

EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN LINEAL: SU ARTICULACIÓN EN LA ENSEÑANZA

Costa Viviana A¹, Bordogna Clelia M¹, Torroba Patricia L¹

¹IMApEC. Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata.

Calle 1 y 47. La Plata. vacosta@ing.unlp.edu.ar.

Resumen

En el marco de un proyecto de investigación sobre enseñanza de las Ciencias que se desarrolla en la Facultad de Ingeniería, UNLP, se presenta una experiencia de articulación vertical entre las asignaturas de Física I y Matemática C. La temática vinculada entre ambas asignaturas es desde el punto de vista de la física, el movimiento armónico simple y desde la matemática, las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineal.

La propuesta didáctica consistió en la participación activa de profesores de ambas disciplinas en el espacio del aula, en una clase de Matemática C. Los docentes y alumnos inicialmente trabajaron en matemática con las ecuaciones diferenciales de segundo orden desde el punto de vista algebraico o del cálculo. Luego, se abordó la descripción del movimiento armónico simple, con la participación activa de los alumnos, retomando las Leyes de Newton. Se obtuvo como consecuencia un caso particular de los estudiados previamente y se reinterpretaron los resultados. Se destacó el vínculo entre las ecuaciones diferenciales y situaciones físicas concretas que los alumnos estudiarán y su importancia en la ingeniería.

Esta experiencia tiene como objetivos generales reforzar y reflexionar sobre conceptos aprendidos, presentar una conexión práctica e inmediata de los conocimientos adquiridos en materias correlativas y generar una visión global del tema en el contexto del plan de estudios y su aplicación en el ejercicio profesional.

Se realizaron pre-test y pos-test que ayudaron a evaluar la experiencia.

Palabras claves: matemática, física, articulación, movimiento armónico simple, ecuaciones diferenciales.

INTRODUCCIÓN

La problemática de la articulación

En el contexto del diseño de una experiencia compartida por dos cátedras, se generó la necesidad de definir el concepto asociado a la palabra *articulación*. Se asume la articulación como la necesaria continuidad, coherencia, secuenciación y gradualidad que debe existir en el proceso de enseñanza y de aprendizaje integral. Debe contemplar todos los aspectos comprometidos en el proceso: desde las estrategias didácticas, contenidos, hasta los aspectos de organización institucional, tendiente a evitar aislamientos, contradicciones y duplicaciones entre los distintos niveles.

Cuando se habla de articulación debe especificarse a qué ámbito de continuidad se está aludiendo para poder pensar en acciones, mecanismos, actores y niveles de responsabilidad que garanticen su consecución.

Justificación de la articulación

Diversos tópicos son comunes a las disciplinas de Física y Matemática. Se debe a que ellas estuvieron ligadas desde siempre y los descubrimientos que se realizaban en el campo de la ciencia necesitaron del formalismo matemático para sustentarse.

El ejemplo más significativo son las ecuaciones diferenciales que sirvieron y sirven de instrumento para estudiar los cambios, analizar y predecir con un mismo cuerpo de leyes, los sistemas físicos en movimiento. En particular, el interés estaba centrado en el campo de la astronomía. Las investigaciones científicas estaban basadas metodológicamente a partir de la observación y la obtención de leyes descriptivas de los movimientos, por ejemplo, las Leyes de Kepler. Es Newton, quien aborda el problema de los movimientos de los cuerpos celestes, desde otro punto de vista: En lugar de observar y describir, busca la causa de los movimientos y cambios de movimientos del conjunto de cuerpos. A partir del conocimiento empírico de la Ley de Gravitación Universal, el problema matemático fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer éxito lo obtuvo Newton, expuesto en los Principia en el siglo XVII (Boido, 1996) al demostrar que a partir de sus Tres Principios y de la Ley de Gravitación Universal se podían deducir las tres leyes planetarias de Kepler. El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción gravitatoria común fue estudiado intensamente por Euler, Laplace y Lagrange obteniendo sólo resultados parciales.

