

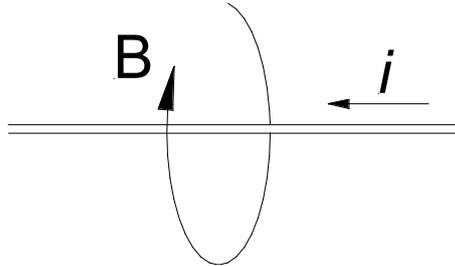
# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

## EL TRANSFORMADOR

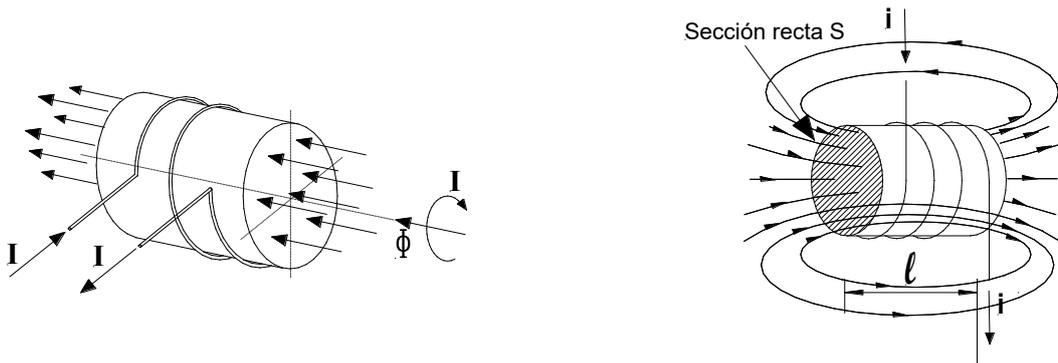
Realizado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle – Ing. Marcos Deorsola

### 1. Efectos magnéticos de la corriente

Se supone tener un conductor por el cual se establece una corriente. Dicha corriente dará origen a un campo magnético alrededor del conductor, el cual puede calcularse mediante la ley de Ampere.



Si el conductor forma una bobina de  $N$  espiras, se tiene lo siguiente



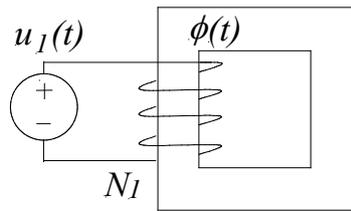
A pesar de ser el flujo una magnitud escalar, a veces se le asigna un sentido, puesto que éste está relacionado en forma directa con la *inducción magnética* o *densidad de flujo*  $B$ , que es una magnitud vectorial.

El campo queda prácticamente confinado al interior de la bobina aunque las líneas de campo, que deben cerrarse por el exterior de la bobina, determinan que en esta zona el mismo sea significativamente más débil, cumpliéndose que

$$\Phi = B \cdot S$$

Si la bobina se enrolla sobre un núcleo ferromagnético, se puede considerar que el campo queda confinado al interior del núcleo en toda la longitud del mismo, cerrándose sobre sí mismo dentro del material. El descrito es un llamado *circuito magnético*.

En dicho circuito magnético, a cuya bobina de  $N_1$  espiras se le aplica una fuente de tensión variable en el tiempo  $u_1(t)$ , el flujo originado por la misma vale



$$\phi(t) = \frac{1}{N_1} \int u_1 dt$$

Figura 1

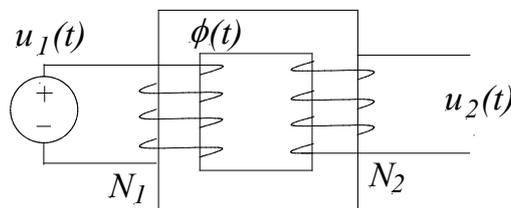
Dicho flujo, que como ya se dijo se supone totalmente confinado al material ferromagnético, también es variable.

Por otra parte, cuando existen variaciones temporales del campo magnético en el espacio próximo a una bobina formada por  $N$  espiras de conductor debe tenerse en cuenta la ley de Faraday, la cual expresa la tensión inducida entre los bornes de dicha bobina cuando varía el flujo magnético que atraviesa las  $N$  espiras que la componen:

$$u(t) = N \frac{d\phi}{dt}$$

Si ahora dos bobinas, cada una con su propia corriente, se colocan muy próximas entre sí, resulta evidente que el campo generado por cada una influirá sobre la otra en mayor o menor medida, de acuerdo a la proximidad entre ellas.

Si se montan ambas bobinas sobre un núcleo ferromagnético como indica la figura siguiente, entre los bornes abiertos de la bobina de  $N_2$  espiras se inducirá una nueva tensión variable en el tiempo  $u_2(t)$ , debido al flujo variable existente en el núcleo magnético, que **concatena** a las  $N_2$  espiras de la segunda bobina.



$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Figura 2

El signo de  $u_2(t)$  debe ser tal que el efecto se oponga a la causa que le da origen, por lo tanto:

$$u_2(t) = -N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Se sabe, además, que

$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

la cual, junto a la ya vista

$$u(t) = N \frac{d\phi}{dt}$$

determina que

$$L = N \frac{\phi}{i}$$

Ambas  $u(t)$  se pueden igualar ya que, si  $N_2$  se cortocircuitara, (que es la única forma de conseguir corriente por  $N_2$ ) la tensión inducida sobre  $N_2$  debido a  $\Phi$  debe ser igual a la caída de tensión sobre  $N_2$  provocada por  $i_2$ :

$$N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Continuando el análisis de la figura anterior y la expresión de  $u_2$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1)$$

que se puede reescribir

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

pues se sabe que, en definitiva,  $u_2$  depende de  $i_1$  a través de una constante, que en este caso es  $M$ .

