

---

# SISTEMAS TRIFÁSICOS

---

Realizado por : Ing. Pablo Morcelle del Valle

La generación, transmisión, distribución y consumo de grandes cantidades de energía eléctrica se logran mediante el uso de *circuitos trifásicos*.

Un generador de tensión alterna diseñado para desarrollar una tensión senoidal única se conoce como *generador monofásico*. Es posible construir generadores que incluyan en un mismo bloque constructivo varios generadores monofásicos (*generador polifásico*), el cual puede desarrollar más de una tensión senoidal con determinadas características de fase y amplitud, manteniendo la frecuencia. En particular, interesan los denominados *generadores trifásicos*, los cuales están conformados por tres fuentes alternas senoidales de la misma amplitud y cuyas fases difieren  $120^\circ$  (ó  $2/3\pi$  rad) entre sí. La aplicación de este tipo de generadores da origen a lo que se conoce como circuitos trifásicos, conformando *sistemas trifásicos*.

El análisis detallado de los sistemas trifásicos constituye un área de estudio en sí misma, por lo cual no puede esperarse un estudio completo en un único texto.

Afortunadamente, para los ingenieros que no se especializan en sistemas de potencia, basta el conocimiento del comportamiento en estado permanente senoidal de *circuitos trifásicos perfectos* (*equilibrados y simétricos*). Existen un par de razones para que estas condiciones de simetría y equilibrio sean deseables. En primer lugar, un sistema trifásico real que está funcionando en condiciones normales está tan próximo a su condición de funcionamiento equilibrado y simétrico que se justifica plantear las soluciones de un sistema perfecto. Por otra parte, si el funcionamiento del circuito no cumple las condiciones de simetría y equilibrio, el problema puede resolverse mediante una técnica conocida como *método de las componentes simétricas*, el cual se basa en un conocimiento pleno del funcionamiento simétrico y equilibrado.

A lo largo del presente texto se definen estos conceptos de equilibrio y simetría de sistemas trifásicos. Asimismo se presentan circuitos trifásicos típicos, se efectúa una introducción al análisis de este tipo de circuitos y se muestran diversas alternativas básicas que es posible encontrar en situaciones reales.

Además, se efectúa una introducción al método de las componentes simétricas para el análisis de circuitos trifásicos desequilibrados y/o asimétricos.

Finalmente se realiza el análisis de la potencia y se introduce el estudio y los fundamentos de la medición de la misma en este tipo de sistemas.

# 1 Sistemas trifásicos. Introducción

El análisis del estado permanente en circuitos de corriente alterna basa su importancia en la aplicación en sistemas de potencia. Una de las principales razones radica en que resulta económicamente factible la transmisión de grandes cantidades de energía a grandes distancias sólo si las tensiones son muy altas, lo cual resulta relativamente fácil y económico mediante el uso de transformadores. De esta forma, la tensión alterna se aumenta para la transmisión y se reduce para la distribución de energía eléctrica.

Casi toda la energía eléctrica se produce mediante fuentes trifásicas. Esto tiene varias justificaciones sobradamente fundadas, tanto desde el punto de vista técnico como económico. Se puede demostrar que en un circuito monofásico, la potencia instantánea es pulsante, aún cuando la corriente y la tensión estén en fase. Se puede hacer una analogía con un motor de combustión de varios cilindros, en el cual a mayor cantidad de cilindros, su funcionamiento es más estable, de manera que habrá menos vibración y como consecuencia adicional, habrá también menos desgaste de las piezas móviles. Por otra parte, también se puede demostrar que la cantidad de material utilizado en los conductores y componentes asociados al sistema trifásico son considerablemente menores que los necesarios para un sistema monofásico de la misma potencia, con la consiguiente ventaja económica.

Se iniciará el estudio de los sistemas trifásicos introduciendo las *fuentes trifásicas* y las *cargas trifásicas*. A continuación se estudiarán las posibles conexiones entre las fuentes y las cargas, dando lugar a los sistemas trifásicos *tetrafilares* y *trifilares*, con fuentes y cargas conectadas en *estrella* y en *triángulo*, *equilibrados* y *desequilibrados*.

Luego se presentará una introducción al estudio de sistemas trifásicos *desequilibrados* y *asimétricos* mediante la utilización del *método de las componentes simétricas*.

Finalmente se analizará la potencia en sistemas trifásicos, con una breve introducción a la medición utilizando wattímetros.

## 9.2 Fuentes trifásicas

Un estudio detallado de fuentes trifásicas debería considerar que las mismas correspondan a fuentes de tensión reales, es decir, con impedancia interna conectada en serie. A los efectos de la simplificación del estudio y para no perder la atención en cuestiones conceptuales, se trabajará con fuentes trifásicas de tensión ideales. Una vez fijados los conceptos, quedará como ejercicio para el lector incluir el efecto de dichas impedancias internas.

### 2.1 Fuente trifásica perfecta

Considérense tres fuentes de tensión senoidal de la misma amplitud, cada una desfasada de las otras un ángulo de  $120^\circ$  (ó  $2/3\pi$  rad), las cuales tienen las siguientes expresiones matemáticas:

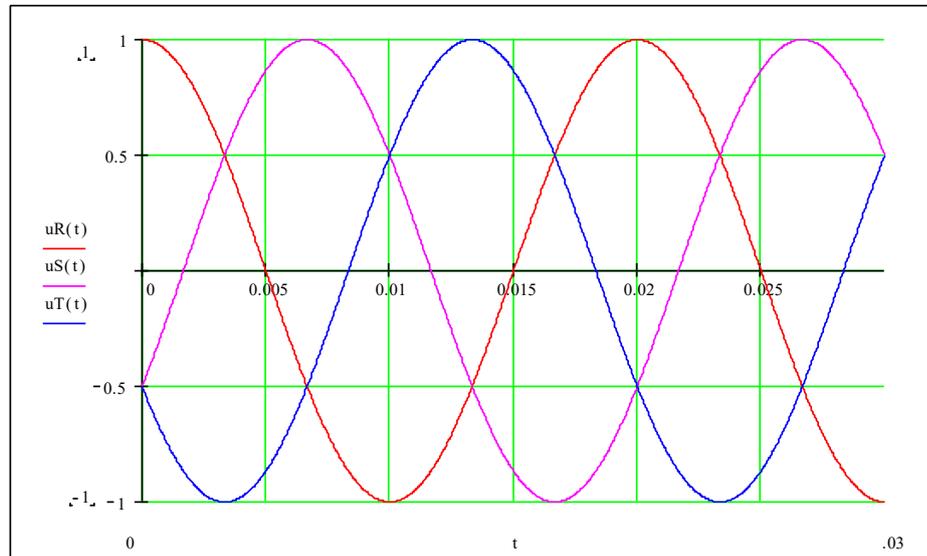
$$u_R(t) = U_{m\acute{a}x} \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Ec. 1}$$

$$u_S(t) = U_{m\acute{a}x} \text{sen}\left(\omega t - \frac{1}{6}\pi\right) \quad \text{Ec. 2}$$

$$u_T(t) = U_{m\acute{a}x} \text{sen}\left(\omega t + \frac{7}{6}\pi\right) \quad \text{Ec. 3}$$

La identificación de las tres funciones anteriores (subíndices  $R$ ,  $S$  y  $T$ ) corresponde a una nomenclatura muy utilizada y que representa lo que suele denominarse *fases* del sistema trifásico. Por lo tanto, las funciones anteriores representan las *tensiones de fase* de la fuente trifásica considerada.

La Figura 1 muestra las funciones de las Ec. 1, Ec. 2 y Ec. 3 en un gráfico dependiente del tiempo.



**Figura 1** Formas de onda de las tensiones de fase de un sistema trifásico perfecto

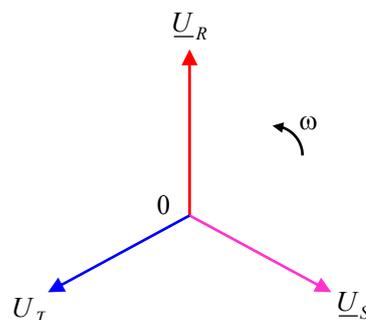
La fuente trifásica definida según las Ec. 1, Ec. 2 y Ec. 3 suele denominarse *perfecta*, dado que es *equilibrada* y *simétrica*. La condición de equilibrio surge de que, si se realiza la *suma instantánea* de las tensiones monofásicas de las tres fuentes, el resultado es *cero*. Esta condición se puede verificar observando las señales de la Figura 1 y sumando algebraicamente las tres tensiones para un instante determinado, también utilizando la notación fasorial o mediante los números complejos que representan dichas tensiones, a saber:

$$\underline{U}_R = U_{\max} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{Ec. 4}$$

$$\underline{U}_S = U_{\max} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad \text{Ec. 5}$$

$$\underline{U}_T = U_{\max} e^{j\frac{7\pi}{6}} \quad \text{Ec. 6}$$

cuya representación gráfica se muestra en la Figura 2.



**Figura 2** Representación fasorial de las tensiones de fase de un sistema trifásico perfecto

En la misma Figura 2 se puede verificar que la calificación de *simétrico* del sistema surge observando que la separación angular entre cada fasor respecto de los otros dos es la misma.

Como observación final se destaca que es posible caracterizar una fuente trifásica perfecta conociendo solamente el módulo de la tensión de una sus fuentes monofásicas componentes. En efecto, la afirmación anterior puede verificarse observando el diagrama fasorial de la Figura 2, dado que como se dijo, los módulos de las tres tensiones deben ser iguales y los ángulos entre ellas deben valer  $120^\circ$ . La caracterización completa se obtiene conociendo el tipo de conexión de las fuentes monofásicas, lo cual se explica en la sección 2.3.

## 2.2 Secuencia

La *secuencia* de un sistema trifásico indica el orden de sucesión de las fases.

