



El teorema de Poincaré-Bendixon para sistemas de retroalimentación cíclica monótona con retardo

Laura Langoni
Facultad de Ciencias Exactas
U.N.L.P.
Director: Oscar Barraza

Mayo 2004

Resumen

Este trabajo se basa en un artículo de John Mallet-Paret y George R. Sell y corresponde a la materia Trabajo de iniciación a la investigación.

1. Introducción

Es muy conocido el Teorema de Poincaré-Bendixon para sistemas del tipo

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio y tal que la solución $\phi(t, p)$, $\phi(0, p) = p$, de (1.1) existe para $-\infty < t < \infty$. La solución $\phi(t, p)$ es la única solución a través de $(0, p)$ y, por lo tanto, es continua para $(t, p) \in \mathbb{R}^3$. Para cada t fijo, recordamos que la función $\phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo. Dicho teorema nos asegura que si γ^+ es una semiórbita positiva acotada y $\omega(\gamma^+)$ no contiene puntos de equilibrio, entonces una de las siguientes alternativas tiene lugar

(i) $\gamma^+ = \omega(\gamma^+)$

o

(ii) $\omega(\gamma^+) = \overline{\gamma^+} - \gamma^+$

En cualquiera de los casos, el conjunto límite ω es una órbita periódica y además en el caso (ii) éste es un ciclo límite. También es válido el mismo resultado para una semiórbita negativa.

Este teorema sugiere una forma de determinar la existencia de una órbita periódica en el plano. Supongamos que encontramos un conjunto M cerrado y acotado en \mathbb{R}^2 tal que no contiene puntos de equilibrio de (1.1) y es positivamente invariante (esto es, toda solución de (1.1) que empieza en M permanece en M para $t \geq 0$). En tal caso aseguramos que M contiene a una semiórbita positiva acotada γ^+ . Más aún, dado que M es cerrado, el conjunto límite ω está en M . Por lo tanto del Teorema de Poincaré-Bendixon queda garantizada la existencia de una órbita periódica en M .

La demostración de este teorema usa el hecho de que una curva de Jordan J , es decir una curva cerrada y simple, separa a \mathbb{R}^2 en dos regiones, una región interior y otra exterior a la curva, generalmente llamadas J_{int} y J_{ext} . Esto se conoce como Teorema de la curva de Jordan, y no vale en \mathbb{R}^N para $N > 2$, por lo tanto no hay una generalización del teorema de Poincaré-Bendixon para sistemas de dimensión mayor con las mismas características del sistema (1.1). Un contraejemplo para el caso $N = 3$ es por ejemplo

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\phi} = \pi \\ \dot{\rho} = \rho(\sin \theta + \pi \sin \phi). \end{cases}$$

con $\theta(0) = \phi(0) = 0$ y $\rho(0) = 1$. Donde la solución está acotada en \mathbb{R}^3 , pero ésta no es periódica y tampoco tiende a una solución periódica.

Este trabajo está basado en un paper de John Mallet-Paret y George Sell (ver [3]) en el cual se prueba el Teorema de Poincaré-Bendixon para sistemas de ecuaciones diferenciales de retroalimentación cíclica monótona con retardo. Éste también supone simplemente la acotación de la solución $x(t)$ para $t \rightarrow \infty$ y obtiene un resultado análogo al enunciado para (1.1). El sistema que consideramos tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}^0(t) &= f^0(x^0(t), x^1(t)) \\ \dot{x}^i(t) &= f^i(x^{i-1}(t), x^i(t), x^{i+1}(t)), \quad \text{si } i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \dot{x}^N(t) &= f^N(x^{N-1}(t), x^N(t), x^0(t-1))\end{aligned}\quad (1.2)$$

con las condiciones de monotonía

$$\frac{\partial f^i(\eta, \xi, \zeta)}{\partial \eta} \geq 0, \quad \delta^i \frac{\partial f^i(\eta, \xi, \zeta)}{\partial \zeta} > 0, \quad \text{para todo } (\eta, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^3, \quad (1.3)$$

para $i = 0, 1, \dots, N$. Las cantidades δ^i son todas ± 1 , y han sido normalizadas para que

$$\delta^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq N, \\ \delta^* & \text{si } i = N \end{cases} \quad (1.4)$$

La cantidad $\delta^* \in \{-1, 1\}$ está fija e indica la naturaleza de la retroalimentación, positiva o negativa.

También analizaremos sistemas llamados unidireccionales que tienen la siguiente forma

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^i(t), x^{i+1}(t - \beta^i)), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

donde $N \geq 0$, los índices son tomados módulo $N + 1$ y $\beta^i \geq 0$, para cada i y además f^i posee la propiedad de monotonía

$$\frac{\partial f^i(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \neq 0, \quad \text{para todo } (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.6)$$

Observemos que el primer sistema es más general que éste, pues permite una doble interacción de la variable x^i con sus dos vecinas $x^{i\pm 1}$.

En cuanto al sistema unidireccional tenemos que por medio de una transformación normalizadora obtenemos un sistema del mismo tipo pero con $\beta^i = 0$ para $i \neq N$ y $\beta^N = 1$, con derivadas positivas en (1.6) para $i \neq N$. El signo de la derivada $\frac{\partial f^N}{\partial \zeta}$ puede ser o bien positivo o bien negativo, en la mayoría de los problemas de interés por sus aplicaciones es negativo.

Un caso especial de sistema unidireccional está dado por la ecuación de orden $N + 1$ retardada

$$p(D)x(t) = f(x(t-1)), \quad \text{donde } D = \frac{d}{dt},$$

y $p(D) = (D - \xi^0)(D - \xi^1) \dots (D - \xi^N)$ es un polinomio de grado $N + 1$ con todas sus raíces reales, y donde $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Efectivamente, llamando $x^0(t) = x(t)$ y $x^{i+1}(t) = \dot{x}^i(t) - \xi^i x^i(t)$, para $0 \leq i \leq N - 1$, se obtiene un sistema unidireccional con todos los $\beta^i = 0$ excepto $\beta^N = 1$.

Una ecuación de interés es la conocida Ecuación de Mckey-Glass

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + \mu g(x(t-1)),$$

donde g es monótona. Ésta aparece en diversas áreas como por ejemplo fisiología, biología y óptica. Los sistemas unidireccionales surgen en modelos de síntesis enzimáticas y en la teoría de redes neuronales.

Una de las ecuaciones más renombrada a la que se le aplica este resultado es la Ecuación de Wright

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t-1)(1 + y(t)),$$

con $\alpha > 0$, lo cual para $y(t) > -1$ es equivalente a

$$\dot{x}(t) = f(x(t-1)), \quad f(x) = -\alpha(e^x - 1)$$

por el cambio de variables $e^x = y + 1$. Notemos además que esta ecuación entra dentro del caso unidireccional para $N = 0$.

2. Notación y preliminares

El espacio de fase adecuado para el sistema (1.2) es el espacio de Banach $C(K)$, donde $K = [-1, 0] \cup \{1, 2, \dots, N\}$ y la norma de dicho espacio está dada por

$$\|\varphi\|_{C(K)} = \left\| \left(\sup_{-1 \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|, \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N) \right) \right\|_{\mathbb{R}^{N+1}}$$

para cada $\varphi \in C(K)$. Este espacio es una ligera modificación del espacio $C([-1, 0], \mathbb{R}^{N+1})$ encontrado en [1] y está adaptado para nuestro sistema en el cual el retardo aparece solamente en la última variable. Para facilitar la notación a partir de ahora escribiremos C en lugar de $C(K)$.

Llamamos $C^1(K)$ al conjunto

$$C^1 = C^1(K) = \{\varphi \in C / \text{ la restricción } \varphi|_{[-1,0]} \text{ es continuamente diferenciable}\}$$

y definimos en él la norma

$$\|\varphi\|_{C^1(K)} = \left\| \left(\sup_{-1 \leq \theta \leq 0} (|\varphi(\theta)| + |\dot{\varphi}(\theta)|), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N) \right) \right\|_{\mathbb{R}^{N+1}},$$

donde $\dot{\varphi}(\theta)$ denota a la derivada $\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta)$.

Decimos que $x(\cdot)$ es una **solución** de (1.2) sobre un intervalo $I = [\sigma - 1, \sigma + A]$ donde $\sigma \in \mathbb{R}$ y $A \geq 0$, cuando $x^0 \in C([\sigma - 1, \sigma + A])$, $x(\cdot)$ es continuamente diferenciable sobre $[\sigma, \sigma + A]$ y por supuesto $x(\cdot)$ satisface el sistema (1.2) para $t \in [\sigma, \sigma + A]$.

Sea $x(\cdot)$ una solución de (1.2) sobre algún intervalo $I = [\sigma - 1, \sigma + A]$, donde $\sigma \in \mathbb{R}$ y $A \geq 0$. Para cualquier $t \in [\sigma, \sigma + A]$, definimos a $x_t \in C$ por

$$x_t(\theta) = \begin{cases} x^0(t + \theta) & \text{para } \theta \in [-1, 0], \\ x^\theta(t) & \text{para } \theta \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases}$$

En varias oportunidades escribiremos por conveniencia de notación

$$x^{N+1}(t) = x^0(t - 1),$$

aunque observamos que $N + 1 \notin K$, y que $x^{N+1}(\cdot)$ no es ninguna de las funciones coordenadas del sistema (1.2). Denotamos con $x(0, \phi) = x(\phi)$ a la solución $x(\cdot)$ de (1.2), (1.3) que cumple $x_0 = x_0(\phi) = \phi$ y sea también $T(t)$ la aplicación de C en C^1 definida por $T(t)\phi = x_t(\phi)$. Observemos que para una solución $x(\cdot)$ sobre $[t^0, t^*]$ tenemos que $x_t \in C^1$ para todo $t \in [t^0 + 1, t^*]$. En efecto, la función $T(t)$ para el tiempo $t \geq 1$, es continua de C en C^1 (ver [1]).

Pensemos en el sistema (1.2) como un sistema de la forma $\dot{x}(t) = f(x_t)$, donde $f : C \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$. Decimos que un **equilibrio** para el sistema (1.2) es una función $\kappa \in C$ tal que $f(\kappa) = 0$. Sea además $E \subseteq C$ el conjunto formado

por los equilibrios del sistema (1.2). Observamos que cada $\kappa \in E$ es una función constante sobre K .

Ahora definimos para cada i , con $0 \leq i \leq N$, a la **función proyección planar** $\pi^i : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\pi^i \varphi = \begin{cases} (\varphi(i), \varphi(i+1)) & \text{para } 0 \leq i \leq N-1, \\ (\varphi(N), \varphi(-1)) & \text{para } i = N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Estas funciones tendrán un rol destacado en el Teorema de Poincaré-Bendixon.

Un problema de valores iniciales para (1.2) se plantea agregando una condición $x_{t^0} = \varphi$ para algún $t^0 \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in C$. Este problema tiene una solución única $x(\cdot)$ sobre un intervalo maximal a la derecha de t^0 , llamémoslo $[t^0, t^*)$. Llamaremos **órbita hacia adelante** de esta solución en el espacio de fase al conjunto

$$\gamma^+(\varphi) = \{x_t / t \in [t^0, t^*)\} \subseteq C,$$

y definimos también

$$\gamma_T^+(\varphi) = \{x_t / t \in [t^0 + T, t^*)\} \subseteq C$$

para algún $T \geq 0$. Si $t^* < \infty$, entonces $\|x_t\|_C \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t^*$, y de manera que si $\gamma^+(\varphi)$ está acotada entonces necesariamente $t^* = \infty$; en efecto, la clausura $\overline{\gamma^+(\varphi)}$ es compacta. Además, cuando $t^* = \infty$, definimos al **conjunto límite omega** $\omega(\varphi) \subseteq \overline{\gamma^+(\varphi)}$ como

$$\omega(\varphi) = \{\psi \in C / \text{ existe } t^n \rightarrow \infty \text{ tal que } x_{t^n} \rightarrow \psi\}.$$

Este conjunto límite omega satisface las propiedades standard. En particular, si $\gamma^+(\varphi)$ está acotado entonces $\omega(\varphi)$ es no vacío, compacto, conexo e invariante. Decimos que un subconjunto $A \subseteq C$ es **invariante**, positiva y negativamente, si $T(t)A = A$ para cada $t \geq 0$, donde $T(t)$ denota al operador solución en el tiempo t . Además, a través de cada $\psi \in \omega(\varphi)$ existe una solución bilátera $u(\cdot)$ en $\omega(\varphi)$, esto es, una solución que cumple que $u_0 = \psi$ y que $u_t \in \omega(\varphi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si una solución $x(\cdot)$, con $x_{t^0} = \varphi$, está definida sobre un intervalo maximal a la izquierda $(t^*, t^0]$, también podemos considerar a la **órbita hacia atrás**

$$\gamma^-(\varphi) = \{x_t / t \in (t^*, t^0]\} \subseteq C,$$

y definimos también

$$\gamma_T^-(\varphi) = \{x_t / t \in (t^*, t^0 - T)\} \subseteq C$$

para algún $T \geq 0$. Si además la solución $x(\cdot)$ está definida para $t \rightarrow -\infty$, podemos definir al **conjunto límite alfa**, $\alpha(\varphi) \subseteq \overline{\gamma^-(\varphi)}$, como

$$\alpha(\varphi) = \{\psi \in C / \text{ existe } t^n \rightarrow -\infty \text{ tal que } x_{t^n} \rightarrow \psi\}.$$

Podría pasar que dado un $\varphi \in C$ cualquiera, no exista una solución hacia atrás, sin embargo cuando ésta existe es única. Este hecho implica que si $A \subseteq C$ es un subconjunto compacto e invariante, entonces $T(t)$ genera un flujo bilátero sobre A . Para probar la unicidad hacia atrás, suponer que $x(\cdot)$ y $u(\cdot)$ son soluciones de (1.2) sobre un intervalo I , y que $x_{t^0} = u_{t^0}$ para algún $t^0 \in I$. Veremos que $x_t = u_t$ para todo $t \in I$ con $t \leq t^0$, y por lo tanto para todo $t \in I$. Para probar esto es suficiente mostrar que $x_t = u_t$ para todo $t \in [t^0 - 1, t^0] \cap I$. Llamemos $J = [t^0 - 1, t^0] \cap I$, y supongamos que el intervalo tiene longitud positiva, tenemos que $x^0(t) = u^0(t)$ y por lo tanto que $\dot{x}^0(t) = \dot{u}^0(t)$ para todo $t \in J$, pues $x_{t^0} = u_{t^0}$. De la primer ecuación del sistema (1.2) y de la monotonía estricta de f^0 en su segundo argumento, tenemos que $x^1(t) = u^1(t)$ para todo $t \in J$. Continuando sucesivamente de esta manera con las restantes ecuaciones del sistema (1.2) y con la monotonía de las funciones f^i en su último argumento, tenemos que $x^i(t) = u^i(t)$ para todo $t \in J$ y para $0 \leq i \leq N + 1$. Con esto llegamos a la conclusión deseada.

Observemos también que si $A \subseteq C$ es un conjunto invariante y acotado con clausura compacta \overline{A} , entonces $A \subseteq C^1$. La clausura de A en la topología de C^1 es el mismo conjunto que la clausura de A en la topología de C , y las topologías inducidas sobre A de C y de C^1 son equivalentes. Esto se deduce directamente de la definición de las normas de C y de C^1 y de la continuidad de la aplicación $T(t)$.

Para finalizar enunciamos al teorema que, como dijimos en la introducción, será necesario para llegar a demostrar al resultado principal.

Teorema 2.1 (El teorema de la curva de Jordan). *Sea J una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 . Entonces J separa al plano, más precisamente $\mathbb{R}^2 - J = J_{int} \cup J_{ext}$ donde J_{int} y J_{ext} son conjuntos abiertos disjuntos, J_{int} (llamado el interior de J) es acotado y J_{ext} (llamado el exterior de J) es no acotado. Además ambos conjuntos son arcoconexos.*

3. Enunciado de resultados

Consideramos un sistema del tipo (1.2), con las condiciones (1.3) y (1.4), donde suponemos además que las f^i son C^1 sobre \mathbb{R}^3 , o sobre \mathbb{R}^2 en el caso de f^0 (cuando $i = 0$, la variable η está ausente, esto es, f^0 es función de ξ y ζ solamente).

El caso $N = 0$ da una ecuación escalar que está incluida en esta teoría. En este caso se interpreta al sistema (1.2) como

$$\dot{x}^0 = f^0(x^0(t), x^0(t-1)),$$

y las condiciones de monotonía en este caso son

$$\delta^0 \frac{\partial f^0(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} > 0, \quad \text{para todo } (\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2, \delta^0 = \delta^* \in \{-1, 1\}.$$

A lo largo del trabajo se necesita esta pequeña modificación en la notación para el caso escalar, aunque en general no se lo mencionará.

Observar que en (1.3) solamente la segunda desigualdad necesita ser estricta. En muchos sistemas de interés la primer variable η está ausente en cada una de las ecuaciones (no solamente para el caso $i = 0$), dando origen a los llamados **sistemas unidireccionales**

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(t) &= f^i(x^i(t), x^{i+1}(t)), \quad 0 \leq i \leq N-1, \\ \dot{x}^N(t) &= f^N(x^N(t), x^0(t-1)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

El siguiente resultado es el principal y podrá demostrarse al término de la sección 6.

Teorema 3.1 (El Teorema de Poincaré-Bendixon). *Considerar el sistema (1.2), donde las funciones f^i satisfacen (1.3). Sea $x(t)$ una solución de (1.2) sobre algún intervalo $[t^0, \infty)$, y suponemos que $x(t)$ está acotada en \mathbb{R}^{N+1} cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $\omega(x) \subseteq C(K)$ el conjunto límite omega de esta solución en el espacio de fase $C(K)$. Entonces o*

(a) $\omega(x)$ es una sola órbita periódica no constante

o

(b) para cada solución $u(t)$ de (1.2) con $u_t \in \omega(x) \forall t \in \mathbb{R}$, tenemos que $\alpha(u) \cup \omega(u) \subseteq E$, donde $\alpha(u)$ y $\omega(u)$ denotan los conjuntos límites α y ω , respectivamente, de esta solución y donde $E \subset C(K)$ denota el conjunto de puntos de equilibrio de (1.2).

En cualquier caso, cada función proyección planar

$$\pi^i : \omega \rightarrow \pi^i(\omega(x)) \subseteq \mathbb{R}^2 ,$$

para $0 \leq i \leq N$, es 1-1, y sumerge al conjunto compacto $\omega(x)$ homeomórficamente en el plano.

Observemos que el caso (b) del teorema 3.1 cubre la situación más simple en la cual el conjunto límite omega $\omega(x)$ es justamente un solo punto de equilibrio, esto es, cuando $x(t)$ se acerca a un solo equilibrio para $t \rightarrow \infty$.

4. La Función de Lyapunov discreta

Las funciones de Lyapunov discretas

$$V^+, V^- : C - \{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\} ,$$

están asociadas con sistemas de retroalimentación cíclicos signados. Estos sistemas están relacionados con los sistemas de retroalimentación cíclica monótona (1.2), (1.3). Se entiende por un sistema de retroalimentación cíclico signado a un sistema no autónomo del tipo

$$\begin{aligned} \dot{y}^0(t) &= g^0(t, y^0(t), y^1(t)) , \\ \dot{y}^i(t) &= g^i(t, y^{i-1}, y^i(t), y^{i+1}(t)) , \quad \text{si } i = 1, 2, \dots, N-1 , \\ \dot{y}^N(t) &= g^N(t, y^{N-1}(t), y^N(t), y^0(t-1)) , \end{aligned} \quad (4.1)$$

en el cual las funciones g^i satisfacen las condiciones de signo

$$g^i(t, \eta, 0, \zeta) \begin{cases} > 0 & \text{cuando } \eta \geq 0 \text{ y } \delta^i \zeta > 0 , \\ < 0 & \text{cuando } \eta \leq 0 \text{ y } \delta^i \zeta < 0 , \end{cases} \quad (4.2)$$

para $0 \leq i \leq N$ y para cada t (con la variable η ausente en (4.2) cuando $i = 0$, como antes). Las cantidades δ^i son como en (1.4) y suponemos que las funciones $g^i(t, \eta, \xi, \zeta)$ son continuas en t (sobre algún intervalo I), para $0 \leq i \leq N$ y además son C^1 en $(\eta, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^3$. Las funciones V^\pm que se definirán más abajo son funciones de Lyapunov para el sistema (4.1), (4.2), donde \pm denota al signo de la constante de retroalimentación δ^* .

Para relacionar a los sistemas (1.2) y (4.1) se escribe al sistema monótono (1.2) como $\dot{x}(t) = f(x_t)$ donde $f : C \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$. Sean $x(\cdot)$ y $\bar{x}(\cdot)$ dos soluciones

cualesquiera de (1.2) sobre algún intervalo I y considerar la diferencia $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(x_t) - f(\bar{x}_t) \\ &= f(y_t + \bar{x}_t) - f(\bar{x}_t) = g(t, y_t),\end{aligned}$$

donde $g : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ está definida por

$$g(t, \varphi) = f(\varphi + \bar{x}_t) - f(\bar{x}_t).$$

Esta función g depende de la función $\bar{x}(\cdot)$ elegida. Verifiquemos que g tiene la forma (4.1) y satisface las condiciones de signo (4.2), si f satisface las condiciones de monotonía (1.3).