$M$  se denomina *inductancia mutua*, e igualando las dos expresiones anteriores

$$\phi = M \frac{i_1}{N_2}$$

Debe recordarse que en este caso la caída de tensión en el inductor, que coincide con la tensión de la fuente, vale

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

la cual también se puede escribir como

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2)$$

Relacionando (1) y (2) se tiene

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2}$$

$a$  se suele llamar **relación de transformación**.

Por otra parte, los mismos resultados se obtendrían si se intercambian la fuente y la bobina pasiva (es decir, conectando la fuente  $u_1(t)$  a  $N_2$  manteniendo  $N_1$  abierta):

$$u_1(t) = M \frac{di_2(t)}{dt} \quad \text{y} \quad u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Se ha podido representar un efecto magnético mediante una relación entre tensiones y corrientes, en vez de considerar flujos u otras variables magnéticas.

Si ambas bobinas fueran activas, como se ve en la figura siguiente, en el núcleo ferromagnético se establecería un flujo neto, cuyo valor depende de los flujos generados por cada arrollamiento. Si las corrientes y los arrollamientos son como

los de dicha figura, los flujos generados por cada bobina tienden a disminuir el flujo neto en este caso.

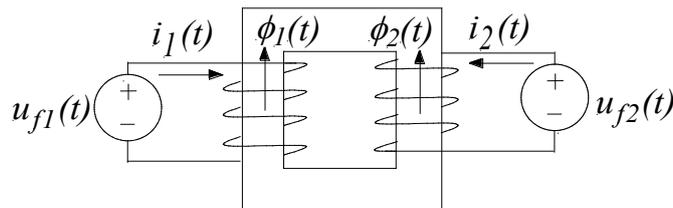


Figura 3

Este flujo neto, que es compartido por ambas bobinas, se denomina **flujo mutuo** o **concatenado**.

## 2. Puntos homólogos

Partiendo de todo lo indicado anteriormente, se pueden plantear un par de expresiones que relacionan el efecto de cada fuente y el efecto mutuo sobre cada arrollamiento, teniendo en cuenta cómo interactúan los flujos generados por ambas bobinas:

$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_{f2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Se debe determinar cuál de los signos corresponden. Utilizando el dibujo donde se observa el núcleo magnético es fácil de determinar. Pero muchas veces es deseable "deshacerse" de los núcleos para lograr representaciones más sencillas. Surge la idea de los **puntos homólogos**.

La determinación de estos puntos homólogos (e identificados como 1 y 2 según de qué bobina se refiera) resulta inmediata si se puede ver la forma en que se han bobinado ambos inductores. Efectivamente, como se observa en la Figura 3, ambas bobinas magnéticamente acopladas se encuentran devanadas en el mismo sentido sobre el núcleo magnético; por lo tanto, los puntos homólogos se ubican de manera de indicar los extremos de las mismas a partir de los cuales los arrollamientos se realizan de la misma manera.

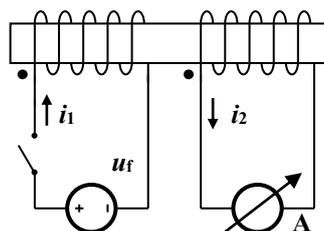


Figura 4

Sin embargo en los circuitos prácticos reales esta situación puede no ser factible, dado que generalmente no es posible verificar los sentidos de los arrollamientos sin desarmar el circuito; por lo que debe determinarse, tomando como referencia el extremo de una de las bobinas, cuál de los dos extremos de la otra es el homólogo de dicha referencia.

De disponerse de un medidor de flujo magnético bastaría con aplicar corriente entrante por uno de los extremos de la primera bobina y medir el flujo. Luego simultáneamente aplicar corriente en uno de los terminales de la segunda bobina. Si la medición del flujo aumenta, ése extremo es el homólogo del fijado en la primera bobina. Si en cambio la indicación da menor, el punto homólogo es el

extremo de la segunda bobina. Más factible es la determinación de los puntos homólogos por mediciones eléctricas.

La Figura 3 muestra dos bobinas  $L_1$  y  $L_2$  devanadas sobre un núcleo de adecuadas características magnéticas tal que facilite el desarrollo del flujo en casi su totalidad a través del mismo, concatenando ambos bobinados.

En el extremo izquierdo de la  $L_1$ , a través de un interruptor se puede aplicar tensión y hacer entrar una corriente  $i_1$ . Ésto determina que luego de cerrado el interruptor aparezca  $\phi$  (con el interruptor abierto tanto  $i_1$  como  $\phi$  son nulos). Este cambio en el flujo induce tensión en la  $L_2$ , la que hará circular una corriente  $i_2$  a través del amperímetro.

El extremo donde se aplica el borne positivo de la pila en la primer bobina y el extremo de donde sale corriente en la segunda bobina son los respectivos puntos homólogos. También se verifica que el punto homólogo de la segunda bobina corresponde a aquél donde resulta máxima la tensión inducida por efecto de la variación de  $\phi$ .

Lo afirmado no puede ser de otra manera, ya que si la tensión inducida en la segunda bobina tuviera su mínimo en el punto homólogo o, lo que es lo mismo, al cerrar el inductor con el amperímetro la corriente entrara a dicho punto, se produciría un aumento del flujo con el consiguiente aumento de la tensión inducida, es decir se estaría en presencia de un fenómeno contrario a lo previsto por la ley de Lenz.