Sea por caso el diagrama fasorial de la Figura 2. En el mismo se tiene una *terna* conformada por los fasores de las tres tensiones de fase de una fuente trifásica girando en sentido antihorario. Por lo tanto, un observador situado a la derecha de dicho diagrama verá pasar dichos fasores en el orden  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ , y  $\underline{U}_T$  (o *RST*) indefinidamente. A esta sucesión se la denomina por convención *secuencia directa, positiva* ó 1.

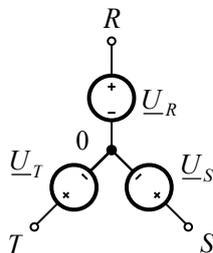
Si en cambio, el observador viese pasar los fasores en el orden  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_T$ , y  $\underline{U}_S$  (o *RTS*), esta sucesión se denomina *secuencia inversa, negativa* ó 2.

Este cambio en la secuencia podría obtenerse intercambiando dos cualquiera de los fasores de la terna o invirtiendo el sentido de giro del diagrama fasorial completo (sentido horario).

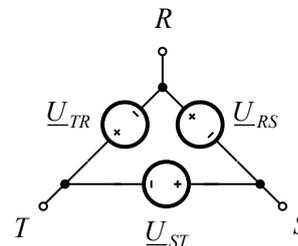
Esta definición de *secuencia* tiene implicancias muy importantes dado que, por un lado brinda la posibilidad de invertir el sentido de giro del eje de motores trifásicos, y por otro lado permite servir de base en el desarrollo de teorías como la que se presenta en la sección 9.

## 2.3 Conexiones de la fuente trifásica

Existen dos posibles conexiones de las tres fuentes que conforman un sistema trifásico: *conexión estrella* y *conexión triángulo*. Cierta bibliografía también utiliza las denominaciones  $Y$  y  $\Delta$ , respectivamente. Las Figura 3 y Figura 4 ilustran las dos posibilidades mencionadas, cuyas denominaciones resultan obvias a partir de la observación de los correspondientes circuitos.



**Figura 3** Fuente trifásica en conexión estrella o  $Y$



**Figura 4** Fuente trifásica en conexión triángulo o  $\Delta$

### 2.3.1 Conexión estrella o $Y$

En la Figura 3 se observan las tres fuentes monofásicas conectadas en estrella. En esta conexión las fuentes se unen por su borne de polaridad negativa instantánea a un punto común. Dicho punto común conforma un nodo que usualmente se identifica con un  $0$ , dado que se le asigna tensión *cero*. Es

decir que entre  $R$  y  $0$  se tendrá la tensión  $\underline{U}_R$ , entre  $S$  y  $0$  se tendrá la tensión  $\underline{U}_S$ , y entre  $T$  y  $0$  se tendrá la tensión  $\underline{U}_T$ , tal cual fueron definidas en las Ec. 4, Ec. 5 y Ec. 6.

Asimismo, en el circuito de la Figura 3 se puede observar que, mediante la aplicación de la ley de Kirchoff de tensiones es posible determinar las tensiones entre los extremos de la estrella, es decir

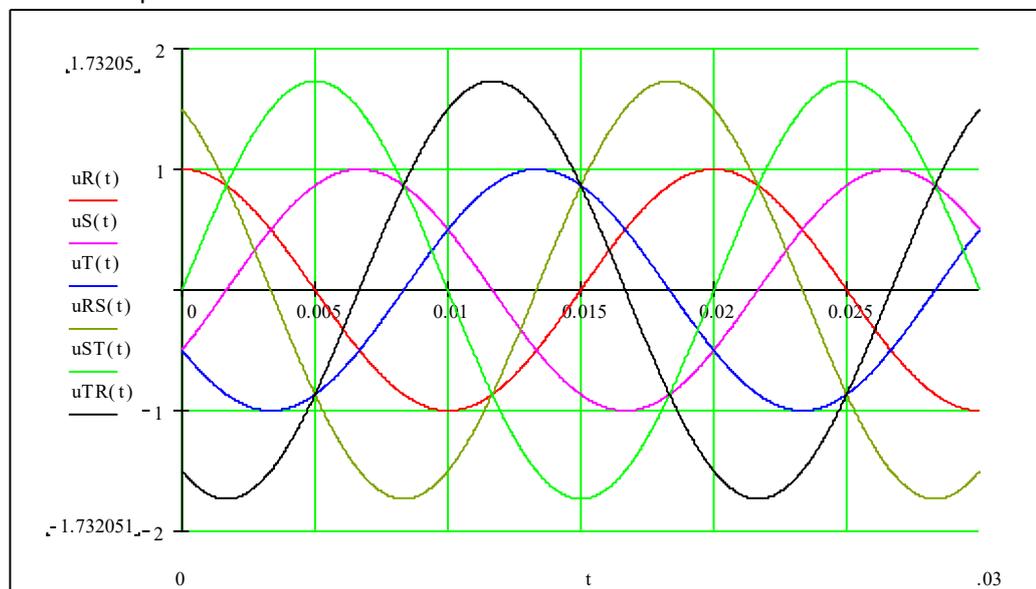
$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S \quad \text{Ec. 7}$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T \quad \text{Ec. 8}$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R \quad \text{Ec. 9}$$

Las tensiones  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ , y  $\underline{U}_T$  son las *tensiones de fase*, tal como se mencionó más arriba; mientras que  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ , y  $\underline{U}_{TR}$  suelen denominarse *tensiones de línea* para diferenciarlas de las anteriores, aunque más adelante se realizará una justificación de dicha denominación.

La Figura 5 muestra las formas de onda de las tensiones de línea y de las tensiones de fase de una fuente trifásica perfecta en conexión estrella.



**Figura 5** Formas de onda de las tensiones de fase y de línea de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella

La gráfica de la Figura 5 pone de manifiesto una vez más la conveniencia de la utilización de fasores o de números complejos para representar señales en circuitos con tensiones y corrientes senoidales.

### 2.3.2 Conexión triángulo o $\Delta$

En la Figura 6, se observa que las fuentes conectan su borne positivo con el negativo de otra de manera de formar un lazo cerrado. Dado que los vértices del triángulo se identifican con las mismas letras que los extremos de la estrella de la Figura 3, se suele establecer la denominación de las fuentes respectivas a partir de la diferencia entre las tensiones de dichos vértices, obteniéndose las expresiones de la Ec. 7, Ec. 8 y Ec. 9.

Se puede demostrar que en una fuente perfecta conectada en triángulo se cumplen las mismas condiciones que las indicadas para una fuente en estrella respecto de los módulos y los desfases. Esta demostración se deja como ejercicio para el lector.

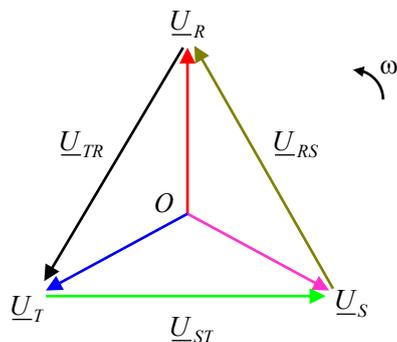
## 2.4 Equivalencia entre fuentes estrella y triángulo

De la observación de las Figura 3 y Figura 4 se puede verificar la equivalencia de las fuentes trifásicas conectadas en Y y en  $\Delta$  "vistas desde" los tres bornes accesibles  $R$ ,  $S$  y  $T$ . Es decir que es posible encontrar valores de las tensiones monofásicas de las fuentes conectadas en estrella,  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ , y  $\underline{U}_T$ , para que las tensiones  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ , y  $\underline{U}_{TR}$  sean las mismas en ambas fuentes.

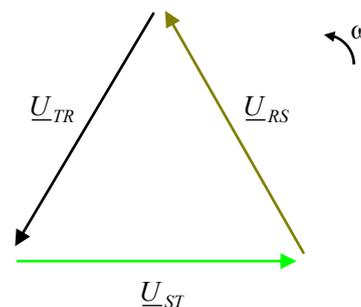
En efecto, la verificación se puede realizar mediante la Ec. 7, Ec. 8 y Ec. 9 u observando los diagramas fasoriales de las Figura 6 y Figura 7; en la primera se muestra el diagrama fasorial que incluye las tensiones de fase y de línea de la fuente trifásica en estrella, mientras que la Figura 7 muestra el diagrama fasorial de las tensiones de la fuente trifásica conectada en triángulo.

Comparando los dos fasoriales se verifica que se puede establecer una equivalencia entre ambas fuentes trifásicas si sus tensiones de línea correspondientes son iguales.

Es posible advertir una consecuencia de las dos formas de conexión. Mientras que la fuente en triángulo cuenta con tres tensiones (de línea); la fuente en estrella tiene dos juegos de tensiones, de línea y de fase. Esta característica podría constituir una ventaja en ciertas aplicaciones, como se verá más adelante.



**Figura 6** Diagrama fasorial de las tensiones de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella



**Figura 7** Diagrama fasorial de las tensiones de una fuente trifásica perfecta conectada en triángulo

Como consecuencia de esta equivalencia es posible establecer una relación práctica que permite relacionar los módulos de las tensiones de línea con los módulos de las tensiones de fase de una fuente trifásica perfecta conectada en estrella. Dicha relación se presenta en la Ec. 10.

$$\frac{U_{línea}}{U_{fase}} = \sqrt{3} \quad \text{Ec. 10}$$

Se invita al lector a demostrar la relación de la Ec. 10. Para obtener este resultado se sugiere realizar consideraciones geométricas observando la Figura 6, teniendo en cuenta que en una fuente trifásica perfecta el sistema de tensiones de línea conforma un triángulo equilátero, mientras que cada tensión del sistema de tensiones de fase corresponde a las bisectrices de los ángulos de dicho triángulo. También se puede desarrollar el cálculo de la Ec. 7, Ec. 8 y Ec. 9, para obtener el módulo de las  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ , y  $\underline{U}_{TR}$  en función de las  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$ , y  $\underline{U}_T$  o viceversa.

