfiere a $^*\mathbb{R}$ así como la propiedad: el valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos.

Sean a, $b \in G(0)$, entonces existen $^*x$, $^*y \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$ tales que $|a| < {}^*x$ y $|b| < {}^*y$. Luego $|a+b| \leq |a| + |b| < {}^*x + {}^*y = {}^*(x+y)$. Luego $a + b \in G(0)$.

Sean a, $b \in G(0)$, entonces existen $^*x$, $^*y \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$ tales que $|a| < {}^*x$ y $|b| < {}^*y$. Luego $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| < {}^*x \cdot {}^*y = {}^*(x \cdot y)$. Luego $a \cdot b \in G(0)$.

Para ver que $\mu(0)$ es un anillo totalmente ordenado, procedemos de igual manera que con $G(0)$.

■

Recordamos que si A es un anillo, $I \subset A$ es un ideal de A si y sólo si es un subanillo de A y para cada $a \in A, b \in I$, el producto $a \cdot b \in I$. Un ideal $I \subset A$ es maximal si y sólo si para cualquier otro ideal I_1, tal que $I \subset I_1$, entonces $I = I_1$ o $I = A$.

Teorema 60 *El conjunto de infinitesimales $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$.*

Demostración. Primero veremos que es un ideal (que es subanillo ya lo probamos): sean $a \in G(0)$ y $\epsilon \in \mu(0)$. Entonces existe un $^*x \in {}^{\sigma}\mathbb{R}$ tal que $|a| \leq {}^*x$, es decir $\{n : |A_n| \leq X_n = x\} \in \mathcal{U}$. Sea $\epsilon = g = [G]$ y consideremos $y \in \mathbb{R}^+$ arbitrario tal que $g < {}^*y$, es decir $\{n : |G_n| \leq Y_n = y\} \in \mathcal{U}$ Entonces, $F = \{n : |A_n| \leq X_n = x\} \cap \{n : |G_n| \leq Y_n = y\} \in \mathcal{U}$ por ser filtro. Luego, $F \subset \{n : |A_n \cdot G_n| \leq x \cdot y\} \in \mathcal{U}$ pues es filtro. Como $x \cdot y$ es arbitrario, $a \cdot \epsilon \in \mu(0)$. Así, $\mu(0)$ es un ideal de $G(0)$.

Para ver que es maximal, tomemos I ideal de $G(0)$ tal que $\mu(0) \subset I$, y supongamos que $\mu(0) \neq I$. Entonces existe algún $b \in I - \mu(0)$, $b \neq 0$ y existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{n : |B_n| \geq x\} \in \mathcal{U}$. Luego, $\{n : |1/B_n| \leq 1/x\} \in \mathcal{U}$. En consecuencia $[B^{-1}] = b^{-1} \in G(0)$ entonces $^*1 = b \cdot b^{-1} \in I$ pues I es un ideal de $G(0)$ y por esto $I = G(0)$. Por lo tanto, $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$.

■

Teorema 61 *Sea A_n una sucesión de números reales. Entonces $[A] \in \mu(x)$ para todo ultrafiltro libre si y sólo si $\lim_{n\to\infty} A_n = x$.*

Demostración. Primero notemos que para un ultrafiltro libre fijo $\mathcal{U}$ y su mónada $\mu(x)$, $[A] \in \mu(x)$ si y sólo si existe algún $\epsilon \in \mu(0)$ tal que $[A] = x + \epsilon$, $[A] - x = \epsilon$ si y sólo si $[A] - x \in \mu(0)$ si y sólo si $\{n : |A_n - X_n| < r\} \in \mathcal{U}$, para todo positivo r.arbitrario.

$\Rightarrow$) Supongamos que $A_n \nrightarrow x$, entonces existe un positivo r tal que $X = \{n : |A_n - x| \geq r\}$ es un conjunto infinito y cada subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ está en algún ultrafiltro libre $\mathcal{U}_1$. Así $X \in \mathcal{U}_1$ y por ser $\mathcal{U}_1$ un ultrafiltro, el complemento de X , $\{n : |A_n - x| < r\} \notin \mathcal{U}_1$ entonces $[A] \notin \mu(x)$ (por lo dicho al principio de la demostración), lo cual contradice la hipótesis. Luego, $A_n \to x$.