En consecuencia, se puede reemplazar el núcleo magnético por dos puntos, cada uno de los cuales se ubica en el extremo de cada inductor, como se muestra:

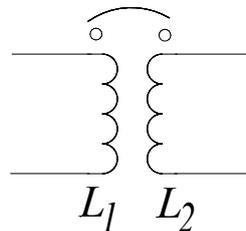


Figura 5

En resumen, se puede decir que los puntos homólogos indican:

- la forma en la que están enrolladas las bobinas sobre el núcleo,
- que la polaridad instantánea de la tensión inducida en un punto homólogo respecto la caída de tensión en el otro es la misma.

Además, como se dijo, no hace falta dibujar el núcleo de hierro.

En base a lo enunciado debe observarse que los puntos homólogos existen independientemente de cómo sean las tensiones y las corrientes en las bobinas. Normalmente es el fabricante de los circuitos acoplados quien brinda la información de la localización de los puntos homólogos por razones obvias. La Foto 1 muestra un circuito acoplado (transformador) en el cual se observa la ubicación de los correspondientes puntos homólogos de los respectivos bobinados.

Es más aún, la corriente en una de las bobinas podría ser nula (circuito de la Figura 2); y a partir del dato de la ubicación de los puntos homólogos es posible determinar la polaridad de la tensión inducida en ésta última, conociendo la polaridad de la caída de tensión en la primera. Ésto se muestra claramente en la Figura 4.

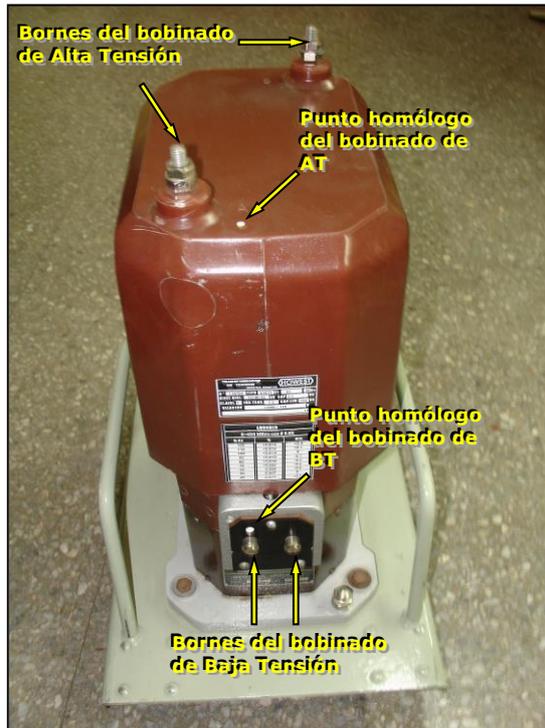


Foto 1

### 3. Dispersión

A esta altura debe presentarse un efecto más en este tipo de sistemas que no se había considerado hasta ahora por haber supuesto el sistema en estudio como ideal: la **dispersión**. Este efecto tiene en cuenta que *no todo el flujo generado* por cada bobina activa queda confinado al núcleo, sino que parte de aquél se cierra a través del aire; por lo tanto, esta porción del flujo no tiene efecto sobre la otra bobina. Este flujo se denomina **disperso** y se ejemplifica en la figura siguiente.

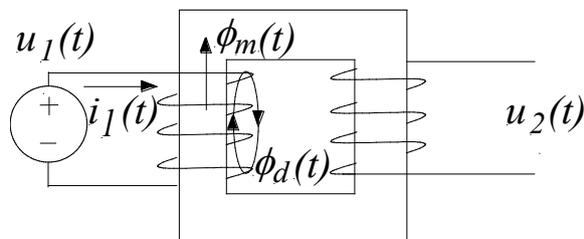


Figura 6

Por lo tanto, el flujo total de la bobina 1 debe ser igual a la suma de su flujo disperso más el flujo mutuo.

$$\phi_1 = \phi_m + \phi_d$$

Si se considera que ambos arrollamientos se encuentran energizados con fuentes de tensión, los flujos totales de cada uno de ellos valen:

$$\phi_1 = \phi_{m1} + \phi_{d1}$$

$$\phi_2 = \phi_{m2} + \phi_{d2}$$

$\phi_1$  : flujo total de la bobina 1

$\phi_{m1}$  : flujo producido por la bobina 1 y concatena a la bobina 2

$\phi_{d1}$  : flujo disperso producido por la bobina 1

$\phi_2$  : flujo total de la bobina 2

$\phi_{m2}$  : producido por la bobina 2 y concatenada a la bobina 1

$\phi_{d2}$  : flujo disperso producido por la bobina 2

Se puede asociar cada flujo con la autoinductancia de cada bobina:

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \phi_2}{i_2}$$

Al existir flujo de dispersión, se puede escribir:

$$\phi_{m1} = k_1 \phi_1$$

$$\phi_{d1} = \sigma_1 \phi_1$$

$$\phi_{m2} = k_2 \phi_2$$

$$\phi_{d2} = \sigma_2 \phi_2$$

$k_1$  y  $k_2$  se denominan **coeficiente** o **factor de acoplamiento**, y relacionan la porción del flujo producido por la bobina 1 que alcanza a la bobina 2 respecto del flujo total de la bobina 1; igualmente para la bobina 2.

$\sigma_1$  y  $\sigma_2$  se denominan **coeficiente de dispersión**, y relacionan el flujo disperso de la bobina 1 respecto del flujo total de la bobina 1; igualmente para la bobina 2.

