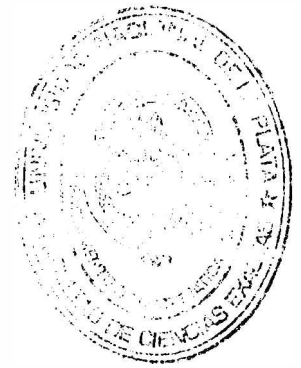


Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Dpto. de Matemáticas



Trabajo de Iniciación a la Investigación:

**TEORÍA DE INFINITESIMALES:
DESARROLLO Y APLICACIONES**

María de las Mercedes Trípoli

Director: Dr. Héctor Vucetich
Codirector: Dr. Néstor Búcarí

Julio de 2006

Agradecimientos

Compartidos¹:

A Héctor, por aceptar dirigirnos.

A Néstor, por su “*paciencia*”, su dedicación y su apoyo.

A Augusto, por estar.

A Diego Tombel, por sus *innumerables* idas y vueltas...

A la Dra. Sandra Molina, por su *ENORME* aporte y generosidad.

A los tíos Héctor y Ester, por *ese viaje memorable*...

A José Luis Castiglioni, por esa página xxx.

A Corita y el Colo, por su *lucha* por el cambio.

A Estela, la bibliotecóloga, por buscar hasta debajo de las baldosas algo que pudiera servirnos y...siempre con buena onda.

A Vero, Naty, Lore, Javier, Laura, Esteban, Alejandra y a todos aquellos que de una u otra manera nos apoyaron.

En lo personal:

A Fernanda, porque sin ella este trabajo no existiría y por ser una gran *amiga*.

A mi Papá, por quererme.

A Aldo y Ali, mis suegros, por su apoyo incondicional.

A todos (familia, amigos, conocidos), por preguntar, preocuparse, incentivar, apoyar...

Y a Fernando, mi marido, por escucharme, aguantarme, aconsejarme, apoyarme y, mas allá de este trabajo, por elegirme y hacerme feliz.

¹Con María Fernanda Bertero, quien fue parte en este trabajo.

Índice general

1. Análisis no estándar	4
1.1. Introducción	4
1.2. El conjunto de los hiperreales	9
1.2.1. Preliminares	9
1.2.2. Construcción de ${}^*\mathbb{R}$	13
1.3. Lógica formal y principio de transferencia	24
1.4. Universo extendido	28
1.4.1. Superestructuras	28
1.4.2. El lenguaje restringido $L(V(\mathbb{R}))$ y el principio de transferencia extendido	32
1.4.3. Conjuntos internos	33
1.4.4. Límite, continuidad y derivada	35
2. El problema del subespacio invariante	40
2.1. Introducción	40
2.2. Espacios de Hilbert no estándar	41
2.3. Operadores en espacios de Hilbert no estándar	44
2.4. Operadores Proyectivos	46
2.5. Demostración del teorema principal	50
A. Filtros y ultrafiltros	55
B. Algunos resultados de ${}^*\mathbb{R}$	57
C. Ideales y filtros	61

Introducción

En la historia de las matemáticas existen momentos en que los matemáticos han manejado con seguridad conceptos cuya naturaleza y propiedades básicas eran incapaces de precisar. Por ejemplo, los “números imaginarios” eran concebidos como unos conceptos ficticios en los que, sin saber cómo ni por qué, se podía “confiar”, en el sentido de que al incluirlos en los cálculos llevaban a conclusiones correctas. La razón por lo cual esto sucedía es porque es posible construir los números complejos. En algunos argumentos los físicos han derivado funciones no derivables durante mucho tiempo; la razón por la que estos cálculos con funciones misteriosas que no eran funciones no llevaban a paradojas y contradicciones es porque es posible construir unos objetos (las distribuciones) con las propiedades que los físicos postulaban implícitamente en el uso que hacían de sus “funciones”. Los números irracionales también fueron polémicos hasta que Dedekind y Cantor dieron las primeras construcciones explícitas.

Durante tres siglos, el cálculo diferencial avanzó usando ciertos “números ideales” que no era posible definir porque tenían que ser no nulos y a la vez menores que cualquier cantidad positiva.

Los matemáticos del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX no pudieron construir unos objetos que se comportaran como lo hacían los infinitésimos. En cambio introdujeron la noción de límite mostrando que los restantes conceptos del análisis podían expresarse en términos de él. Con esta nueva noción se supuso definitivo el destierro de las cantidades “infinitamente pequeñas” del ámbito de la matemática.

Sin embargo, a finales de los 60, el lógico-matemático Abraham Robinson estableció una teoría en la cual el sistema numérico real pudo ampliarse a un cuerpo ordenado -necesariamente no arquimediano- en el cual tuvieron cabida los números infinitesimales y consecuentemente sus recíprocos: los números infinitamente grandes. El logro de Robinson no fue la construcción de un objeto curioso, sino el desarrollo de una sistemática que permitió un nuevo punto de vista (llamado no-estándar) para numerosas estructuras y teorías centrales de la matemática. El intercambio entre ambos universos -el estándar y el no estándar- regulado por el llamado “principio de transferencia” permitió aplicar fructíferamente los métodos de Robinson a una variedad de campos, reobteniendo resultados conocidos con demostraciones sencillas y

más aún resolviendo problemas cuya solución se había resistido a los métodos estándar.