$\Leftarrow$) Asumimos que $A_n \to x$ y tomamos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre. Entonces para un positivo r arbitrario tenemos que $|A_n - x| < r$ para un número infinito de A_n, así $\{n : |A_n - x| < r\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Como r es arbitrario $[A] \in \mu(x)$. ■

Apéndice C

Ideales y filtros

A cada $A = (A_n)$ asociamos un conjunto (su conjunto cero) dado por $C(A) = \{n \in \mathbb{N} : A(n) = 0\} \subset \mathbb{N}$.

Dado un ideal $\mathcal{I} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le asociamos el conjunto de sus conjuntos cero:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{C(A) : A \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \tag{C.1}$$

que resulta ser un filtro sobre los $\mathbb{N}$:

- Como $\mathcal{I} \neq \emptyset$ por ser ideal, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.
- Sean $C(A)$, $C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces A, $B \in \mathcal{I}$. Luego $A^2 + B^2 \in \mathcal{I}$ (por ser $\mathcal{I}$ un ideal) y $C(A^2 + B^2) = \{n : (A^2 + B^2)(n) = 0\} = \{n : A^2(n) + B^2(n) = 0\} = \{n : A^2(n) = 0 \wedge B^2(n) = 0\}$ $= \{n : A(n) = 0 \wedge B(n) = 0\} = \{n : A(n) = 0\} \cap \{n : B(n) = 0\} = C(A) \cap C(B)$ y así $CA) \cap C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.
- Sean $C(A) \subseteq C(B) \subseteq \mathbb{N}$ y $C(A) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces $A \in \mathcal{I}$. Sea $F(n) = \begin{cases} 0 & n \in C(B) \\ 1 & n \notin C(B) \end{cases}$, entonces $F \cdot A \in \mathcal{I}$ pués $\mathcal{I}$ es un ideal. Además $C(F \cdot A) = \{n : (F \cdot A)(n) = 0\} = \{n : F(n) = 0 \vee A(n) = 0\} = \{n : F(n) = 0\} \cup \{n : A(n) = 0\} =$
  $C(B) \cup C(A) = C(B)$ y así $C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.
- Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $C(A) = \emptyset$, es decir $A(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, podemos definir $B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $B(n) = 1/A(n)$. Así $A \cdot B = 1 \in \mathcal{I}$, con lo que $\mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, lo que contradice la hipótesis. Entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.

Luego $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ es un filtro sobre los $\mathbb{N}$.

Existe, además, la construcción inversa: si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre los $\mathbb{N}$, le asociamos el conjunto de funciones:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{A : \mathbb{N} \to \mathbb{R} / C(A) \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \tag{C.2}$$

que resulta ser un ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ distinto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- Sean $A,\, B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, entonces $A + B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$?

  Como $A,\, B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ se tiene que $C(A),\, C(B) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $C(A) \cap C(B) \in \mathcal{F}$. Además $C(A) \cap C(B) = \{n : A(n) = 0\} \cap \{n : B(n) = 0\} = \{n : A(n) = 0 \wedge B(n) = 0\} \subseteq \{n : (A+B)(n) = 0\} = C(A+B)$, entonces $C(A+B) \in \mathcal{F}$; luego $A + B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

- Sean $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ y $B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $A \cdot B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$?

  Como $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ se tiene que $C(A) \in \mathcal{F}$. Además $C(A) = \{n : A(n) = 0\} \subseteq \{n : (A \cdot B)(n) = 0\} = C(A \cdot B)$, entonces por ser $\mathcal{F}$ un filtro, $C(A \cdot B) \in \mathcal{F}$ y así $A \cdot B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

- Falta ver que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Si $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ entonces $C(A) \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $C(A) \neq \emptyset$, con lo que $\nexists A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ tal que $A(n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así $1 \notin \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ quedando demostrado que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Luego $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es un ideal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Podemos ver que dado un ideal $\mathcal{I}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y un filtro $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$, tenemos lo siguiente:

1. $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$: $A \in \mathcal{I}$ si y sólo si $C(A) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ si y sólo si $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I}}}$ (por C.1 y C.2)

2. $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$: $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $M = C(A)$ con $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$. Y $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ si y sólo si $C(A) \in \mathcal{F}$ (por C.1 y C.2).

Por **1** y **2** se sigue que cada ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es de la forma $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, donde $\mathcal{F}$ es cierto filtro en $\mathbb{N}$. Además, cada filtro sobre $\mathbb{N}$ es de la forma $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, donde $\mathcal{I}$ es cierto ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Notamos que dado un filtro $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es un ideal maximal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Es decir, todos los ideales maximales $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son de la forma: $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}$ cuando $\mathcal{U}$ son ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Esto lo podemos deducir por lo hecho anteriormente y la definición de ultrafiltro.Análisis no estándar