Luego, los flujos totales de cada bobina se pueden escribir como

$$\phi_{m1} + \phi_{d1} = \phi_1(k_1 + \sigma_1) = \phi_1$$

$$\phi_{m2} + \phi_{d2} = \phi_2(k_2 + \sigma_2) = \phi_2$$

con

$$k_1 + \sigma_1 = 1$$

$$k_2 + \sigma_2 = 1$$

lo que indica que, tanto  $k$  como  $\sigma$  son función de la geometría del sistema, y pueden tomar valores entre 0 y 1, en forma contrapuesta.

Luego

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{i_1} = \frac{N_1 \phi_{d1}}{i_1} + \frac{N_1 \phi_{m1}}{i_1} = L_{d1} + L_{m1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \phi_2}{i_2} = \frac{N_2 \phi_{d2}}{i_2} + \frac{N_2 \phi_{m2}}{i_2} = L_{d2} + L_{m2}$$

$L_{d1}$  y  $L_{d2}$ : inductancias de dispersión.

$L_{m1}$  y  $L_{m2}$ : inductancias de magnetización que producen los flujos concatenados.

Recordando el coeficiente de inductancia mutua ya definido ( $M = \frac{N_2 \phi}{i_1}$ ):

$$M = \frac{N_1 \phi_{m2}}{i_2} = \frac{N_2}{N_2} \frac{N_1 \phi_{m2}}{i_2} = a L_{m2} \quad \text{con } a = \frac{N_1}{N_2}$$

De la misma forma, 
$$M = \frac{N_2 \phi_{m1}}{i_1} = \frac{N_1}{N_1} \frac{N_2 \phi_{m1}}{i_1} = \frac{L_{m1}}{a}$$

y 
$$L_{m1} = a^2 L_{m2}$$

la cual surge de igualar las dos anteriores.

#### 4. Relación entre $k$ y $M$

Es posible demostrar que el factor de acoplamiento se relaciona con  $M$ ,  $L_1$  y  $L_2$  de la siguiente manera:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

donde  $k$  es único para un mismo par de bobinas acopladas magnéticamente.

$M$  también podría escribirse como

$$M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{k_1 \cdot k_2} \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 \cdot L_2} = \sqrt{L_{m1} \cdot L_{m2}}$$

Si la dispersión fuera nula, el acoplamiento entre las bobinas 1 y 2 sería perfecto y

$$L_{m1} = L_1$$

$$L_{m2} = L_2$$

#### 5. Circuito acoplado básico del transformador

Con lo visto hasta aquí, se puede analizar el siguiente circuito acoplado simple, que representa al transformador básico, en el cual hay sólo una fuente en el "primario" y una carga pasiva en el secundario.

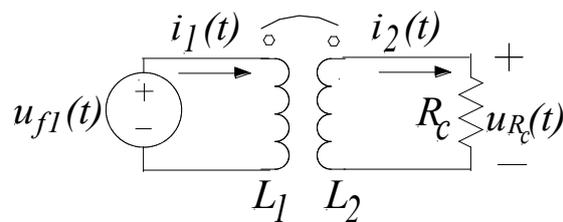


Figura 7

Las expresiones que representan el funcionamiento el circuito son:

$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Si las tensiones y corrientes son senoidales, se pueden escribir las expresiones fasoriales correspondientes a las anteriores:

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = jX_{L2} \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

Donde el signo del término de  $M$  se determina teniendo en cuenta lo siguiente:

La caída de tensión en  $L_1$  presenta la polaridad positiva en su punto homólogo, por lo tanto, el punto homólogo de  $L_2$  presentará también polaridad positiva. Ésta representa la polaridad de la tensión inducida en  $L_2$ , lo cual provocará la circulación de la corriente  $i_2$  en el sentido indicado en la figura. Luego, esta corriente provocará una caída de tensión en  $L_2$ , cuya polaridad positiva se encontrará en el borne opuesto a donde se ubica su punto homólogo; localizándose, en consecuencia la polaridad negativa de la caída de tensión en éste. Finalmente, dicho signo negativo se verá reproducido en el punto homólogo de  $L_1$ . Por lo tanto, al ser opuestas las polaridades de la caída de tensión y de la tensión inducida en cada punto, el signo del término de  $M$  resulta negativo.

Recordando lo ya mencionado en párrafos anteriores, esta conclusión refleja que el flujo resultante del acoplamiento, a partir de los flujos generados en cada bobina (flujo mutuo), disminuye. En caso contrario, el flujo mutuo aumentará, resultando positivo el signo del término de  $M$ .

A partir de todo lo mencionado, se puede dibujar un circuito equivalente con fuentes controladas las cuales indican las tensiones inducidas, por lo cual el circuito estudiado se puede volver a dibujar de la siguiente forma, omitiendo los puntos homólogos:

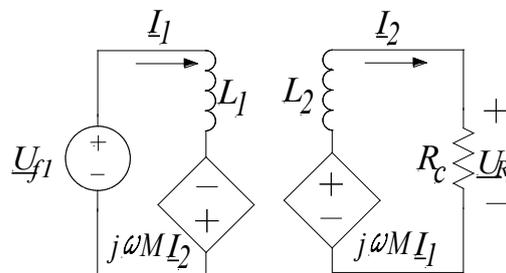


Figura 8

## 6. Modelo conductivo del transformador

Es posible obtener un modelo del transformador en el cual el acoplamiento inductivo se reemplaza por una vinculación conductiva. Para ello se pueden hacer los análisis que siguen, todo lo cual resulta válido trabajando en el dominio de los números complejos.