Se ve fácilmente que cumple (4.1), pues

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = f(x_t) - f(\bar{x}_t) \\ &= f(y_t + \bar{x}_t) - f(\bar{x}_t) \\ &= g(t, y_t).\end{aligned}$$

Para ver que satisface (4.2), lo hacemos solamente para el caso en que $1 \leq i \leq N - 1$ ya que los otros se analizan análogamente. Observemos que

$$\begin{aligned}g^i(t, \eta, 0, \zeta) &= f^i(\eta + \bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \zeta + \bar{x}^{i+1}(t)) - f^i(\bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \bar{x}^{i+1}(t)) \\ &= f^i(\eta + \bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \zeta + \bar{x}^{i+1}(t)) - f^i(\bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \zeta + \bar{x}^{i+1}(t)) \quad (4.3) \\ &\quad + f^i(\bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \zeta + \bar{x}^{i+1}(t)) - f^i(\bar{x}^{i-1}(t), \bar{x}^i(t), \bar{x}^{i+1}(t)),\end{aligned}$$

y como f^i es no decreciente respecto a su primera variable tenemos que la primera diferencia en (4.3) es > 0 si $\eta > 0$ y es < 0 si $\eta < 0$. De la misma manera se tiene que la segunda diferencia en (4.3) es > 0 si $\delta^i \zeta > 0$ y es < 0 si $\delta^i \zeta < 0$. Por lo tanto de estas dos observaciones se tiene que

$$g^i(t, \eta, 0, \zeta) \begin{cases} > 0 & \text{cuando } \eta \geq 0 \text{ y } \delta^i \zeta > 0, \\ < 0 & \text{cuando } \eta \leq 0 \text{ y } \delta^i \zeta < 0 \end{cases}$$

como se quería probar.

También se puede hacer una versión infinitesimal de la construcción de arriba. Si $x(\cdot)$ es una solución de (1.2), entonces podemos considerar la ecuación variacional lineal

$$\dot{y}(t) = g(t, y_t), \quad \text{donde } g(t, \varphi) = f'(x_t)\varphi, \quad (4.4)$$

y donde $f'(\psi)$, para cualquier $\psi \in C$, es la derivada de Fréchet de $f : C \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ en ψ . Nuevamente, esta g tiene la forma (4.1) y satisface las condiciones de signos (4.2), si f satisface las condiciones de monotonía (1.3). Es claro que $y(t) = \dot{x}(t)$ es una solución particular de (4.4). Se ve que se cumple pues

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \ddot{x}(t) = f'(x_t) \dot{x}_t \\ &= f'(x_t) y_t \\ &= g(t, y_t). \end{aligned}$$

Para ver (4.2), observemos que como

$$g^i(t, \eta, 0, \zeta) = \frac{\partial f^i(\eta, 0, \zeta)}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial f^i(\eta, 0, \zeta)}{\partial \zeta} \zeta$$

y sabemos que $\frac{\partial f^i(\eta, 0, \zeta)}{\partial \eta} \geq 0$ entonces el primer término en el segundo miembro cumple que es ≥ 0 si $\eta \geq 0$ y es ≤ 0 si $\eta \leq 0$. Si se utiliza nuevamente las condiciones de monotonía (1.3), se tiene que el segundo término cumple que es > 0 si $\delta^i \zeta > 0$ y es < 0 si $\delta^i \zeta < 0$. Si unimos ambas observaciones se obtiene la condición (4.2).

Observemos también que $y(t) \equiv 0$ es siempre una solución de (4.1), (4.2), y también que la unicidad hacia atrás vale para esta solución. Esto es, si $y(\cdot)$ es una solución de (4.1), (4.2) sobre un intervalo I , y si $y_{t^0} = 0$ para algún $t^0 \in I$, entonces $y_t = 0$ para todo $t \in I$. La demostración de este hecho es similar a la demostración de unicidad hacia atrás para (1.2) dada en la sección 2.

Entendemos por una solución no trivial del sistema (4.1) una solución para la cual $y_t \neq 0$.

Definimos ahora a las funciones V^\pm que se mencionaron antes. Para esto definimos primero al número de cambios de signo para cualquier $\varphi \in C - \{0\}$ (al cual denotaremos $sc(\varphi)$), esto es

$$\begin{aligned} sc(\varphi) &= \sup \{ k \geq 1 / \exists \theta^0 < \theta^1 < \dots < \theta^k \text{ con cada } \theta^i \in K \text{ y} \\ &\quad \varphi(\theta^{i-1})\varphi(\theta^i) < 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k \}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

con la convención que $sc(\varphi) = 0$ si $\varphi(\theta) \geq 0$ o $\varphi(\theta) \leq 0$ para todo $\theta \in K$ y además consideramos que $sc(0)$ no está definido. Observemos que $sc(\varphi) = \infty$

es posible en (4.5). Definimos ahora

$$V^+(\varphi) = \begin{cases} sc(\varphi) & \text{si } sc(\varphi) \text{ es par o infinito,} \\ sc(\varphi) + 1 & \text{si } sc(\varphi) \text{ es impar,} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$V^-(\varphi) = \begin{cases} sc(\varphi) & \text{si } sc(\varphi) \text{ es impar o infinito,} \\ sc(\varphi) + 1 & \text{si } sc(\varphi) \text{ es par,} \end{cases} \quad (4.7)$$

y donde

$$V^+ : C - \{0\} \rightarrow \{0, 2, 4, \dots, \infty\}, \quad V^- : C - \{0\} \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, \infty\}$$

Los siguientes dos resultados fueron probados en [4] y serán de suma utilidad de aquí en adelante.

Teorema 4.1. *Sea $y(\cdot)$ una solución no trivial del sistema de retroalimentación cíclico signado (4.1), (4.2), sobre un intervalo I , y sea \pm el signo de la constante de retroalimentación δ^* para este sistema. Entonces $V^\pm(y_t)$ es una función no creciente de t , esto es,*

$$V^\pm(y_{t^1}) \geq V^\pm(y_{t^2}) \quad \text{si } t^1 \leq t^2 \quad \text{con } t^1, t^2 \in I.$$

Una consecuencia inmediata del teorema 4.1 y de lo discutido anteriormente es que si $x(\cdot)$ y $\bar{x}(\cdot)$ son dos soluciones diferentes de (1.2), (1.3), entonces

$$V^\pm(x_t - \bar{x}_t) \quad \text{es no creciente en } t,$$

y que si $x(\cdot)$ es una solución no constante de (1.2), (1.3), entonces

$$V^\pm(\dot{x}_t) \quad \text{es no creciente en } t,$$

dado que en estos casos tanto $x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)$ como $\dot{x}(\cdot)$ son soluciones de (4.1), (4.2).

Teorema 4.2. *Sea $y(\cdot)$ una solución no trivial de (4.1), (4.2) sobre un intervalo I . Se supone que para algún $t \in I$ también $t - 3 \in I$ y que en este tiempo t una de las siguientes alternativas tiene lugar:*

- (a) $y^i(t) = y^{i+1}(t) = 0$ para algún i con $0 \leq i \leq N$; o
 - (b) $y^i(t) = 0$ y $\delta^i y^{i-1}(t) y^{i+1}(t) > 0$ para algún i con $1 \leq i \leq N$
- entonces o

$$V^\pm(y_t) < V^\pm(y_{t-3}) \quad \text{o} \quad V^\pm(y_t) = \infty.$$

Notemos la siguiente consecuencia de los teoremas 4.1, 4.2. Suponemos que $y(\cdot)$ es una solución no trivial de (4.1), (4.2) sobre algún intervalo infinito $[t^0, \infty)$ y también que $V^\pm(y_t) < \infty$ para t grande (este ocurre necesariamente si $V^\pm(y_{t^0}) < \infty$ para la condición inicial). Entonces $V^\pm(y_t)$ es constante y finito para t grande (por teorema 4.1 $V^\pm(y_t)$ es no creciente y está acotado por $V^\pm(y_{t^0})$), y por lo tanto ni (a) ni (b) del teorema 4.2 pueden tener lugar para t grande.

La negación de la condición (a) es de particular interés para este trabajo y podemos expresar a ésta como

$$\pi^i y_t \neq 0 \quad \text{para todo } t \text{ grande y } 0 \leq i \leq N,$$

donde π^i es la función proyección planar (2.1). En el caso en que $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ es la diferencia de dos soluciones de (1.2), (1.3), tenemos que

$$\pi^i x_t \neq \pi^i \bar{x}_t \quad \text{para todo } t \text{ grande y } 0 \leq i \leq N.$$

Suponemos que $y(\cdot)$ es una solución no trivial de (4.1), (4.2), sobre un intervalo I , que para algún $t \in I$ también tenemos que $t - 4 \in I$ y que además

$$V^\pm(y_t) = V^\pm(y_{t-4}) < \infty.$$

Es claro entonces que para cualquier $\theta \in [-1, 0]$ tenemos que $t - 4 \leq t + \theta - 3 \leq t + \theta \leq t$, por lo tanto

$$V^\pm(y_{t+\theta}) = V^\pm(y_{t+\theta-3}) < \infty \quad (4.8)$$

por teorema 4.1.

Observemos ahora que

$$(y^0(t + \theta), \dot{y}^0(t + \theta)) \neq (0, 0). \quad (4.9)$$

Esto se debe a que si $y^0(t + \theta) = 0$, entonces como por (4.8) y por teorema 4.2 tenemos que $(y^0(t + \theta), y^1(t + \theta)) \neq (0, 0)$, obtendríamos que $y^1(t + \theta) \neq 0$. Luego se tiene

$$\dot{y}^0(t + \theta) = g^0(t + \theta, 0, y^1(t + \theta)) \neq 0 \quad (4.10)$$

por las desigualdades estrictas en (4.2). Así se obtiene (4.9). Es inmediato que (4.9) nos dice que todos los ceros de $y_t \in C^1$ en el intervalo $[-1, 0] \subset K$ son simples, esto es

$$\dot{y}_t(\theta) \neq 0 \quad \text{siempre que } y_t(\theta) = 0 \quad \text{para algún } \theta \in [-1, 0]. \quad (4.11)$$

Notemos que $\delta^0 \dot{y}^0(t + \theta) y^1(t + \theta) > 0$. Esto se debe a que las condiciones de signo (4.2) para el caso $N = 0$ son

$$g^i(t + \theta, 0, y^1(t + \theta)) \begin{cases} > 0 & \text{cuando } \delta^0 y^1(t + \theta) > 0, \\ < 0 & \text{cuando } \delta^0 y^1(t + \theta) < 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

de donde se desprende que $g^i(t + \theta, 0, y^1(t + \theta)) = \dot{y}^0(t + \theta)$ y $\delta^0 y^1(t + \theta) > 0$ tienen el mismo signo, y se obtiene lo que se afirmaba. Observemos también que esto, para el caso en que $\theta = 0$, se puede expresar de la siguiente manera

$$\delta^0 \dot{y}_t(0) y_t(1) > 0 \quad \text{siempre que } y_t(0) = 0, \quad (4.13)$$

utilizando al elemento $y_t \in C$.

Definimos ahora un conjunto al que llamaremos S y que será de mucha utilidad para este trabajo. Sean

$$S^i = \{ \varphi \in C^1 / \text{si } \varphi(i) = 0 \text{ entonces } \delta^i \varphi(i-1) \varphi(i+1) < 0 \},$$

para $1 \leq i \leq N$, (4.14)

con la convención que $\varphi(N+1) = \varphi(-1)$. Sean también

$$\begin{aligned} S^0 &= \{ \varphi \in C^1 / \text{si } \varphi(0) = 0 \text{ entonces } \delta^0 \dot{\varphi}(0) \varphi(1) > 0 \}, \\ S^{-1} &= \{ \varphi \in C^1 / \text{si } \varphi(-1) = 0 \text{ entonces } \delta^N \varphi(N) \dot{\varphi}(-1) < 0 \} \text{ y} \\ S^* &= \{ \varphi \in C^1 / \text{si } \varphi(\theta) = 0 \text{ para algún } \theta \in [-1, 0] \text{ entonces } \dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Definimos entonces al conjunto S por

$$S = \left[\bigcap_{i=-1}^N S^i \right] \cap S^*.$$

Claramente S es abierto en la topología de C^1 y, además, como se prueba en el apéndice A, S es denso en C^1 . Notemos también que

$$\pi^i \varphi \neq 0 \in \mathbb{R}^2 \text{ si } \varphi \in S, \text{ para } 0 \leq i \leq N, \quad (4.16)$$

donde π^i está dado por (2.1). Esto se deduce directamente de la definición de los conjuntos S^i .

Teorema 4.3. Sea $y(\cdot)$ una solución no trivial de (4.1) , (4.2) sobre un intervalo I . Se supone que para algún $t \in I$ también $t - 4 \in I$ y que además

$$V^\pm(y_t) = V^\pm(y_{t-4}) < \infty. \quad (4.17)$$

entonces $y_t \in S$ y en particular

$$\pi y_t \neq 0 \text{ para } 0 \leq i \leq N. \quad (4.18)$$

Demostración : Observemos que $V^\pm(y_t) = V^\pm(y_{t-3}) < \infty$ por utilizar (4.17) y también (4.8) para el caso en que $\theta = 0$. De esta manera por teorema 4.2 se puede concluir inmediatamente que $y_t \in S^i$ para cada i con $1 \leq i \leq N$. Claramente (4.11) y (4.13) implican, respectivamente, que $y_t \in S^*$ y que $y_t \in S^0$.

Lo único que resta ver para probar que $y_t \in S$ es que $y_t \in S^{-1}$. Supongamos entonces que $y_t(-1) = 0$, esto es, $y^0(t-1) = 0$. De esta suposición y por cumplirse que $y_t \in S_N$, concluimos que $y_t(N) = y^N(t) \neq 0$. Como también $y_t \in S^*$ entonces $\dot{y}_t(-1) = \dot{y}^0(t-1) \neq 0$. Por lo tanto, si $y_t \notin S^{-1}$ necesariamente

$$\delta^N y^N(t) \dot{y}^0(t-1) > 0. \quad (4.19)$$

Supongamos que estamos en el caso (4.19). Observamos que por cumplirse que $y_t \in S^i$ para $0 \leq i \leq N-1$ y que $y_t \in S^*$ y por el hecho que $\delta^i = 1$ para $0 \leq i \leq N-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{y}^0(t)y^1(t) &> 0 \text{ si } y^0 = 0, \\ y^{i-1}(t)y^{i+1}(t) &< 0 \text{ si } y^i(t) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq N-1 \text{ y} \\ \dot{y}^0(t+\theta) &\neq 0 \text{ si } y^0(t+\theta) = 0 \text{ para algún } \theta \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De (4.20), del hecho que $y^0(t-1) = 0$ y de la definición (4.5) de la función $sc(\cdot)$ tenemos que

$$sc(y_{t-\epsilon}) = sc(y_t) + 1 \text{ para } \epsilon > 0 \text{ pequeño.}$$

Además observamos que $\delta^N y^N(t)y^0(t+\theta) > 0$ para todo $\theta \in [-1, 0]$ cercano a -1 . Esto se debe a que por (4.19) el signo de $\delta^N y_t(N)$ es el mismo que el de $\dot{y}_t(-1)$ y a que como $y_t(-1) = 0$ entonces

- si $\dot{y}_t(-1) > 0$ entonces $y_t(\theta) > 0$ para $\theta \in [-1, 0]$ y cercano a -1 .
- si $\dot{y}_t(-1) < 0$ entonces $y_t(\theta) < 0$ para $\theta \in [-1, 0]$ y cercano a -1 .

Luego, el signo de $\dot{y}_t(-1)$ es el mismo que el de $y_t(\theta)$ para $\theta \in [-1, 0]$ y cercano a -1 , obtenemos de esta manera lo que se afirmó recientemente.

Por la última observación tenemos que

$$sc(y_t) \text{ es par si } \delta^N = \delta^* > 0 \text{ y es impar si } \delta^N = \delta^* < 0.$$

Esto simplemente se deduce de analizar las posibles dos alternativas:

Si $\delta^N = \delta^* = 1$ entonces el signo de $y_t(N)$ es igual al signo de $y_t(\theta)$ para aquellos $\theta \in [-1, 0]$ cercanos a -1 , con lo cual $sc(y_t)$ es par.

Si $\delta^N = \delta^* = -1$ entonces el signo de $y_t(N)$ es distinto al signo de $y_t(\theta)$ para aquellos $\theta \in [-1, 0]$ cercanos a -1 , con lo cual $sc(y_t)$ es impar.

Ahora si utilizamos las definiciones (4.6) y (4.7) de V^\pm y analizamos otra vez los dos casos posibles tenemos que

$$V^\pm(y_{t-\epsilon}) = V^\pm(y_t) + 2,$$

para ϵ pequeño. Para llegar a esto simplemente hacemos:

si $\delta^N = \delta^* = 1$ entonces tenemos que $sc(y_t)$ es par y $sc(y_{t-\epsilon}) = sc(y_t) + 1$ es impar, entonces $V^+(y_{t-\epsilon}) = sc(y_{t-\epsilon}) + 1 = sc(y_t) + 1 + 1 = V^+(y_t) + 2$.

si $\delta^N = \delta^* = -1$ entonces tenemos que $sc(y_t)$ es impar y $sc(y_{t-\epsilon}) = sc(y_t) + 1$ es par, entonces $V^-(y_{t-\epsilon}) = sc(y_{t-\epsilon}) + 1 = sc(y_t) + 1 + 1 = V^-(y_t) + 2$.

En cualquiera de los dos casos se cumple lo que afirmábamos. Utilizando la igualdad $V^\pm(y_{t-\epsilon}) = V^\pm(y_t) + 2$ obtenemos que $V^\pm(y_{t-4}) \geq V^\pm(y_{t-\epsilon}) > V^\pm(y_t)$, contradiciendo a (4.17). Esto prueba entonces que $y_t \in S^{-1}$, y por lo tanto que $y_t \in S$ como se afirmaba.

Por otra parte de $y_t \in S$ y de (4.16) obtenemos la validez de (4.18) \square .

Las funciones de Lyapunov V^\pm son discontinuas en muchos puntos de $C - \{0\}$, pues ésta toma valores enteros. Por otro lado, consideradas como funciones sobre $C^1 - \{0\}$, el siguiente resultado muestra que son continuas con respecto a la topología sobre el conjunto S . Esto muestra que mientras que $y_t \in S$ la cantidad $V^\pm(y_t)$ permanece constante.

Teorema 4.4. *Las funciones V^\pm son semicontinuas inferiormente sobre $C - \{0\}$, esto es,*

$$V^\pm(\varphi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V^\pm(\varphi^n) \quad \text{si } \varphi^n \rightarrow \varphi \in C - \{0\}.$$

Las funciones V^\pm son finitas y continuas, por lo tanto son localmente constantes sobre el subconjunto denso abierto $S \subseteq C^1 - \{0\}$ en la topología C^1 ; esto es, si $\varphi \in S$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$V^\pm(\xi) = V^\pm(\varphi) < \infty \quad \text{si } \|\xi - \varphi\|_{C^1} < \epsilon. \quad (4.21)$$

Demostración : Ver apéndice A.

Es muy importante conocer cuándo $V^\pm(y_t) < \infty$ y para esto enunciamos a otro de los teoremas de [4].

Teorema 4.5. *Sea $y(\cdot)$ una solución de (4.1),(4.2) sobre un intervalo $I = (-\infty, t^*)$. Asumimos que $y(t)$ está acotada cuando $t \rightarrow -\infty$, digamos que $|y^i(t)| \leq R$ para algún R , para todo t suficientemente negativo y para cada i . También suponemos que para alguna constante B :*

$$\left| \frac{\partial g^i(t, \xi^{i-1} \xi^i \xi^{i+1})}{\partial \xi^j} \right| \leq B$$

para $|\xi^{i\pm 1}|, |\xi^i| \leq R$ y todo t suficientemente negativo, para cada $j = i - 1, i, i + 1$ y $0 \leq i \leq N$ (omitimos $j = -1$ cuando $i = 0$). Entonces

$$V^\pm(y_t) < \infty \quad \text{para todo } t \in I.$$

Observemos que este teorema no implica que $V^\pm(y_t)$ esté acotado cuando $t \rightarrow \infty$. El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 4.5 y de la relación entre los sistemas (1.2),(4.1).

Corolario 4.6. *Sean $x(\cdot)$ y $\bar{x}(\cdot)$ soluciones de (1.2),(1.3) sobre un intervalo $I = (-\infty, t^*)$, y se supone que ambas $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ son acotadas cuando $t \rightarrow -\infty$. Entonces para todo $t \in I$*

$$V^\pm(x_t - \bar{x}_t) < \infty \quad \text{siempre que } x_t \neq \bar{x}_t, y$$

$$V^\pm(\dot{x}_t) < \infty \quad \text{siempre que } \dot{x}_t \neq 0.$$

Demostración: Consideramos primero $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, por la relación entre los sistemas (1.2) y (4.1), tenemos que $y(t)$ es solución de (4.1). Además por ser tanto $x(t)$ como $\bar{x}(t)$ acotadas cuando $t \rightarrow -\infty$, existe $R > 0$ tal que $|x^i(t)| \leq R$ y $|\bar{x}^i(t)| \leq R$ para todo i tal que $0 \leq i \leq N$ y para todo t suficientemente negativo. Entonces tenemos que $y(t)$ también es acotada y la cota correspondiente es $2R$.

Ahora por la definición de g tenemos que

$$\frac{\partial g^i(t, \xi^{i-1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi^j} = \frac{\partial f^i(\xi^{i-1} + \bar{x}^{i-1}(t), \xi^i + \bar{x}^i(t), \xi^{i+1} + \bar{x}^{i+1}(t))}{\partial \xi^j},$$

y además si $|\xi^{i\pm 1}|, |\xi^i| \leq 2R$ obtenemos que

$$|\xi^{i\pm 1} + \bar{x}^{i\pm 1}(t)|, |\xi^i + \bar{x}^i(t)| \leq 3R.$$

Debido a que f^i es C^1 para todo $i = 0, 1, \dots, N$ tenemos que existe $B > 0$ tal que $\left| \frac{\partial f^i(\xi^{i-1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi^j} \right| \leq B$ para tales i y para $j = i-1, i, i+1$ (donde para el caso $i = 0$, j toma solamente los valores $i, i+1$) cuando $|\xi^{i\pm 1}|, |\xi^i| \leq 3R$. Luego tenemos que

$$\left| \frac{\partial g^i(t, \xi^{i-1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi^j} \right| \leq B \quad \text{para } |\xi^{i\pm 1}|, |\xi^i| \leq 2R,$$

$$i = 0, 1, \dots, N \quad \text{y } j = i-1, i, i+1.$$

Ahora podemos aplicar al teorema 4.5 y obtenemos que $V^\pm(y_t) < \infty$ para todo $t \in I$, es decir $V^\pm(x_t - \bar{x}_t) < \infty$ para todo $t \in I$ siempre que $x_t = \bar{x}_t$.