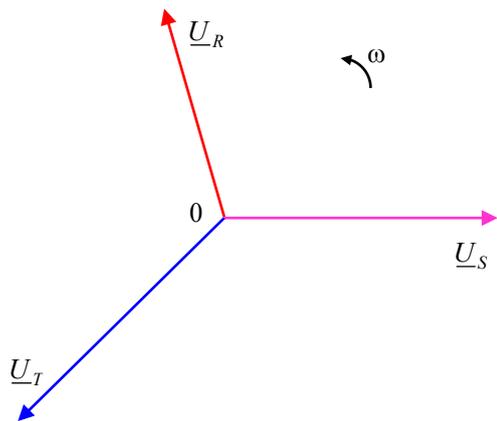
## 2.5 Fuentes trifásicas desequilibradas y asimétricas

Como ya se mencionó, los sistemas trifásicos reales no son "perfectos", pero en funcionamiento normal, permanente y estable, es posible considerarlos en dicha condición.

Hay situaciones en las cuales la condición de sistema perfecto se pierde, y esto ocurre en circunstancias particulares que habitualmente se denominan *condiciones de falla de sistemas trifásicos*. En estos casos, la fuente trifásica puede desequilibrarse notoriamente, perdiéndose eventualmente la simetría. En dichas situaciones los módulos de las tensiones pueden ser muy diferentes entre sí, así como los ángulos entre ellas. Las Figura 8 y Figura 9 muestran un par de ejemplos típicos.

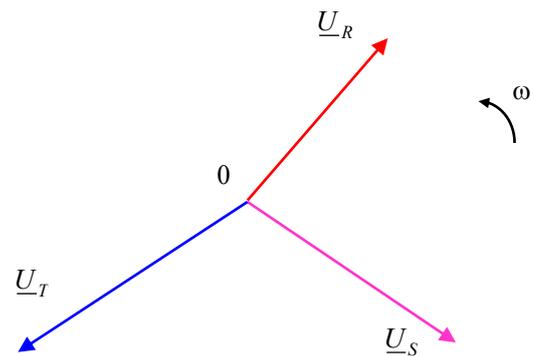
En esta situación las ventajas del análisis de sistemas perfectos se pierden y es preciso recurrir al análisis clásico mediante las leyes de Kirchhoff, el cual podría resultar muy tedioso según la complejidad del circuito.

Otro camino, que es el más utilizado en la práctica, es utilizar el *método de las componentes simétricas* ya mencionado, el cual se presenta en la sección 9.



$$|\underline{U}_R| \neq |\underline{U}_S| \neq |\underline{U}_T| \quad \underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = 0$$

**Figura 8** Fuente trifásica equilibrada asimétrica

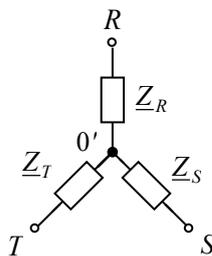


$$\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T \neq 0$$

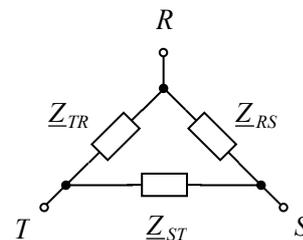
**Figura 9** Fuente trifásica desequilibrada y asimétrica

### 3 Cargas trifásicas

Así como las fuentes monofásicas se agrupan en forma de Y o  $\Delta$  para obtener fuentes trifásicas, lo mismo ocurre con las cargas. Las Figura 10 y Figura 11 muestran las dos posibles conexiones de cargas monofásicas para formar cargas trifásicas, estrella y triángulo respectivamente.



**Figura 10** Carga trifásica conectada en estrella



**Figura 11** Carga trifásica conectada en triángulo

Puede observarse en las figuras anteriores la similitud con las correspondientes fuentes, es decir que se puede hablar de *tensiones de fase* de la carga trifásica en el caso de las tensiones  $\underline{U}_{R0'}$ ,  $\underline{U}_{S0'}$ , y  $\underline{U}_{T0'}$ , y *tensiones de línea* en el caso de  $\underline{U}_{RS}$ ,  $\underline{U}_{ST}$ , y  $\underline{U}_{TR}$ .

De manera similar, las cargas trifásicas se pueden clasificar en *cargas equilibradas* y *desequilibradas*, cuyas condiciones se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1** Condiciones de las cargas equilibradas y desequilibradas

Cargas equilibradas:	Y	$ \underline{Z}_R  =  \underline{Z}_S  =  \underline{Z}_T $	y	$\theta_R = \theta_S = \theta_T$
	$\Delta$	$ \underline{Z}_{RS}  =  \underline{Z}_{ST}  =  \underline{Z}_{TR} $	y	$\theta_{RS} = \theta_{ST} = \theta_{TR}$
Cargas desequilibradas:	Y	$ \underline{Z}_R  \neq  \underline{Z}_S  \neq  \underline{Z}_T $	y/o	$\theta_R \neq \theta_S \neq \theta_T$
	$\Delta$	$ \underline{Z}_{RS}  \neq  \underline{Z}_{ST}  \neq  \underline{Z}_{TR} $	y/o	$\theta_{RS} \neq \theta_{ST} \neq \theta_{TR}$

Como se verá más adelante en este texto, es posible que en un mismo sistema trifásico se conecten cargas en estrella y en triángulo en forma simultánea. El análisis del circuito puede realizarse sin inconvenientes manteniendo las configuraciones originales de las cargas, pero también es posible convertir una carga Y en una  $\Delta$  equivalente y viceversa, según convenga; aunque debe aclararse que esta conversión no siempre es conveniente y el lector deberá tener cuidado cuando decida resolver los circuitos de esta forma.

La conversión  $Y \rightarrow \Delta$  y  $\Delta \rightarrow Y$  suele denominarse *transformación de Kennelly*<sup>1</sup> la cual se resume en los siguientes dos juegos de fórmulas; las tres primeras se utilizan para pasar de la conexión  $\Delta$  a Y, y las tres siguientes para la inversa.

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{Z}_{RS} \cdot \underline{Z}_{RT}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \quad \text{Ec. 11}$$

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{Z}_{TS} \cdot \underline{Z}_{RS}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \quad \text{Ec. 12}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{Z}_{RT} \cdot \underline{Z}_{ST}}{\underline{Z}_{RS} + \underline{Z}_{ST} + \underline{Z}_{TR}} \quad \text{Ec. 13}$$

$$\underline{Z}_{RS} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_S + \underline{Z}_S \cdot \underline{Z}_T + \underline{Z}_T \cdot \underline{Z}_R}{\underline{Z}_T} \quad \text{Ec. 14}$$

$$\underline{Z}_{ST} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_S + \underline{Z}_S \cdot \underline{Z}_T + \underline{Z}_T \cdot \underline{Z}_R}{\underline{Z}_R} \quad \text{Ec. 15}$$

$$\underline{Z}_{TR} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_S + \underline{Z}_S \cdot \underline{Z}_T + \underline{Z}_T \cdot \underline{Z}_R}{\underline{Z}_S} \quad \text{Ec. 16}$$

El lector debería poder demostrar estos resultados planteando la impedancia "vista" entre cada par de bornes de la carga considerada.

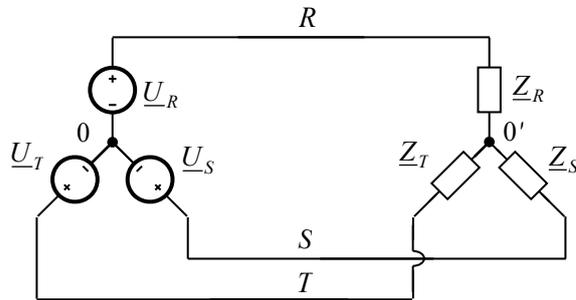
## 4 Conexión de fuentes y cargas trifásicas

Hay diversas combinaciones de conexión entre fuentes y cargas trifásicas. En este apartado se van a presentar las combinaciones más comunes y algunos casos especiales habituales.

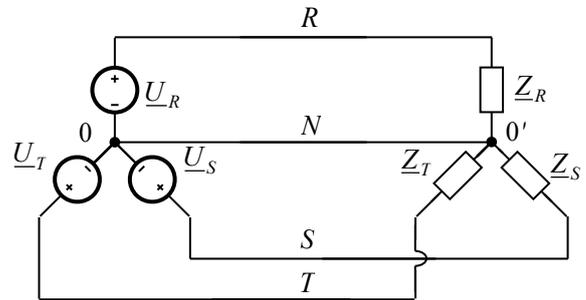
<sup>1</sup> **A.E. Kennelly**, "Equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks", *Electrical World and Engineer*, vol. 34, pp. 413-414, 1899.

#### 4.1 Fuente en estrella y carga en estrella

Las Figura 12 y Figura 13 muestran conexiones trifásicas de fuente en estrella y carga en estrella. Se observa la posibilidad de vincular fuente y carga mediante tres o cuatro conductores; respectivamente. En el primer caso se habla de circuitos *trifilares* y en el segundo, de *tetrafilares*.



**Figura 12** Conexión trifilar de fuente en estrella y carga en estrella

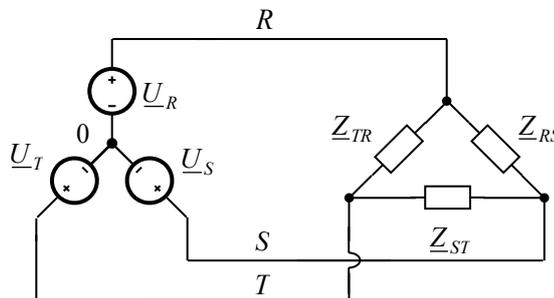


**Figura 13** Conexión tetrafilar de fuente en estrella y carga en estrella

Como se observa en la Figura 13, el circuito tetrafilar incluye un conductor que vincula los centros de estrella de la fuente y de la carga, habitualmente denominado *conductor neutro*.