En el circuito de la figura del transformador básico se pueden separar las componentes de las inductancias en las correspondientes de *dispersión* y de *magnetización*:

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{m1} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = L_{d2} \frac{di_2(t)}{dt} + L_{m2} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Fasorialmente:

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + j\omega L_{m1} \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_{d2} \underline{I}_2 + j\omega L_{m2} \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \cdot R_C - j\omega M \underline{I}_1$$

Y el circuito queda

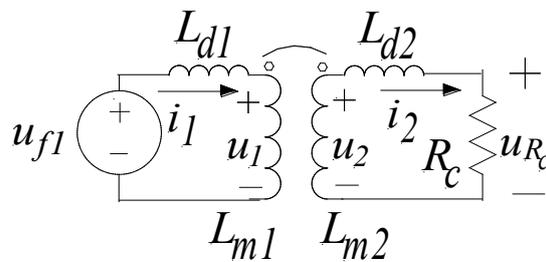


Figura 9

La inductancia de dispersión está vinculada al flujo disperso, mientras que la inductancia de magnetización se relaciona con el flujo mutuo. Debe tenerse en cuenta que el acoplamiento entre  $L_{m1}$  y  $L_{m2}$  es *perfecto*, es decir  $k=1$ .

En este punto es posible tomar dos caminos de análisis para obtener el modelo equivalente conductivo del circuito acoplado del transformador.

### 6.1. Determinación del modelo a partir de la admitancia equivalente

Se puede plantear la admitancia equivalente vista desde los puntos AB hacia la derecha en el siguiente circuito:

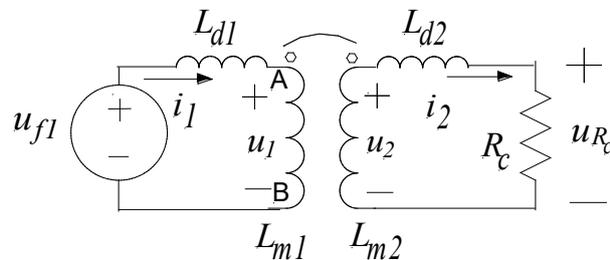


Figura 10

Recordando que  $M = \sqrt{L_{m1} \cdot L_{m2}}$  o  $M^2 = L_{m1} \cdot L_{m2}$ , dado que el acoplamiento es perfecto para  $L_{m1}$  y  $L_{m2}$ , y multiplicando a ambos lados del igual por  $\omega^2$ , surge que

$$X_M^2 = X_{L_{m1}} \cdot X_{L_{m2}}$$

Se puede plantear la admitancia equivalente vista desde **A** y **B** hacia la derecha. Para ello se debe determinar la tensión entre **A** y **B**, y la corriente entre los mismos puntos, para luego establecer dicha admitancia como la relación entre ambas:

$$u_{AB}(t) = u_1(t) = L_{m1} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$M \frac{di_1}{dt} = L_{m2} \frac{di_2}{dt} + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot R_C$$

Expresando las anteriores en el dominio de los números complejos

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_1 = j\omega L_{m1} \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2$$

$$j\omega M \underline{I}_1 = j\omega L_{m2} \underline{I}_2 + j\omega L_{d2} \underline{I}_2 + R_C \underline{I}_2$$

Además, teniendo en cuenta la expresión general de  $X = \omega L$  :

$$\underline{U}_1 = jX_{m1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$jX_M \underline{I}_1 = jX_{m2} \underline{I}_2 + jX_{d2} \underline{I}_2 + R_C \underline{I}_2$$

Luego, despejando  $I_2$  de la segunda ecuación y reemplazando en la primera se tiene:

$$\underline{U}_1 = I_1 \left[ jX_{m1} - \frac{jX_M \cdot jX_M}{j(X_{m2} + X_{d2}) + R_C} \right]$$

De la expresión anterior se puede calcular la admitancia vista desde **AB**:

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{I_1}{\underline{U}_1} = \frac{1}{jX_{m1} + \frac{X_M^2}{j(X_{m2} + X_{d2}) + R_C}} = \frac{1}{jX_{m1} + \frac{X_{m1}X_{m2}}{R_C + jX_{m2} + jX_{d2}}}$$

Operando en el denominador, y teniendo en cuenta que

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k \cdot X_1}{k \cdot X_2} = \frac{X_{m1}}{X_{m2}} = a^2$$

resulta

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{(R_C + jX_{d2}) + jX_{m2}}{jX_{m1}(R_C + jX_{d2})} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{a^2(jX_{d2} + R_C)}$$

El último miembro de esta expresión corresponde a una inductancia de valor  $L_{m1}$  en paralelo con una impedancia, a su vez compuesta por una inductancia de valor  $a^2L_{d2}$  en serie con una resistencia  $a^2R_C$ , que se puede representar por el siguiente circuito visto desde **A** y **B**:

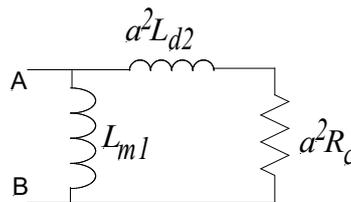


Figura 11

El circuito completo original, sin la fuente de tensión, queda:

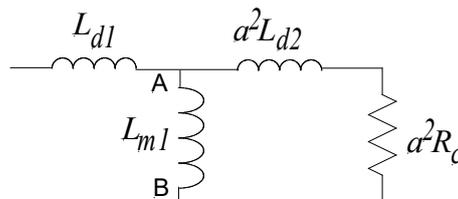


Figura 12

## 6.2. Otro método

Partiendo de las ecuaciones que describen el funcionamiento del circuito acoplado con las inductancias de dispersión, las que se reescriben a continuación por comodidad,