Escenario académico

En la Facultad de Ingeniería de la UNLP los actuales planes de estudio tienen entre otros, el objetivo de integrar las asignaturas de matemática con el resto de las áreas y materias, mejorar el rendimiento de los estudiantes en dichas asignaturas y disminuir la dificultad de éstos en recuperar los conceptos matemáticos en otros contextos. El esquema se basa en la organización de los contenidos alrededor de ejes conceptuales comunes y en la redistribución de los recursos existentes a fin de mejorar la calidad de la enseñanza impartida. Se define, un trayecto básico de matemática, integrado por tres materias consecutivas, dos de Cálculo Diferencial e Integral (Matemática A y B) y la tercera que incluye los contenidos básicos de Álgebra Lineal (Matemática C); y un trayecto básico de Física integrado por tres materias que son Física I, II y III (Tabla 1) (Bucari et al, 2004), (Bucari et al, 2005).

| Eje Matemático | Contenidos | Eje Físico | Contenidos | Semestre |
|----------------|--|------------|---|----------|
| Matemática A | Derivación en una y varias variables | ----- | ----- | 1 |
| Matemática B | Integración en una y varias variables- Cálculo vectorial - Series numéricas | Física I | Mecánica Clásica. Introducción a la Termodinámica | 2 |
| Matemática C | Algebra Lineal- Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias | Física II | Electromagnetismo Clásico | 3 |
| ----- | ----- | Física III | Óptica y Física Moderna | 4 |

Tabla 1

Las asignaturas involucradas en la articulación vertical, pertenecen al Área Básica: Física I (FI) dictada en el segundo semestre para todas las especialidades y Matemática C (MC), asignatura del trayecto Matemática, del tercer semestre.

Tema abordado: El Movimiento Armónico Simple (MAS)

El MAS es uno de los movimientos idealizados más importante, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente (Alonso-Finn, 1995).

Los conceptos involucrados en este tratamiento, resultan ser el primer nivel de entendimiento para otros sistemas más complejos que se expresan como combinación lineal del caso sencillo. Las oscilaciones juegan un papel muy importante fuera del campo de la mecánica, por ejemplo como las vibraciones de las moléculas de un sólido alrededor de su posición de equilibrio (modelo mecanicista), los electrones en una antena emisora que oscilan rápidamente o las vibraciones de un diapason que están generando una onda sonora. También en fenómenos biológicos aparecen las oscilaciones, por ejemplo, en la producción del sonido por las cuerdas vocales o por el movimiento de las alas de los insectos. Aunque la naturaleza de los sistemas oscilatorios pueda ser diversa, las ecuaciones que los describen presentan similitudes, razón por la cual es importante estudiar al oscilador armónico mecánico con cierto detalle (Feynman, 1971).

Los tópicos antes mencionados, profundamente relacionados, son contenidos de las asignaturas FI y MC (ver Tabla 1), abordados en cada una de ellas desde su perspectiva particular en el Área Básica.

Tratamiento del tema en el aula de Física

Durante el trayecto de FI y en el marco teórico de la Mecánica Newtoniana, los estudiantes abordan el estudio de sistemas sometidos a fuerzas no constantes como la que describe la Ley de Hooke : $F(t) = -k \cdot x(t)$. El ejemplo paradigmático para tratar este tema es el de un cuerpo de masa “ m ” unido a un resorte de constante elástica “ k ”, debido a que bajo condiciones de idealidad, este sistema mecánico puro no requiere de ninguna aproximación relevante para describir un MAS.

El tema se aborda a partir de la observación de distintos dispositivos como péndulos simples, de torsión, dispositivos conteniendo resortes, bandas elásticas, etc. Mediante una breve instancia dialogada entre docentes y estudiantes, se concluye que todos los dispositivos ejecutan movimientos *oscilatorios y periódicos*. En una segunda instancia se modela el sistema físico y su entorno, aclarando todas las aproximaciones y suposiciones del mismo y finalmente se plantea formalmente el problema en el marco teórico newtoniano. El desarrollo del Segundo Principio de Newton en particular, nos conduce a la ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, asociada a la dinámica del sistema:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1).$$

Es así como se llega a la definición del MAS. Todos los sistemas, cuya ecuación dinámica está representado por la ecuación (1) es un MAS. En algunos sistemas como el masa-resorte (Figura 1, situación 1) surge directamente del desarrollo del Segundo Principio, en otros como el péndulo simple, (Figura 1, situación 2) la ecuación (1) se obtiene sólo cuando el sistema es

apartado un pequeño ángulo desde el punto de equilibrio y por último existen sistemas como por ejemplo, el dispositivo de retroceso rápido, (Figura 1, situación 3) que a pesar de tratarse de un movimiento oscilatorio y periódico, nunca se llega a formular para su matematización, una ecuación del tipo (1).