#### 4.2 Fuente en estrella y carga en triángulo

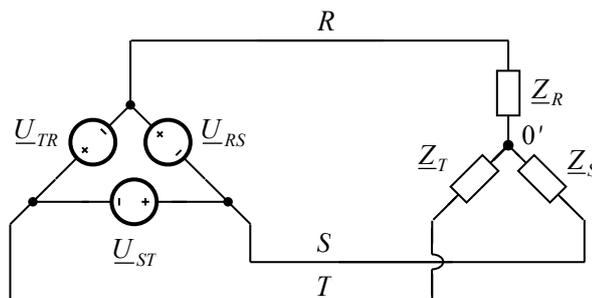
La Figura 14 muestra la conexión trifásica de fuente en estrella y carga en triángulo. Se observa como única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.



**Figura 14** Conexión de fuente en estrella y carga en triángulo

#### 4.3 Fuente en triángulo y carga en estrella

La Figura 15 muestra la conexión trifásica de fuente en triángulo y carga en estrella. Al igual que en caso anterior, se tiene como única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.



**Figura 15** Conexión de fuente en triángulo y carga en estrella

#### 4.4 Fuente en triángulo y carga en triángulo

La Figura 16 muestra la conexión trifásica de fuente en triángulo y carga en triángulo, siendo la única posibilidad la conexión trifilar entre fuente y carga.

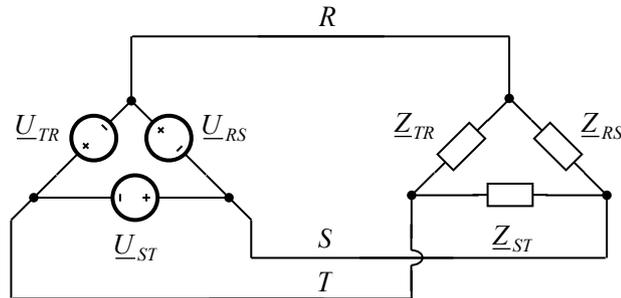


Figura 16 Conexión de fuente en triángulo y carga en triángulo

### 5 Análisis de circuitos trifásicos

Se estudia la configuración con generador y carga conectados en estrella con neutro por ser la conexión más rica en alternativas de análisis y por ser uno de los más comúnmente encontrados en sistemas de baja tensión.

Se supone que las fuentes trifásicas son perfectas, mientras que las cargas pueden ser equilibradas y/o desequilibradas.

Se considera el circuito de la Figura 17 en la cual se muestra un circuito con fuente en estrella y carga en estrella con conductor neutro.

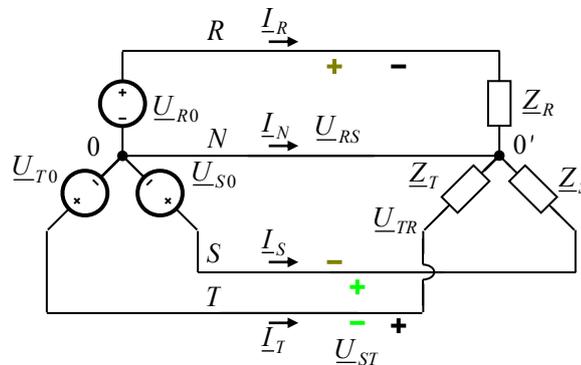


Figura 17 Carga en estrella alimentada por fuente en estrella con neutro

Para el primer caso de análisis se supone que la carga equilibrada y la impedancia del neutro y de los demás conductores valen cero.

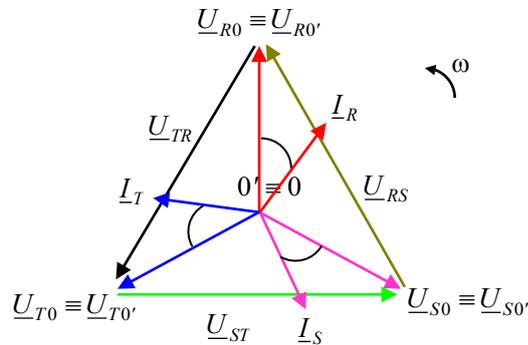
Dado que la impedancia del neutro es nula, se puede observar de la Figura 17 que la tensión de las fuentes monofásicas que representan las tensiones de fase, se encuentran conectadas en paralelo con las respectivas cargas.

Por lo tanto, al ser la fuente perfecta y la carga equilibrada, las corrientes resultantes en cada impedancia de fase tienen el mismo módulo y están separadas  $120^\circ$ . Esto significa que si se aplica la primera ley de Kirchoff en cualquiera de los centros de estrella se cumplirá la Ec 17, y la corriente del neutro valdrá cero.

$$-\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T \quad \text{Ec. 17}$$

Además  $\underline{U}_{0'0} = 0$ .

El diagrama fasorial de esta situación se muestra en la Figura 18, suponiendo que la carga tiene características inductivas.

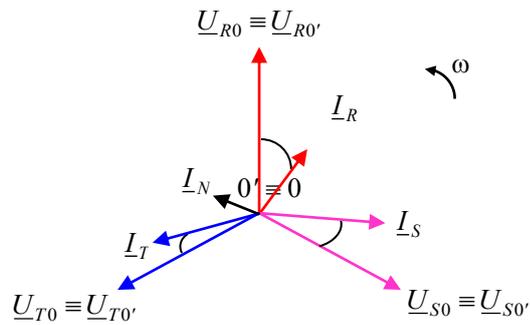


**Figura 18** Diagrama fasorial del circuito de la Figura 17 con carga equilibrada

Se puede observar en el diagrama de la Figura 18 que las tensiones de las cargas coinciden con las tensiones de las respectivas tensiones de fase de la fuente. Además, por ser la carga equilibrada, las corrientes de cada impedancia de fase tienen el mismo módulo y están desfasadas  $120^\circ$ ; lo cual puede ser verificado por el lector aplicando la ley de Ohm en cada una de dichas impedancias. Claramente se ve que efectivamente la corriente del neutro  $\underline{I}_N$  vale cero, ya que el diagrama fasorial de las corrientes es equilibrado, y la suma gráfica de  $\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_S$  e  $\underline{I}_T$  también resulta cero.

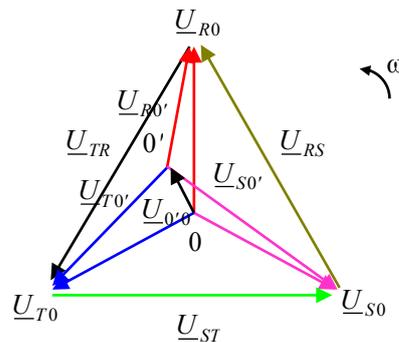
Si en estas condiciones se desconectara el conductor neutro, se puede demostrar que  $\underline{U}_{0'0}$  no sufre variaciones y sigue valiendo cero. Esta situación se mantendría incluso si la impedancia del neutro tomara valores distintos de cero. La verificación de esta situación puede ser realizada por el lector, teniendo en cuenta lo mencionado en párrafos anteriores respecto del equilibrio de las corrientes.

Si ahora en el circuito de la Figura 17 se reemplaza la carga estrella equilibrada por una nueva carga estrella pero desequilibrada, y mientras el conductor neutro se encuentre conectado, las tensiones en las impedancias tomarán los correspondientes valores de las fuentes de fase, siempre y cuando el neutro mantenga la condición de impedancia cero, dado que las cargas se encuentran conectadas en paralelo con las correspondientes fuentes de fase. La diferencia sustancial con el caso anterior es que la Ec. 17 se sigue cumpliendo pero ahora resulta que  $\underline{I}_N \neq 0$ , por lo tanto existirá una corriente *de retorno* por el neutro hacia la fuente trifásica. El diagrama fasorial de esta nueva situación es idéntico al de la Figura 18 en cuanto a las tensiones, pero las corrientes resultarán desequilibradas, como muestra la Figura 19.



**Figura 19** Diagrama fasorial del circuito de la Figura 17 con carga desequilibrada y neutro con impedancia nula.

Si en esta nueva situación de carga desequilibrada, el neutro se desconectara o su impedancia  $Z_N$  presentara un valor distinto de cero, resulta evidente que habrá una redistribución de corrientes, dado que  $I_N$  pasará a tomar un valor distinto del que tenía antes de desconectar el neutro o de producirse un cambio en su impedancia; debido a lo cual la tensión del centro de estrella de la carga muy probablemente adquiera valores diferentes de cero, es decir, ya no se podrá asegurar que  $U_{0'0} = 0$ . En esta nueva situación, el diagrama fasorial podría tomar la forma que se muestra en la Figura 20.

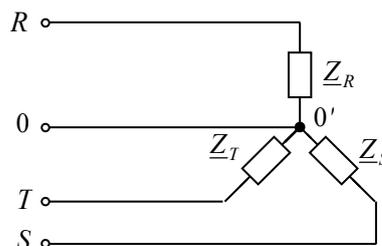


**Figura 20** Diagrama fasorial del circuito de la Figura 17 con carga desequilibrada y neutro con impedancia distinta de cero.

## 6 Esquemas simplificados

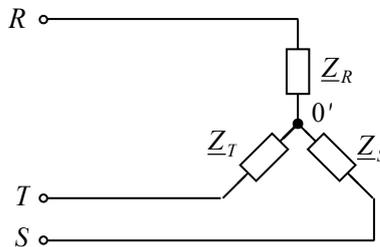
Es posible efectuar los análisis realizando esquemas simplificados, en los cuales no es necesario dibujar explícitamente la fuente trifásica.

Considerando el circuito de la Figura 21 se puede inferir que la carga está alimentada por una fuente trifásica conectada en estrella, aún cuando ésta no esté dibujada, dado que la misma se identifica por los bornes (fases  $R$ ,  $S$ ,  $T$  y neutro  $0$ ).



**Figura 21** Carga alimentada por fuente en estrella

Asimismo, la Figura 22 muestra que la identificación puede no ser tan contundente como en el caso anterior. En efecto, en este caso la fuente podría corresponder a una conexión tanto estrella como triángulo. Si fuera el primer caso, es evidente que por alguna razón se ha omitido el conductor neutro, resultando la fuente conectada sólo a través de los conductores de línea identificados por sus fases. Pero también podría corresponder a una fuente conectada en triángulo.