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{m1} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = L_{d2} \frac{di_2(t)}{dt} + L_{m2} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

los términos donde figuran las  $L_m$  y las  $M$  se pueden agrupar bajo  $u_1$  y  $u_2$  de la siguiente manera:

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} - u_1(t)$$

$$0 = L_{d2} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C + u_2(t)$$

donde

$$-u_1(t) = L_{m1} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_{m2} \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Con la relación de transformación  $a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2}$  queda

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} - a \cdot u_2(t)$$

$$-u_2(t) = L_{d2} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C$$

Luego, reemplazando  $u_2$  de la segunda en la primera:

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} + a \cdot \left( L_{d2} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C \right) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} + a^2 L_{d2} \frac{1}{a} \frac{di_2(t)}{dt} + a^2 R_C \frac{i_2(t)}{a}$$

El último miembro se obtiene multiplicando y dividiendo el paréntesis del segundo miembro por  $a$ .

Dado que  $a^2 L_{d2} = L_{d2}'$ ,  $a^2 R_C = R_C'$  y  $\frac{i_2(t)}{a} = i_2'(t)$ ; en donde el "prima" denota que las correspondientes magnitudes se encuentran "reflejadas al primario", queda:

$$u_{f1}(t) = L_{d1} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{d2}' \frac{di_2'(t)}{dt} + R_C' \cdot i_2'(t)$$

Se puede dibujar un circuito que responde a la ecuación anterior:

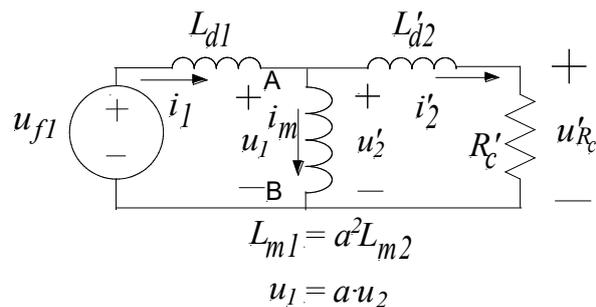


Figura 13

La inductancia  $L_{m1} = a^2 L_{m2}$  debe agregarse para que se cumpla la LKC en los nodos **A** y **B** con lo cual

$$i_1 = i_m + i_2'$$

### 6.3. Modelo completo

Un modelo más completo aún incluye las pérdidas en los bobinados y en el núcleo magnético. Éstas se representan por resistencias que se incluyen en el circuito equivalente, como muestra la Figura 14.

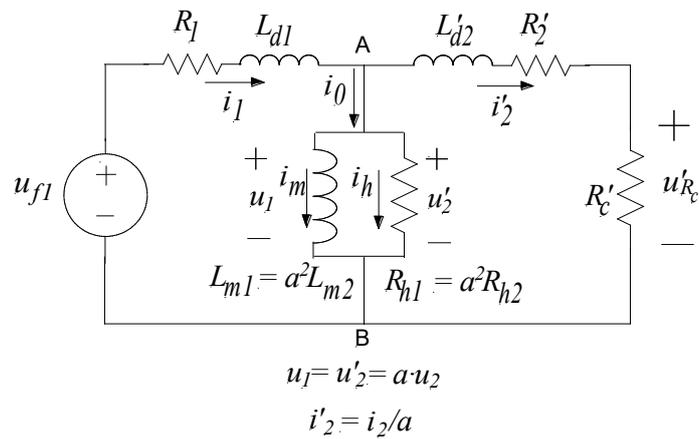


Figura 14

Las resistencias  $R_1$  y  $R'_2$  representan las pérdidas en el cobre de los devanados primario y secundario, respectivamente, por efecto Joule.

La resistencia  $R_{h1}$  ( $=R'_{h1} = \alpha^2 R_{h2}$ ) representa las pérdidas por corrientes parásitas en el núcleo ferromagnético.

Ahora

$$i_1 = i_0 + i'_2$$

$$i_0 = i_m + i_h$$

$i_0$  es la suma de la corriente de *magnetización* (aquella que contribuye al acoplamiento) más la corriente *equivalente de pérdidas* en el hierro relacionada, como ya se dijo más arriba, con las pérdidas en el núcleo ferromagnético. Es por ésta razón que los núcleos de hierro de los transformadores se construyen con láminas delgadas, en lugar de utilizar bloques macizos de material. La Foto 2 muestra uno de los bobinados (de baja tensión) montado sobre el núcleo ferromagnético de un transformador de medición de tensión, donde se puede apreciar el detalle de la construcción laminada del núcleo.



Foto 2

## 7. Resolución de circuitos con acoplamiento inductivo

Dejando de lado el caso particular del transformador, los circuitos eléctricos en los cuales existe acoplamiento inductivo en general se resuelven con la misma metodología convencional; sólo hay que tener en cuenta las tensiones inducidas adicionales producidas por el acoplamiento inductivo. Los ejemplos que se dan a continuación ilustran sobre la resolución de este tipo de circuitos. Se plantean variantes de la situación básica planteada en párrafos anteriores.

### 7.1. Caso de acoplamiento inductivo puro con inductores reales alimentados con fuentes independientes de tensión

Esta situación corresponde a la que se muestra en el circuito de la Figura 15, en el cual ambas mallas se encuentran activas por efecto de las fuentes independientes de tensión.