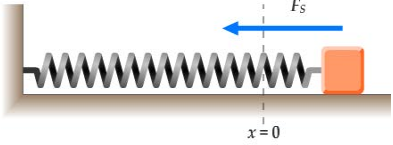
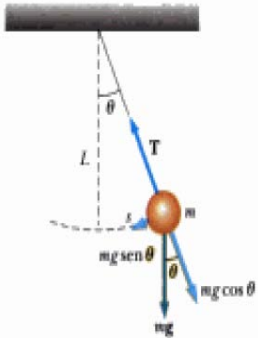
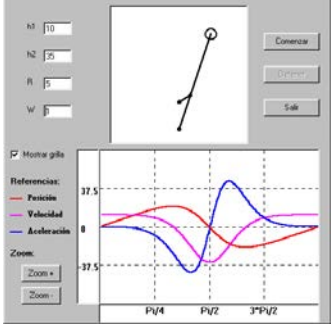
| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| <p>Situación 1</p> <p>Sistema masa-resorte</p> $\omega^2 = \frac{k}{m}$ | <p>Situación 2</p> <p>Péndulo simple o matemático</p> $\omega^2 = \frac{L}{g}$ | <p>Situación 3</p> <p>Mecanismo de retroceso rápido</p> $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ |

Figura 1

Es interesante destacar que en la expresión de la constante ω^2 quedan contenidos los aspectos característicos del sistema particular Figura 1.

La búsqueda de la solución de la ecuación (1), en FI, se ensaya a partir de correlacionar los aspectos cualitativos del sistema físico, con los conocimientos matemáticos de funciones de una variable, estudiadas en el transcurso de la materia Matemática A.

Las funciones periódicas y oscilatorias más sencillas que surgen son: seno y coseno. Luego a partir de las condiciones iniciales del sistema físico, se esboza la o las posibles soluciones. Cabe mencionar que los estudiantes tienen conocimientos de la correlación entre las condiciones iniciales de un sistema físico y las constantes que acompañan la evolución de la posición y la velocidad con el tiempo, por analogía con el análisis realizado sobre sistemas accionados con fuerzas constantes.

Las funciones matemáticas que describen dicho movimiento son (Resnick et al, 2008):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

$$V_x(t) = (-A \cdot \omega) \cdot \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Estas ecuaciones presentan para los estudiantes, una mayor complejidad, tanto en su interpretación física como en su uso para la resolución de problemas concretos.

Derivando la expresión (3), se obtiene:

$$a(t) = (-A\omega^2)\cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

Con estas expresiones reemplazadas en la ecuación (1) vemos que se verifica la ecuación dinámica del sistema. Finalmente se realiza el estudio de los aspectos energéticos de los dispositivos idealizados y se discuten los sistemas armónicos amortiguados y forzados, mostrando las ecuaciones diferenciales y las respectivas soluciones, dado el interés que estos sistemas más complicados despiertan en los estudiantes de Ingeniería.

Tratamiento del tema en el aula de Matemática C

En el tercer semestre, en la asignatura Matemática C (MC), los alumnos abordan el estudio de las *ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal*, desde la perspectiva matemática (Henry, 2008). Utilizando conceptos del *Algebra Lineal*, el alumno resuelve la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$x''(t) + p(t) \cdot x'(t) + q(t) \cdot x(t) = r(t) \quad (5)$$

donde $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ son funciones de la variable independiente t . La ecuación generalizada (5), representa innumerables situaciones. Por ejemplo en un circuito eléctrico con una fuente de alterna, o en un sistema masa-resorte forzado, la función $r(t)$ puede ser una función seno o coseno del tiempo.

La ecuación (1) $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ es un caso particular de la ecuación (5), con coeficientes constantes y homogénea.

En matemática, varios métodos abordan la resolución de la ecuación (1), obteniendo la forma de la solución general:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t) \quad (6)$$

La función (6) es algebraicamente igual a la obtenida en (2) hallada experimentalmente en física.