Para ver que es válida la misma conclusión para \hat{x}_t se procede análogamente usando que f es C^1 para garantizar la cota de $|\hat{x}^i(t)|$ y de $\left| \frac{\partial g^i(t, \xi^{i-1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi^j} \right|$, luego se utiliza otra vez el teorema 4.5. \square

Observación: Mencionemos ahora una consecuencia de los resultados vistos hasta ahora. Supongamos que $x(\cdot)$ es una solución periódica y no constante de (1.2), (1.3), llamemos T a su período mínimo, esto es

$$x_t = x_s \quad \text{sii } t \equiv s \pmod{T}.$$

Tomamos cualquier $c \in (0, T)$, sea $\bar{x}(t) = x(t+c)$, y sea $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$. Entonces $y(\cdot)$ es una solución T -periódica y no nula de un sistema de retroalimentación cíclica signado (4.1), (4.2). Veamos que por teorema 4.1 tenemos que $V^\pm(y_t)$ es constante en $t \in \mathbb{R}$, para esto consideramos el intervalo $[t^1, t^1 + T]$ y sea t^2 un punto de dicho intervalo, entonces

$$V^\pm(y_{t^1}) \geq V^\pm(y_{t^2}) \geq V^\pm(y_{t^1+T}) = V^\pm(y_{t^1}),$$

con lo cual $V^\pm(y_{t^2}) = V^\pm(y_{t^1})$ para todo $t^2 \in [t^1, t^1 + T]$, esto es, $V^\pm(y_t)$ es constante en un período completo y por lo tanto en todo \mathbb{R} .

El corolario 4.6 implica que el valor de $V^\pm(y_t)$ es finito, y entonces (4.18) de teorema 4.3 implica que $\pi^i y_t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq i \leq N$, entonces

$$\begin{aligned} \pi^i y_t &= (y_t(i), y_t(i+1)) \neq 0 \\ (x_t(i) - \bar{x}_t(i), x_t(i+1) - \bar{x}_t(i+1)) &\neq 0 \\ (x_t(i), x_t(i+1)) &\neq (\bar{x}_t(i), \bar{x}_t(i+1)) \\ (x^i(t), x^{i+1}(t)) &\neq (x^i(t+c), x^{i+1}(t+c)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado que $c \in (0, T)$ es arbitrario, concluimos inmediatamente de (4.22) que para cada i la función

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow (x^i(t), x^{i+1}(t)) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.23)$$

es T -periódica y $1-1$ sobre $[0, T)$, y por lo tanto que (4.23) describe una curva de Jordan en el plano (esto es, una curva regular, cerrada y simple). Es decir que cada función

$$\pi^i : \gamma(\varphi) \subseteq C \rightarrow \pi^i(\gamma(\varphi)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

manda la órbita periódica $\gamma(\varphi)$ (acá $\varphi = x_0$ es la condición inicial) homeomórficamente sobre su imagen $\pi^i(\gamma(\varphi))$ en el plano.

Notemos además que $V^\pm(\dot{x}_t)$ es finito y constante, y así que $\dot{x}_t \in S$ y por lo tanto

$$\pi^i \dot{x}_t = (\dot{x}^i(t), \dot{x}^{i+1}(t)) \neq (0, 0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (para verificar que es así se usan los mismos argumentos de recién). Luego, cada una de las curvas (4.23) es una inmersión de la circunferencia S^1 en el plano.

5. Resultados preliminares

En esta sección nos acercaremos bastante a la demostración del teorema 3.1, el teorema de Poincaré-Bendixon.

En toda esta sección, $x(t)$ denota una solución fija de (1.2),(1.3) sobre el intervalo $[0, \infty)$. Suponemos que $x(t)$ está acotada cuando $t \rightarrow \infty$, como en el enunciado del teorema, y de manera que existe un conjunto límite omega no vacío $\omega(x_0) \subset C$ para esta solución (usualmente, $x_0 \in C$ denota la condición inicial de la solución $x(\cdot)$). Recordamos que el conjunto $\omega(x_0)$

es no vacío, compacto, conexo e invariante, y que el operador solución de (1.2) restringido a $\omega(x_0)$ provee un flujo bilátero. De este modo, si $\varphi \in \omega(x_0)$ entonces existe una solución única $u(t)$ de (1.2), con $u_0 = \varphi$ y $u_t \in \omega(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nos referiremos a ésta como la **solución a través de φ** . Dado que estamos considerando a un sistema específico (1.2), (1.3), con un parámetro de retroalimentación determinado $\delta^* \in \{-1, 1\}$, denotaremos a la función de Lyapunov V^\pm , donde \pm denota el signo de δ^* , simplemente como V .

La idea básica acá es mostrar que varios subconjuntos de $\omega(x_0)$ (o más generalmente subconjuntos de $\overline{\gamma^+(x_0)}$) son mandados homeomórficamente sobre el plano por las funciones π^i . Aplicaremos adecuadamente a los flujos inducidos sobre estas imágenes versiones adaptadas del argumento familiar del teorema de Poincaré-Bendixon. La última meta será mostrar que todo $\omega(x_0)$ es mandado homeomórficamente sobre el plano, aunque para esto se necesitarán una larga serie de lemas.

El siguiente lema muestra que las clausuras de las órbitas individuales $\overline{\gamma(\varphi)}$, para $\varphi \in \omega(x_0)$, son mandadas homeomórficamente sobre el plano.

Lema 5.1. *Sea $\varphi \in \omega(x_0)$. Entonces existe un entero ν tal que*

$$\text{si } \psi, \eta \in \overline{\gamma(\varphi)} \text{ y } \psi \neq \eta \text{ entonces } V(\psi - \eta) = \nu \text{ y } \psi - \eta \in S.$$

En particular, cada función $\pi = \pi^i$, donde $0 \leq i \leq N$, envía a $\overline{\gamma(\varphi)}$ homeomórficamente sobre su imagen $\pi(\overline{\gamma(\varphi)})$ en el plano.

Demostración: Ver apéndice B.

Que cada órbita clausurada $\overline{\gamma(\varphi)}$, para $\varphi \in \omega(x_0)$, es enviada homeomórficamente en el plano, no implica directamente que lo mismo sea verdadero para el conjunto total $\omega(x_0)$. Se necesitan más resultados antes de poder hacer esta conclusión; el próximo lema es un paso en esa dirección.

Lema 5.2. *Sea $\varphi \in \omega(x_0)$, tal que $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$. Entonces existe $T > 0$ y un entero ν tal que*

$$\text{si } \psi \in \overline{\gamma(\varphi)} \text{ y } \eta \in \overline{\gamma_T^+(x_0)}, \text{ y } \psi \neq \eta \text{ se satisface que} \\ V(\psi - \eta) = \nu \text{ y } \psi - \eta \in S.$$

En particular, $\pi^i \psi \neq \pi^i \eta$ para tales ψ y η , y para cada i con $0 \leq i \leq N$.

Demostración: Ver apéndice B.

Los próximos dos resultados tratan sobre órbitas periódicas y equilibrios.

Lema 5.3. Sean $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ dos soluciones periódicas distintas de (1.2), (1.3) (esto es, $\gamma(u_0) \cap \gamma(v_0) = \emptyset$). Entonces existe un entero ν tal que

$$\text{si } \varphi \in \gamma(u_0) \text{ y } \psi \in \gamma(v_0) \text{ entonces } V(\varphi - \psi) = \nu \text{ y } \varphi - \psi \in S. \quad (5.1)$$

Cada proyección planar $\pi = \pi^i$, para $1 \leq i \leq N$, es 1-1 sobre las órbitas $\gamma(u_0)$ y $\gamma(v_0)$, y sus imágenes $\pi(\gamma(u_0))$ y $\pi(\gamma(v_0))$ son curvas de Jordan disjuntas en \mathbb{R}^2 .

Si alguna de las dos $u(\cdot)$ o $v(\cdot)$ es un equilibrio y la otra una solución periódica, o si ambas son equilibrios, entonces valen resultados análogos, incluyendo (5.1).

Demostración: Consideremos el caso en que ambas soluciones $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son periódicas (la demostración para los otros casos es muy similar).

En el final de la sección 4 se demostró que π envía a $\gamma(u_0)$ y a $\gamma(v_0)$ homeomórficamente sobre sus rangos en el plano. Entonces es suficiente para probar el lema verificar que se cumple (5.1). Que las imágenes $\pi(\gamma(u_0))$ y $\pi(\gamma(v_0))$ sean disjuntas se sigue directamente del hecho que como $\varphi - \psi \in S$, por lo tanto $\pi\varphi \neq \pi\psi$ por (4.16), con φ y ψ como en (5.1).

Considerar la función $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ dada por $W(t, s) = V(u_t - v_s)$, la cual tiene períodos T^1 y T^2 , en las variables t y s respectivamente, donde T^1 y T^2 son los períodos de las soluciones $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$. Consideramos a W como función sobre el toro $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, donde tomamos t y s módulo T^1 y T^2 . En particular, nos interesa el conjunto

$$\Gamma = \{(t, s) \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 / u_t - v_s \in S\}.$$

El conjunto Γ es abierto pues si tomamos un $(t^0, s^0) \in \Gamma$ entonces $(t^0, s^0) \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ y, además, $u_{t^0} - v_{s^0} \in S$. Como S es abierto, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que si $\varphi \in C^1$ y $\|(u_{t^0} - v_{s^0}) - \varphi\|_{C^1} < \epsilon$ se tiene $\varphi \in S$. Sabemos que existe un $\delta^1 > 0$ tal que si $|t - t^0| < \delta^1$ entonces $\|u_t - u_{t^0}\|_{C^1} < \epsilon/2$ y que también existe un $\delta^2 > 0$ tal que si $|s - s^0| < \delta^2$ entonces $\|v_s - v_{s^0}\|_{C^1} < \epsilon/2$. Si ahora llamamos $\delta = \min\{\delta^1, \delta^2\}$ y consideramos al conjunto de los $(t, s) \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ tales que $|t - t^0| < \delta$ y $|s - s^0| < \delta$ tenemos que

$$\|(u_t - v_s) - (u_{t^0} - v_{s^0})\|_{C^1} \leq \|u_t - u_{t^0}\|_{C^1} + \|v_t - v_{t^0}\|_{C^1} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

entonces $u_t - v_s \in S$, obteniendo así que Γ es abierto.

Observemos que, por el teorema 4.4, tenemos que W es constante y finita sobre cada componente conexa de Γ . Obtenemos que $W(t, s) < \infty$ para todo t, s , por el corolario 4.6. Además, por el teorema 4.1, $W(t, t+c)$ es una función no creciente de t para cada $c \in \mathbb{R}$ fijo, así en particular

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, t+c) = \nu(c)$$

para algún entero $\nu(c)$. Por lo tanto, el teorema 4.3 implica que para cada $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $(t, t+c) \in \Gamma$ para t grande. Esto es porque por el corolario 4.6 se cumple que $W(t, t+c) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, entonces, para t grande tenemos que $W(t, t+c)$ es constante, resultando $u_t - v_{t+c} \in S$, es decir, $(t, t+c) \in \Gamma$, para t grande.

Con c fijo pero arbitrario, sea $t = t^0$ elegido para que $W(t^0, t^0+c) = \nu(c)$, y $(t^0, t^0+c) \in \Gamma$. Entonces existe una sucesión $t^n \rightarrow -\infty$ tal que $(t^n, t^n+c) \rightarrow (t^0, t^0+c)$ sobre el Toro $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, y para cada n grande tenemos también que $W(t^n, t^n+c) = \nu(c)$ por el teorema 4.4. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} W(t, t+c) = \nu(c)$$

que, junto al otro límite probado y a que $W(t, t+c)$ es no creciente, implica que $W(t, t+c) = \nu(c)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $W(t, t+c)$ es constante y finito, se tiene que $u_t - v_{t+c} \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por el teorema 4.3, es decir que $(t, t+c) \in \Gamma$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, que $\Gamma = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$. De esto vemos que $\nu(c)$ es independiente de c concluyendo la prueba de (5.1). \square

Lema 5.4. *Existe un entero ν tal que*

$$\begin{aligned} \text{si } \varphi \in \omega(x_0) \text{ y } \kappa \in E \cap \omega(x_0), \text{ y } \varphi \neq \kappa \text{ entonces} \\ V(\varphi - \kappa) = \nu \quad \text{y} \quad \varphi - \kappa \in S, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $E \subset C$ denota al conjunto de puntos de equilibrio de (1.2).

Demostración: Fijamos algún equilibrio $\kappa \in E \cap \omega(x_0)$, y definir $\nu(\kappa)$ por

$$\nu(\kappa) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t - \kappa).$$

La existencia de este límite está garantizada por ser V no creciente (por teorema 4.1) y finita (por corolario 4.6).

Sea $\varphi \in \omega(x_0)$ con $\varphi \neq \kappa$. Entonces existe una sucesión $(t^n)_n$ tal que $t^n \rightarrow \infty$ y $x_{t^n} \rightarrow \varphi$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por ser $\varphi \neq \kappa$ existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ tenemos que $x_{t^n} \neq \kappa$. Ahora por la semicontinuidad inferior de V obtenemos

$$V(\varphi - \kappa) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(x_{t^n} - \kappa) = \nu(\kappa).$$

Si, además, $\varphi - \kappa \in S$ entonces existe $n_1 > n_0$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $x_{t^n} - \kappa \in S$ (por ser S abierto). Como V es continua sobre S tenemos que

$$V(\varphi - \kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x_{t^n} - \kappa) = \nu(\kappa).$$

Ahora fijamos algún $\varphi \in \omega(x_0)$, con $\varphi \neq \kappa$, y sea $u(\cdot)$ la solución a través de φ . Observemos que, por ser $\omega(x_0)$ invariante, $u_t \in \omega(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, además, $u_t \neq \kappa$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, tenemos que $V(u_t - \kappa) \leq \nu(\kappa)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $u_t \in \omega(x_0)$ para todo t real y $\omega(x_0)$ es compacto entonces $u(\cdot)$ es acotada. Por otro lado, como κ es un equilibrio entonces también es acotado. Luego, por el corolario 4.6 tenemos que $V(u_t - \kappa) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $V(u_t - \kappa)$ está acotada y es no creciente entonces $V(u_t - \kappa)$ es constante para t grande. Por lo tanto, $u_t - \kappa \in S$ (por teorema 4.3) y, de esta manera, $V(u_t - \kappa) = \nu(\kappa)$, para t grande. Se sigue del teorema 4.1 que $V(u_t - \kappa) \geq \nu(\kappa)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y así de esta desigualdad y la obtenida anteriormente concluimos que $V(u_t - \kappa) = \nu(\kappa) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora, por el teorema 4.3 tenemos que $u_t - \kappa \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces si consideramos en particular $t = 0$ tenemos que $V(u_0 - \kappa) = \nu(\kappa)$ y $u_0 - \kappa \in S$, es decir,

$$V(\varphi - \kappa) = \nu(\kappa) \text{ y } \varphi - \kappa \in S.$$

Para completar la demostración del lema, debemos mostrar que el entero $\nu(\kappa)$ es independiente de la elección del punto de equilibrio. Suponer que $\kappa^1, \kappa^2 \in E \cap \omega(x_0)$ son puntos de equilibrio distintos. Entonces:

- si κ^1 toma el rol de φ en (5.2) tenemos que $V(\kappa^1 - \kappa^2) = \nu(\kappa^2)$,
 - si κ^2 toma el rol de φ en (5.2) tenemos que $V(\kappa^2 - \kappa^1) = \nu(\kappa^1)$,
- y debido a que $V(\kappa^1 - \kappa^2) = V(\kappa^2 - \kappa^1)$ obtenemos

$$\nu(\kappa^1) = V(\kappa^2 - \kappa^1) = V(\kappa^1 - \kappa^2) = \nu(\kappa^2),$$

como deseábamos. \square

En los argumentos siguientes trataremos de imitar la conocida demostración del teorema de Poincaré-Bendixon, adaptando ésta a la presente

situación. Si bien la propuesta general es familiar, deben tenerse algunos cuidados, por esto es que hacemos algunas observaciones previas. Desde ahora en adelante conservaremos al índice i en $\pi = \pi^i$ fijo, pero arbitrariamente, con $0 \leq i \leq N$.

Supongamos que $A \subseteq C$ es un conjunto invariante y compacto (uno está pensando específicamente en $A = \overline{\gamma(\varphi)}$, para $\varphi \in \omega(x_0)$). Supongamos también que para algún entero ν tenemos que

$$\text{Si } \psi, \eta \in A \text{ y } \psi \neq \eta \text{ entonces } V(\psi - \eta) = \nu \text{ y } \psi - \eta \in S. \quad (5.3)$$

Observemos que para el caso en que $A = \overline{\gamma(\varphi)}$ tenemos que por el lema 5.1 se cumple (5.3).

Entonces $\pi\psi \neq \pi\eta$ para cualquier ψ, η , donde $\pi = \pi^i$ es alguno de los mapas (2.1), por lo tanto,

$$\pi : A \rightarrow \pi(A) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (5.4)$$

es un homeomorfismo. Para poder justificar esto solamente hay que analizar la continuidad de π , pues es claro que π es biyectiva y al ser A compacto no hace falta analizar la continuidad de π^{-1} . La continuidad de π es trivial, pues dado $\varphi \in A$ y $\epsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \epsilon$ para obtener que

$$\text{si } \|\varphi - \psi\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|\pi(\varphi) - \pi(\psi)\| < \epsilon,$$

es decir, ya se probó que (5.4) es un homeomorfismo.

Dado que el sistema (1.2) genera un flujo bilátero sobre A , inmediatamente obtenemos un flujo continuo inducido sobre la imagen compacta vía $\pi, \pi(A)$. Deseamos construir un campo vectorial continuo

$$F : \pi(A) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (5.5)$$

esto es, una ecuación diferencial ordinaria sobre $\pi(A)$, la cual satisface este flujo.

Tomamos algún $\psi \in A$ y sea $v(\cdot) = v(\cdot, \psi)$ la solución a través de ψ , esto es, $v_0 = v_0(\psi) = \psi$ y $v_t = v_t(\psi) \in A$. Podemos derivar con respecto a t para obtener $\dot{v}_t(\psi) \in C$, y observamos que ésta depende continuamente de $t \in \mathbb{R}$ y $\psi \in A$. En efecto, esta es una consecuencia sencilla del hecho que tenemos un flujo bilátero sobre A y de que la función $T : C \rightarrow C^1$ es continua. Por lo tanto, tenemos que si Φ está definida por

$$\Phi : A \rightarrow C \quad \text{y} \quad \Phi(\psi) = \dot{v}_0(\psi),$$

entonces ϕ es continua (lo cual se deduce de lo observado más arriba donde dijimos que $\dot{v}_t(\psi)$ depende continuamente de t y de ψ) y cumple

$$\dot{v}_t = \bar{\Phi}(v_t). \quad (5.6)$$

Para justificar (5.6), sea $v_t \in A$ y consideramos $w_s(\cdot, v_t) = w_s(\cdot)$ la solución a través de v_t , esto es, $w_0 = w_0(v_t) = v_t$ y $w_s = w_s(v_t) \in A$. Claramente $w_s = v_{t+s}$ por la unicidad de solución del sistema (1.2),(1.3). Ahora por la definición de $\bar{\Phi}$ tenemos que

$$\bar{\Phi}(v_t) = \dot{w}_0(v_t) = \dot{w}_0 = \dot{v}_t,$$

entonces $\bar{\Phi}(v_t) = \dot{v}_t$ como queríamos ver.

Por el homeomorfismo (5.4), existe una única función continua F como en (5.5), para la cual

$$\pi \bar{\Phi}(\psi) = F(\pi\psi) \quad \text{para todo } \psi \in A \quad (5.7)$$

Esto es, porque basta con definir a F por

$$F = \pi \circ \bar{\Phi} \circ (\pi|_A)^{-1}$$

ya que F resulta ser continua por ser composición de funciones continuas y además si $\psi \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} F(\pi\psi) &= \pi \circ \bar{\Phi} \circ (\pi|_A)^{-1}(\pi\psi) \\ &= \pi \circ \bar{\Phi}(\psi) = \pi(\bar{\Phi}(\psi)) \end{aligned}$$

es decir, que F satisface (5.7). Para verificar la unicidad suponemos que existe $G : \pi(A) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua tal que $\pi\bar{\Phi}(\psi) = G(\pi\psi)$ para todo $\psi \in A$. Entonces tenemos que para todo $\psi \in A$ se cumple que $\pi\bar{\Phi}(\psi) = F(\pi\psi)$ y $\pi\bar{\Phi}(\psi) = G(\pi\psi)$, esto es $F \equiv G$.

Se sigue de lo anterior que para cualquier solución $v(\cdot)$ con $v_t \in A$, la imagen $\xi(t) = \pi(v_t)$ en \mathbb{R}^2 satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{\xi}(t) = F(\xi(t)) \quad (5.8)$$

en el subconjunto compacto del plano $\pi(A)$. Para justificar (5.8) simplemente hacemos

$$\dot{\xi}(t) = \pi\dot{v}_t = \pi\bar{\Phi}(v_t) = F(\pi v_t) = F(\xi(t)),$$

donde las igualdades anteriores quedan justificadas por (5.6), (5.7) y la definición de $\xi(\cdot)$.

Observemos que, de la continuidad del campo vectorial F no podemos deducir que el problema de valores iniciales de ecuación (5.8) tenga solución única. Debido a esto, utilizaremos la solución determinada canónicamente. Dado cualquier $\xi^0 \in \pi(A)$, existe un único $\psi \in A$ con $\pi\psi = \xi^0$, y una única solución $v(\cdot)$ de (1.2) en A con $v_0 = \psi$. Como ya hemos observado, $\xi(t) = \pi v_t$ satisface la ecuación (5.8) con $\xi(0) = \xi^0$. Por lo tanto, aún cuando las soluciones de (5.8) pueden no ser únicas, a través de cada $\xi^0 \in A$ hay una solución determinada canónicamente $\xi(\cdot)$ obtenida del flujo sobre A .