**Figura 22** Carga alimentada por fuente en estrella o en triángulo.

La habilidad y experiencia del analista, junto con la información disponible de la fuente trifásica son la clave para interpretar adecuadamente estos esquemas de circuito; dado que, como ya se mencionó, es posible caracterizar una fuente de tensión trifásica perfecta por el módulo de una sola de sus fuentes monofásicas y por su tipo de conexión ( $\Delta$  o  $Y$ ).

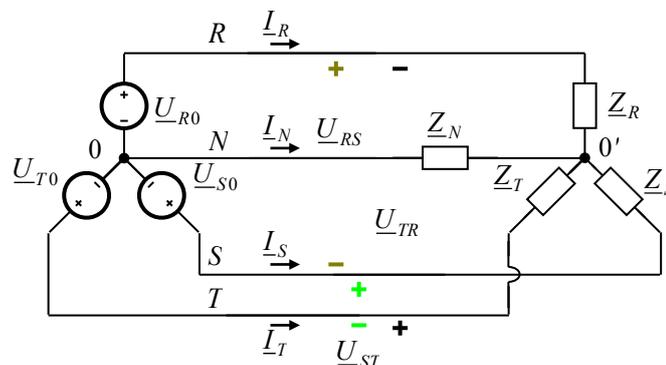
## 7 Corrimiento del neutro

El "método de corrimiento del neutro" es una herramienta simple y ágil para el análisis de circuitos trifásicos desequilibrados, con fuente y carga en estrella.

Se basa en la aplicación de la primera ley de Kirchhoff en uno de los centros de estrella, ya sea de la fuente o de la carga; de ahí que su validez se restrinja a circuitos trifásicos en conexión estrella-estrella.

La denominación "corrimiento del neutro" deriva de la observación del diagrama fasorial completo de tensiones, en el cual se puede verificar que si la tensión de uno de los centros de estrella es distinta de la tensión del otro centro de estrella, la ubicación de los mismos en el plano complejo no coincide, existiendo un "corrimiento" del punto que representa una las tensiones respecto del otro. Esto se pone de manifiesto al observar el diagrama fasorial de la Figura 20.

Para el análisis se supone un circuito trifásico similar al de la Figura 17, pero en el cual se considera que la impedancia del neutro tiene un valor  $Z_N$ , tal como muestra la Figura 23. También se considera que las impedancias de la carga no tienen por qué ser iguales (carga desequilibrada)



**Figura 23** Circuito trifásico general con generador y carga en estrella y neutro de impedancia distinta de cero

Se plantea la primera ley de Kirchhoff en cualquiera de los centros de estrella (nodos), Ec. 18.

$$\underline{I}_N + \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \quad \text{Ec. 18}$$

Cada corriente puede escribirse en términos de las relaciones Ec. 19, Ec. 20, Ec. 21 y Ec. 22 de acuerdo a la ley de Ohm.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{R0'}}{\underline{Z}_R} \quad \text{Ec. 19}$$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_{S0'}}{\underline{Z}_S} \quad \text{Ec. 20}$$

$$\underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{T0'}}{\underline{Z}_T} \quad \text{Ec. 21}$$

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{00'}}{\underline{Z}_N} \quad \text{Ec. 22}$$

Además

$$\underline{U}_0 = 0 \Rightarrow \underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{0'} \text{ o bien } \underline{U}_{00'} = -\underline{U}_{0'} \quad \text{Ec. 23}$$

Luego, reemplazando las expresiones de las corrientes en la Ec. 9-18, se puede escribir la Ec. 24.

$$\frac{\underline{U}_{R0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{S0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{T0} - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_T} + \frac{\underline{U}_0 - \underline{U}_{0'}}{\underline{Z}_N} = 0 \quad \text{Ec. 24}$$

Finalmente resulta la Ec. 25.

$$\underline{U}_{0'} = \frac{\underline{U}_{R0} \cdot \underline{Y}_R + \underline{U}_{S0} \cdot \underline{Y}_S + \underline{U}_{T0} \cdot \underline{Y}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_N} \quad \text{Ec. 25}$$

Por lo tanto, la Ec. 25 proporciona el valor de la tensión entre ambos centros de estrella en función de magnitudes que son generalmente conocidas, como son las tensiones de las fuentes monofásicas que conforman la fuente trifásica y las impedancias de la carga y del neutro.

A continuación, se efectúan algunas observaciones sobre la expresión de la Ec. 25, que justifican algunos de los análisis conceptuales efectuados en la sección 5.

Si la carga es equilibrada, puede demostrarse que  $\underline{U}_{0'} = 0$ . En efecto, el equilibrio de cargas implica que  $\underline{Y}_R = \underline{Y}_S = \underline{Y}_T = \underline{Y}$ , por lo tanto, sacando factor común  $\underline{Y}$  en el numerador de la Ec. 25 resulta

$$\underline{U}_{0'} = \frac{(\underline{U}_{R0} + \underline{U}_{S0} + \underline{U}_{T0}) \cdot \underline{Y}}{3 \cdot \underline{Y} + \underline{Y}_N} \quad \text{Ec. 26}$$

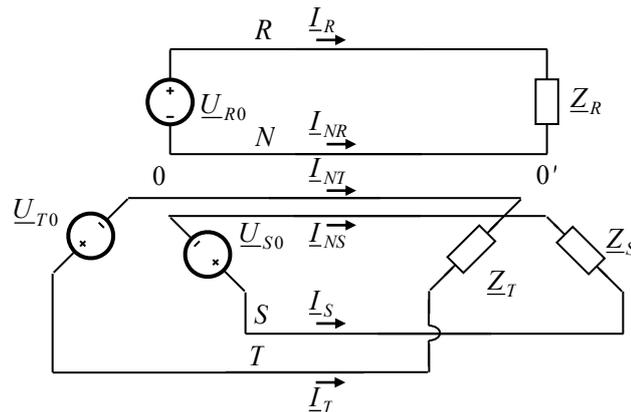
y como la fuente es perfecta, el paréntesis de la Ec. 26 es igual a cero, resultando  $\underline{U}_{0'} = 0$ .

Por otra parte, si la impedancia de neutro es nula, resulta  $\underline{Y}_N \rightarrow \infty$ , con lo cual nuevamente resulta  $\underline{U}_{0'} = 0$ , independientemente de las características de la carga (equilibrada o no).

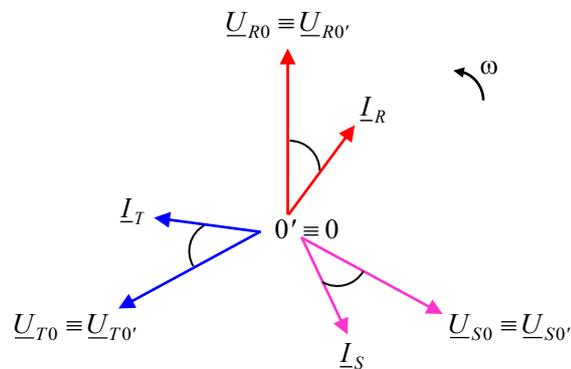
## 8 Circuito equivalente monofásico

En las condiciones de generador perfecto y carga equilibrada, conectados en estrella, pueden aprovecharse las simetrías del circuito y del diagrama fasorial de corrientes y tensiones que representan su funcionamiento para efectuar una simplificación del análisis.

En efecto, podría redibujarse el circuito de la Figura 17 y el fasorial de la Figura 18 como se muestra en la Figura 24 y Figura 25, respectivamente.



**Figura 24** Separación del circuito trifásico en estrella equilibrado en tres equivalentes monofásicos



**Figura 25** Separación del diagrama fasorial del circuito de la Figura 24 en tres diagramas monofásicos

Cada diagrama fasorial de la Figura 25 se corresponde con el circuito monofásico respectivo de la Figura 24.

Debe observarse que  $\underline{I}_{NR} = -\underline{I}_R$ ,  $\underline{I}_{NS} = -\underline{I}_S$  e  $\underline{I}_{NT} = -\underline{I}_T$ . De esta forma, la solución completa del circuito trifásico surge de la composición de los tres circuitos monofásicos, de manera que  $-\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0$ .

A partir de lo explicado es posible analizar un circuito trifásico conectado en estrella, con fuente perfecta y carga equilibrada utilizando su *equivalente monofásico*. En estas condiciones, este análisis también resulta válido si no existiese conductor neutro.

Queda como ejercicio para el lector demostrar que es posible analizar un circuito trifásico conectado en triángulo mediante su equivalente monofásico, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada.

## 9 Componentes simétricas

Como se mencionó oportunamente, si bien el análisis de circuitos trifásicos expuesto en este texto podría haberse realizado utilizando cualquiera de los métodos de análisis de circuitos conocidos, incluyendo por supuesto las leyes de Kirchhoff; realizar el estudio con las herramientas presentadas permite aprovechar las características de simetría que presenta este tipo de circuitos.

En efecto, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada, las ventajas resultan evidentes. Aún si la carga es desequilibrada, mientras la fuente sea perfecta, dichas ventajas subsisten.

Existe una forma de análisis sistemático de circuitos trifásicos que se encuentren alimentados por una fuente trifásica que no sea perfecta; es decir, que los módulos de sus tensiones sean diferentes, al igual que sus fases. Esta forma de resolución apunta a convertir la fuente desequilibrada y/o asimétrica en una combinación de fuentes simétricas y/o equilibradas. Esta metodología simplifica el análisis y además permite efectuar la resolución mediante métodos numéricos, como se verá.

Una aplicación inmediata y bien difundida de esta metodología es el estudio de circuitos trifásicos afectados por fallas (cortocircuitos), tal como se indica en alguna bibliografía específica mencionada en la sección 12.

El estudio que se propone de aquí en adelante sólo presenta los fundamentos teóricos relacionados con la metodología de análisis; las aplicaciones mencionadas en el párrafo anterior quedan fuera de los alcances de este texto.

### 9.1 Método de las componentes simétricas - Teorema de Fortescue

El método de las componentes simétricas es también conocido por diversa bibliografía como *Teorema de Fortescue*, en honor a quien lo propuso por primera vez, Charles Legeyt Fortescue. En su publicación de 1918, Fortescue desarrolló el método para un sistema  $n$ -fásico<sup>2</sup>.