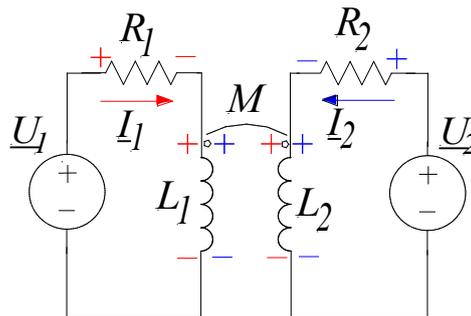


Figura 15

Se hace referencia a "inductores reales", modelando los mismos mediante una inductancia en serie con un resistor.

Puede resolverse planteando la 2ª Ley de Kirchhoff tanto en la malla de la izquierda como en la de la derecha, teniendo en cuenta que  $I_1$  influye en esta última y que  $I_2$  a su vez afecta la primera.

$$\text{Malla izquierda} \quad \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot R_1 + (\underline{I}_1 jX_{L_1} + \underline{I}_2 jX_M)$$

$$\text{Malla derecha} \quad \underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot R_2 + (\underline{I}_2 jX_{L_2} + \underline{I}_1 jX_M)$$

Debe observarse cómo se obtiene el signo de los términos de  $M$ , teniendo en cuenta cómo son los sentidos de las corrientes y la polaridad de las caídas de tensión a las cuales dan origen. En la malla izquierda,  $I_1$  ingresa al punto homólogo e induce una tensión positiva en el otro punto homólogo; de la misma forma, en la malla derecha,  $I_2$  ingresa al punto homólogo de su propia malla e induce una tensión positiva en el punto homólogo de la izquierda. A su vez, las polaridades de las respectivas caídas de tensión coinciden con las correspondientes tensiones inducidas en cada malla, resultando que los términos de  $M$  son positivos.

Para una mejor interpretación, en la Figura 15 se puede advertir que las polaridades de las caídas de tensión debidas a  $I_1$  se han indicado en color rojo, así como la polaridad de la tensión inducida en  $L_2$  debido a dicha corriente. De la misma forma, se indican en azul las polaridades de las caídas debidas a  $I_2$  y la polaridad de la tensión inducida en  $L_1$ .

### 7.2. Caso de acoplamiento inductivo puro con más de dos inductores acoplados

El acoplamiento mutuo puede realizarse entre más de dos circuitos siendo válido todo lo dicho para las distintas interacciones.

En el circuito de la Figura 16 se combinan tres mallas acopladas magnéticamente. Dos de ellas, 1 y 3, activas por efecto de sendos generadores con acción posible sobre el sentido de la corriente. La malla 2, en la que se inducen tensiones desde las otras dos mallas, al estar cerrada permite la aparición de  $\underline{I}_2$  cuyo sentido depende de la polaridad resultante de dichas tensiones inducidas.

Debe tenerse en cuenta, además, que el factor de acoplamiento no tiene que ser necesariamente el mismo para cada par de inductores acoplados, por lo cual se definen en forma arbitraria tres coeficientes,  $k_{12}$ ,  $k_{23}$  y  $k_{31}$ , los cuales dan lugar a las correspondientes inductancias mutuas  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  y  $M_{13}$ . El sentido asignado a la corriente de la malla 2 es completamente arbitrario, dado que no hay fuente que permita intuir un sentido de la misma.

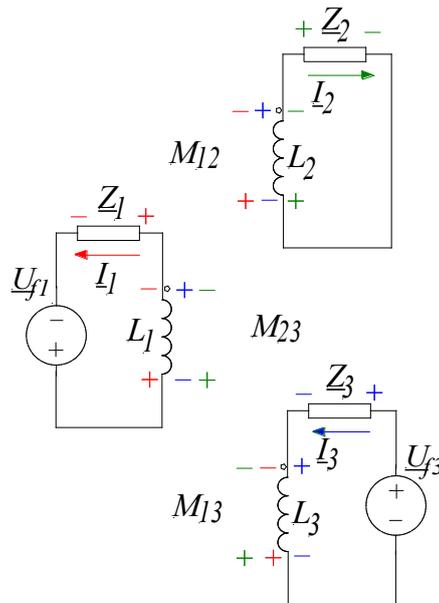


Figura 16

El ejemplo puede analizarse haciendo algunas variantes que ayudan a terminar de clarificar el tema. Dichas variantes proponen valores particulares de los coeficientes de acoplamiento.

En la figura 16 se indican, en colores adecuados y en forma análoga a lo planteado para la Figura 15, las polaridades de las caídas de tensión y de las tensiones inducidas producidas por cada corriente en los correspondientes mallas, cuando sea procedente.

### 7.2.1. $k_{12} = k_{23} = 0$ ( $M_{12} = M_{23} = 0$ )

En este caso la malla 2 queda desvinculada respecto del acoplamiento magnético y totalmente pasiva ( $\underline{I}_2 = 0$ ). Las mallas 1 y 3 se analizan y resuelven como en 7.1.. En este caso, como  $\underline{I}_1$  sale del punto homólogo 1, la correspondiente tensión inducida en la malla 3 tiene la polaridad negativa en el punto homólogo 3). Se deja a cargo del lector el planteo de las ecuaciones resultantes.