En la sección 6 emplearemos algunas técnicas de la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixon clásico. En particular, usaremos el concepto de transversal. Recordemos que si $\xi^0 \in \pi(A)$ es tal que $F(\xi^0) \neq 0$, una **transversal** L es un segmento de recta abierto y contenido en \mathbb{R}^2 suficientemente pequeño, con $\xi^0 \in L$, tal que el vector $F(\xi) \neq 0$ no es paralelo a L y existe un vector no nulo $q \in \mathbb{R}^2$ ortogonal a L tal que el producto interno satisface

$$\langle q, F(\xi) \rangle > 0, \quad \text{para cada } \xi \in L \cap \pi(A). \quad (5.9)$$

Si $\xi^0 \in \pi(A)$ es tal que $F(\xi^0) \neq 0$, entonces la continuidad de F sobre el compacto $\pi(A)$ asegura que existe una transversal L al campo vectorial en ξ^0 , y una **primer función de retorno** R asociada a L . Recordemos también que la primer función de retorno

$$R : U \subseteq L \cap \pi(A) \rightarrow L \cap \pi(A), \quad (5.10)$$

está definida y es continua sobre el abierto relativo U de puntos de $L \cap \pi(A)$ cuyas trayectorias retornan a L en tiempo futuro. Para esta definición de R , tomamos solamente la solución determinada canónicamente definida anteriormente, la solución obtenida del flujo sobre A .

El siguiente resultado nos permite usar a la Función de Retorno R como si ésta hubiese surgido de un campo vectorial planar. En particular, este resultado muestra que R es monótona y también, que bajo condiciones adecuadas, la imagen planar de alguna órbita cercana a A cruza a L en la misma dirección.

Lema 5.5. *Sea $A \subset C$ un conjunto compacto e invariante, $\pi = \pi^i$ alguno de los mapas (2.1), y $F : \pi(A) \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por (5.6),(5.7),*

como se describió anteriormente. Sea $\xi^0 \in \pi(A)$ tal que $F(\xi^0) \neq 0$, sea L una transversal a través de ξ^0 , y sea R como en (5.10) la primer función de retorno asociada. Entonces R es estrictamente monótona, esto es

$$\text{si } \xi^0 < \bar{\xi}^0 \text{ con } \xi^0, \bar{\xi}^0 \in U \text{ entonces } R(\xi^0) < R(\bar{\xi}^0),$$

y donde $<$ denota a uno de los dos órdenes naturales sobre L .

Se supone además que $A = \overline{\gamma(\varphi)}$ para algún $\varphi \in \omega(x_0)$ para el cual $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$. Entonces existe $T > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\text{si } \pi x_t \in L, \quad t \geq T, \quad \text{y } \|\pi x_t - \xi^0\| < \epsilon \text{ entonces } \langle q, \pi \dot{x}_t \rangle > 0, \quad (5.11)$$

con q como en (5.9). Esto es, la imagen πx_t de la trayectoria $t \rightarrow x_t$ bajo π cruza a la transversal L en la misma dirección que el campo vectorial F , por lo menos cerca a ξ^0 y para t grande.

Demostración: La demostración de la monotonía estricta de R depende del teorema de la curva de Jordan. Con $\xi^0 < \bar{\xi}^0$ como planteamos, consideramos a las correspondientes soluciones (determinadas canónicamente) $\xi(\cdot)$ y $\bar{\xi}(\cdot)$ de (5.8) a través de esos puntos. Sean T y \bar{T} los primeros tiempos de retorno de esas soluciones, para que $\xi(T) = R(\xi^0)$ y $\bar{\xi}(\bar{T}) = R(\bar{\xi}^0)$, y consideramos la curva de Jordan J formada por el arco $t \rightarrow \xi(t)$ para $t \in [0, T]$ y por el segmento de recta $[\xi^0, R(\xi^0)] \subseteq L$. Tenemos que $\bar{\xi}(t) \notin J$ para todo t en el intervalo abierto $(0, \bar{T})$, y así que para $\epsilon > 0$ pequeño los dos puntos $\bar{\xi}(\epsilon)$ y $\bar{\xi}(\bar{T} - \epsilon)$ pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - J$, o al interior J_{int} , o al exterior J_{ext} .

Por otro lado, vemos fácilmente que si $R(\xi^0) > R(\bar{\xi}^0)$ entonces $\bar{\xi}(\epsilon)$ y $\bar{\xi}(\bar{T} - \epsilon)$ necesariamente pertenecen a diferentes componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - J$ (ver Figura 1). Esto es una contradicción y concluimos de esta manera que $R(\xi^0) < R(\bar{\xi}^0)$, como afirmábamos.

Para probar la segunda parte del lema, sea $A = \overline{\gamma(\varphi)}$ para algún $\varphi \in \omega(x_0)$ y para el cual $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$, y suponemos que (5.11) falla para T arbitrariamente grande y ϵ arbitrariamente pequeño. Entonces existe una sucesión $t^n \rightarrow \infty$ tal que $\pi x_{t^n} \in L$ con $\pi x_{t^n} \rightarrow \xi^0$, pero con

$$\langle q, \pi \dot{x}_{t^n} \rangle \leq 0. \quad (5.12)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$x_{t^n} \rightarrow \eta \in \omega(x_0), \quad (5.13)$$

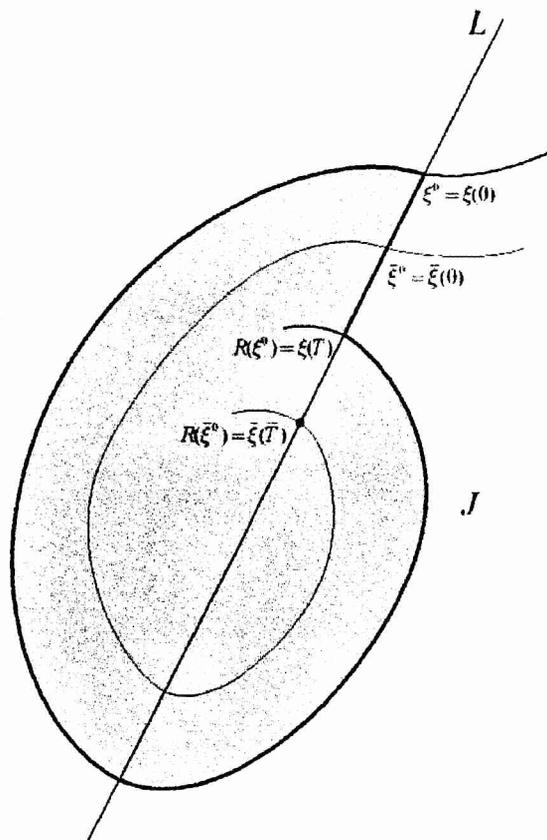


Figura 1: Orden en L .

ya que como $\omega(x_0)$ es compacto entonces hay una subsucesión de $(x_{t^n})_n$ que converge a un $\eta \in \omega(x_0)$. Por comodidad denotamos a dicha subsucesión igual que la sucesión. Sea $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$ tal que $\pi\psi = \xi^0$, y sea $v(\cdot)$ la solución a través de ψ , entonces

$$\begin{aligned} \langle q, \pi v_0 \rangle &= \langle q, \pi \Phi \psi \rangle \\ &= \langle q, F(\pi\psi) \rangle = \langle q, F(\xi^0) \rangle > 0, \end{aligned}$$

es decir que hemos obtenido que

$$\langle q, \pi v_0 \rangle > 0. \quad (5.14)$$

Además por la continuidad de π tenemos que $\pi\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi x_{t^n} = \xi^0$ y como también $\pi\psi = \xi^0$ entonces por el lema 5.2 tenemos que $\eta = \psi$. Debido a que $\pi x_{t^n} \rightarrow \xi^0 = \pi\psi$, es decir $\pi x_{t^n} \rightarrow \pi v_0$, se tiene que $\pi \dot{x}_{t^n} \rightarrow \pi \dot{v}_0$. Entonces, por (5.12) y por la continuidad del producto interno, tenemos

$$\langle q, \pi \dot{v}_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle q, \pi \dot{x}_{t^n} \rangle \leq 0,$$

contradiciendo (5.14). \square

El siguiente resultado está relacionado con la posible no unicidad de la ecuación diferencial ordinaria (5.8). En éste se prueba que si $\xi(\cdot)$ es una solución no constante (o equivalentemente que $v(\cdot)$ es no constante, donde $\xi(t) = \pi v_t$), entonces $F(\xi(t)) \neq 0$.

Lema 5.6. *Suponemos que $A \subseteq C$ es un conjunto compacto e invariante para (1.2),(1.3), y suponemos que (5.3) vale para algún entero ν . Entonces si $v(\cdot)$ es una solución en A y no es un punto de equilibrio, tenemos que*

$$\pi \dot{v}_t \neq 0, \quad \text{por lo tanto} \quad F(\xi(t)) \neq 0,$$

donde $\xi(t) = \pi v_t$ y F es como en (5.6),(5.7).

Demostración: Para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que, por (5.3),

$$V(\epsilon^{-1}(v_{t+\epsilon} - v_t)) = V(v_{t+\epsilon} - v_t) = \nu$$

para todo $\epsilon > 0$ pequeño, y por lo tanto por la semicontinuidad de V tenemos $V(\dot{v}_t) \leq \nu$ y además valiendo la igualdad cuando $\dot{v}_t \in S$ (por el teorema 4.4). Como en la demostración del lema 5.1, tenemos que $\dot{v}_t \in S$ para todo $|t|$ grande, y por lo tanto que $V(\dot{v}_t) = \nu$ y $\dot{v}_t \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (usamos el hecho que $\dot{v}(\cdot)$ satisface la ecuación variacional lineal, la cual es un sistema de retroalimentación cíclico signado). Entonces por (4.16), el hecho que $\dot{v}_t \in S$ implica que $\pi \dot{v}_t \neq 0$, como queríamos ver. \square

6. La demostración del Teorema de Poincaré-Bendixon

Vamos a usar los resultados de la sección 5 y argumentos planares del estilo de los del clásico Teorema de Poincaré-Bendixon para probar el teorema 3.1.

Lema 6.1. Sea $\varphi \in \omega(x_0)$, y sea $u(\cdot)$ la solución a través de φ . Supongamos que $u(\cdot)$ no es periódica. Entonces o $\alpha(\varphi) \cup \omega(\varphi) \subseteq E$ o $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$.

Demostración: Sea $u(\cdot)$ como en el enunciado del lema, y suponemos además que $\alpha(\varphi)$ o $\omega(\varphi)$ contiene a un punto que no es un equilibrio, digamos que existe $\psi \in \omega(\varphi)$ el cual no es un equilibrio. Llamamos $v(\cdot)$ a la solución a través de ψ , debemos probar que $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$.

Debido al lema 5.1, podemos construir un campo vectorial continuo (5.5) sobre el conjunto πA , donde $A = \gamma(\varphi)$ y $\pi = \pi^i$ es alguna de las funciones proyección planar (no importa cual de ellas). El flujo sobre A de nuestro sistema (1.2) es mandado homeomórficamente por π en el correspondiente flujo sobre $\pi(A)$, y satisface la ecuación diferencial ordinaria (5.8) como describimos en la sección previa.

Sea $\xi^0 = \pi\psi$, como ψ no es un equilibrio entonces por el lema 5.6 se cumple que $\pi\dot{v}_t \neq 0$, entonces

$$F(\xi(t)) = F(\pi v_t) = \pi(\Phi v_t) = \pi\dot{v}_t \neq 0$$

y, luego obtenemos en particular para el caso $t = 0$ que $F(\xi(0)) = F(\xi^0) \neq 0$. Podemos, pues, construir una transversal L al campo vectorial F en ξ^0 , con una función de retorno asociada, como en (5.10), definida y estrictamente monótona sobre $U \subseteq L \cap \pi(A)$ (por el lema 5.1).

Ahora sea $\zeta(t) = \pi u_t$. Como $\psi \in \omega(\varphi) = \omega(u_0)$, entonces existe una sucesión $t^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $u_{t^n} \rightarrow \psi$. Como π es continua entonces $\pi(u_{t^n}) \rightarrow \pi\psi$, esto es, $\zeta(t^n) \rightarrow \xi^0$, es decir que $\xi^0 = \pi\psi$ pertenece al conjunto límite omega de la órbita $\zeta(\cdot)$.

Necesariamente $\zeta(t) \in L$ para infinitos t cuando $t \rightarrow \infty$; en efecto, existe $t^n \rightarrow \infty$ tal que $\zeta^n \in L$ y $R(\zeta^n) = \zeta^{n+1}$, donde denotamos $\zeta^n = \zeta(t^n)$. Para justificar esto, primero vemos que dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda trayectoria que pase a través de la bola $B_\delta(\xi^0)$ en $t = 0$ debe cruzar a L en algún tiempo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Supongamos que L es un segmento de la recta $g(x) = a^T x - c = 0$ y sea $\eta(t, x)$ la solución de (5.8) que comienza en $\eta(0, x) = x$. Definimos $G(t, x) = g(\eta(t, x)) = a^T \eta(t, x) - c$. La trayectoria de $\eta(t, x)$ cruza a L si $G(t, x) = 0$ para algún tiempo t^1 . Sabemos que $G(0, \xi^0) = g(\eta(0, \xi^0)) = 0$ y, además, que

$$\frac{\partial G(0, \xi^0)}{\partial t} = a^T F(\eta(0, \xi^0)) = a^T F(\xi^0) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, existe una función diferenciable con continuidad $\Gamma(x) : W \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un entorno W de ξ^0 tal que

$\Gamma(\xi^0) = 0$ y $G(\Gamma(x), x) = 0$. Ahora, por la continuidad de $\Gamma(x)$, dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - \xi^0\| < \delta$ entonces $|\Gamma(x)| < \epsilon$. Luego, si $x \in B_\delta(\xi^0)$, la trayectoria que comienza en x cruza a L en $\Gamma(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$.

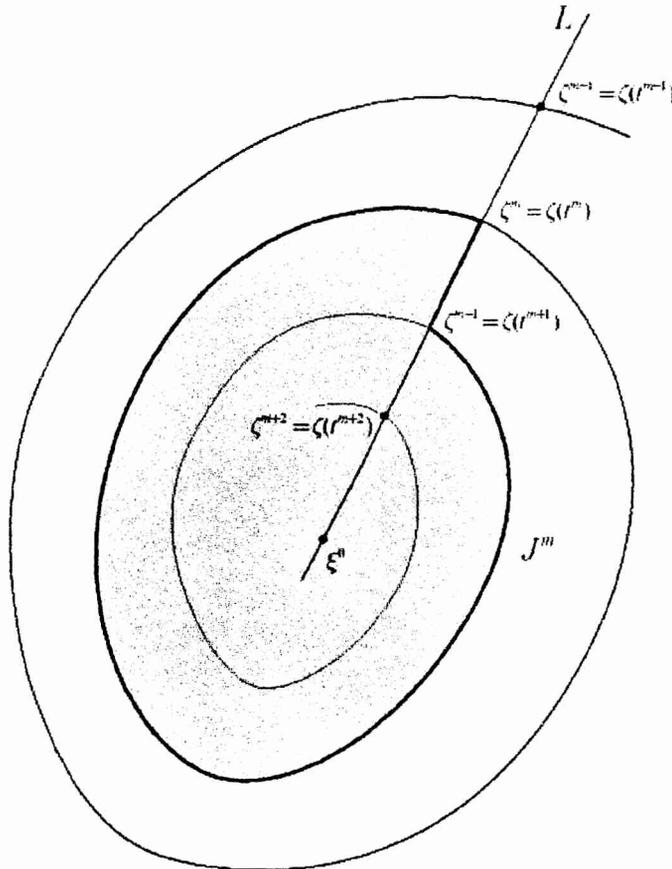


Figura 2: Curva de Jordan J^m .

Ahora vemos que si la trayectoria está acotada (como es en nuestro caso), entonces eligiendo a ϵ suficientemente pequeño, el punto donde la trayectoria cruza a L puede hacerse arbitrariamente próximo a ξ^0 . Observemos que

$$\begin{aligned}
\|\eta(\Gamma(x), x) - \xi^0\| &= \|\eta(\Gamma(x), x) - x + x - \xi^0\| \\
&\leq \|\eta(\Gamma(x), x) - \eta(0, x)\| + \|x - \xi^0\| \\
&\leq \sup_{-\epsilon \leq t \leq \epsilon} \|F(\eta(t, x))\| \|\Gamma(x) - 0\| + \|x - \xi^0\|.
\end{aligned}$$

Podemos elegir $\delta > 0$ menor que ϵ . Además sabemos que F es continua y $\eta(t, x)$ está acotada, entonces existe $k > 0$ tal que $\|F(\eta(t, x))\| < k$. Luego,

$$\|\eta(\Gamma(x), x) - \xi^0\| < k\epsilon + \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Entonces el punto donde se cruza a L puede hacerse arbitrariamente próximo a ξ^0 . Como ξ^0 pertenece al conjunto límite omega de $\zeta(\cdot)$ entonces $\zeta(t)$ entra en la bola $B_\delta(\xi^0)$ infinitas veces y entonces ésta cruza a L infinitas veces. Sea ζ^n la sucesión de puntos que cruzan a L ordenados según el índice creciente de t , esto es, $\zeta^n = \zeta(t^n)$ donde $t^n < t^{n+1}$ para todo n y $R(\zeta^n) = \zeta^{n+1}$.

Por suponer que la solución $u(\cdot)$ no es periódica y, por lo tanto, $\zeta(\cdot)$ tampoco, se sigue que $\zeta^n \neq \zeta^{n+1}$ y entonces necesariamente ζ^n es una sucesión estrictamente monótona (por el lema 5.1). Además, por lo observado anteriormente, debemos tener $\zeta^n \rightarrow \xi^0$.

Para cualquier m considerar la curva de Jordan J^m compuesta del arco $t \rightarrow \zeta(t)$ para $t \in [t^m, t^{m+1}]$ (recordar que la función $t \rightarrow \zeta(t)$ es 1-1 sobre \mathbb{R}), junto con el segmento de recta $[\zeta^m, \zeta^{m+1}] \subseteq L$ como se ve en la Figura 2. Además, el punto $\zeta(t)$, para t en los intervalos $(-\infty, t^m)$ y (t^{m+1}, ∞) , está en diferentes componentes conexas (el interior J_{int}^m y el exterior J_{ext}^m o viceversa) de $\mathbb{R}^2 - J^m$.

Supongamos que $\zeta(t) \in J_{ext}^m$ para $t < t^m$, y que $\zeta(t) \in J_{int}^m$ para $t > t^{m+1}$. Entonces tenemos que

$$\pi(\alpha(\varphi)) \subseteq \overline{J_{ext}^m} \quad \text{y} \quad \pi(\omega(\varphi)) \subseteq \overline{J_{int}^m}.$$

Tomamos cualquier punto $\eta \in \alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi)$ y sea $w(\cdot)$ la solución a través de este punto, entonces $w_t \in \alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi)$, y así

$$\pi w_t \in \overline{J_{ext}^m} \cap \overline{J_{int}^m} = J^m, \quad (6.1)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, (6.1) no puede valer para todo t , por la definición de J^m como un segmento de la órbita $\zeta(\cdot)$, y un segmento de recta $[\zeta^m, \zeta^{m+1}]$ de la transversal L . Con esta contradicción se completa la demostración. \square

Proposición 6.2. *Sea $\varphi \in \omega(x_0)$ y sea $u(\cdot)$ la solución a través de φ . Entonces $u(\cdot)$ es periódica o $\alpha(\varphi) \cup \omega(\varphi) \subseteq E$.*

Demostración: Supongamos que $u(\cdot)$ es como en el enunciado de la proposición, que, además, no es periódica y que $\alpha(\varphi)$ o $\omega(\varphi)$ (digamos que $\omega(\varphi)$) contiene a un punto que no es un equilibrio. Entonces, por el lema 6.1 tenemos que $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$. Observemos que las hipótesis del lema 5.2 se cumplen, entonces podremos usar a este resultado más adelante en la demostración.

Fijamos un punto $\psi \in \omega(\varphi)$ que no es un equilibrio y sea $v(\cdot)$ la solución a través de este punto. Denotamos $\xi^0 = \pi\psi$ y L a una transversal a través de ξ^0 para el campo vectorial planar F , con función de retorno R . Como en la demostración del lema 6.1, tenemos una sucesión estrictamente monótona $\zeta^n \in U \subseteq L$ con $R(\zeta^n) = \zeta^{n+1}$ y $\zeta^n \rightarrow \xi^0$, donde $\zeta^n = \zeta(t^n)$ para alguna sucesión $t^n \rightarrow \infty$ donde $\zeta(t) = \pi u_t$.

Consideremos la curva trazada en \mathbb{R}^2 por πx_t , para t grande. Para cualquier m sea J^m la curva de Jordan en la demostración del lema 6.1. En particular, fijamos m suficientemente grande para que $\|\zeta^m - \xi^0\| < \epsilon$, donde ϵ es como en (5.11), en el enunciado del lema 5.5. Los puntos ζ^{m-1} y ζ^{m+2} están en diferentes componentes conexas de $\mathbb{R} - J^m$, esto es porque los puntos $\zeta(t)$, para t en los intervalos $(-\infty, t^m)$ y (t^{m+1}, ∞) están en diferentes componentes conexas y porque $\zeta^{m-1} = \zeta(t^{m-1})$ y $\zeta^{m+2} = \zeta(t^{m+2})$. Como

$$\zeta^{m-1}, \zeta^{m+2} \in \pi(\gamma(\varphi)) \subseteq \pi(\omega(x_0)),$$

se sigue que πx_t se acerca arbitrariamente tanto a ζ^{m-1} como a ζ^{m+2} cuando $t \rightarrow \infty$. En particular, la curva πx_t debe cruzar a J^m en t arbitrariamente grande y entrar a J_{int}^m y a J_{ext}^m infinitas veces para dichos t .