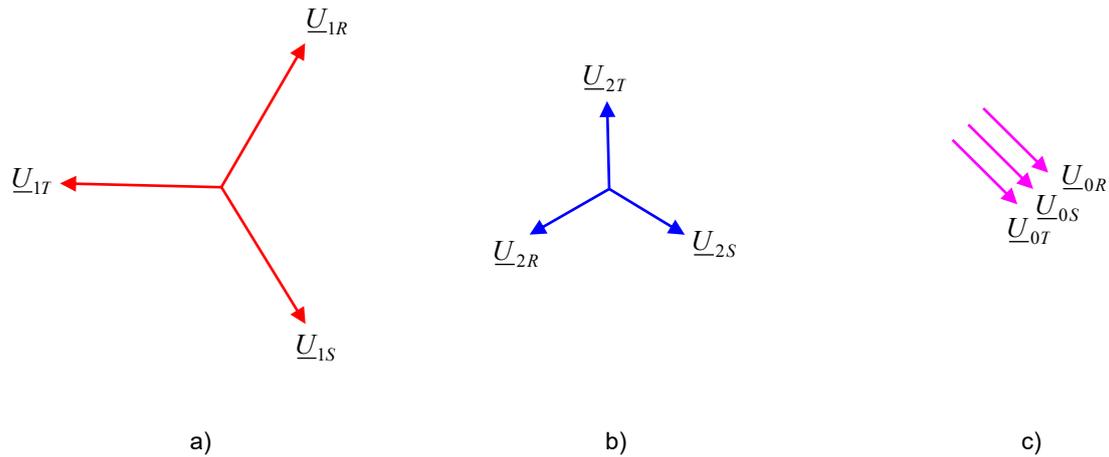
En líneas generales, una definición concisa del presente método (Teorema de Fortescue) puede expresarse de la siguiente manera:

*Cualquier sistema trifásico asimétrico y desequilibrado puede descomponerse en tres ternas simétricas, dos de ellas equilibradas de secuencia directa e inversa respectivamente, y una tercera homopolar.*

Para tener una visión adecuada de este enunciado, se considera conveniente comenzar planteando el caso inverso; es decir, suponer tres ternas o sistemas de fasores trifásicos, el primero *equilibrado y simétrico de secuencia directa*, el segundo también *equilibrado y simétrico pero de secuencia inversa*, y un tercero consistente en *tres fasores con el mismo módulo e igual fase*, denominado *homopolar* (se puede considerar que el sistema homopolar presenta cierta simetría de fase, dado que los los módulos y los ángulos de los tres fasores son respectivamente iguales). La suma de estos tres sistemas resulta en una terna trifásica desequilibrada y asimétrica. Un ejemplo de los mismos se muestra en la Figura 26.

---

<sup>2</sup> *Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks*, C. L. Fortescue. 34th Annual Convention of the American Institute of Electrical Engineers, Atlantic City, N. J., June 28, 1918.

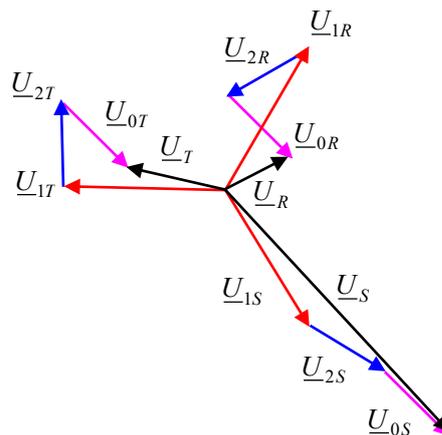


**Figura 26** Sistemas componentes de Fortescue.

a) terna de secuencia directa, b) terna de secuencia inversa, c) terna homopolar.

La terna de secuencia homopolar suele también denominarse de secuencia  $0$  (cero); la de secuencia directa,  $1$  ó *positiva*; y la de secuencia inversa,  $2$  ó *negativa*. De ahí surge la nomenclatura utilizada para identificar los fasores.

En la Figura 27 se observa el resultado de la suma de los tres sistemas de la Figura 26.



**Figura 27** Sistema resultante de la suma de los tres sistemas de la Figura 26.

Se puede verificar fácilmente que la suma resultante de la Figura 27 corresponde a un sistema trifásico desequilibrado y asimétrico.

Dado que este sistema se obtuvo a partir de la suma de los fasores correspondientes a cada una de las ternas simétricas, es de esperar que la inversa sea cierta y por lo tanto sea posible descomponer el sistema original (asimétrico y desequilibrado) en los tres sistemas simétricos planteados inicialmente.

El mérito de Fortescue fue demostrar esta afirmación a partir de herramientas simples de trigonometría.

## 9.2 Análisis y determinación de las componentes simétricas

Para llevar adelante en términos matemáticos lo explicado en la sección 9.1, el planteo analítico se inicia siguiendo la geometría de las Figura 26 y Figura 27, es decir que para obtener el fasor  $\underline{U}_R$  debe realizarse la suma de  $\underline{U}_{0R}$ ,  $\underline{U}_{1R}$  y  $\underline{U}_{2R}$ . Con el mismo razonamiento es posible obtener los fasores  $\underline{U}_S$  y  $\underline{U}_T$ , por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{aligned}\underline{U}_R &= \underline{U}_{0R} + \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{0S} + \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_{0T} + \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T}\end{aligned}\quad \text{Ec. 27}$$

Si se supone que  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$  y  $\underline{U}_T$  son datos del problema (pues corresponden a la fuente desequilibrada y asimétrica original) y los restantes elementos del sistema de ecuaciones Ec. 27 son las incógnitas; observando dicho sistema de ecuaciones pareciera que el mismo no se puede resolver, dado que se tienen más incógnitas que ecuaciones.

Dada la simetría de cada terna de Fortescue, es posible definir un operador matemático con el cual se simplifica el planteo del sistema en cuestión. Por lo tanto se define dicho operador de la siguiente forma:

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^\circ}\quad \text{Ec. 28}$$

Conceptualmente, el producto de este operador por un número complejo cualquiera provoca la rotación de  $120^\circ$  en sentido antihorario de tal número complejo.

A partir de la definición de la terna homopolar, se puede escribir

$$\underline{U}_{0R} = \underline{U}_{0S} = \underline{U}_{0T} = \underline{U}_0\quad \text{Ec. 29}$$

Tomando en cuenta la asignación siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1R} &= \underline{U}_1 \\ \underline{U}_{2R} &= \underline{U}_2\end{aligned}\quad \text{Ec. 30}$$

Además, se puede extender la asignación, teniendo en cuenta el operador  $\underline{a}$ , a los siguientes números complejos de las correspondientes ternas

$$\begin{aligned}\underline{U}_{1S} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 & \underline{U}_{1T} &= \underline{a} \cdot \underline{U}_1 \\ \underline{U}_{2S} &= \underline{a} \cdot \underline{U}_2 & \underline{U}_{2T} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2\end{aligned}\quad \text{Ec. 30}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las definiciones anteriores, es posible reescribir el sistema Ec. 27 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\underline{U}_R &= \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 + \underline{a} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_0 + \underline{a} \cdot \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2\end{aligned}\quad \text{Ec. 31}$$

Es decir que es posible escribir el sistema Ec. 27 de manera que la cantidad de incógnitas quede reducida a tres:  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_1$  y  $\underline{U}_2$ , las cuales suelen denominarse *componentes llave*. Esta denominación no es casual; teniendo en cuenta que en idioma inglés la palabra *key* significa *llave* y también *clave*. Resulta claro cómo debe entenderse: las componentes  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_1$  y  $\underline{U}_2$  son la llave (o la clave) para construir los tres sistemas o ternas simétricas que representan un sistema trifásico desequilibrado y asimétrico. Esto se puede observar claramente en el sistema Ec. 31.

Este sistema también podría escribirse en forma matricial, como se indica en Ec. 32.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 32}$$

Aplicando álgebra matricial, es posible escribir el sistema que permita obtener las incógnitas  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{U}_1$  y  $\underline{U}_2$  en función de las magnitudes conocidas  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_S$  y  $\underline{U}_T$ , de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 33}$$

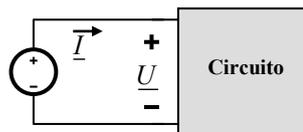
de forma que:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}, \quad [A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 34}$$

## 10 Potencia en sistemas trifásicos

### 10.1 Definiciones

Recordando la teoría relacionada con el estudio de la potencia en circuitos con tensiones y corrientes alternas monofásicos, y para el esquema de la Figura 28, es posible escribir el conjunto de expresiones Ec. 35.



**Figura 28** Esquema general para la definición de potencia en alterna.

$$\begin{aligned} P &= U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi \\ Q &= U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sen \phi \\ S^2 &= P^2 + Q^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 35}$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre  $\underline{U}$  e  $\underline{I}$ .

Los resultados de las Ec. 35 son aplicables a cualquier impedancia, con lo cual su aplicación a las diferentes impedancias individuales que conforman cualquier carga trifásica es totalmente válido.

Asimismo, una vez determinadas las  $P$  y  $Q$  de cada impedancia individual, las respectivas potencias y cargas reactivas totales del circuito trifásico se determinarán mediante la suma de las corres-

pendientes  $P$  y  $Q$  individuales. Finalmente, la carga aparente total se puede obtener vinculando las potencias y cargas reactivas totales mediante el teorema de Pitágoras.

Para el caso de un circuito conexión Y-Y de la Figura 29 se pueden escribir las Ec. 36.