En este trabajo se pretenden abordar diferentes aspectos de la teoría de infinitesimales, los cuales serán desarrollados en los capítulos siguientes.

En el primer capítulo se presentan los aspectos principales de la teoría fundada por Abraham Robinson, actualizados según la evolución del tema desde sus trabajos originales de la década de 1960 hasta las versiones más recientes.

En el segundo capítulo se estudia un trabajo de investigación realizado desde el enfoque de la teoría no estándar. El autor es el mismo Robinson conjuntamente con Bernstein, quienes dan una solución al problema -hasta entonces abierto- conocido como “el problema del subespacio invariante” y que afirma la existencia de un tal subespacio (cerrado y no trivial) para un operador T lineal y acotado en un espacio de Hilbert tal que $p(T)$ sea absolutamente continuo para algún polinomio p .

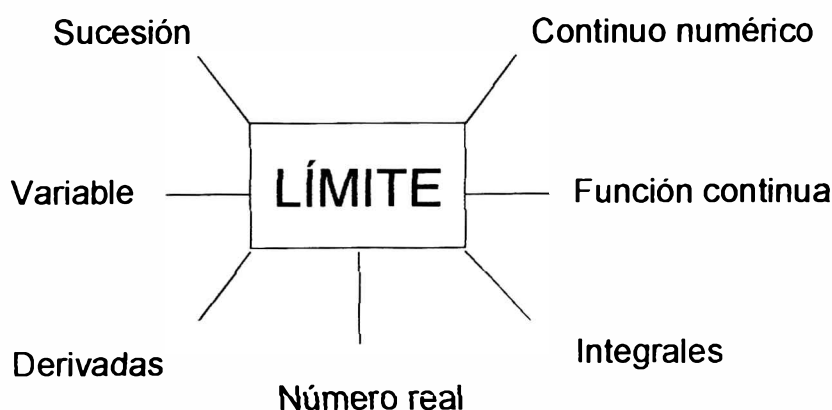
Capítulo 1

Análisis no estándar

1.1. Introducción

El concepto principal del Análisis es el de *límite*, ya que a partir de él se construye la fundamentación del cálculo diferencial e integral. De él dependen nociones tales como continuidad de una función, derivadas e integrales, suma de series infinitas, etc.

La noción de límite no se desarrolló en forma independiente y autónoma sino que es parte de una red integrada por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones vecinas al cálculo: variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo geométrico. El límite surge, como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, con el fin de darle una base sólida al cálculo infinitesimal.



Veremos en lo que sigue, con algunos ejemplos, cómo el análisis no estándar (en contraposición con el par $\epsilon - \delta$, del límite) puede resultar más

intuitivo, más manejable, y más cercano a las ideas primitivas que dieron origen al cálculo.

Supondremos la existencia de los números infinitesimales o infinitésimos ϵ (como fueron pensados en los inicios del cálculo: mayores que cero y menores que cualquier número real positivo). A partir de los infinitesimales ϵ , consideraremos los números infinitamente grandes $\omega = \frac{1}{\epsilon}$, conservando las propiedades algebraicas y de orden. Además, que si multiplicamos un infinitesimal por un número real obtenemos un infinitesimal y decir que la diferencia entre a y b es infinitamente pequeña. (es decir, su diferencia es infinitesimal) se notará $a \cong b$.

Cálculo de límites por medio de infinitesimales e infinitos.

- ¿Cómo comprobaríamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ siendo $|a| < 1$ y $|a| \not\cong 1$?

Nuestro problema se reduciría a calcular a^ω , con ω infinito.

Sea $b = 1/|a|$, $0 \neq a < 1$ y $a \not\cong 1$, así $b = 1 + c$, c finito, no infinitesimal y positivo. Como $b^\lambda > \lambda c$, entonces $0 < |a|^\lambda < 1/(\lambda c) = (1/c)(1/\lambda)$ un infinitesimal número de veces, cuando λ es infinito, así $a^\lambda \cong 0$. Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

En el análisis que usamos actualmente, procederíamos de la siguiente manera: con la teoría de los $\epsilon - \delta$, deberíamos ver que para todo número positivo ϵ , exista un número natural N , de manera que a^n permanezca menor que ϵ .

- ¿Cómo justificaríamos en análisis no estándar que el $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ no existe?

La respuesta es muy sencilla, se reduce a dos cálculos. Ya que aquí existen dos tipos de infinitos en los hipernaturales, veríamos qué ocurre para a^Ω , cuando $\Omega = 2v$ y para $\Omega = 2v + 1$, con v infinito:

$(-1)^{2v} = ((-1)^2)^v = (1)^v = 1$ y $(-1)^{2v+1} = (-1)^{2v}(-1)^1 = (1)(-1) = -1$
Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ no existe.

Continuidad de una función

Cuando hablamos de la continuidad de la función, por ejemplo $f(x) = x^2$, nos resulta natural ver, gracias seguramente a nuestro “entrenamiento”, que f es continua es $x = a$ pues:

Para todo número positivo ϵ , la diferencia $f(x) - f(a)$ es en valor absoluto menor que ϵ para toda diferencia entre x y a en valor

absoluto que permanezca menor que otro número positivo δ . En símbolos: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Sin embargo, intuitivamente diríamos que f es continua en $x = a$ pues un cambio infinitesimal en a produce un cambio infinitesimal sobre f . Si tomamos un infinitesimal ϵ , se tiene que de $x = a$ a $x = a + \epsilon$ se produce un cambio infinitesimal ϵ , y de $f(a) = a^2$ a $f(a + \epsilon) = (a + \epsilon)^2 = a^2 + 2a\epsilon + \epsilon^2 = a^2 + \epsilon(2a + \epsilon)$ se tiene un cambio, que también es infinitesimal, igual a $\epsilon(2a + \epsilon)$, como veremos más adelante.