Por el lema 5.2, existe $T > 0$, tal que si $t \geq T$, entonces $x_t \in \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ y $\pi\psi \neq \pi x_t$ para todo $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$, esto es, $\pi x_t \notin \pi(\overline{\gamma(\varphi)})$ y, en particular $\pi x_t \notin \pi(\gamma(\varphi))$. Por lo tanto, si $\pi x_t \in J^m$ para tales t , necesariamente $\pi x_t \in (\zeta^m, \zeta^{m+1}) \subseteq L$. También por el lema 5.5 y por la elección de m , para t grande la curva πx_t cruza a L siempre en la misma dirección que $F(\xi^0)$, por lo menos cuando esta cruza al segmento de recta (ζ^m, ζ^{m+1}) . Sin embargo, esto es imposible cuando πx_t entra y sale de cada componente de $\mathbb{R}^2 - J$ infinitas veces para t arbitrariamente grande. Con esta contradicción queda probada la proposición. \square

Proposición 6.3. *Se supone que $\omega(x_0)$ contiene a una órbita periódica no constante, digamos $\gamma(\varphi) \subseteq \omega(x_0)$ para algún $\varphi \in \omega(x_0)$. Entonces $\omega(x_0)$ coincide con $\gamma(\varphi)$.*

Demostración: Con φ como en el enunciado de la proposición, suponemos que $\gamma(\varphi) \neq \omega(x_0)$. Sea $U \subseteq C$ un entorno acotado de la órbita $\gamma(\varphi)$ tal que $\bar{U} \cap E = \emptyset$ (esto es, \bar{U} no contiene a puntos de equilibrio), y tal que $\omega(x_0)$ no es un subconjunto de \bar{U} .

Primero vamos a construir a una segunda órbita periódica en $\omega(x_0)$, digámosle $\gamma(\psi) \subseteq \omega(x_0)$, distinta de $\gamma(\varphi)$, tal que $\gamma(\psi) \subseteq \bar{U}$. Para hacer esto, observamos previamente que dado que \bar{U} contiene a alguno, pero no a todos, los elementos de $\omega(x_0)$, la trayectoria x_t entra y sale repetidamente del conjunto \bar{U} cuando $t \rightarrow \infty$; en efecto existen intervalos $I^n = [t^n, t^n + \tau^n]$ tales que $x_t \in \bar{U}$ para todo $t \in I^n$, con $x_{t^n} \in \partial U$, y con $t^n \rightarrow \infty$ y la longitud de los intervalos $\tau^n \rightarrow \infty$. Ya que ∂U es compacto, podemos tomar una subsucesión convergente $x_{t^n} \rightarrow \psi \in \omega(x_0)$, obteniendo un punto $\psi \in \partial U$ tal que la solución $v(\cdot)$ a través de ψ satisface que $v_t \in \bar{U}$ para todo $t \geq 0$. Para justificar esto último suponemos que existe un $t^1 > 0$ tal que $v_{t^1} \notin \bar{U}$, entonces utilizando la continuidad de T tenemos que $x_{t^n+t^1} \rightarrow v_{t^1}$. Además como $\tau^n \rightarrow \infty$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ tenemos que $t^n + t^1 \in I^n$, esto es $x_{t^n+t^1} \in \bar{U}$ para $n \geq n_0$. Entonces $v_{t^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{t^n+t^1}$ debe estar en \bar{U} . Se llega entonces a un absurdo y, por lo tanto, $v_t \in \bar{U}$ para todo $t \geq 0$ como afirmábamos. Necesariamente $\omega(v_0) \subseteq \bar{U}$ (pues, $v_t \in \bar{U}$ para todo t), y así resulta que $\omega(v_0) \cap E = \emptyset$. Por la proposición 6.2, la solución $v(\cdot)$ es una solución periódica no constante. También, $v(\cdot)$ es distinta de la solución periódica a través de φ , ya que $v_0 \in \partial U$, mientras que $\gamma(\varphi) \subseteq U$ y $\gamma(\varphi) \cap \partial U = \emptyset$. Observamos que de la periodicidad, como la solución $v(\cdot)$ satisface $v_t \in \bar{U}$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto, también para $t \in \mathbb{R}$, esto es, $\gamma(\psi) \subseteq \bar{U}$.

De una manera similar, reduciendo la medida de los U de $\gamma(\varphi)$ para que la órbita $\gamma(\psi)$ construida antes ahora esté fuera de U . Puede mostrarse que también existe una tercer órbita periódica $\gamma(\eta)$, distinta de $\gamma(\varphi)$ y $\gamma(\psi)$.

Por el lema 5.3, tenemos que las imágenes $\pi(\gamma(\varphi))$, $\pi(\gamma(\psi))$ y $\pi(\gamma(\eta))$ de estas tres órbitas son curvas de Jordan disjuntas. Además, si en la construcción de arriba elegimos a los entornos U suficientemente pequeños, aseguramos que la distancia entre las tres órbitas es suficientemente pequeña para que estas tres curvas de Jordan estén anidadas en el siguiente sentido

$$J^1 \subseteq J_{int}^2 \text{ y } J^2 \subseteq J_{int}^3 \text{ siendo} \\ J^1 = \pi(\gamma(\varphi)), \quad J^2 = \pi(\gamma(\psi)), \quad J^3 = \pi(\gamma(\eta)),$$

donde posiblemente se renombró a los puntos φ , ψ y η y donde como es usual J_{int} es el interior de una curva de Jordan J . Veremos que $\pi x_t \notin J^2$ para todo t grande, con el fin de obtener una contradicción y así completar la demostración. De esta manera se contradice el hecho que πx_t pasa arbitrariamente cerca de las curvas J^1 y J^3 , para t arbitrariamente grande y, por lo tanto, debe cruzar repetidamente a la curva intermedia J^2 cuando $t \rightarrow \infty$.

Sean $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ las soluciones a través de φ y ψ respectivamente, y sea ν el entero del enunciado del lema 5.3 para estas dos soluciones. Entonces como $u_s - v_t \in S$ cuando $s, t \in \mathbb{R}$, existe un entorno $W \subseteq C^1$ en la topología de C^1 , con $\gamma(\varphi) \subseteq W$, tal que

$$\chi - v_t \in S \quad \text{y} \quad V(\chi - v_t) = \nu \quad \text{para todo} \quad \chi \in W \quad \text{y} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que en esto último usamos que S es abierto y que V es localmente continua sobre S . Siempre que $\tau \geq 0$ es tal que $x_\tau \in W$, entonces $V(x_\tau - v_t) = \nu$ para todo t . Como $\gamma(\varphi) \subseteq \omega(x_0)$, existe τ arbitrariamente grande, y se sigue por lo tanto que existe τ^0 tal que

$$V(x_s - v_t) = \nu \quad \text{para todo} \quad s \geq \tau^0 \quad \text{y} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Inmediatamente concluimos de (6.2) y del teorema 4.3 que $x_s - v_t \in S$ para todo $s \geq \tau^0 + 4$ y $t \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, usando (4.16) que

$$\pi x_s \notin \pi(\gamma(\psi)) \quad \text{para todo} \quad s \geq \tau^0 + 4. \quad (6.3)$$

Pero en (6.3) se afirma que $\pi x_s \notin J^2$ para todo s grande, como queríamos ver. Con esto, la demostración de la proposición está completa. \square

Con los resultados anteriores ya podemos demostrar al teorema 3.1.

Demostración del Teorema de Poincaré-Bendixon:

La afirmación de que (a) ó (b) en el enunciado del teorema tienen lugar, se sigue directamente de las proposiciones (6.2) y (6.3). Por lo tanto, lo único que debemos probar es que cada función proyección planar $\pi = \pi^i$ es 1 - 1 sobre el conjunto límite omega $\omega(x_0)$.

Si vale (a) del enunciado del teorema, entonces $\omega(x_0)$ es una sola órbita periódica, y por la observación al final de la sección 4 no hay nada más que ver.

Entonces supongamos que vale (b) del enunciado del teorema y sea ν el entero del enunciado del lema 5.4. Mostraremos que

$$\text{si } \varphi, \psi \in \omega(x_0) \quad \text{y} \quad \varphi \neq \psi \quad \text{entonces} \quad V(\varphi - \psi) = \nu. \quad (6.4)$$

De este hecho y del teorema 4.3 se sigue que $\varphi - \psi \in S$ para tales φ, ψ y, por lo tanto, que $\pi\varphi \neq \pi\psi$ por (4.16), como deseábamos.

Sean $\varphi, \psi \in \omega(x_0)$ puntos distintos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ψ no es un equilibrio (pues en el otro caso tenemos que por el lema 5.4 se sigue la validez de (6.4)). Sea $u(\cdot)$ la solución a través de φ , y sea $t^n \rightarrow \infty$ tal que $x_{t^n} \rightarrow \psi$. Suponemos sin pérdida de generalidad que también $\tau^n \rightarrow \infty$, donde $\tau^n = t^{n+1} - t^n$ (pues si no fuese así, por tener que $t^n \rightarrow \infty$ podemos tomar una subsucesión de ésta, digamos $(t^{n_k})_k$, tal que $\tau^{n_k} = t^{n_k+1} - t^{n_k} \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$). Entonces, por la semicontinuidad inferior y la monotonía de V , tenemos que

$$V(u_0 - x_{t^{n+1}}) \leq V(u_{0-\tau^n} - x_{t^{n+1}-\tau^n}) = V(u_{-\tau^n} - x_{t^n})$$

y, por lo tanto, que

$$V(\varphi - \psi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(u_0 - x_{t^{n+1}}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(u_{-\tau^n} - x_{t^n}). \quad (6.5)$$

Observemos que por tener que $\alpha(u_0) \subseteq E$ tenemos que $u_{-\tau^n}$ converge a un punto de $\alpha(u_0)$, o sea, hacia un punto de equilibrio. Como además $u_t \in \omega(x_0)$ para todo t entonces el límite de $u_{-\tau^n}$ también está en $\omega(x_0)$. Luego, dicho límite está en $E \cap \omega(x_0)$. Como también tenemos que x_{t^n} se acerca a un punto ψ , que no es un equilibrio, en la topología de C^1 y por el lema 5.4, tenemos que $u_{-\tau^n} - x_{t^n} \in S$ y que $V(u_{-\tau^n} - x_{t^n}) = \nu$ para todo n grande. Esto junto con (6.5) prueba que $V(\varphi - \psi) \leq \nu$.

Supongamos que $V(\varphi - \psi) < \nu$ para ciertos $\varphi, \psi \in \omega(x_0)$ distintos. Obtendremos ahora una contradicción que completará la demostración. Sean $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ las soluciones a través de φ y ψ respectivamente. Si reemplazamos por u_τ y v_τ para τ suficientemente grande, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi - \psi \in S$. Nuevamente sea $t^n \rightarrow \infty$ con $x_{t^n} \rightarrow \psi$ y $\tau^n = t^{n+1} - t^n \rightarrow \infty$. Como $\varphi - \psi \in S$ (y por la semicontinuidad inferior) tenemos que para n grande se cumple

$$V(u_{\tau^n} - x_{t^{n+1}}) \leq V(u_0 - x_{t^n}) = V(\varphi - \psi) < \nu. \quad (6.6)$$

Por otro lado, pasando a una subsucesión en (6.6) para la cual $u_{\tau^n} \rightarrow \kappa$, donde $\kappa \in \omega(u_0) \subseteq E$ es un equilibrio, obtenemos por la semicontinuidad inferior de V que $V(\kappa - \psi) < \nu$. Sin embargo, esto contradice al lema 5.4. \square

7. Más resultados sobre soluciones periódicas

En esta sección exploramos más propiedades de las soluciones periódicas de (1.2),(1.3). En particular daremos condiciones para que soluciones periódicas sean sinusoidales, en el sentido que las funciones coordenadas $x^i(t)$ tengan exactamente un máximo y un mínimo local por período y sean monótonas entre estos. Este siempre es el caso para sistemas (1.5), (1.6). También veremos, bajo condiciones bastante generales, que cuando la función f^i en (1.5) es impar, entonces las soluciones periódicas heredan la simetría, y deben satisfacer $x(t + \frac{T}{2}) = -x(t)$, donde T es el período.

Recordemos que llamamos sistema unidireccional a un sistema del tipo (3.1). Más generalmente decimos que las f^i para algún i en el sistema (1.2) es unidireccional cuando $f^i(\eta, \xi, \zeta)$ depende solamente de sus dos últimos argumentos, ξ y ζ , esto es, si la ecuación para $\dot{x}^i(t)$ en (1.2) tiene la forma

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^i(t), x^{i+1}(t)).$$

Observemos que f^0 siempre es unidireccional en (1.2), mientras que cada una de las f^i , para $1 \leq i \leq N$, puede ser o no unidireccional. Si f^i es unidireccional para cada i con $0 \leq i \leq N$, de manera que el sistema (1.2) tiene la forma (3.1), decimos simplemente que este sistema es unidireccional.

Teorema 7.1. *Supongamos que para algún i , con $0 \leq i \leq N$, la función f^i es unidireccional, y sea $x(\cdot)$ una solución periódica y no constante de (1.2),(1.3), de período mínimo T . Entonces para $t \in [0, T)$, la coordenada $x^i(\cdot)$ toma exactamente dos veces cada valor en su rango, excepto para el máximo y el mínimo, los cuales son tomados exactamente una vez. En particular, existen tiempos $t^0 < t^1 < t^0 + T$ tales que*

$$\begin{aligned} x^i(t^0) < x^i(t) < x^i(t^1) & \quad y \quad \dot{x}^i(t) > 0, & \text{para } t^0 < t < t^1, \\ x^i(t^0) < x^i(t) < x^i(t^1) & \quad y \quad \dot{x}^i(t) < 0, & \text{para } t^1 < t < t^0 + T, \end{aligned} \quad (7.1)$$

y así $x^i(\cdot)$ es estrictamente creciente desde su mínimo hasta su máximo, y estrictamente decreciente desde su máximo hasta su mínimo (ver Figura 3).

Demostración: Observamos que nuestras hipótesis aseguran que la función

$$\Gamma^i(x^i, x^{i+1}) = (x^i, f^i(x^i, x^{i+1}))$$

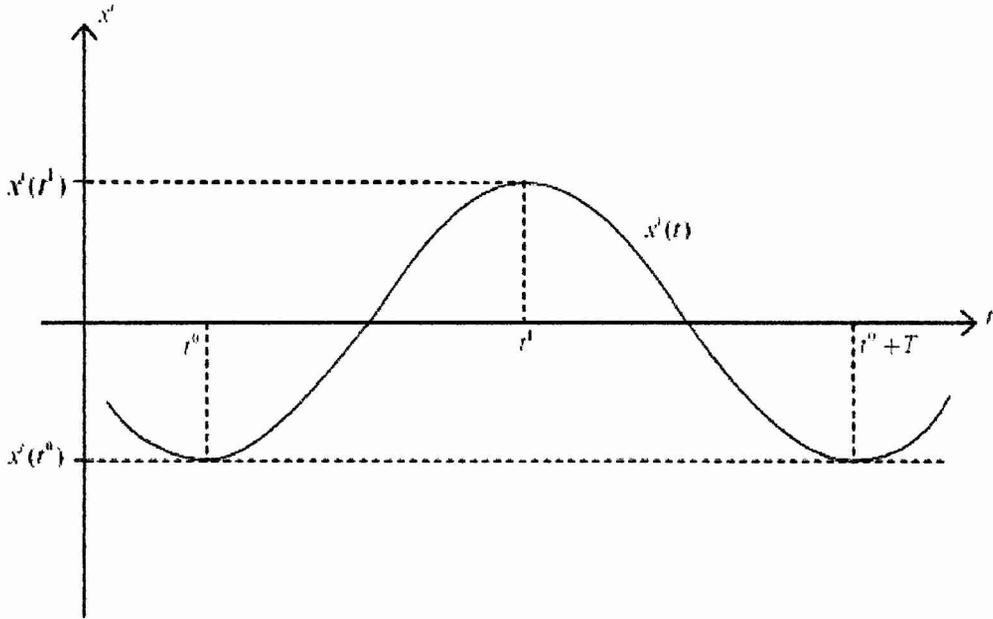


Figura 3: Función $x^i(\cdot)$ para f^i unidireccional.

es un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 en su imagen en \mathbb{R}^2 , por las condiciones de monotonía (1.3). Por lo tanto, la función

$$t \in [0, T) \rightarrow \Gamma(\pi^i x_t) = \Gamma^i(x^i(t), x^{i+1}(t)) = (x^i(t), \dot{x}^i(t)) \quad (7.2)$$

es 1 - 1 y describe una curva de Jordan en el plano. Notemos también que (7.2) es una inmersión, esto es, $(\dot{x}^i(t), \ddot{x}^i(t)) \neq (0, 0)$ para todo t , por ser una consecuencia del hecho que $t \rightarrow \pi^i x_t$ es una inmersión, como notamos al final de la sección 4, y el hecho que Γ^i es un difeomorfismo. Pues, si suponemos que $\dot{x}^i(t^0) = 0$ para algún t^0 , debemos verificar que $\ddot{x}^i(t^0) \neq 0$. Como $\dot{x}^i(t) = f^i(x^i(t), x^{i+1}(t))$ entonces

$$\ddot{x}^i(t^0) = \frac{\partial f^i(x^i(t^0), x^{i+1}(t^0))}{\partial \zeta} \dot{x}^{i+1}(t^0).$$

Luego, por ser $\pi^i x_t$ una inmersión tenemos que $\dot{x}^{i+1}(t^0) \neq 0$ y, por las condiciones de monotonía (1.3), que $\frac{\partial f^i(x^i(t^0), x^{i+1}(t^0))}{\partial \zeta} \neq 0$ resultando $\ddot{x}^i(t^0) \neq 0$ como deseábamos ver.

Sean t^0, t^1 tales que $t^0 < t^1 < t^0 + T$ y además

$$x^i(t^0) = \min_{t \in \mathbb{R}} x^i(t), \quad x^i(t^1) = \max_{t \in \mathbb{R}} x^i(t).$$

Verifiquemos que es suficiente que probemos una versión más débil de (7.1), ésta es

$$\begin{aligned} x^i(t^0) < x^i(t) < x^i(t^1) & \quad \text{y} \quad \dot{x}^i(t) \geq 0, & \text{para } t^0 < t < t^1, \\ x^i(t^0) < x^i(t) < x^i(t^1) & \quad \text{y} \quad \dot{x}^i(t) \leq 0, & \text{para } t^1 < t < t^0 + T. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Para ver que alcanza con esto, asumamos que se probó (7.3) y veamos que estos mismos t^0 y t^1 sirven para verificar (7.1). Supongamos que existe $\tilde{t} \in (t^0, t^1)$ tal que $\dot{x}^i(\tilde{t}) = 0$, luego, $\ddot{x}^i(\tilde{t}) \neq 0$ obteniendo así dos casos :

si $\ddot{x}^i(\tilde{t}) > 0$ entonces en \tilde{t} hay un mínimo local y entonces esto contradice al primer renglón de (7.3).

si $\ddot{x}^i(\tilde{t}) < 0$ entonces en \tilde{t} hay un máximo local y otra vez llegamos a una contradicción.

Luego, obtenemos que en realidad $\dot{x}^i(t) > 0$ para $t^0 < t < t^1$. De manera análoga se obtiene que $\dot{x}^i(t) < 0$ para $t^1 < t < t^0 + T$.

Supongamos entonces que (7.3) falla, específicamente que no se cumple el primer renglón de (7.3). Entonces por el teorema de Sard existe un $\xi \in (x^i(t^0), x^i(t^1))$ tal que ξ es un valor regular de $x^i(\cdot)$ en (t^0, t^1) , esto es,

$$\dot{x}^i(t) \neq 0, \quad \text{siempre que } x^i(t) = \xi \quad \text{y} \quad t \in (t^0, t^1),$$

y tal que $x^i(t^*) = \xi$ con $\dot{x}^i(t^*) < 0$ para alguno de tales $t = t^*$.