De las ecuaciones (2) y (6), se obtienen las relaciones de los pares de constantes (C_1 , C_2) y (A , ϕ) de esta forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= A \cos(\phi) & A &= \sqrt{(C_1)^2 + (C_2)^2} \\ C_2 &= -A \text{sen}(\phi) & \phi &= \arctan(-C_2 / C_1) \end{aligned} \quad (7)$$

En general, los alumnos, no realizan esta asociación sin la ayuda del profesor.

Evaluación de la Propuesta de articulación: a) Investigación pre-test a los alumnos

Los actores de la articulación son los alumnos de un curso de MC y los profesores de MC y FI, autores del presente trabajo.

La articulación se inicia en el año 2009, con la implementación de diversas actividades que se continuaron en el año 2010. Durante el curso 2010 en la asignatura MC, cuando se trató el tema *ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineal*, se realizó a los alumnos un *pre-test*. El objetivo fue indagar qué recordaban los alumnos del tema y si relacionaban, la solución encontrada del MAS en Física, con las soluciones analíticas encontradas para una ecuación diferencial de segundo orden ya que son presentadas con distinta notación. Las

preguntas fueron:

- 1) *¿Recuerda alguna característica del **Movimiento Armónico Simple (MAS)**? ¿Cuáles?*
- 2) *¿Podría dar algún ejemplo de un MAS?*
- 3) *¿Recuerda la ecuación diferencial que satisface el MAS y la interpretación física de las constantes involucradas?*

El test fue respondido por 35 alumnos. Las respuestas, fueron analizadas en forma cuantitativa. Clasificamos las respuestas en niveles de conceptualización, y los resultados se muestran en la tabla siguiente:

| | Pregunta 1 | Pregunta 2 | Pregunta 3 |
|-------------------|------------|------------|------------|
| no contesta | 14,28 % | 5,71 | 60 % |
| contesta mal | 8,57 % | 2,86 | 8,57 % |
| contesta regular | 37,15 | 28,58 | 14,28 % |
| contesta bien | 28,48 | 40 % | 17,15 % |
| contesta muy bien | 11,42 | 22,85 % | 0 % |

- El 65,63 % de los alumnos recuerda las características del MAS.
- El 62,85 % de los alumnos ejemplifican correctamente situaciones físicas que describen un MAS.
- El 60 % de los alumnos no recuerda la ecuación diferencial que satisface el MAS ni la interpretación física de las constantes involucradas.

Actividad de articulación: exposición de profesores de Física en el aula de Matemática

Diversas estrategias son posibles de abordar para la implementación de una articulación. En nuestro caso, elegimos de entre otras, la participación activa de los profesores de Física, junto a los profesores de Matemática, involucrados en la experiencia. Se generó un encuentro entre todos los profesores y alumnos. Se dispuso de material didáctico experimental y diapositivas en Power Point.

Durante el encuentro, los alumnos, al observar los mismos dispositivos con que el tema fue abordado por primera vez en Física, asociaron las expresiones matemáticas con estos.

Cabe destacar que simultáneamente con MC, los alumnos cursan Física II, y surgió mucho interés cuando se trato el tema de los circuitos de corriente alterna: a) Con un inductor y un capacitor cargado, b) con un inductor, un capacitor y una resistencia y por último c) con un inductor, un capacitor, una resistencia y una fuente alterna. Se mostró la analogía formal con los casos del MAS, del MA amortiguado, el MA forzado y por último el MA amortiguado y forzado, arribando a la comprensión del fenómeno de resonancia.

Comentarios y respuestas de los alumnos al post-test luego de la experiencia de articulación

Luego de la experiencia de articulación de los temas abordados, y con el objeto de validar y hacer una evaluación de la misma, es que realizamos a los alumnos participantes, un *post-test*.

Las preguntas estaban orientadas a conocer su opinión acerca de si la experiencia de articulación había sido beneficiosa para ellos, y si hubiesen vinculado los temas sin la intervención de los docentes de ambas disciplinas.

Las preguntas fueron:

- 1) ¿Usted hubiese vinculado las soluciones, encontradas en matemática, de la ecuación $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ con la dada en Física I del **Movimiento Armónico Simple (MAS)** $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ sin la intervención de los docentes? Si No
- 2) ¿Usted cree que la participación de los profesores de Física I en la clase de Matemática C, en esta experiencia interdisciplinaria lo ayudó a conectar los contenidos dados en ambas disciplinas?