Además, teniendo en cuenta que en el análisis no estándar contamos con números infinitos, se puede ver que $f(x) = x^2$ no es continua para estos números. Así, si ω es un número infinito, como resulta que $1/\omega$ es un infinitesimal, de $x = \omega$ a $x = \omega + 1/\omega$, tenemos un cambio infinitesimal, pero de $f(\omega) = \omega^2$ a $f(\omega + 1/\omega) = (\omega + 1/\omega)^2 = \omega^2 + 2 + 1/\omega^2$ el cambio no resulta infinitesimal pues es $2 + 1/\omega^2$.

Podemos mencionar como funciones que permanecen continuas en todo el campo hiperreal, a las lineales.

Una función que es discontinua, en $x = 0$, es la función llamada signo, la que está definida de la siguiente manera: $sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Tomamos ϵ un infinitesimal positivo, entonces $sgn(0 + \epsilon) = 1$, mientras que si tomamos $-\epsilon$, entonces $sgn(0 - \epsilon) = -1$, y así cambios infinitesimales en $x = 0$, producen cambios finitos en la función, con lo cual es discontinua en $x = 0$.

Derivabilidad de una función

Pensando en otras nociones de las mencionadas que surgen del concepto de límite, miremos cómo calculamos la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = a$.

Lo que hacemos en la actualidad es definir la derivada como el límite hacia el cual tienden los cocientes de los incrementos finitos. Si $\Delta f(a)$ es el incremento de la función en $f(a)$ y Δx el incremento de la variable independiente en $x = a$, entonces $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ es la cantidad variable $2a + \Delta x$; y tomando Δx suficientemente pequeño podemos hacer que $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ tome valores tan cercanos de $2a$ como se quiera, y así, por definición, la derivada en $x = a$ es exactamente $2a$. Para comprobar que el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = 2a$, tenemos que ver que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $|\Delta x| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - 2a \right| < \epsilon$.

En cambio, en análisis no estándar, tomamos $\epsilon \neq 0$ un infinitesimal y consideramos el cociente entre un cambio infinitesimal de la función y un

cambio infinitesimal en $x = a$, es decir:

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \frac{(a + \epsilon)^2 - a^2}{\epsilon} = 2a + \epsilon$$

Si tomamos un infinitesimal diferente a ϵ , el cociente anterior es diferente pero no se ve la diferencia a menos que lo estemos mirando por un microscopio potente. Luego, la pendiente de la recta tangente buscada será $2a$.

Cálculo de series numéricas

- Sea $x \in {}^*\mathbb{R}$ (un hiperreal) y $v, \lambda \in {}^*\mathbb{N}$ (hipernaturales), la suma *-finita (suma hiperreal) $\sum_{n=v}^{\lambda} x^n$ está definida punto a punto como $\left(\sum_{n=v}^{\lambda} x^n \right) (j) = \sum_{n=v(j)}^{\lambda(j)} x(j)^n$. Como $v, \lambda \in {}^\sigma\mathbb{N}$ (naturales estándar) la suma coincide con la ordinaria, pero λ puede ser infinito.

Cuando $|x| < 1$ y $x \neq 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ pues $\sum_{n=0}^{\Omega} x^n = (1 - x^{\Omega+1})/(1-x)$, y ya sabemos que cuando Ω es infinito $x^{\Omega} \cong 0$, así $\sum_{n=0}^{\Omega} x^n = 1/(1-x)$ para todo infinito Ω .

- La serie armónica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge pues las sumas no estándar

$\sum_{k=1}^{\Omega} 1/k$ y $\sum_{k=1}^{\omega} 1/k$ no están todas cerca del mismo número finito. Por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{2^{\omega+1}} 1/k - \sum_{k=1}^{2^{\omega}} 1/k = \sum_{k=2^{\omega}+1}^{2^{\omega+1}} 1/k = \sum_{h=1}^{2^{\omega}} 1/(2^{\omega} + h) > \sum_{h=1}^{2^{\omega}} 1/(2^{\omega+1}) = 2^{\omega}/2^{\omega+1} = 1/2$$

Naturaleza de la recta geométrica

Antes de meternos de lleno en la construcción de los números hiperreales, podemos mencionar que la teoría no estándar sostiene que la línea geométrica los puede albergar, teniendo ésta así un conjunto de puntos más rico que el de los reales estándar. Según los autores de *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics* [1] esta es la idea básica o descubrimiento de este nuevo análisis.

Considerando la recta como “soporte” de números, en la que comenzamos poniendo los naturales y terminamos con los reales, quienes ya no dejarían “huecos” en ella, se establece así una aplicación biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta. Cantor y Dedekind entendieron que los racionales constituyan la materia prima indispensable para la construcción de la totalidad del conjunto de los números reales. Dado que los racionales se podían construir rigurosamente a partir de los naturales, la dificultad provenía de los irracionales, cuya identidad numérica estaba en entredicho. La idea de Cantor y Dedekind fue formalizar y generalizar el proceso de aproximación de algunos irracionales típicos a partir de los racionales. Dedekind a partir de la cortaduras y Cantor a través de la noción de sucesión fundamental.