Con un tal ξ fijo, consideramos los $t \in (t^0, t^1)$ para los cuales $x^i(t) = \xi$ y $\dot{x}^i(t) > 0$, necesariamente existen más de un t como éste, por lo menos uno a cada lado de t^* . Denotamos

$$P = \{(\xi, \dot{x}^i(t)) \in \mathbb{R}^2 / x^i(t) = \xi \quad \text{y} \quad \dot{x}^i(t) > 0, \quad \text{donde } t \in (t^0, t^1)\}.$$

Sean $t^2, t^3 \in (t^0, t^1)$, con $t^2 < t^3$, tales que

$$\begin{aligned} x^i(t^2) &= \xi, & \dot{x}^i(t^2) &> 0 \quad \text{y} \\ x^i(t^3) &= \xi, & \dot{x}^i(t^3) &> 0, \end{aligned}$$

y tales que el segmento de recta abierto que une a $(\xi, \dot{x}^i(t^2))$ y $(\xi, \dot{x}^i(t^3))$ no contenga puntos de P . Denotamos este segmento de recta por $L \subseteq \mathbb{R}^2$

y además llamamos K a la imagen de $t \in [t^2, t^3] \rightarrow (x^i(t), \dot{x}^i(t))$. Entonces la unión $J = K \cup L$ es una curva de Jordan (ver Figura 4). Claramente la curva $(x^i(t), \dot{x}^i(t))$ está en diferentes componentes conexas de $\mathbb{R} - J$ para $t \in [t^0, t^2]$ y para $t \in (t^3, t^1]$. Pero esto es imposible, ya que ambos puntos $(x^i(t^0), \dot{x}^i(t^0)) = (x^i(t^0), 0)$ y $(x^i(t^1), \dot{x}^i(t^1)) = (x^i(t^1), 0)$, correspondientes al mínimo y al máximo de $x^i(\cdot)$, están en J_{ext} , el exterior de J , y tenemos que $(x^i(t), \dot{x}^i(t)) \notin J$ para $t \in [t^0, t^2] \cup (t^3, t^1]$. Esta contradicción completa la demostración. \square

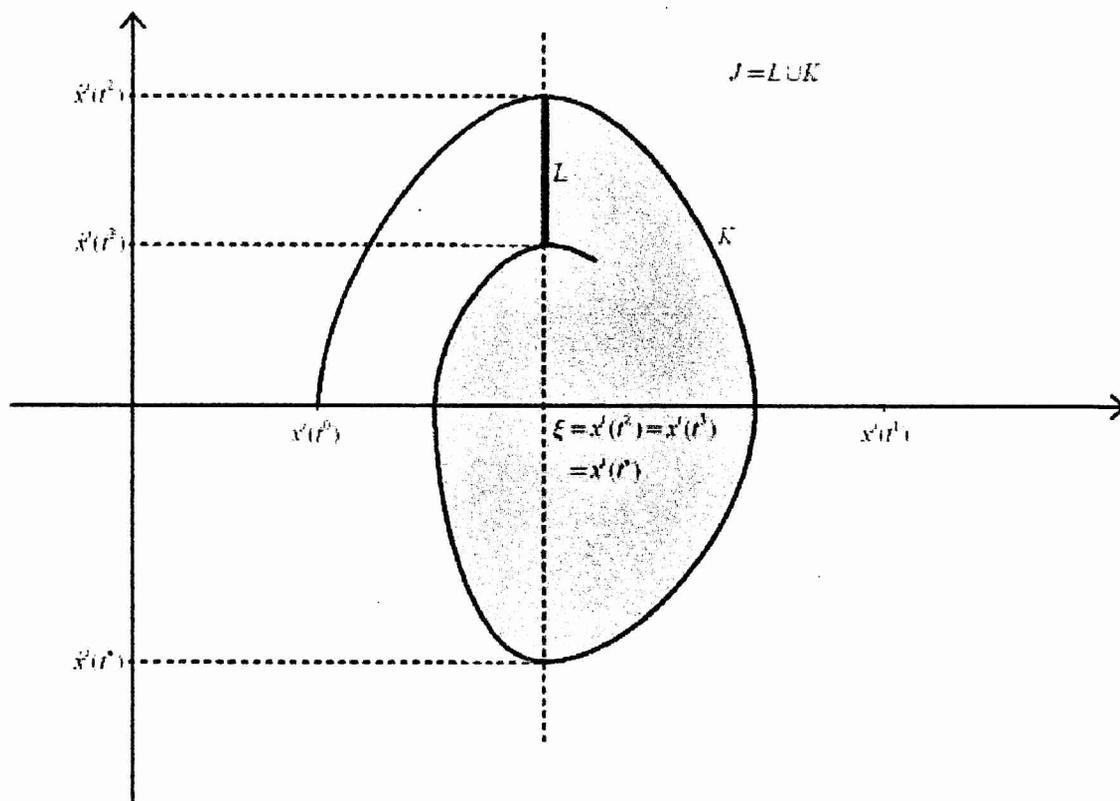


Figura 4: Curva de Jordan $J = k \cup L$.

El próximo resultado muestra que si las funciones en (1.2),(1.3) son impares, entonces las soluciones periódicas que oscilan alrededor del cero gozan de una correspondiente propiedad de simetría.

Teorema 7.2. *Supongamos que todas las funciones f^i en (1.2),(1.3) son impares, esto es:*

$$\begin{aligned} f^0(-\xi, -\zeta) &= -f^0(\xi, \zeta), \\ f^i(-\eta, -\xi, -\zeta) &= -f^i(\eta, \xi, \zeta), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

y sea $x(\cdot)$ una solución periódica y no constante de (1.2). Suponemos también que $x^0(t) = 0$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$x^i \left(t + \frac{T}{2} \right) = -x^i(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad \text{y } 0 \leq i \leq N, \quad (7.4)$$

donde T es el período mínimo de $x(\cdot)$. Si el sistema (1.2) es unidireccional y el origen es el único punto de equilibrio de (1.2), entonces toda solución periódica y no constante de (1.2) satisface (7.4) para su período mínimo T .

Antes de probar el teorema 7.2, necesitamos analizar la relación entre las curvas de Jordan $\pi^i(\gamma(\varphi))$ y los puntos $\pi^i\kappa$, donde $\gamma(\varphi)$ es una órbita periódica y κ es un punto de equilibrio. El próximo resultado calcula el número de vueltas de esas curvas alrededor de tales puntos.

Proposición 7.3. *Sea $x(\cdot)$ una solución periódica y no constante de (1.2),(1.3), de período mínimo T , y sea $\kappa \in C$ un punto de equilibrio de este sistema. Sea $W^i(x - \kappa)$ el número de vueltas de la curva*

$$t \in [0, T) \rightarrow \pi^i(x_t - \kappa) = (x^i(t) - \kappa^i, x^{i+1}(t) - \kappa^{i+1}) \in \mathbb{R}^2$$

alrededor de $0 \in \mathbb{R}^2$. Sea

$$M = \begin{cases} 0, & \text{si } x^0(t) \neq \kappa^0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{si } x^0(t) = \kappa^0 \text{ para algún } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$W^i(x - \kappa) = \delta^i M \quad \text{para } 0 \leq i \leq N.$$

Si además $M = 1$, el valor constante $V(x_t - \kappa)$ es positivo. Finalmente, si $M = 1$ y si para algún i , f^i es unidireccional, entonces $x^i(t) = \kappa^i$ para exactamente dos valores de $t \in [0, T)$, y para estos i tenemos que $\dot{x}^i(t) \neq 0$ cuando $x^i(t) = \kappa^i$.

Antes de encaminarnos hacia la demostración de la proposición 7.3, incluimos el siguiente corolario. Es interesante destacar que el análogo a este resultado para el caso general (bidireccional) no parece ser conocido.

Corolario 7.4. *Consideramos el sistema unidireccional (3.1), satisfaciendo (1.3), y sea $x(\cdot)$ una solución periódica y no constante de este sistema. Entonces, existe un punto de equilibrio κ tal que el número de vueltas cumple*

$$W^i(x - \kappa) = \delta^i \quad \text{para } 0 \leq i \leq N. \quad (7.5)$$

Demostración: Sea $I^i \subseteq \mathbb{R}$ el rango de la función coordenada $x^i(\cdot)$, para $0 \leq i \leq N + 1$. Acá estamos incluyendo $x^{N+1}(t) = x^0(t - 1)$ y, por lo tanto, $I^{N+1} = I^0$. Primero mostraremos que para cada $\xi \in I^i$, con $0 \leq i \leq N$, existe $\eta \in I^{i+1}$ tal que $f^i(\xi, \eta) = 0$. Para probar esto, primero observemos que por ser $I^i = x^i([0, T]) = x^i([0, T])$ y $x^i(\cdot)$ una función continua, entonces I^i debe ser un intervalo cerrado. Dado $\xi \in I^i$ tal que ξ no sea un extremo del intervalo (esto es, que no sea ni el mínimo ni el máximo de $x^i(\cdot)$), existen pues, por el teorema 7.1, dos tiempos t^0, t^1 tales que

$$\begin{aligned} x^i(t^0) = \xi & \quad , \quad \dot{x}^i(t^0) \geq 0 \quad \text{y} \\ x^i(t^1) = \xi & \quad , \quad \dot{x}^i(t^1) \leq 0. \end{aligned}$$

Luego, podemos deducir que

$$\begin{aligned} f^i(\xi, x^{i+1}(t^0)) = f^i(x^i(t^0), x^{i+1}(t^0)) = \dot{x}^i(t^0) \geq 0 & \Rightarrow f^i(\xi, x^{i+1}(t^0)) \geq 0, \\ f^i(\xi, x^{i+1}(t^1)) = f^i(x^i(t^1), x^{i+1}(t^1)) = \dot{x}^i(t^1) \leq 0 & \Rightarrow f^i(\xi, x^{i+1}(t^1)) \leq 0. \end{aligned}$$

Ahora, como $f^i(\xi, \cdot)$ toma valores no negativos y no positivos entonces, por el teorema de los valores intermedios, existe $\eta \in I^{i+1}$ tal que $f^i(\xi, \eta) = 0$. Observemos que si $\xi \in I^i$ es un extremo del intervalo, entonces existe t^0 tal que $x^i(t^0) = \xi$ y $\dot{x}^i(t^0) = 0$, de esto se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} f^i(\xi, x^{i+1}(t^0)) & = f^i(x^i(t^0), x^{i+1}(t^0)) \\ & = \dot{x}^i(t^0) = 0, \end{aligned}$$

por lo cual basta con tomar en este caso a $\eta = x^{i+1}(t^0) \in I^{i+1}$.

Las condiciones de monotonía (1.3) implican que tal η es único y depende continuamente de ξ , a tal η lo denotamos $\eta = h^i(\xi)$, de manera que $h^i : I^i \rightarrow$

I^{i+1} es continua, con $f^i(\xi, h^i(\xi)) = 0$ para todo $\xi \in I^i$. Ahora consideramos la composición

$$h : I^0 \rightarrow I^0 \quad \text{dada por} \quad h = h^N \circ h^{N-1} \circ \dots \circ h^0.$$

Entonces por el teorema del punto fijo, existe $\xi^* \in I^0$ tal que $h(\xi^*) = \xi^*$.

Veamos que a partir de ξ^* obtenemos un punto de equilibrio. Consideramos la función $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ donde $\kappa = (\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^N)$ y cada κ^i está dada por

$$\kappa^0 = \xi^* \quad \text{y} \quad \kappa^i = h^{i-1}(\kappa^{i-1}) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N.$$

Luego, por las definiciones de h^i y de κ^i , y por ser ξ^* punto fijo, tenemos que

$$f^i(\kappa^i, \kappa^{i+1}) = f^i(\kappa^i, h^i(\kappa^i)) = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq N-1,$$

$$f^N(\kappa^N, \kappa^0) = f^N(\kappa^N, \xi^*) = f(\kappa^N, h(\xi^*)) = f^N(\kappa^N, h^N(\kappa^N)) = 0,$$

de donde, κ es un equilibrio.

Finalmente vemos que se cumple (7.5). Para esto notemos que, como $\kappa^0 = \xi^* \in I^0$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x^0(t) = \xi^* = \kappa^0$, luego $M = 1$. Además, por la proposición 7.3 sabemos que $W^i(x - \kappa) = \delta^i M$ para $0 \leq i \leq N$, obtenemos que se cumple (7.5) como deseábamos ver. \square

La construcción que haremos ahora jugará un rol clave en la demostración de la proposición 7.3. Consideremos la función

$$\lambda : C(K) \rightarrow C[-1, N+1]$$

dada por interpolar linealmente a cada función entre los puntos de $K \cup \{N+1\}$. Es decir, que para cada $\varphi \in C(K)$ primero definimos

$$\lambda(\varphi)(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta) & \text{para } \theta \in K \\ \delta^* \varphi(-1) & \text{para } \theta = N+1, \end{cases} \quad (7.6)$$

y luego interpolando obtenemos

$$\lambda(\varphi)(\theta) = (i+1-\theta)\lambda(\varphi)(i) + (\theta-i)\lambda(\varphi)(i+1), \quad (7.7)$$

para $i \leq \theta \leq i+1$ y $0 \leq i \leq N$.

Notemos que δ^* entra en la fórmula de λ . Estrictamente deberíamos hablar de dos funciones, λ^\pm , donde \pm es el signo de δ^* . De aquí en más, escribiremos simplemente λ , una vez fijado el valor δ^* .

Ahora supongamos que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ es una función C^1 (no necesariamente una solución) y que satisface $x_t \in S \subseteq C^1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $x(\cdot)$ puede ser la diferencia entre una órbita periódica y un punto de equilibrio de (1.2). Estamos interesados en la geometría del conjunto de ceros

$$\mathcal{Z}(x) = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [-1, N+1] / \lambda(x_t)(\theta) = 0\}.$$

El siguiente resultado muestra que el conjunto de ceros $\mathcal{Z}(x)$ consiste de ciertas curvas discretas dadas como gráficas de funciones $\theta = \psi(t)$ sobre ciertos intervalos de t .

Proposición 7.5. *Sea $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ una función C^1 y que satisface $x_t \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces cada componente conexa del conjunto $\mathcal{Z}(x)$ es una gráfica*

$$\theta = \psi(t), \quad t \in I, \quad (7.8)$$

de una función continua $\psi : I \rightarrow [-1, N+1]$ sobre algún intervalo cerrado I . La función ψ satisface:

(a) $\psi(t) = -1$ si y sólo si t es el extremo derecho del intervalo I (si tal extremo existe);

(b) $\psi(t) = N+1$ si y sólo si t es el extremo izquierdo del intervalo I (si tal extremo existe);

(c) si $\psi(t^0) \leq 0$ entonces

$$\psi(t) = -(t - t^0) + \psi(t^0)$$

es lineal y su pendiente es -1 para todo t tal que $-(t - t^0) + \psi(t^0) \in [-1, 0]$;

(d) si $\psi(t^0) \leq 0$ entonces $\psi(t) > \psi(t^0)$ para todo $t \in I$ con $t < t^0$;

(e) si el intervalo I no está acotado en la dirección positiva, entonces $x^0(t) \neq 0$ para todo t grande; y similarmente si I no está acotado en la dirección negativa, entonces $x^0(t) \neq 0$ para todo t negativo de norma grande;

(f) la función $\lambda(x_t)(\theta)$ cambia de signo a través del gráfico de ψ .

Además, tenemos que

(g) siempre que $x^0(t-1) \neq 0$, entonces la cantidad $V(x_t)$ es precisamente el número de ceros

$$V(x_t) = \text{card}\{\theta \in [-1, N+1] / \lambda(x_t)(\theta) = 0\}, \quad (7.9)$$

y también

(h) si $0 \leq i \leq N$, entonces para cada t existe, como máximo, un punto $(t, \theta) \in \mathcal{Z}(x)$ con $i \leq \theta \leq i+1$.

Demostración: Ver apéndice C.

Proposición 7.6. Sea $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ una función C^1 tal que $x_t \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y periódica de período $T > 0$. Entonces el número de vueltas de la función

$$t \rightarrow \pi^i x_t = (x^i(t), x^{i+1}(t))$$

alrededor del origen, para $0 \leq t \leq T$, está dado por

$$W^i(x) = \delta^i M, \quad \text{para } 0 \leq i \leq N, \quad (7.10)$$

donde M es un entero definido por

$$\text{card}\{t \in [0, T] / x^0(t) = 0\} = 2M. \quad (7.11)$$

Demostración: Fijamos $\theta < \bar{\theta}$ en $[-1, N + 1]$, y consideramos la función

$$t \rightarrow (\lambda(x_t)(\theta), \lambda(x_t)(\bar{\theta})) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.12)$$

La proposición 7.5 implica que existe $\alpha > 0$ tal que si $\bar{\theta} - \theta \leq \alpha$ entonces el rango de (7.12) no contiene al origen. Efectivamente es suficiente con elegir α menor que el mínimo de la separación vertical $\psi^{n+1}(t) - \psi^n(t)$ de las curvas que componen a $\mathcal{Z}(x)$, sobre todo t para el cual esto esté definido. También observar que si θ y $\bar{\theta}$ pertenecen al mismo intervalo $[i, i + 1]$, donde $0 \leq i \leq N$, entonces el rango de (7.12) no contiene al origen, no importa el valor de $\theta - \bar{\theta}$, por (h) de la proposición 7.5. En cualquier caso el número de vueltas de (7.12), con respecto al origen, para $0 \leq t \leq T$, está definido. Denotamos $W(\theta, \bar{\theta})$ a esta cantidad. Veamos ahora que

$$W(i, i + 1) = \delta^i W^i(x) \quad \text{para } 0 \leq i \leq N. \quad (7.13)$$

Para esto separemos en dos casos, para $i \neq N$ y para $i = N$. Si $i \neq N$ entonces la curva es $t \rightarrow (x_t(i), x_t(i + 1)) = (x^i(t), x^{i+1}(t)) = \pi^i(x_t)$ y $\delta^i = 1$, luego usando (7.6) tenemos que $W(i, i + 1) = W^i(x) = \delta^i W^i(x)$. Si, en cambio, $i = N$ entonces la curva es $t \rightarrow (x_t(N), \delta^N x_t(-1)) = (x^N(t), \delta^N x^0(t - 1)) = (x^N(t), \delta^N x^{N+1}(t))$ y, en este caso, usando otra vez (7.6) tenemos que $W(i, i + 1) = \delta^N W^N(x)$ y queda justificado (7.13).

La cantidad $W(\theta, \bar{\theta})$ es localmente constante en $(\theta, \bar{\theta})$ donde se definió (por homotopía). Sea

$$\Gamma = \{(\theta, \bar{\theta}) \in [-1, N + 1] \times [-1, N + 1] / \theta < \bar{\theta} \text{ y } \bar{\theta} - \theta \leq \alpha \\ \text{ó } \theta, \bar{\theta} \in [i, i + 1] \text{ para algún } i \text{ con } 0 \leq i \leq N\},$$

con α como antes. Entonces $W(\theta, \bar{\theta})$ está definido para todo $(\theta, \bar{\theta}) \in \Gamma$ y es constante sobre cada componente conexa de Γ . Claramente Γ es conexo y, por lo tanto, el número de vueltas de (7.13) es independiente de i , pues cada $(i, i+1) \in \Gamma$. Luego, para probar (7.10) es suficiente ver solamente el caso $i = 0$, que es, verificar que se cumple $W^0(x) = \delta^0 M$, o equivalentemente que

$$W(0, 1) = M. \quad (7.14)$$

La demostración de (7.14) se deducirá de algunas observaciones junto con la definición del conjunto S^0 . Supongamos que $\delta^0 = 1$. Como $x_t \in S \subseteq S^0$ para todo t (es decir, $\dot{x}_t(0)x_t(1) = \dot{x}^0(t)x^1(t) > 0$, para todo t) tenemos que siempre que la curva

$$t \rightarrow (x^0(t), x^1(t)) \quad (7.15)$$

toca al eje vertical $x^0 = 0$, entonces ésta cruza transversalmente desde la izquierda hacia la derecha, si $x^1 > 0$, y desde la derecha hacia la izquierda, si $x^1 < 0$, como puede observarse en la Figura 5.

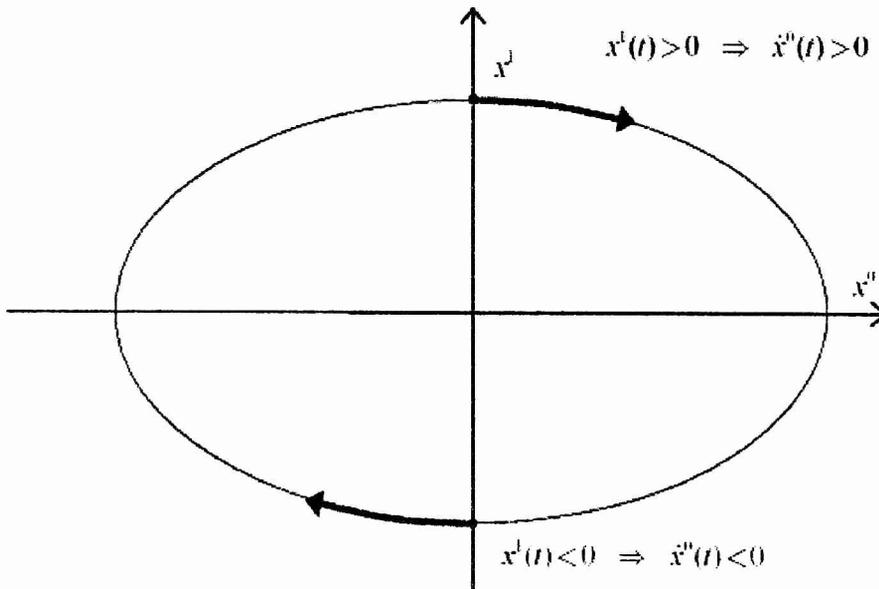


Figura 5: Curva $t \rightarrow (x^0(t), x^1(t))$

Además la curva (7.15) no pasa por el origen. Esto implica que la cantidad

(7.11) es par, y que el número de vueltas de (7.15) es M . Con esto probamos (7.14) y completamos la demostración. \square

Utilizando al resultado anterior podemos probar fácilmente la proposición 7.3.

Demostración de la proposición 7.3

Con $x(\cdot)$ y κ como en el enunciado, por el lema 5.3 tenemos que $x_t - \kappa \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y así podemos aplicar la proposición 7.6 a la diferencia $x(\cdot) - \kappa$. En efecto, si $x^0(t) \neq \kappa^0$ para todo t , entonces en (7.11) $M = 0$ (con $x^0(t) - \kappa^0$ reemplazando a $x^0(t)$), y así $W^i(x - \kappa) = 0$ para cada i , como queríamos ver.

Ahora suponemos que $x^0(t) = \kappa^0$ para algún t ; por lo tanto, M en (7.11) es positivo. Como la función f^0 es unidireccional, podemos usar el teorema 7.1 que nos garantiza que $2M \leq 2$, resultando $M = 1$. Luego, $W^i(x - \kappa) = \delta^i$ para cada i , como deseábamos. En este caso también debemos probar que $V(x_t - \kappa) > 0$. Si $V(x_t - \kappa) = 0$, entonces $sc(x_t - \kappa) = 0$ para todo t , y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_t(\theta) - \kappa \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in K$. En particular, $x^0(t) - \kappa^0 \geq 0$ para todo t . Si aplicamos la proposición 7.6 a $x(\cdot) - \kappa$ resulta que $x^0(t) = \kappa^0$ exactamente dos veces en $[0, T)$ (pues, $M = 1$). Ahora por el teorema 7.1 obtenemos que κ^0 no es ni el mínimo ni el máximo de $x^0(\cdot)$; en particular, $x^0(t) < \kappa^0$ para algún t , una contradicción.