La cantidad de alumnos que contestaron las preguntas fueron: 26.

- A la pregunta 1, el 81% dijo que NO hubiese vinculado las soluciones encontradas en matemática con la obtenida en física I.
- A la pregunta 2, el 92% contesta que SI cree que la participación de los profesores de Física I en la clase de Matemática en esta experiencia interdisciplinaria lo ayudo a conectar los contenidos dados en Matemática C y Física I.

Algunos comentarios a la pregunta 2: *“Si, anteriormente no veía claramente a conexión entre ambas materias, ahora me he dado cuenta de su relación, por tal razón esta charla me ayudo bastante en este sentido.”...“Si, definitivamente ayudó a asimilar los contenidos y poder integrar conocimientos aplicándolo al mundo real”...“ Si creo que ese tipo de eventos asienta los conocimientos matemáticos incorporados y además muestra la utilidad de las mismas en el campo físico de aplicación.”*

CONCLUSIONES

En el marco de esta Área para las Carreras de Ingeniería, se vienen realizando, desde hace varios años, acciones tendientes a facilitar el tránsito de los estudiantes por el proceso de adquisición de ideas abstractas, razonamiento lógico y formal y todas las herramientas necesarias para desempeñarse en el ámbito científico. Muchos de de los estudiantes muestran dificultades al momento de incorporar contenidos y metodologías propias de la Ciencia Física, particularmente en cursos de FI y el correspondiente manejo de contenidos matemáticos tales como vectores, operaciones, resolución de sistemas de ecuaciones, entre otros, con la finalidad de que un sistema físico quede expresado matemáticamente para su posterior análisis, predicción y obtención de respuestas de interés. Para acompañar a los alumnos en este emprendimiento y teniendo en cuenta que los tiempos en que se desarrollan las actividades en cada materia siempre resultan escasos, es que consideramos que una *articulación* entre tópicos en común, de algunos temas relevantes, como el que se ha mencionado aquí, permitirían al

alumno conducirlo a un aprendizaje significativo. Como consecuencia, los estudiantes retoman temas ya estudiados con una mirada más acabada y madura recorriendo simultáneamente conceptos físicos y su representación matemática, de manera tal, que el próximo paso de apropiación de saberes por parte de ellos, esté dirigido a la indivisibilidad física-matemática y viceversa.

Entendemos que estas actividades articuladas, permiten:

- Tomar una situación problemática de la Física, en este caso un MAS y analizarlo en el marco de las Leyes de Newton. Encontrar la solución de las ecuaciones de movimiento, a partir de la experimentación y el uso de conocimientos de funciones de una variable, tratadas en la materia Matemática A. Interpretar las características geométricas y del medio del sistema, con las constantes de la ecuación (1) y la solución, ecuación (2) y (3).
- Relacionar las distintas notaciones para un mismo problema en ambas disciplinas.
- Mostrar al alumno la relevancia del concepto articulado.
- Desarrollar en los alumnos la habilidad de aplicar los conceptos adquiridos en distintos y/o nuevos contextos.

Bibliografía

Alonso, M.-Finn, E. (1995) –Física- Addison Wesley. Iberoamericana S.A.- Wilmington, EUA.

Boido, G. (1996). Noticias del Planeta Tierra. A -Z editora S.A. República Argentina.

Bucari, N., Abate, S., Melgarejo A.(2004). “*Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcance*”. Anales del IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Buenos Aires. Argentina.

Bucari, N., Abate, S., Melgarejo A.(2005). “*Las clases de Matemática y la construcción de un contrato didáctico diferente*” Anales de INMAT 05. Facultad de Ingeniería. UBA. Buenos Aires.

Feynman, R., Leighton, R.-Sands, M. (1971). The Feynman Lectures on Physics. Volumen I: Mecánica, radiación y calor. Fondo Educativo Ineramericano, S.A. EUA.

Henry Ricardo. (2008). Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna. Editorial: Reverte.

Resnick, R., Halliday D., Krene, K. (2008). Física, volumen 1. Grupo Editorial Patria. México.