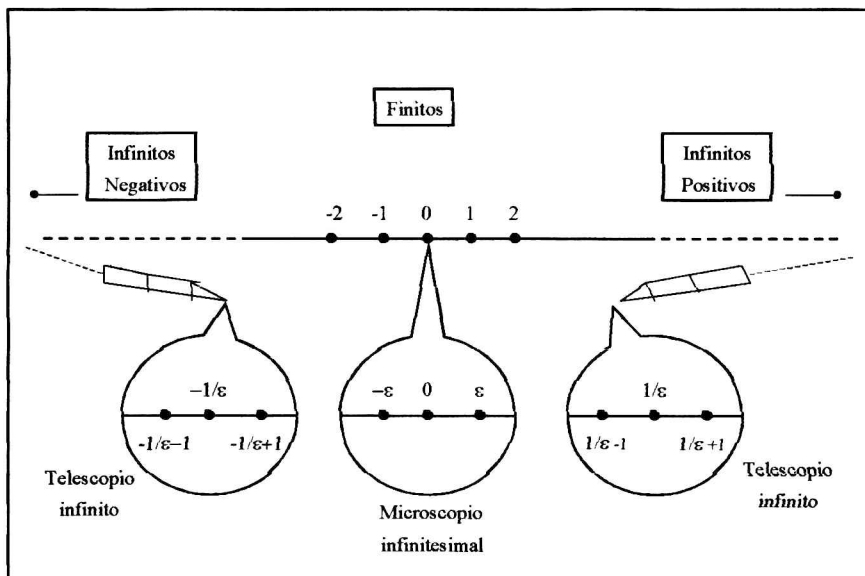
Cantor señaló que la identificación del sistema de los números con los puntos sobre la recta era una asunción que no podía ser demostrada, aunque parecía plausible y parece psicológicamente convincente. El axioma que introduce para garantizar la correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta afirma que, fijados un punto como origen y una unidad de medida, cada cantidad numérica tiene un punto determinado sobre la línea recta, cuya coordenada es igual a esa cantidad.

También Dedekind reconoce que la continuidad de la recta es necesario expresarla mediante algún axioma: "Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes".

Puede haber otras interpretaciones de la recta a partir del desarrollo de nuevas estructuras numéricas acompañadas por la elección de una axiomática adecuada.

En el análisis no estándar de Robinson, que presentaremos aquí, se trabaja con una estructura numérica (el sistema de los números hiperreales) constituida por los números reales usuales conjuntamente con los números infinitésimos e infinitos. Los números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática, elaborada por Robinson, "más amplia" que la axiomática de $\mathbb{R}$ pero compatible con ella.

La recta hiperreal contiene, además de los números reales, los infinitésimos y los infinitos. Keisler [7] representa estos números en la recta geométrica con ayuda de dos metáforas: “un microscopio infinitesimal” y “un telescopio infinito” para sugerir, respectivamente los infinitésimos y los infinitos.



Tenemos pues, que con la construcción de modelos no estándar¹, Skolem demostró algo muy profundo epistemológica y filosóficamente hablando, demostró que los modelos matemáticos no tienen naturaleza categórica y que en última instancia, elegir tal o cual teoría es cuestión de gustos, tradición, comodidad o requerimientos técnicos. Por supuesto que existen modelos oficiales que los matemáticos nos esforzamos por resguardar, eso es innegable, pero eso no significa que sean absolutos.

1.2. El conjunto de los hiperreales

1.2.1. Preliminares

Los números reales pueden ser construídos desde los racionales por varios caminos. Uno de los métodos es adicionar a $\mathbb{Q}$ nuevos puntos que representan límites de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Recordemos brevemente esta construcción: si C es el conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy², y $\equiv$ es la relación de equivalencia definida en C por: $(a_n) \equiv (b_n)$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, entonces $\mathbb{R} = C / \equiv$ (el conjunto de las clases de equivalencia de C por la relación $\equiv$). Las operaciones algebraicas de adición y multiplicación se definen componente a componente, y

¹Ver en la Sección 1.5 del Capítulo 1.

²Una sucesión de Cauchy de números racionales es una sucesión $(a_1, a_2, \dots)$ de números racionales tales que $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{Z}$: si $n, m \geq N_\epsilon$, entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$.

el orden sobre $\mathbb{R}$ poniendo $(a_n) < (b_n)$ si existe $\epsilon \in \mathbb{Q}$ tal que $a_n < b_n + \epsilon$ para todo n suficientemente grande. Por último, identificamos $\mathbb{Q}$ con un subconjunto de $\mathbb{R}$ mediante la aplicación $r \rightarrow (r, r, \dots)$, con $r \in \mathbb{Q}$, siendo $(r, r, \dots)$ la sucesión constante.

La construcción de los hiperreales que expondremos sigue el mismo esquema, adicionando a los reales, infinitesimales e infinitamente grandes por medio de sucesiones de números reales. Así como en la construcción de los reales unimos puntos que representan cierta equivalencia clásica de sucesiones convergentes, en este nuevo proceso prestaremos atención además a la rapidez de convergencia; esta distinción entre los distintos comportamientos de convergencia nos dará un conjunto de puntos más rico. [1]

Para poder hacer la construcción empezaremos dando algunas definiciones, teoremas y propiedades necesarios para tal efecto.