Debemos probar ahora la última parte del enunciado de la proposición. Asumimos que $M = 1$ y que f^i es unidireccional para algún i . Necesariamente κ^i pertenece al rango de $x^i(\cdot)$, pues si para todo $t \in [0, T)$ se tiene que $x^i(t) \neq \kappa^i$ (es decir, $x^i(t) - \kappa^i \neq 0$) entonces la curva $t \in [0, T) \rightarrow \pi^i(x_t - \kappa) = (x^i(t) - \kappa^i, x^{i+1}(t) - \kappa^{i+1}) \in \mathbb{R}^2$ no atraviesa al eje vertical de \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, no da ninguna vuelta alrededor del origen y tendríamos que $W^i(x - \kappa) = 0$, una contradicción. El teorema 7.1 asegura que el valor κ^i es tomado por $x^i(\cdot)$ como máximo dos veces por período. Para completar la demostración tenemos que mostrar que siempre que $x^i(t) = \kappa^i$ se tiene que $\dot{x}^i(t) \neq 0$. Supongamos lo contrario, que $x^i(t) = \kappa^i$ y $\dot{x}^i(t) = 0$ para algún t . Tenemos

$$0 = \dot{x}^i(t) = f^i(x^i(t), x^{i+1}(t)) = f^i(\kappa^i, x^{i+1}(t)),$$

y también $f^i(\kappa^i, \kappa^{i+1}) = 0$ para el equilibrio κ . Por lo tanto, la monotonía estricta de f^i en su último argumento implica que $x^{i+1} = \kappa^{i+1}$. Luego,

$$\pi^i x_t = (x^i(t), x^{i+1}(t)) = (\kappa^i, \kappa^{i+1}) = \pi^i \kappa$$

para este valor de t , contradiciendo al lema 5.3. \square

Ahora ya estamos en condiciones de poder probar el teorema 7.2.

Demostración del teorema 7.2:

Sea T el período mínimo de $x(\cdot)$, y consideramos el conjunto $J = \pi^0(\gamma_0)$, esto es,

$$J = \{(x^0(t), x^1(t)) \in \mathbb{R}^2 / t \in [0, T)\},$$

el cual es una curva de Jordan. Observemos que $-x(t)$ también es solución de (1.2) pues

$$\begin{aligned} y^i(t) = -x^i(t) &= -f^i(x^{i-1}(t), x^i(t), x^{i+1}(t)) = f^i(-x^{i-1}(t), -x^i(t), -x^{i+1}(t)) \\ &= f^i(y^{i-1}(t), y^i(t), y^{i+1}(t)). \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos $-J$ a la curva

$$-J = \{(-x^0(t), -x^1(t)) \in \mathbb{R}^2 / t \in [0, T)\}$$

tenemos, por el lema 5.3, que o bien $J \cap -J = \emptyset$ o bien $J = -J$.

Si suponemos que $x^0(t) = 0$ para algún t , por la proposición 7.3 (con $\kappa = 0$), resulta que $W^i(x) = \delta^i \neq 0$, y así las dos curvas, J y $-J$, encierran al origen $(0, 0)$ en su interior. De esta manera se sigue que $J = -J$. Pero esto junto al lema 5.3, implica que la solución $-x(\cdot)$ es simplemente una translación en el tiempo de la solución $x(\cdot)$, digamos que $-x(t) = x(t + \tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para algún τ . Entonces

$$x(t) = -x(t + \tau) = -[-x(t + 2\tau)] = x(t + 2\tau), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

y, por lo tanto, $2\tau = T$, es decir, que $-x(t) = x(t + \frac{T}{2})$. Hemos probado entonces (7.4).

En el caso en que (1.2) es unidireccional y $0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ es el único equilibrio, tenemos por el corolario 7.4 que J y $-J$ deben contener al $(0, 0)$ en sus interiores. La demostración en este caso continua como antes. \square

A. Apéndice de la sección 4

◊ Densidad de S en C^1

Para probar que S es denso en C^1 , tomamos $\varphi \in C^1$ y vamos a ver que existe $(\varphi^n)_n \subset S$ tal que $\varphi^n \rightarrow \varphi$ para $n \rightarrow \infty$. Veamos primero algunos casos particulares:

- Si φ no se anula nunca entonces $\varphi \in S$ y tomamos $\varphi^n = \varphi$ para todo n .
- Si φ se anula solamente en algún i con $1 \leq i \leq N$, entonces definimos para cada n

$$\varphi^n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-1, 0] \cup \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } t = i, \end{cases}$$

que claramente cumple ser C^1 y no anularse nunca, con lo cual $\varphi^n \in S$. Además es trivial que $\varphi^n \rightarrow \varphi$.

- Si φ se anula solamente en $t = 0$ entonces definimos a la sucesión φ^n de la siguiente manera

si $\varphi(t) \geq 0$ para todo $t \in [-1, 0]$ entonces sea

$$\varphi^n(t) = \begin{cases} \varphi(t) + \frac{1}{n} & \text{si } t \in [-1, 0], \\ \varphi(t) & \text{si } t \in \{1, 2, \dots, N\}, \end{cases}$$

si $\varphi(t) \leq 0$ para todo $t \in [-1, 0]$ entonces sea

$$\varphi^n(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \frac{1}{n} & \text{si } t \in [-1, 0], \\ \varphi(t) & \text{si } t \in \{1, 2, \dots, N\}, \end{cases}$$

nuevamente las funciones φ^n no se anulan y son C^1 obteniendo que están en S y además que $\varphi^n \rightarrow \varphi$.

- Si φ se anula solamente en $t = -1$ otra vez consideramos a las dos situaciones $\varphi(t) \geq 0$ ó $\varphi(t) \leq 0$ para todo t y definimos a φ^n como en el caso anterior.

- Si φ se anula únicamente en un $\theta^* \in [-1, 0]$ entonces se tienen las dos posibilidades

si $\dot{\varphi}(\theta^*) \neq 0$ entonces $\varphi \in S$ y tomamos $\varphi^n = \varphi$ para todo n .

si $\dot{\varphi}(\theta^*) = 0$ entonces otra vez se da una de las dos posibilidades que $\varphi(t) \geq 0$ ó $\varphi(t) \leq 0$ para todo $t \in [-1, 0]$ y definimos a φ^n como en el caso anterior.

Finalmente notemos que el caso general será combinación de los casos particulares recién detallados. Esto muestra que S es denso en C^1 .

◊ **Demostración del teorema 4.4**

Para poder probar que V^\pm es semicontinua inferiormente vemos antes que $sc(\cdot)$ también lo es. Para esto sean $\varphi \in C - \{0\}$ y $(\varphi^n)_n \subset C - \{0\}$ tal que $\varphi^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \varphi$ en C . Es claro que en el entorno de aquellos puntos donde φ no se anula tendremos que φ^n tampoco lo hará para n grande, por esta razón analizamos solamente qué pasa en aquellos puntos donde φ se anula.

Supongamos que $\varphi(i) = 0$ para algún $1 \leq i \leq N$, entonces en $\{i-1, i, i+1\}$, φ y φ^n para n grande tendrán la misma cantidad de cambios de signo o φ^n tendrá uno más.

Análogamente se analiza si $\varphi(0) = 0$ y si $\varphi(t^*) = 0$ para algún $t^* \in [-1, 0)$. Luego tenemos que, para n grande, se cumple que $sc(\varphi) \leq sc(\varphi^n)$ y entonces

$$sc(\varphi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} sc(\varphi^n),$$

con lo cual se tiene que $sc(\cdot)$ es semicontinua inferiormente. Veamos ahora que V^\pm también lo es. Sean φ y φ^n como antes. Supongamos que estamos en el caso de $\delta^N = \delta^* = 1$, obtenemos que

- si $sc(\varphi)$ es par entonces $V^+(\varphi) = sc(\varphi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} sc(\varphi^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} V^+(\varphi^n)$.
- si $sc(\varphi)$ es impar entonces $V^+(\varphi) = sc(\varphi) + 1 \leq [\liminf_{n \rightarrow \infty} sc(\varphi^n)] + 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} [sc(\varphi^n) + 1] = \liminf_{n \rightarrow \infty} V^+(\varphi^n)$.

Se analiza de la misma manera para el caso $\delta^N = \delta^* = -1$.

Para ver que V^\pm resulta ser finita sobre S tomamos $\varphi \in S$ y debemos comprobar que $sc(\varphi) < \infty$. Para poder verificar esto utilizaremos la simplicidad de los ceros de φ en $[-1, 0]$. Supongamos que se tienen infinitos cambios de signo de φ en $[-1, 0]$. Por la continuidad de φ y por el teorema de valores intermedios tenemos que por cada uno de estos cambios de signo hay un $\theta \in [-1, 0]$ para el cual $\varphi(\theta) = 0$. Consideramos a los infinitos θ obtenidos de estos cambios de signo, por ser $[-1, 0]$ compacto existe una sucesión $(\theta^j)_j$ tal que $\theta^j \rightarrow \theta^*$ cuando $j \rightarrow \infty$, con $\theta^* \in [-1, 0]$. Usando nuevamente que φ es continua tenemos que $\varphi(\theta^*) = 0$. Como $\varphi \in S$ y por lo tanto en particular $\varphi \in S^*$, tenemos que $\dot{\varphi}(\theta^j) \neq 0$ para todo j . Luego existen infinitos j para los cuales $\dot{\varphi}(\theta^j) > 0$ e infinitos j para los cuales $\dot{\varphi}(\theta^j) < 0$ (la existencia de estos se debe a que entre dos puntos donde φ se anule y tenga además derivada

positiva debe haber un punto intermedio donde φ se anule y tenga derivada negativa). Ahora, debido a la continuidad de $\dot{\varphi}$ tenemos que $\dot{\varphi}(\theta^*) = 0$. Es decir, que de esta manera encontramos un $\theta^* \in [-1, 0]$ para el cual $\varphi(\theta^*) = 0$ y $\dot{\varphi}(\theta^*) = 0$, llegando así a un absurdo. Por lo tanto, el número de cambios de signos es finito y, en consecuencia, V^\pm es finita.

Comprobemos la continuidad de V^\pm sobre S . Si $\varphi(-1) \neq 0$ y $\varphi(N) \neq 0$, entonces usando las definiciones (4.14), (4.15) de S^i para $0 \leq i \leq N-1$ vemos fácilmente que $sc(\psi) = sc(\varphi)$, por lo tanto que $V^\pm(\psi) = V^\pm(\varphi)$, para ψ cercano a φ en C^1 .

Observemos que $\varphi(-1)$ y $\varphi(N)$ no pueden ser ambas nulas, ya que $\varphi \in S^{-1}$. Primero suponemos que $\varphi(-1) = 0$ y $\varphi(N) \neq 0$, digamos $\varphi(N) > 0$. Supongamos también que $\delta^* = 1$ (el caso en que $\delta^* = -1$ se trata similarmente). De la definición (4.15) de S^{-1} tenemos que $\dot{\varphi}(-1) < 0$, de manera que en particular $sc(\varphi)$ es impar. Además cualquier perturbación C^1 de φ a ψ puede introducir a lo sumo un cambio de signo más, a saber uno cerca a $\theta = -1$. Esto es, para algún $\epsilon > 0$,

$$sc(\psi) \in \{sc(\varphi), sc(\varphi) + 1\} \quad \text{si } \|\psi - \varphi\|_{C^1} < \epsilon. \quad (\text{A.1})$$

De la definición (4.6) de V^+ , la imparidad de $sc(\varphi)$ y de (A.1) tenemos que

$$V^+(\psi) = V^+(\varphi) = sc(\varphi) + 1 \quad \text{si } \|\psi - \varphi\|_{C^1} < \epsilon. \quad (\text{A.2})$$

Finalmente suponemos que $\varphi(-1) \neq 0$ y $\varphi(N) = 0$, digamos que $\varphi(-1) > 0$ y que estamos en el caso en que $\delta^* = 1$. Entonces la definición (4.14) de S^N implica que $\varphi(N-1) < 0$, así que nuevamente $sc(\varphi)$ es impar. Se puede verificar fácilmente que vale (A.1) y por lo tanto también (A.2). Luego, cualquiera sea el caso, concluimos (4.21) como deseábamos \square .

B. Apéndice de la sección 5

◊ Demostración del lema 5.1

Para poder demostrar el lema 5.1 vemos previamente algunos resultados.

Lema B.1. *Tomamos $\varphi \in \omega(x_0)$, y sea $u(\cdot)$ la solución de (1.2) a través de φ . Sea $\tau > 0$ tal que τ no es un período de $u(\cdot)$, esto es, $u_\tau \neq \varphi$ (si $u(\cdot)$ no fuese periódica podríamos tomar cualquier $\tau > 0$). Entonces existe un entero $\nu = \nu(\tau) < \infty$ tal que*

$$V(u_{t+\tau} - u_t) = \nu(\tau) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

y, además,

$$u_{t+\tau} - u_t \in S \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.2})$$

Demostración: Como $\varphi \in \omega(x_0)$, tenemos que $x_{t^n} \rightarrow \varphi$ en C para alguna sucesión $t^n \rightarrow \infty$. Veamos ahora que para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$x_{t^{n+t+\tau}} - x_{t^{n+t}} \rightarrow u_{t+\tau} - u_t \neq 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (\text{B.3})$$

y que además la convergencia en (B.3) es en el espacio C^1 .

Para verificar (B.3) probaremos que dado un $s \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que $x_{t^{n+s}} \rightarrow u_s$ cuando $n \rightarrow \infty$ en C^1 . Observemos que

$$x_{t^{n+s}} = T(t^n + s)(x_0) = T(s)(x_{t^n})$$

y que

$$u_s = T(s)(u_0) = T(s)\varphi,$$

de donde se ve que podemos escribir a la norma de la diferencia de la siguiente manera

$$\|x_{t^{n+s}} - u_s\|_{C^1} = \|T(s)(x_{t^n}) - T(s)\varphi\|_{C^1}.$$

Utilizando que $T(s) : C \rightarrow C^1$ es continua y que $x_{t^n} \rightarrow \varphi$ tenemos que $\|T(s)(x_{t^n}) - T(s)\varphi\|_{C^1}$ se puede hacer tan chico como se quiera. Luego, tenemos que $x_{t^{n+s}} \rightarrow u_s$ cuando $n \rightarrow \infty$ en C^1 . Si ahora usamos esto, primero para el caso en que $s = t$ y después para el caso en que $s = t + \tau$, obtenemos los límites

$$x_{t^{n+t}} \rightarrow u_t \quad \text{y} \quad x_{t^{n+t+\tau}} \rightarrow u_{t+\tau} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \text{ en } C^1.$$

Observemos que además $u_{t+\tau} - u_t \neq 0$, ya que τ no es un período de $u(\cdot)$. Claramente se tiene que se cumple (B.3) como se quería ver.

Ahora definimos $\nu(\tau)$ por

$$\nu(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x_{t+\tau} - x_t),$$

donde aplicamos el teorema 4.1, del que se concluye que V es no creciente (aún no sabemos que $\nu(\tau) < \infty$). Como V es semicontinua inferiormente, por teorema 4.4, tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$V(u_{t+\tau} - u_t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V(x_{t^n+t+\tau} - x_{t^n+t}) = \nu(\tau). \quad (\text{B.4})$$

Observemos que si supiésemos que $u_{t+\tau} - u_t \in S$ en (B.4), tendríamos una igualdad (por el teorema 4.4). En particular, sabemos que $V(u_{t+\tau} - u_t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por el corolario 4.6, ya que $u(\cdot)$ está acotada cuando $t \rightarrow -\infty$ (esto se debe a que $u(\cdot)$ es la solución a través de $\varphi \in \omega(x_0)$ y $\omega(x_0)$ es invariante y compacto). De este modo, para todo t grande tenemos que $V(u_{t+\tau} - u_t)$ es constante (por ser V no creciente y finita) y por lo tanto, que $u_{t+\tau} - u_t \in S$ por teorema 4.3. Esto implica que $V(u_{t+\tau} - u_t) = \nu(\tau)$ para todo t grande y, por lo tanto $\nu(\tau) < \infty$ (lo cual se desprende de lo observado después de (B.4)). Ahora concluimos, por teorema 4.1, que $V(u_{t+\tau} - u_t) \geq \nu(\tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto, usando (B.4), $V(u_{t+\tau} - u_t) = \nu(\tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, obtuvimos la validez de (B.1), y de esto se sigue (B.2) por teorema 4.3. \square

Corolario B.2. *Se supone que para algún $\tau > 0$, $\omega(x_0)$ contiene una órbita la cual no es un equilibrio, ni es una solución periódica de período (no necesariamente mínimo) τ . Entonces $\nu(\sigma) = \nu(\tau)$ para todo σ cercano a τ .*

Demostración: Sea $u(\cdot)$, con $u_t \in \omega(x_0)$, la solución de (1.2) como en el enunciado del lema. Esto es, $u_\tau \neq u_0$, y por lo tanto $u_\sigma \neq u_0$ para todo σ cercano a τ . Por el lema B.1 tenemos que

$$\nu(\sigma) = V(u_\sigma - u_0) = V(u_{0+\sigma} - u_0) \quad (\text{B.5})$$

para tales σ . También, $u_\sigma - u_0 \in S$ varía continuamente en σ , en la topología C^1 . Por lo tanto, por teorema 4.4, la cantidad (B.5) es constante para σ cercano a τ . \square

Corolario B.3. Sea $\varphi \in \omega(x_0)$. Entonces existe un entero ν tal que

$$\text{si } \psi, \eta \in \gamma(\varphi) \text{ y } \psi \neq \eta \text{ entonces } V(\psi - \eta) = \nu. \quad (\text{B.6})$$

Demostración: Sea $u(\cdot)$ la solución a través de φ . Si $u(\cdot)$ no es una solución periódica ni un equilibrio, entonces tenemos (B.1) del lema B.1 para cualquier $\tau > 0$, y así que $\nu(\tau)$ es independiente de $\tau > 0$ por el corolario B.2. Si por otra parte $u(\cdot)$ es una solución de período mínimo $T > 0$, entonces (B.1) vale para $0 < \tau < T$ y $\nu(\tau)$ es independiente de tales τ . En cualquiera de los dos casos concluimos (B.6). \square

Damos ahora la prueba del lema 5.1.

Demostración: Sea ν como en el corolario B.3, veamos que la semicontinuidad inferior de V implica que

$$\text{si } \psi, \eta \in \overline{\gamma(\varphi)} \text{ y } \psi \neq \eta \text{ entonces } V(\psi - \eta) \leq \nu.$$

Para esto tomamos $(\psi^n)_n, (\eta^n)_n \subset \gamma(\varphi)$ tales que $\psi^n \rightarrow \psi$ y $\eta^n \rightarrow \eta$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por ser $\psi \neq \eta$ existe un N_0 tal que para $n \geq N_0$ tenemos que $\psi^n \neq \eta^n$. Luego, por el corolario B.3 tenemos que $V(\psi^n - \eta^n) = \nu$. Si usamos ahora la semicontinuidad inferior de V tenemos

$$V(\psi - \eta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(\psi^n - \eta^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu = \nu.$$

También del teorema 4.4 y del corolario B.3, tenemos que

$$\text{si } \psi, \eta \in \overline{\gamma(\varphi)} \text{ y } \psi - \eta \in S \text{ entonces } V(\psi - \eta) = \nu.$$

En efecto, repetimos la misma cuenta de arriba, esto es, como V es continua sobre S (que es abierto y entonces podemos tomar puntos de $\overline{\gamma(\varphi)}$ arbitrariamente cercanos a ψ y a η en la topología de C^1), luego para n grande $\psi^n - \eta^n \in S$ y, además,

$$V(\psi - \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\psi^n - \eta^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu = \nu.$$

Ahora fijos ψ y η como en el enunciado del lema, sean $v(\cdot)$ y $w(\cdot)$ las soluciones a través de esos puntos respectivamente. Como $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$ entonces $\psi \in \gamma(\varphi)$, $\psi \in \omega(\varphi)$ o $\psi \in \alpha(\varphi)$. En consecuencia,

si $\psi \in \gamma(\varphi)$ entonces $v_t = u_{t+\bar{t}}$ para algún \bar{t} , con lo cual $v_t \in \gamma(\varphi) \subset \overline{\gamma(\varphi)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

si $\psi \in \omega(\varphi)$ entonces $v_t \in \omega(\varphi) \in \overline{\gamma(\varphi)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues $\omega(\varphi)$ es invariante. Se procede análogamente para $\psi \in \alpha(\varphi)$.

Luego, en cualquier caso $v_t \in \overline{\gamma(\varphi)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Haciendo lo mismo con η obtenemos que $w_t \in \overline{\gamma(\varphi)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, por lo observado al principio de la demostración, tenemos que $V(v_t - w_t) \leq \nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así $V(v_t - w_t)$ es finito y constante para todo t tal que $|t|$ es grande (observemos que podrían ser diferentes las constantes para los distintos límites, $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$). Por lo tanto, por el teorema 4.3 $v_t - w_t \in S$ para $|t|$ grande y así que $V(v_t - w_t) = \nu$ para tales t . De esta manera $V(v_t - w_t) = \nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica, por el teorema 4.4, que $v_t - w_t \in S$ para todo t .

Para probar la última frase del lema tomamos $\psi, \eta \in \overline{\gamma(\varphi)}$ tales que $\psi \neq \eta$ entonces por la primera parte del lema tenemos que $\psi - \eta \in S$. Utilizamos ahora (4.16) y obtenemos que

$$\begin{aligned}\pi(\psi - \eta) &\neq 0 \\ \pi(\psi) &\neq \pi(\eta)\end{aligned}$$

es decir, que π es inyectiva sobre $\overline{\gamma(\varphi)}$. \square

◊ Demostración del lema 5.2

La demostración del lema 5.2 requiere de un resultado un poco más débil que enunciamos a continuación.