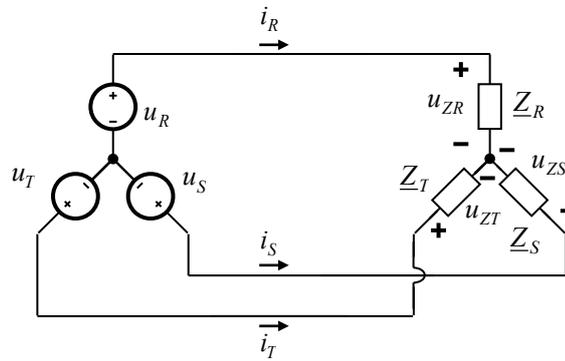


Figura 29 Circuito trifásico Y-Y.

$$\begin{aligned}
 u_{fR}(t) &= U_R \cdot \text{sen}(\omega t) & i_R(t) &= I_R \cdot \text{sen}(\omega t - \phi_R) \\
 u_{fS}(t) &= U_S \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) & i_S(t) &= I_S \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ - \phi_S) \\
 u_{fT}(t) &= U_T \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ) & i_T(t) &= I_T \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ - \phi_T)
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 36}$$

Luego, tomando las corrientes y tensiones en valor eficaz

$$\begin{aligned}
 P_R &= U_{R_{ef}} \cdot I_{R_{ef}} \cdot \cos \phi_R \\
 P_S &= U_{S_{ef}} \cdot I_{S_{ef}} \cdot \cos \phi_S \\
 P_T &= U_{T_{ef}} \cdot I_{T_{ef}} \cdot \cos \phi_T
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 37}$$

y

$$P_{Total} = P_R + P_S + P_T = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot \cos \phi_R + U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot \cos \phi_S + U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot \cos \phi_T$$

$$Q_R = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot \text{sen} \phi_R$$

$$Q_S = U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot \text{sen} \phi_S$$

$$Q_T = U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot \text{sen} \phi_T$$

Ec. 38

y

$$Q_{Total} = Q_R + Q_S + Q_T = U_{efR} \cdot I_{efR} \cdot \text{sen} \phi_R + U_{efS} \cdot I_{efS} \cdot \text{sen} \phi_S + U_{efT} \cdot I_{efT} \cdot \text{sen} \phi_T$$

Finalmente

$$S_{Total}^2 = P_{Total}^2 + Q_{Total}^2 \tag{Ec. 39}$$

Si la carga es equilibrada y la fuente es perfecta, resulta

$$\begin{aligned}
 U_{fR} &= U_{fS} = U_{fT} = U \\
 I_R &= I_S = I_T = I \\
 \phi_R &= \phi_S = \phi_T = \phi
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 40}$$

Luego las Ec. 37 y Ec. 38 se pueden reescribir

$$\begin{aligned}
 P_R &= P_S = P_T = P = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi \\
 & \text{y} \\
 P_{Total} &= 3 \cdot P = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 41}$$

$$\begin{aligned}
 Q_R &= Q_S = Q_T = Q = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sen \phi \\
 & \text{y} \\
 Q_{Total} &= 3 \cdot Q = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sen \phi
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 42}$$

Se podría haber planteado la potencia a partir de su definición mediante la Ec. 39.

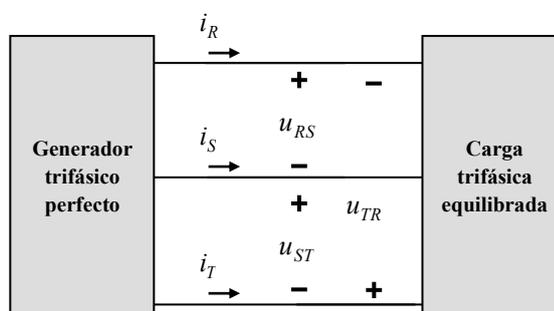
$$p(t) = i_R(t) \cdot u_{Z_R}(t) + i_S(t) \cdot u_{Z_S}(t) + i_T(t) \cdot u_{Z_T}(t)
 \tag{Ec. 43}$$

Se deja como ejercicio para el lector verificar que, si la fuente es perfecta y la carga equilibrada, la Ec. 43 resulta

$$p(t) = 3 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \phi = P_{Total}
 \tag{Ec. 44}$$

En la Ec. 44  $U_{ef}$  corresponde a la tensión de fase de la fuente o de la carga e  $I_{ef}$  a la corriente de línea, mientras que  $\phi$  es el ángulo de la carga.

Muchas veces un sistema trifásico se presenta mediante esquemas de bloques, en particular en circuitos trifásicos trifilares, como en la Figura 30. En estos casos las magnitudes accesibles son las corrientes de línea y las tensiones de línea. En particular, si el sistema es perfecto, sería posible escribir la potencia  $P$  en función de las tensiones y corrientes de línea y del ángulo de la carga utilizando la Ec. 10, resultando la Ec. 45.



**Figura 30** Esquema de un circuito trifásico trifilar.

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{efL} \cdot I_{efL} \cdot \cos\varphi \quad \text{Ec. 45}$$

Se sugiere al lector verificar la validez de la expresión de  $P$  de la Ec. 45 para todas las conexiones posibles: Y-Y, Y- $\Delta$ ,  $\Delta$ - $\Delta$  y  $\Delta$ -Y.

## 10.2 Factor de potencia trifásico

En sistemas trifásicos sigue siendo válida la definición del factor de potencia,  $FP = P/S$ , vista en el estudio de potencia en alterna, siempre y cuando el sistema posea fuente perfecta y carga equilibrada.

En efecto, en la mencionada condición de equilibrio y simetría de fuente y carga, las tensiones y corrientes en las tres impedancias son iguales entre sí y están separadas el mismo ángulo respectivamente; por lo tanto, los  $FP$  de las tres cargas son iguales y en consecuencia es posible representar la condición de la carga completa.

En caso contrario, si cada impedancia de la carga posee un diferente valor de  $FP$ , ya no es posible representar mediante un único  $FP$  al conjunto de la carga trifásica.

## 10.3 Medición de potencia

### 10.3.1 Wattímetro

Para la medición de la potencia trifásica, es necesario recordar el esquema y funcionamiento del wattímetro.

Conceptualmente, este instrumento presenta como lectura el valor de la potencia media  $\overline{p(t)} = \overline{u(t) \cdot i(t)}$  correspondiente a la tensión y la corriente aplicada sobre el instrumento según el esquema de la Figura 31 (es decir la corriente entre los terminales 1 y 2, bornes de corriente, y la tensión entre los terminales 1 y 3 ó 2 y 3, donde 3 es el borne de referencia tensión). Si la corriente y la tensión aplicadas son alternas senoidales, a partir del estudio de la potencia en estas condiciones para un circuito monofásico, el valor antes mencionado se puede expresar matemáticamente como indica la Ec. 46.

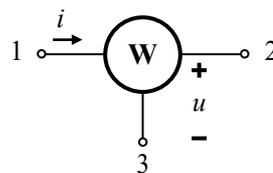


Figura 31 Esquema de un wattímetro.

$$P_W = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\phi_{ui} \quad \text{Ec. 46}$$

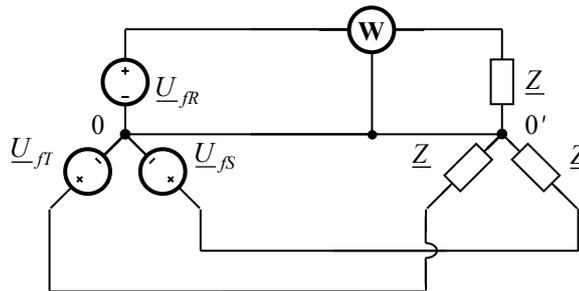
donde  $U_{ef}$  e  $I_{ef}$  son los valores eficaces de la tensión y la corriente aplicadas al wattímetro y  $\phi_{ui}$  es el coseno del ángulo entre  $u(t)$  e  $i(t)$ .

En base a lo desarrollado en la presente sección respecto del cálculo de la potencia trifásica, en los párrafos que siguen se plantea la medición de la potencia en este tipo de circuitos utilizando wattímetros.

### 10.3.2 Aplicación de un wattímetro a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga equilibrada con conductor neutro

En primera instancia se propone realizar la medición de potencia en un circuito con fuente perfecta y carga equilibrada con conductor neutro.

Se puede observar que en este caso, dado que al ser la carga trifásica equilibrada y por ende las tres impedancias iguales, la potencia en las tres fases debe ser la misma, por lo cual se propone utilizar el esquema de la Figura 32.



**Figura 32** Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga equilibrada utilizando un wattímetro.

En la Figura 32 el wattímetro mide la corriente por la línea de la fase  $R$  y la tensión entre dicha línea y el neutro, es decir, la tensión de la fase  $R$ . En consecuencia, la Ec. 46 se puede escribir como muestra la Ec. 47.

$$P_{W_R} = U_{ef_R} \cdot I_{ef_R} \cdot \cos\phi_{u_R i_R} \quad \text{Ec. 47}$$

Si los bornes de corriente del mismo wattímetro se conectaran ahora sobre la línea  $S$ , pero manteniendo el borne de referencia de tensión conectado al neutro, el resultado se muestra en la Ec. 48.

$$P_{W_S} = U_{ef_S} \cdot I_{ef_S} \cdot \cos\phi_{u_S i_S} \quad \text{Ec. 48}$$

De la misma forma sucede si el instrumento se conectara a la línea restante, Ec. 49.

$$P_{W_T} = U_{ef_T} \cdot I_{ef_T} \cdot \cos\phi_{u_T i_T} \quad \text{Ec. 49}$$

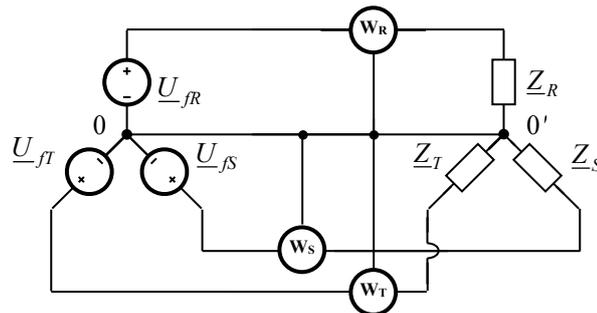
Es fácil entender por qué las tres potencias deben resultar iguales. Observando las Ec. 47, Ec. 48 y Ec. 49, se advierte que las tensiones eficaces son iguales al igual que las corrientes; de la misma forma que los desfases entre las correspondientes tensiones y corrientes también iguales, consecuencia de la simetría de la carga y de la fuente. Además, en el circuito planteado sería posible aplicar el equivalente monofásico visto en la sección 8, y de su análisis es posible llegar a dicha conclusión. Finalmente se puede escribir la Ec. 50.

$$P_{Total} = P_{W_R} + P_{W_S} + P_{W_T} = 3 \cdot P_{W_R} = 3 \cdot P_{W_S} = 3 \cdot P_{W_T} \quad \text{Ec. 50}$$

Es decir que, para un circuito trifásico con fuente perfecta, carga equilibrada y conductor neutro, es posible medir la potencia total multiplicando por 3 la lectura de un solo wattímetro con sus bornes de corriente conectados sobre una de las líneas y el borne de referencia conectado al neutro.