En nuestra exposición, consideraremos conocidas nociones básicas sobre teoría de conjuntos.

En adelante X denotará un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X .

Definición 1 Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ es un **filtro sobre X** si y sólo si:

- i. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- ii. Si $A \subseteq B \subseteq X$ y $A \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{F}$.
- iii. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definición 2 .

- Sea $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$. $[A] = \{x : x \subseteq X \text{ y } A \subseteq x\}$ es llamado **filtro principal sobre X generado por A**

- Sea X un conjunto infinito.

Entonces $\mathcal{C}_X = \{x : x \subseteq X \text{ y } X - x \text{ es finito}\}$ es llamado **filtro cofinito o filtro de Fréchet en X** También se anota $\mathcal{F}_r$.

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son dos filtros sobre X , diremos que $\mathcal{F}'$ es **más fino que $\mathcal{F}$** si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, es decir, si $(\forall E)(E \in \mathcal{F} \rightarrow E \in \mathcal{F}')$. Si además $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}'$ es **estrictamente más fino que $\mathcal{F}$** .

El conjunto de todos los filtros de X está ordenado por la relación “ $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ ”. Esta relación es la inducida por la inclusión entre subconjuntos de X . Si “ $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ ” escribiremos $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$ ³.

³Esta relación es una relación de orden ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 3 Un filtro $\mathcal{U}$ sobre X es llamado **ultrafiltro** si no existe un filtro sobre X que es estrictamente más fino que $\mathcal{U}$. Es decir, si existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Así los ultrafiltros son elementos maximales⁴ de la familia de todos los filtros ordenados por la relación $\leq$.

Teorema 4 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Entonces, siempre existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{\mathcal{H} : \mathcal{F} \leq \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \text{ es filtro sobre } X\}$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es cualquier cadena con respecto a la inclusión en $\mathcal{G}$. Mostraremos que $\cup \mathcal{C}$ es un filtro que es claramente una cota superior para esta cadena que está contenida en $\mathcal{G}$.

$\cup \mathcal{C} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \subset \cup \mathcal{C}$.

Sean $A, B \in \cup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{G}$ (pues $\mathcal{C}$ es una cadena con respecto a la inclusión en $\mathcal{G}$) tal que $A, B \in \mathcal{F}_1$. Luego $A \cap B \in \mathcal{F}_1$ pues $\mathcal{F}_1$ es un filtro. Así $A \cap B \in \cup \mathcal{C}$.

Sea $A \subset B \subset X$ y $A \in \cup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{G}$ tal que $A \in \mathcal{F}_1$. Luego $B \in \mathcal{F}_1$ ya que $\mathcal{F}_1$ es un filtro. Así $B \in \cup \mathcal{C}$.

Claramente $\emptyset \notin \cup \mathcal{C}$ pues $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Como consecuencia, $\cup \mathcal{C}$ es un filtro sobre X que contiene a $\mathcal{F}$.

Por el Lema de Zorn⁵, existe un miembro de $\mathcal{G}$ que es un maximal $\mathcal{U}$ con respecto a la inclusión.

Si $\mathcal{U}$ no es un ultrafiltro, entonces existe un filtro $\mathcal{U}_1$ que no es igual a $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}_1$. Pero entonces $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{G}$ en contradicción con la propiedad maximal para $\mathcal{U}$ con respecto a la inclusión.

Por lo tanto dado un filtro, existe un ultrafiltro que lo contiene⁶. ■

Proposición 5 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.
2. Si $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$
3. Si $A \subset X$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$

⁴ A es maximal de $\mathcal{A}$ si $\forall X \in \mathcal{A}$ tal que $A \leq X$, entonces $X = A$.

⁵ **Lema de Zorn:** Si en un conjunto ordenado A todo subconjunto de A totalmente ordenado tiene cota superior en A , entonces existe un elemento maximal en A .

$B \subset A$ está acotado superiormente o tiene cota superior si $\forall a \in B \exists b \in A / a \leq b$ (donde $\leq$ es la relación de orden del conjunto A)

⁶ La inclusión en $\mathcal{G}$ a la que se hace referencia en esta demostración es la relación que definimos anteriormente entre filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ sobre X como " $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ " si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Demostración. .

1 $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $A \notin \mathcal{F}$ y $B \notin \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{G} = \{x : (x \subseteq X) \wedge (A \cup x \in \mathcal{F})\}$. Mostraremos que $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X .

Como $X \in \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \neq \emptyset$.

Sean $x, y \in \mathcal{G}$. Entonces $A \cup x, A \cup y \in \mathcal{F}$ y $(A \cup x) \cap (A \cup y) \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro. Además $(A \cup x) \cap (A \cup y) = A \cup (x \cap y) \in \mathcal{F}$ luego $x \cap y \in \mathcal{G}$.

Sea $x \in \mathcal{G}$ y $x \subseteq y \subseteq X$. Entonces $A \cup x \subseteq A \cup y$ y $A \cup x \in \mathcal{F}$ por lo tanto $A \cup y \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un filtro. Así $y \in \mathcal{G}$.

Como $A \notin \mathcal{F}$ entonces $A \cup \emptyset \notin \mathcal{F}$, luego $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

Por consiguiente $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X .