### 7.2.2. $k_{13} = k_{23} = 0$ ( $M_{13} = M_{23} = 0$ )

Ahora la malla 3 queda desvinculada respecto del acoplamiento magnético, pero activa ( $\underline{I}_3 = \underline{U}_{f3} / \underline{Z}_3$ ). La malla 2 se "activa" a través de la tensión inducida  $\underline{U}_2 = jX_{M12} \cdot \underline{I}_1$ , y como  $\underline{I}_1$  sale del punto homólogo 1, con la polaridad negativa en el punto homólogo 2. En este caso el sentido arbitrario asignado a  $\underline{I}_2$  es contrario al correcto.

Puede repetirse el anterior análisis, pero desvinculando magnéticamente la malla 1 y en este caso el sentido asignado en el circuito sería correcto porque  $\underline{U}_2 = jX_{M32} \cdot \underline{I}_3$  tiene polaridad positiva en el punto homólogo 2. El efecto inducido que esta corriente produce en la malla 1 ó en la malla 2 para cada caso dependerá de la polaridad y consecuente sentido de  $\underline{I}_2$ .

### 7.2.3. $k12 \neq 0, k13 \neq 0, k23 \neq 0$ ( $M12 \neq 0, M13 \neq 0, M23 \neq 0$ )

Si todos los acoplamientos funcionan efectivamente en el ejemplo de la Figura 6, y se supone que las tensiones inducidas en la malla 2 por las corrientes  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_3$  determinan una resultante con polaridad positiva en el punto homólogo 2 entonces el sentido de  $\underline{I}_2$  es el indicado. Así resultan las siguientes ecuaciones

$$\text{Malla 1:} \quad \underline{U}_{f1} = \underline{I}_1 (\underline{Z}_1 + jX_{L1}) + \underline{I}_2 jX_{M12} - \underline{I}_3 jX_{M31}$$

$$\text{Malla 2:} \quad 0 = \underline{I}_1 jX_{M12} + \underline{I}_2 (\underline{Z}_2 + jX_{L2}) - \underline{I}_3 jX_{M23}$$

$$\text{Malla 3:} \quad \underline{U}_{f3} = -\underline{I}_1 jX_{M13} - \underline{I}_2 jX_{M23} + \underline{I}_3 (\underline{Z}_3 + jX_{L3})$$

El efecto de tensión inducida por  $\underline{I}_2$  (con el sentido asignado) en la malla 1 es con polaridad negativa en el punto homólogo 1 y en la malla 3 es con polaridad positiva en el punto homólogo 3.

Si las suposiciones hechas son contrarias a la realidad, la resolución de las ecuaciones del sistema anterior tendrán resultado negativo, agregando los 180° correspondientes.

Resulta muy importante tener en claro que las ecuaciones del sistema anterior son el resultado de plantear la 2° Ley de Kirchhoff y conforman un sistema de ecuaciones similar al que se obtiene aplicando el método de mallas a un circuito cualquiera que tiene tres mallas. Esta similitud luego se aprovechará para obtener un circuito equivalente conductivo en el que aparecerán corrientes sin correlación en el circuito inductivo de origen, ya que en éste no puede aplicarse la 1° Ley de Kirchhoff por no tener nodos, al no haber vinculación conductiva de ninguna de las mallas entre sí.

Este último detalle muestra la imposibilidad de aplicar formalmente el método de mallas como solución de los circuitos acoplados inductivamente.

### 7.3. Caso de acoplamiento inductivo y conductivo

El circuito de la Figura 17 muestra un caso sencillo que combina la influencia del acoplamiento inductivo mutuo, representada por  $M$ , con la conexión de dos inductores vinculados conductivamente.

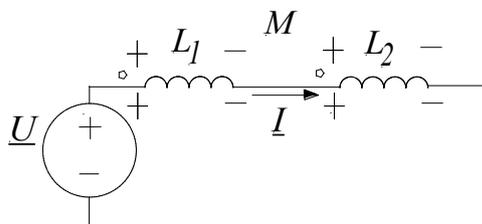


Figura 17

Siguiendo el análisis en alterna y recordando las reglas establecidas para la forma en que llega o sale la corriente de los respectivos puntos homólogos, la ecuación de malla del circuito de la Figura 17 resulta:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot (jX_{L1} + jX_{L2}) + \underline{I} \cdot jX_M + \underline{I} \cdot jX_M$$

El hecho de que  $\underline{I}$  entre por los puntos homólogos de las dos bobinas determina la suma adicional de tensiones inducidas, dadas en este caso por  $2 \cdot \underline{I} \cdot jX_M$ .

Es evidente que un cambio de posición de uno de los puntos homólogos, o sea la inversión de una de las bobinas, modifica la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot (jX_{L_1} + jX_{L_2}) - 2 \cdot \underline{I} \cdot jX_M$$

Llamando  $\underline{Z}_1$  y  $\underline{Z}_2$  a las impedancias de entrada que ofrece el circuito en sus dos variantes, la diferencia de estos dos valores dividida por  $j\omega$  resulta:

$$\underline{Z}_1 = jX_{L_1} + jX_{L_2} + 2 \cdot jX_M$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L_1} + jX_{L_2} - 2 \cdot jX_M$$

$$\frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{j\omega} = 4M$$

A partir de este último sistema de ecuaciones, se ha obtenido un método de determinación del valor de  $M$ .

Por otra parte, se puede observar que, si los bornes que contienen los puntos homólogos se conectan juntos, se consigue la menor impedancia de entrada.

## **8. Bibliografía:**

“Circuitos acoplados magnéticamente. Circuito equivalente eléctrico”. M. Deorsola.

“Circuitos en ingeniería eléctrica”. H. H. Skilling. Editorial CECSA.

“Circuitos eléctricos y magnéticos”. M. Sobrevila. Ediciones Marymar.