### 10.3.3 Aplicación de tres wattímetros a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga desequilibrada con conductor neutro

En base a lo analizado en párrafo anterior es lógico pensar que, puesto que ahora las tres impedancias de la carga se suponen distintas, conectando un wattímetro en cada línea como muestra la Figura 33, la suma de sus lecturas daría como resultado la potencia total en la carga.



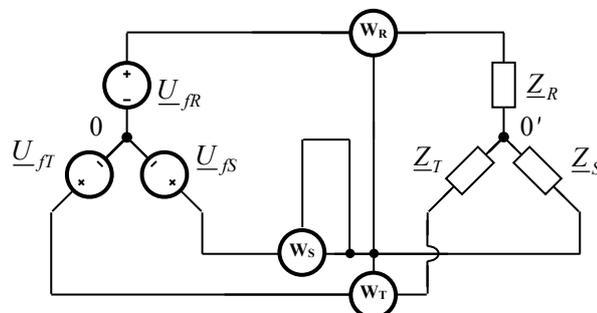
**Figura 33** Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta, carga desequilibrada y con conductor neutro utilizando tres wattímetros.

En efecto, se podrían aplicar las mismas expresiones de las Ec. 47, Ec. 48 y Ec. 49 para obtener la Ec. 51 y determinar así la potencia total  $P_{Total}$ .

$$P_{Total} = P_{W_R} + P_{W_S} + P_{W_T} \quad \text{Ec. 51}$$

### 10.3.4 Aplicación de dos wattímetros a la medición de potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta y carga desequilibrada sin conductor neutro

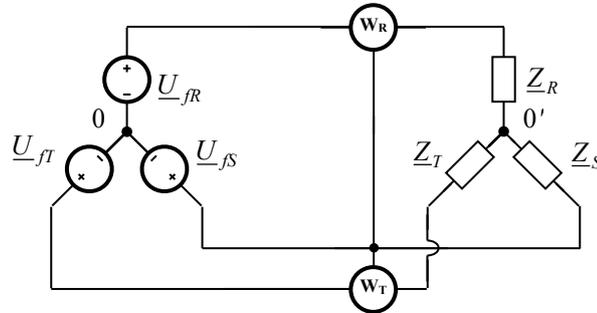
Si al circuito de Figura 33 se le retirara el neutro, es decir que el centro de estrella de la carga se encontrara aislado del centro de estrella de la fuente, el nodo común de conexión de los bornes de referencia de los wattímetros dejaría de estar asociado a un punto de tensión conocida. En estas condiciones, sería posible fijar dicho nodo a uno de los conductores de línea del circuito de manera de conseguir dicho punto de tensión conocida (Figura 34).



**Figura 34** Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta, carga desequilibrada y sin conductor neutro utilizando tres wattímetros.

Se puede observar que la tensión que mide el wattímetro  $W_T$  es cero en este caso, con lo cual, de acuerdo a la Ec. 49, su indicación también lo será; sólo restaría verificar que la potencia total, resultante de la suma de las lecturas de los wattímetros  $W_R$  y  $W_S$  corresponda a la potencia total de la carga trifásica.

Para analizar la situación planteada, la Figura 35 reproduce la Figura 34 pero sin el wattímetro  $W_T$  ya que, como se anticipó, su lectura debe ser cero dada su conexión.



**Figura 35** Medición de la potencia en un circuito trifásico con fuente perfecta, carga desequilibrada y sin conductor neutro utilizando dos wattímetros.

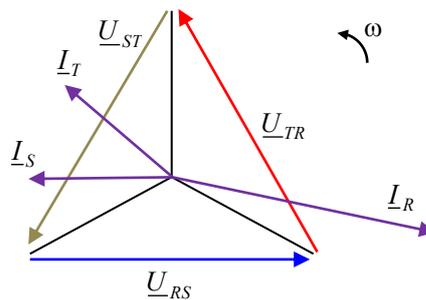
Para este análisis debe observarse qué mide cada wattímetro.

El wattímetro  $W_R$  mide la corriente de la fase  $R$  y la tensión de línea  $u_{RT}$ , mientras que el  $W_S$  mide la corriente de la fase  $S$  y la tensión de línea  $u_{ST}$ . Matemáticamente se puede escribir las potencias de cada instrumento como se indica en las Ec. 52 y Ec. 53.

$$P_{W_R} = U_{ef_{RT}} \cdot I_{ef_R} \cdot \cos\phi_{u_{RT}i_R} \quad \text{Ec. 52}$$

$$P_{W_S} = U_{ef_{ST}} \cdot I_{ef_S} \cdot \cos\phi_{u_{ST}i_S} \quad \text{Ec. 53}$$

El diagrama fasorial de la Figura 36 describe la situación para un caso genérico, en la cual se indican las hipotéticas corrientes de las tres líneas.



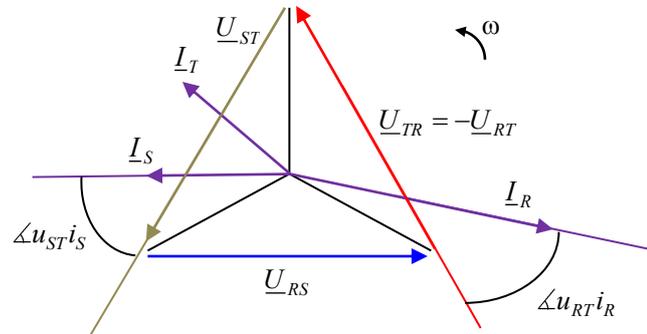
**Figura 36** Diagrama fasorial del circuito trifásico de la Figura 35 para un caso genérico.

Para la aplicación de las las Ec. 52 y Ec. 53 deben tomarse las tensiones  $U_{RT}$  y  $U_{ST}$ , las corrientes  $I_R$  e  $I_S$ , y los correspondientes ángulos. Pero, ¿cuáles son estos ángulos?

En este análisis deben tenerse en cuenta las polaridades de las tensiones y los sentidos de las corrientes que miden los wattímetros.

En la Ec. 52, la tensión  $U_{ef_{RT}}$  se obtiene a partir de  $\underline{U}_{RT}$  y esta resulta igual a  $-\underline{U}_{TR}$  del fasorial de Figura 36; mientras que  $I_{ef_R}$  surge de  $\underline{I}_R$ . Entonces el ángulo entre  $\underline{U}_{RT}$  e  $\underline{I}_R$ ,  $\phi_{u_{RT}i_R}$ , resulta el que se observa en el fasorial de la Figura 37.

El mismo análisis puede hacerse para la Ec. 53.



**Figura 37** Diagrama fasorial del circuito trifásico de la Figura 36 teniendo en cuenta las polaridades de las tensiones y los sentidos de las corrientes.

Finalmente resulta la Ec. 54, donde cada sumando corresponde a las Ec. 52 y Ec. 53.

$$P_{Total} = P_{W_R} + P_{W_S} \quad \text{Ec. 54}$$

Se propone como ejercicio para el lector demostrar la validez de la Ec. 54. Como ayuda se sugiere tener en cuenta que para el circuito sin neutro se cumple que  $i_R + i_S + i_T = 0$ , luego recordar la expresión de  $P_{Total}$  de la Ec. 51, teniendo en cuenta que  $i_T = -(i_R + i_S)$ .

### 10.3.5 Aron y Blondel

A partir de lo desarrollado en los párrafos anteriores, se puede generalizar la medición de potencia utilizando el *método de Aron*<sup>3</sup>, el cual se puede demostrar mediante el *teorema de Blondel*<sup>4</sup>, que se enuncia como sigue.

*“Para medir la potencia activa total de un sistema de N conductores basta utilizar N-1 watímetros y sumar las lecturas, cada una con su signo”.*

Debe quedar en claro que los watímetros tienen que estar correctamente conectados, lo que significa que se deben respetar las polaridades instantáneas de las tensiones y los sentidos de las corrientes en el circuito respecto de cada instrumento.

## 11 Agradecimiento

El autor desea agradecer al Ing. Augusto Cassino por la realización los dibujos de circuitos y diagramas fasoriales, y por sus comentarios que ayudaron a mejorar el contenido de este texto.

## 12 Bibliografía

"Circuitos en ingeniería eléctrica", H.H. Skilling. Compañía Editorial Continental S. A.

"Circuitos eléctricos y magnéticos. Temas especiales", E. Spinadel. Editorial Nueva Librería.

<sup>3</sup> **Hermann Aron** (Polonia), inventó el wattímetro y patentó el primer medidor de energía eléctrica en la década de 1880.

<sup>4</sup> **André Blondel** (Francia), publicó la demostración del teorema en 1893.

"Principios de electrotecnia. Principios de la teoría de los circuitos", G.V. Zeveke, P.A. Ionkin. Grupo editor de Buenos Aires.

"Circuitos eléctricos", J.W Nilsson. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.

"Análisis básico de circuitos eléctricos", D.E. Johnson, J.L. Hilburn, J.R. Johnson. Editorial Prentice Hall.

"Symmetrical Componentes", L.J. Myatt. Editorial Pergamon Press.

"Symmetrical Components for Power Systems Engineering", J.L. Blackburn. Serie Electrical Engineering and Electronics. Editorial Marcel Dekker, Inc.