Sea $C \in \mathcal{F}$. Como $C \subseteq A \cup C$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces $A \cup C \in \mathcal{F}$ y esto implica que $C \in \mathcal{G}$. Luego $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Como $A \cup B \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{G}$, además $B \notin \mathcal{F}$ así $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Esto contradice la definición de ultrafiltro. Luego $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

2 $\Rightarrow$ 3) Sea $A \subset X$. Entonces $X = A \cup (X - A) \in \mathcal{F}$, luego $A \in \mathcal{F}$ o $X - A \in \mathcal{F}$. Ambos no podrían estar pues sería contradictorio con la definición de filtro ya que estaría el $\emptyset = A \cap (X - A)$.

3 $\Rightarrow$ 1) Supongamos que para cada $A \subset X$, $A \in \mathcal{U}$ o $X - A \in \mathcal{U}$ no ambos. Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces $X - A \notin \mathcal{G}$, luego $X - A \notin \mathcal{F}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{F}$. Así $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$, con lo que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. En consecuencia $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. ■

Teorema 6 Sea $p \in X$. Entonces, $[p]$ es un ultrafiltro sobre X .

Teorema 7 Si $\mathcal{U}_X$ no es un ultrafiltro principal, entonces $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.

Para las demostraciones de los dos teoremas anteriores ver el apéndice A.

A los ultrafiltros que contienen a $\mathcal{C}_X$ se los llama **libres**. Se tiene, entonces, que los ultrafiltros son principales o libres.

Mencionaremos dos resultados (demostrados en el apéndice A) que nos van a permitir caracterizar los ultrafiltros libres sobre distintos conjuntos. Ellos son:

- $\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \emptyset$ y,
- $\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\nexists F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, tal que $F \in \mathcal{U}_X$.

1.2.2. Construcción de ${}^*\mathbb{R}$.

Como objeto básico para el análisis, $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado arquimediano y completo, es decir una estructura de la forma $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de elementos de la estructura (los números reales), $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias de adición y multiplicación y $\leq$ es la relación de orden. Además la estructura incluye la relación $=$, que es la igualdad o identidad entre miembros de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los número naturales y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones reales, las cuales las denotaremos $A = (A_n) = (A_1, \dots, A_n, \dots)$ con $A_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ (o equivalentemente, el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$). Se introduce la adición $\oplus$ y la multiplicación $\odot$ como sigue:

Adición: $A \oplus B = (A_n) \oplus (B_n) = (A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n, \dots)$

Multiplicación: $A \odot B = (A_n) \odot (B_n) = (A_1 \cdot B_1, \dots, A_n \cdot B_n, \dots)$

Con estas operaciones $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un anillo conmutativo con unidad $1 = \{1, 1, \dots\}$ y cero $0 = \{0, 0, \dots\}$ ⁷.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene divisores de cero, es decir $A \odot B = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo, $\{1, 0, 1, 0, \dots\}, \{0, 1, 0, 1, \dots\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ambas distintas de cero y $\{1, 0, 1, 0, \dots\} \odot \{0, 1, 0, 1, \dots\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$.

Por lo anterior podemos concluir que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no es un cuerpo.

Haremos algunas consideraciones para obtener un cuerpo totalmente ordenado a partir de las sucesiones mencionadas.

En adelante $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathbb{N}}$ será siempre un ultrafiltro libre fijo sobre $\mathbb{N}$ y U será usado para representar miembros de $\mathcal{U}$.

Definición 8 Sean $A, B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Decimos que A y B son iguales respecto a $\mathcal{U}$ si $\{n : A_n = B_n\} = U \in \mathcal{U}$ y lo denotaremos $A =_{\mathcal{U}} B$.

Se puede ver que la relación $=_{\mathcal{U}}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Así, para cada $A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el conjunto $[A] = \{B : (B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \wedge (B =_{\mathcal{U}} A)\}$ es la **clase de equivalencia** de A por la relación $=_{\mathcal{U}}$. Recordamos que el conjunto formado por las clases de equivalencia es el *conjunto cociente* de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por la relación de equivalencia $=_{\mathcal{U}}$ y se anota $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}} = \{[A] : A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$. Además las clases de equivalencia constituyen una partición en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es decir:

1. Cada clase de equivalencia es no vacía.

⁷Recordando la definición de anillo conmutativo con unidad - conjunto A dotado de dos leyes internas, la primera ley de grupo abeliano o conmutativo, y la segunda asociativa y doblemente distributiva con respecto a la primera; con unidad si tiene neutro respecto de la segunda ley y conmutativo si lo es además también respecto de la segunda - se tiene que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo es tomando la adición como primera ley y la multiplicación como segunda, donde las propiedades necesarias para esto se cumplen pues se usan las propiedades de $\mathbb{R}$

2. Para cada $A, B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ocurre una de las dos situaciones, $[A] = [B]$ o $[A] \cap [B] = \emptyset$.⁸
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \cup\{[A] : A \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Uno puede usar cualquier miembro del conjunto $[A]$ para generar la clase. Esto es, si $B, C \in [A]$, entonces $[A] = [B] = [C]$. Cuando no nos interesa quien genera la clase de equivalencia las denotaremos por letras minúsculas $a, b, c, \dots$

Definición 9 *El conjunto de los números hiperreales ${}^*\mathbb{R}$ es el de todas las clases de equivalencia de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por la relación $=_{\mathcal{U}}$, es decir, ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$.*⁹