Lema B.4. *Sea $\varphi \in \omega(x_0)$, y se supone que $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$. Entonces existe $T > 0$ y un entero ν tal que*

$$\text{si } \psi \in \overline{\gamma(\varphi)}, \eta \in \gamma_T^+(x_0) \text{ y } \psi \neq \eta \text{ entonces } V(\psi - \eta) = \nu.$$

Demostración: Suponemos que el resultado es falso con ν como en el enunciado del lema 5.1. Entonces existen sucesiones

$$(\psi^n)_n \subset \overline{\gamma(\varphi)} \text{ y } t^n \rightarrow \infty \text{ con } V(\psi^n - x_{t^n}) \neq \nu.$$

Supongamos que

$$V(\psi^n - x_{t^n}) > \nu \quad \text{para cada } n;$$

el caso de la desigualdad opuesta se trata similarmente (haremos una observación al final de la demostración). Sea $v^n(\cdot)$ la solución a través de ψ^n . Construiremos una sucesión s^n que cumplirá

$$s^n < t^n, \quad \text{con } s^n \rightarrow \infty, \quad \text{tal que} \\ x_{s^n} \rightarrow \zeta \in \overline{\gamma(\varphi)} \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_{s^n-t^n}^n - \zeta\| > 0, \quad (\text{B.7})$$

para algún ζ . Veamos cómo de (B.7) obtenemos una contradicción. Como $\psi^n \in \gamma(\varphi)$ entonces $v_t^n \in \gamma(\varphi)$ para todo t , entonces $(v_{s^n-t^n}^n)_n \subset \gamma(\varphi)$, que es compacto, entonces posee una subsucesión convergente a algún $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$ (esto es $v_{s^n-t^n}^n \rightarrow \psi$ con $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$). Por comodidad llamamos a dicha subsucesión de la misma manera que la sucesión original. Además, tenemos que $\psi \neq \zeta$ debido a la desigualdad estricta en (B.7).

Por el lema 5.1 $\psi - \zeta \in S$ y entonces por teorema 4.4

$$V(v_{s^n-t^n}^n - x_{s^n}) = V(\psi - \zeta) = \nu$$

para n grande. Por otro lado, como $s^n < t^n$ y como

$$v_{s^n-t^n}^n = T(s^n - t^n)\psi^n = T(s^n)v_{-t^n}^n \\ x_{s^n} = T(s^n)(x_0)$$

deducimos, usando el teorema 4.1, que

$$V(T(s^n)v_{-t^n}^n - T(s^n)x_0) \geq V(T(t^n)v_{-t^n}^n - T(t^n)x_0),$$

es decir

$$V(v_{s^n-t^n}^n - x_{s^n}) \geq V(v_{t^n-t^n}^n - x_{t^n}) = V(v_0^n - x_{t^n}) = V(\psi^n - x_{t^n}) > \nu$$

para todo n , una contradicción.

Antes de la construcción de la sucesión s^n , hacemos otra observación. Sea $t^n \rightarrow \infty$ y sea $\zeta \in \omega(x_0)$, entonces existe una sucesión $s^n < t^n$, con $s^n \rightarrow \infty$ y $x_{s^n} \rightarrow \zeta$. Para ver que esto es así, hacemos lo siguiente : existe una sucesión $(\tilde{t}^n)_n$ con $\tilde{t}^n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$ y tal que $x_{\tilde{t}^n} \rightarrow \zeta$ para $n \rightarrow \infty$, esto es porque $\zeta \in \omega(x_0)$. Ya que $t^k \rightarrow \infty$ entonces existe k_1 tal que si $k > k_1$ tenemos que $\tilde{t}^1 < t^k$. Por la misma razón existe $k_2 > k_1$ tal que si $k > k_2$ se cumple que $\tilde{t}^2 < t^k$. Continuando de esta manera obtenemos que existe $k_n > k_{n-1}$ tal que si $k > k_n$ tenemos que $\tilde{t}^n < t^k$. Definimos ahora a $(s^k)_k$ por

$$s^k = \begin{cases} t^k - 1 & \text{para } 1 \leq k \leq k_1, \\ \tilde{t}^n & \text{para } k_n \leq k \leq k_{n+1} \end{cases}$$

Claramente $s^k \rightarrow \infty$ y $x_{s^k} \rightarrow \zeta$ (pues $\bar{t}^k \rightarrow \infty$ y $x_{\bar{t}^k} \rightarrow \zeta$) y, además, s^k se definió justamente para que $s^n < t^n$ para todo n .

Ahora debemos considerar varios casos para la construcción de la sucesión s^n . Primero suponemos que $\psi^n \in \omega(\varphi)$ para infinitos n . En este caso tomamos cualquier $\zeta \in \alpha(\varphi) \subseteq \omega(x_0)$ y tomamos s^n como en la observación de arriba. Entonces como $\psi^n = v_0^n \in \omega(\varphi)$ para infinitos n , tenemos que para estos n se cumple que $v_{s^n-t^n}^n \in \omega(\varphi)$ y, como $\zeta \in \alpha(\varphi)$ y por hipótesis $\omega(\varphi) \cap \alpha(\varphi) = \emptyset$, tenemos que se cumple que el límite superior en (B.7) es positivo. Se hace similarmente si $\psi^n \in \alpha(\varphi)$ para infinitos n tomando $\zeta \in \omega(\varphi)$ para lograr (B.7).

Ahora suponemos que una cantidad finita de términos de $(\psi^n)_n$ pertenecen a $\omega(\varphi) \cup \alpha(\varphi)$. Entonces $\psi^n \in \gamma(\varphi)$ para todo n grande, esto es $\psi^n = u_{\tau^n}$ para todo n grande y para alguna sucesión $(\tau^n)_n \subset \mathbb{R}$ ($u(\cdot)$ denota a la solución a través de φ). En este caso tomamos dos puntos, $\zeta^1 \in \alpha(\varphi)$ y $\zeta^2 \in \omega(\varphi)$, y sucesiones $s^{2,n} < s^{1,n} < t^n$ con $s^{2,n} \rightarrow \infty$, y $x_{s^{i,n}} \rightarrow \zeta^i$ para $i = 1, 2$ (primero se elige la sucesión $s^{1,n}$ de t^n como arriba, y luego se repite el procedimiento para elegir a $s^{2,n}$ de $s^{1,n}$). Ahora surgen dos subcasos. Primero, si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tau^n + s^{1,n} - t^n) > -\infty \quad (\text{B.8})$$

tomamos $\zeta = \zeta^1$ y $s^n = s^{1,n}$, pues entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_{s^n-t^n}^n - \zeta\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_{\tau^n+s^{1,n}-t^n} - \zeta^1\| > 0,$$

usando nuevamente que $\alpha(\varphi) \cap \omega(\varphi) = \emptyset$ (pues al estar en el caso (B.8) tenemos que el límite de $u_{\tau^n+s^{1,n}-t^n}$ para $n \rightarrow \infty$ no es un elemento de $\alpha(\varphi)$).

Por otro lado, si (B.8) es falso, tomamos $\zeta = \zeta^2$ y $s^n = s^{2,n}$. Entonces $\tau^n + s^{2,n} - t^n \rightarrow -\infty$ (pues $\tau^n + s^{2,n} - t^n < \tau^n + s^{1,n} - t^n$), y así

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_{s^n-t^n}^n - \zeta\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_{\tau^n+s^{2,n}-t^n} - \zeta^2\| > 0,$$

ya que el límite de $u_{\tau^n+s^{2,n}-t^n}$ es un elemento de $\alpha(\varphi)$. En cualquiera de los casos construimos una sucesión s^n que satisface (B.7).

Finalmente observemos que en el caso $V(\psi^n - x_{t^n}) < \nu$, la demostración se modifica eligiendo $s^n > t^n$ en lugar de $s^n < t^n$. \square

Damos ahora la prueba del lema 5.2.

Demostración:

La demostración es muy similar a la del lema 5.1.

Sea ν el que da el lema B.4. Sean $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$ y $\eta \in \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ tales que $\psi \neq \eta$ y $\psi - \eta \in S$. Tomamos $(\eta^n)_n \subset \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ tal que $\eta^n \rightarrow \eta$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por ser $\psi \neq \eta$ entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ tenemos que $\eta^n \neq \psi$. Además, como S es abierto y $\psi - \eta \in S$, entonces existe un $n_1 > n_0$ tal que si $n \geq n_1$ tenemos que $\psi - \eta^n \in S$. Entonces usando la continuidad de V sobre S que da el teorema 4.4 y el lema B.4 obtenemos

$$V(\psi - \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\psi - \eta^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu = \nu.$$

Sean ahora ψ, η como en el enunciado de este lema, esto es, $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$, $\eta \in \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ y $\psi \neq \eta$. Consideramos η^n como arriba. Entonces, usando nuevamente el teorema 4.4 y el lema B.4, tenemos que

$$V(\psi - \eta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(\psi - \eta^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu = \nu.$$

Consideremos a $w(\cdot)$ la solución a través de η ($w(\cdot)$ estará sobre la trayectoria $x(\cdot)$ o puede ser que $\eta \in \omega(x_0)$ y $w_t \in \omega(x_0) \subset \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$). Luego, $V(\psi - w_t) \leq \nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $V(\psi - w_t) \leq \nu$ es constante y finito para $|t|$ grande (tanto $t \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow -\infty$). Ahora por el teorema 4.3 tenemos que $\psi - w_t \in S$ para $|t|$ grande, y así $V(\psi - w_t) = \nu$ para tales t . De esta manera, $V(\psi - w_t) = \nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por el teorema 4.4, $\psi - w_t \in S$ para todo t .

En particular, $\psi - w_0 \in S$ y $V(\psi - w_0) = \nu$, es decir, $\psi - \eta \in S$ y $V(\psi - \eta) = \nu$.

Para la segunda parte del lema, sean $\psi \in \overline{\gamma(\varphi)}$ y $\eta \in \overline{\gamma_T^+(x_0)}$ donde $\psi \neq \eta$. Entonces, por lo que ya probamos, tenemos que $\psi - \eta \in S$ y, por lo tanto, usando (4.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(\psi - \eta) &\neq 0 \\ \pi(\psi) &\neq \pi(\eta) \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq N$. \square

C. Apéndice de la sección 7

◊ Demostración de la proposición 7.5

La demostración es bastante elemental y consiste principalmente en considerar $(t^0, \theta^0) \in \mathcal{Z}(x)$, y luego examinar la estructura del conjunto $\mathcal{Z}(x)$ cerca de este punto, usando la definición del conjunto S . Para empezar, sea $(t^0, \theta^0) \in \mathcal{Z}(x)$, donde $i < \theta^0 < i + 1$ para algún entero i , con $0 \leq i \leq N$. Necesariamente $\lambda(x_t)(i)$ y $\lambda(x_t)(i + 1)$ son no nulos y con signos opuestos para t cercanos a t^0 , pues en otro caso $\pi^i x_{t^0} = 0$, contradiciendo que $x_{t^0} \in S$. Si igualamos a cero el lado derecho de (7.7) se tiene la fórmula

$$\psi(t) = i + \frac{\lambda(x_t)(i)}{\lambda(x_t)(i) - \lambda(x_t)(i + 1)} = i + \frac{x^i(t)}{x^i(t) - \delta^i x^{i+1}(t)}, \quad (\text{C.1})$$

la cual es una cantidad estricta entre i e $i + 1$, y $(t, \psi(t))$ es el único punto de $\mathcal{Z}(x)$ cercano a (t^0, θ^0) .

Ahora suponemos que $\theta^0 = i$ es un entero con $1 \leq i \leq N$. Entonces las dos cantidades $\lambda(x_{t^0})(i - 1)$ y $\lambda(x_{t^0})(i + 1)$ son no nulas y tienen signos opuestos, nuevamente porque $x_{t^0} \in S$ (recordamos para esto a la definición (4.14) de S^i). Como $\theta^0 \in [i, i + 1]$ y también $\theta^0 \in [i - 1, i]$, observamos que al considerar la primera situación obtenemos $\psi(t)$ como en (C.1) y si consideramos la segunda situación obtenemos

$$\psi(t) = i - 1 + \frac{x^{i-1}(t)}{x^{i-1}(t) - \delta^{i-1} x^i(t)}. \quad (\text{C.2})$$

Entonces si $x^i(t)x^{i+1}(t) < 0$ para t cercano a t^0 usamos (C.1), si en cambio $x^i(t)x^{i-1}(t) < 0$ para t cercano a t^0 usamos (C.2).

Ahora suponemos que $\theta^0 \in [-1, 0)$, entonces $x^0(t^0 + \theta^0) = 0$. En este caso $\mathcal{Z}(x)$ está dado localmente por la gráfica

$$\theta = -(t - t^0) + \theta^0, \quad \text{para } t \leq t^0 + \theta^0 + 1 \text{ cercano a } t^0,$$

dado que si t es cercano a t^0 debe haber un θ cercano a θ^0 (y, por lo tanto, $\theta \in [-1, 0)$) tal que

$$\lambda(x_t)(\theta) = 0 \Leftrightarrow x_t(\theta) = 0 \Leftrightarrow x^0(t + \theta) = 0.$$

Luego, como $x^0(t + \theta) = x^0(t^0 + \theta^0) = 0$ y por ser los ceros de x^0 aislados, tenemos que

$$t + \theta = t^0 + \theta^0,$$

de donde se desprende inmediatamente lo que afirmábamos.

Si $\theta^0 = 0$, entonces que el signo de $x^0(t)$ para t cercano a t^0 esté dado por la condición $\delta^0 \dot{x}^0(t) x^1(t) > 0$ (debido a la definición del conjunto S^0 en (4.15)), implica que $\mathcal{Z}(x)$ es nuevamente localmente una gráfica. Pues para ver esto usamos la condición (C.1) para el caso en que $i = 0$, entonces nos queda

$$\psi(t) = \frac{x^0(t)}{x^0(t) - \delta^0 x_1(t)},$$

y observamos que el denominador no se anula precisamente por la condición de los signos.

Finalmente suponemos que $\theta^0 = N + 1$, así que $x^0(t^0 - 1) = 0$. Conocemos de la definición del conjunto S^{-1} en (4.15), que $\delta^N x^N(t^0) \dot{x}^0(t^0 - 1) < 0$, esto es, $\lambda(x_t)(N)$ y $\lambda(\dot{x}_t)(N + 1)$ son no nulos y tienen signos opuestos para t cercano a t^0 . Como $\lambda(x_t)(\theta)$ está dado por interpolación lineal para θ entre N y $N + 1$, obtenemos al conjunto $\mathcal{Z}(x)$ localmente como la gráfica $\theta = \psi(t)$, pero sólo para $t \geq t^0$, con $\psi(t^0) = N + 1$ y $\psi(t) < N + 1$ para $t > t^0$ y cercano a t^0 . Esto se debe a que si en (C.1) consideramos a $i = N$, tenemos que

$$\psi(t) = N + \frac{x^N(t)}{x^N(t) - \delta^N x^{N+1}(t)} = N + \frac{x^N(t)}{x^N(t) - \delta^N x^0(t - 1)}.$$

De esta última igualdad vemos que se cumple lo afirmado.

Hasta ahora hemos probado que cada componente conexa de $\mathcal{Z}(x)$ es una gráfica (7.8), y que se cumplen (a), (b), (c) y (d) del enunciado. Notemos que en todos estos casos $\lambda(x_t)(\theta)$ cambia de signo al cruzar la gráfica de ψ , esto es, también se cumple (f).

Observemos, de la definición de V y λ , que también vale (g). Para verificar esto, simplemente hay que analizar los distintos casos posibles. Supongamos que $\delta^* = 1$ (si $\delta^* = -1$ se procede en forma similar), como además sabemos que $x_t(-1) \neq 0$ supongamos que $x_t(-1) > 0$, entonces $\lambda(x_t)(N + 1) = \delta^* x_t(-1) = x_t(-1) > 0$. Ahora aparecen nuevos subcasos:

- si $sc(x_t)$ es par entonces $x_t(N) > 0$, luego

$$V(x_t) = sc(x_t) = \text{número de ceros de } \lambda(x_t),$$

- si $sc(x_t)$ es impar entonces $x_t(N) \leq 0$.

Entonces o bien $x_t(N) < 0$ en cuyo caso

$$V(x_t) = sc(x_t) + 1 = \text{número de ceros de } \lambda(x_t),$$

o bien $x_t(N) = 0$ en cuyo caso $x_t(N-1) < 0$ y, entonces, otra vez

$$V(x_t) = sc(x_t) + 1 = \text{número de ceros de } \lambda(x_t).$$

Análogamente se analiza el caso en que $x_t(-1) < 0$.

La validez de (h) se sigue directamente de la definición de λ , en particular de la fórmula de interpolación lineal (7.7).

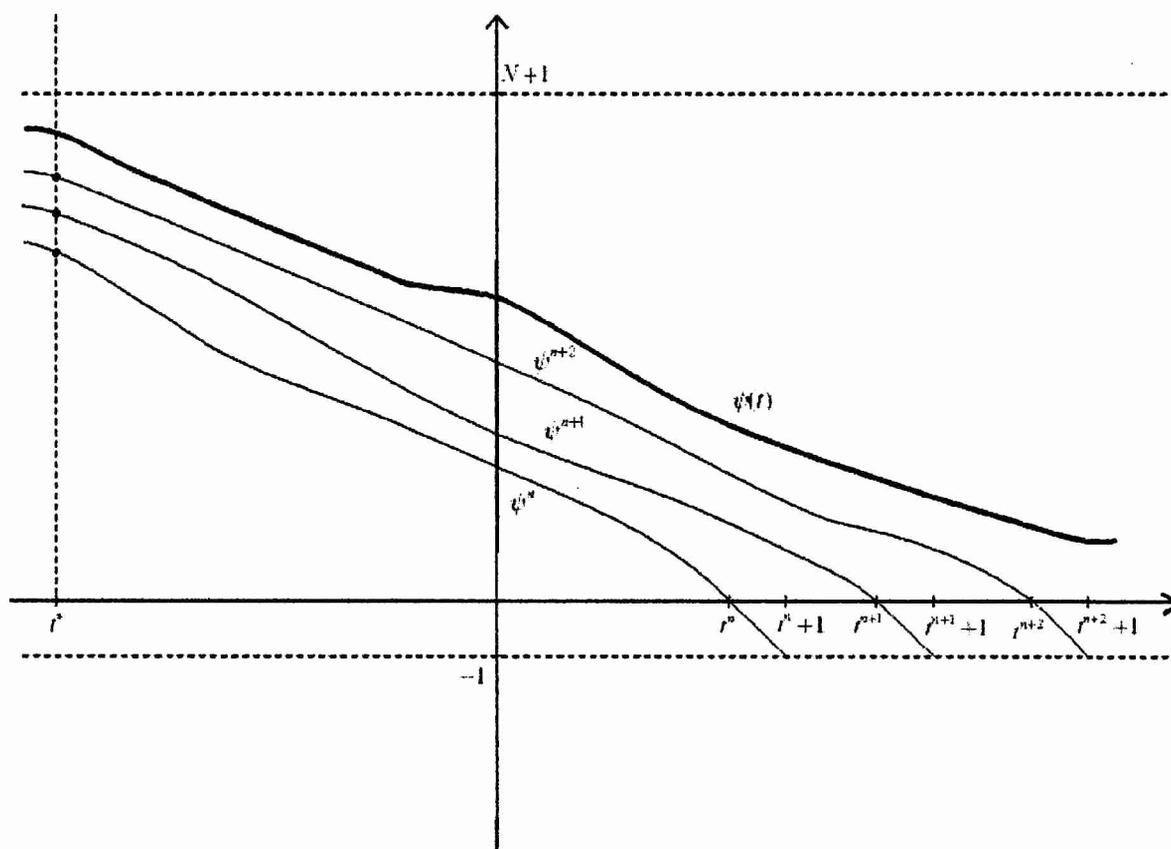


Figura 6: Para este t^* existen infinitos θ^n tal que $(t^*, \theta^n) \in \mathcal{Z}(x)$

Para terminar veamos que se cumple (e). Supongamos que I no está acotado en la dirección positiva, pero que existe $t^n \rightarrow \infty$ con $x^0(t^n) = 0$. Notemos que $x^0(t^n) = x_{t^n}(0) = \lambda(x_{t^n})(0)$, luego $(t^n, 0) \in \mathcal{Z}(x)$. Entonces para cada n hay una curva $\psi^n : I^n \rightarrow [-1, N + 1]$ en $\mathcal{Z}(x)$ con $\psi^n(t^n + 1) = -1$, donde $t^n + 1$ es el extremo derecho de I^n , $\psi^n(t^n) = 0$ y $(t, \psi^n(t)) \in \mathcal{Z}(x)$ para todo $t \in I^n$. Luego, por (c) tenemos que

$$\psi^n(t) = -t + t^n \quad \text{para todo } t^n \leq t \leq t^n + 1.$$

Como las gráficas de ψ y ψ^n son disjuntas en \mathbb{R}^2 , se sigue que $I^n = (-\infty, t^n + 1]$ ya que en otro caso la gráfica de ψ^n cruzaría a la gráfica de ψ para poder alcanzar la recta $\theta = N + 1$. Como las gráficas de todas las funciones ψ^n son dos a dos disjuntas, entonces tenemos que para algún t^* negativo y de módulo grande, el lado derecho de (7.9) es infinito (ver Figura 6). Pues dado t^* , existe θ^n tal que $\psi^n(t^*) = \theta^n, (t^*, \theta^n) \in \mathcal{Z}(x)$ y $\theta^n \neq \theta^m$ si $n \neq m$. Entonces $V(x_{t^*}) = \text{card}\{\theta \in [-1, N + 1] / \lambda(x_{t^*})(\theta) = 0\} = \infty$ y llegamos así a un absurdo, ya que $x_{t^*} \in S$. Por lo tanto, comprobamos la validez de (e). \square

Referencias

- [1] Jack Hale and Sjoerd M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] Jack Hale, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [3] John Mallet-Paret and George R. Sell, *The Poincaré-Bendixon Theorem for Monotone Cyclic Feedback System with Delay*, Journal of Differential Equations **125**, 441-489 (1996).
- [4] John Mallet-Paret and George R. Sell, *Systems of Differential Delay Equations: Floquet Multipliers and Discrete Lyapunov Functions*, Journal of Differential Equations **125**, 385-440 (1996).
- [5] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems (3rd Edition)*, Prentice-Hall, 2001.