Tenemos ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$, con $=_{\mathcal{U}}$ relación de equivalencia. Se puede ver que esta relación es compatible con las operaciones de suma y multiplicación definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ver el apéndice B). Luego, existen en el conjunto cociente ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$ dos leyes de composición internas ${}^*+$ y ${}^*\cdot$ tal que la aplicación canónica $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$ es un homomorfismo, es decir $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A) {}^*+ \varphi(B)$ y $\varphi(A \odot B) = \varphi(A) {}^*\cdot \varphi(B)$. Además las propiedades de $\oplus$ y $\odot$ se transfieren a ${}^*+$ y ${}^*\cdot$ en ${}^*\mathbb{R}$. Al transferirse las propiedades de las operaciones y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ser un anillo conmutativo con unidad, entonces ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}}$ es un anillo conmutativo con unidad. Además ${}^*\mathbb{R}$ es un cuerpo, o sea, sus elementos no nulos admiten un inverso multiplicativo: sea $a \in {}^*\mathbb{R}$,

⁸ Acá el $=$ es la igualdad entre conjuntos.

⁹ Lindstrom [5] define los hiperreales también a partir de sucesiones con valores reales pero no con ultrafiltros.

Primero considera una medida fija finitamente aditiva m sobre $\mathbb{N}$ tal que :

1. $\forall A \subset \mathbb{N}$, $m(A)$ está definida como 0 o 1.
2. $m(\mathbb{N}) = 1$ y $m(A) = 0 \forall A \subset \mathbb{N}$ finito.

Finitamente aditiva quiere decir que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

La medida m divide los subconjuntos de los naturales en dos clases, una con medida 1 y otra con medida 0.

La existencia de esta medida es una consecuencia del Lema de Zorn.

Se puede observar que para $A \subset \mathbb{N}$, $m(A) = 1$ o $m(A^c) = 1$ pero no ambos. Además, si $m(A) = 1$ y $m(B) = 1$ entonces $m(A \cap B) = 1$.

Considera una relación de equivalencia sobre el conjunto de las sucesiones de números reales como: $(A_n) \sim (B_n)$ si y sólo si $m(\{n : A_n = B_n\}) = 1$. Así define los hiperreales como el conjunto de las clases de equivalencia de las sucesiones reales sobre esta relación.

Se puede ver que existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los ultrafiltros de los naturales y el del conjunto de las medidas 0-1 valuadas finitamente aditivas sobre los naturales.

$a \neq 0$, entonces $\{n : A_n = 0_n\} \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\{n : A_n \neq 0_n\} \in \mathcal{U}$. Sea $b \in {}^*\mathbb{R} : B_n = \begin{cases} A_n^{-1} & \text{si } A_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } A_n = 0 \end{cases}$. Luego, $\{n : A_n B_n = 1_n\} = \{n : A_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$, entonces $[A \odot B] = [A] \cdot [B] = [1]$, entonces $a \cdot b = 1$.

Definición 10 Decimos que a es menor que b o que b es mayor que a , si y sólo si existen $A \in a$ y $B \in b$ tales que $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$. Esta relación la denotaremos como $^*\leq$.

La relación $^*\leq$ está bien definida. Luego, la estructura formada por ${}^*\mathbb{R}$ con su adición, multiplicación y orden, $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, ^*\leq)$, es un cuerpo totalmente ordenado (ver apéndice B).

¿Por qué la utilización de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ para definir la relación de equivalencia $=_{\mathcal{U}}$?

Como sabemos, al ser $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un anillo conmutativo con unidad, una condición necesaria y suficiente para que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{M}$ sea un cuerpo es que $\mathcal{M}$ sea un ideal maximal. Rosinger [12] muestra la estrecha relación que existe entre ideales maximales de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y ultrafiltros de $\mathbb{N}$, lo que permite ver por qué utilizamos en nuestra construcción ultrafiltros. (ver apéndice C)

¿Qué sucede si usamos para la construcción de los hiperreales un ultrafiltro de los naturales que no es libre?

Si hiciéramos esto, es decir si el ultrafiltro usado no extiende al filtro cofinito, o sea, $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ sería principal, entonces $\mathcal{U} = [n_0] = \{E \subset \mathbb{N} : n_0 \in E\}$. Y, en este caso, la construcción de ${}^*\mathbb{R}$ colapsa, en el sentido que ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{=\mathcal{U}} \simeq \mathbb{R}$. Por ejemplo, si $n_0 = 1, \{1\} \in \mathcal{U}$, entonces identificaríamos todas las sucesiones que compartan el primer elemento; así, todas las clases de equivalencia tendrán por representante alguna sucesión constante.

Comentario 11 Se dio una construcción de un modelo no estándar ${}^*\mathbb{R}$ del sistema de números reales, o más precisamente, del sistema de axiomas de la teoría de cuerpos totalmente ordenados. De las propiedades de ${}^*\mathbb{R}$ se sigue que el sistema de axiomas es incompleto en el sentido de Gödel, pues por ejemplo, $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de ser arquimediano y en ${}^*\mathbb{R}$ la negación de esta propiedad es verdadera. Así, los modelos $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son dos modelos del sistema de axiomas de cuerpos totalmente ordenados que no son isomorfos. En general, existen muchos modelos mutuamente no isomorfos de la aritmética del sistema de números reales. La construcción que se presentó de ${}^*\mathbb{R}$ recibe el nombre de ultrapotencia.[9]

¿Cuántos diferentes sistemas ${}^*\mathbb{R}$ pueden ser obtenidos eligiendo diferentes ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$? Bajo la hipótesis del continuo se puede mostrar que los sistemas ${}^*\mathbb{R}$ obtenidos son isomorfos. (En [9], pág. 20)¹⁰

Definición 12 Se define **el valor absoluto** de un elemento de ${}^*\mathbb{R}$ como sigue: si $a \in {}^*\mathbb{R}$, entonces $|a| = b$ si y sólo si $\{n : |A_n| = B_n\} \in \mathcal{U}$.

Las propiedades de valor absoluto de los números reales se verifican en los hiperreales.

Comentario 13 Como ya lo hemos mencionado ${}^*\mathbb{R}$ es no arquimediano. En efecto, consideremos la sucesión $A_n = n$. Entonces $[A] \in {}^*\mathbb{R}$. Como el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es libre, entonces no contiene conjuntos finitos. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{n : A_n \leq m\} \notin \mathcal{U}$ y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\{n : A_n > m\} \in \mathcal{U}$. Esto quiere decir que $[A] > [M] = m$. Como m es arbitrario, entonces $[A] > m = [M]$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, no se cumple la propiedad arquimediana para $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$.

Se pueden identificar los miembros de la estructura $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ con miembros de la estructura $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ donde las relaciones $+, \cdot, \leq$ puedan ser consideradas como ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq$ pero restringidas a $\mathbb{R}$. Para ello, definimos una función inyectiva ${}^*: \mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ tal que ${}^*x = [X]$, donde $X = (x, x, x, \dots)$, es decir, $X_n = x \forall n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión se llama la **sucesión constante** que representa a x en ${}^*\mathbb{R}$. Se puede considerar $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ como una subestructura de $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq \rangle$. Bajo esta identificación la $*$ puede ser suprimida de ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq$.

Definición 14 Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea ${}^*x = [X] \in {}^*\mathbb{R}$, donde $\{n : X_n = x\} = \mathbb{N}$ (la sucesión constante). Entonces para $X \subset \mathbb{R}$, sea ${}^\sigma X = \{{}^*x : x \in X\} \subset {}^*\mathbb{R}$ para $n > 1$ y para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea ${}^*x = ({}^*x_1, \dots, {}^*x_n) \in {}^*(\mathbb{R}^n)$. Para $X \subset \mathbb{R}^n$, ${}^\sigma X = \{{}^*x : x \in X\} \subset {}^*(\mathbb{R}^n)$. Tanto *x como ${}^\sigma X$ son llamados **objetos estándar** de ${}^*\mathbb{R}$ o ${}^*(\mathbb{R}^n)$. Así, ${}^\sigma \mathbb{R}$ es el conjunto identificado con los números reales.

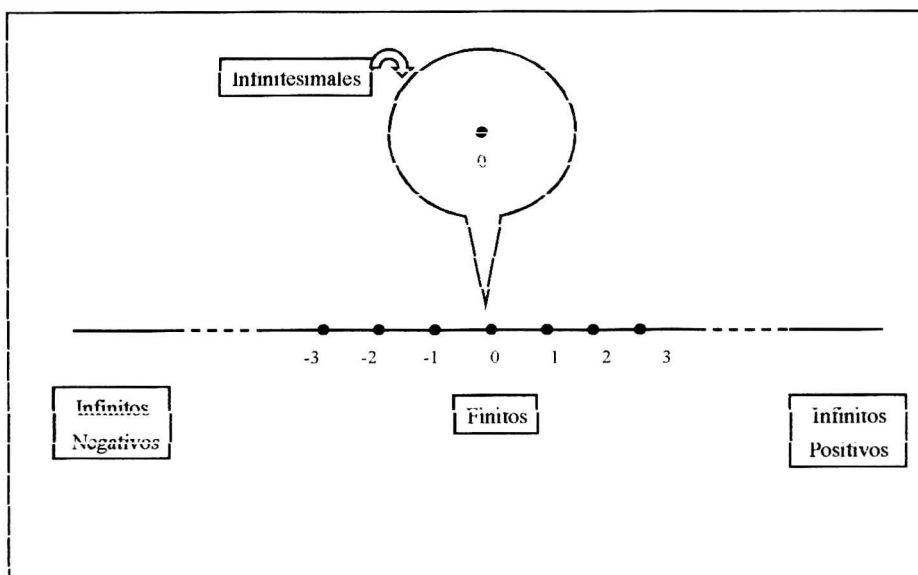
Entonces, cuando hablemos de **elemento estándar** (en ${}^*\mathbb{R}$) estamos nombrando a un miembro de $\mathbb{R}$. Cualquier otro elemento será llamado **no estándar**.

¹⁰ Más precisamente es un resultado que se sigue de: Erdős, P., Gillman and M. Henriksen. An isomorphism theorem for real-closed fields. Annals of Mathematics 61. 542-544 (1955). No es algo que demostraremos en este trabajo aunque nos parece importante mencionar el resultado.

Definición 15 .

- i. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **infinitamente grande o un número infinito o infinito** si y sólo si $|a| > {}^*x$ para todo ${}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}$.
- ii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es un **infinitesimal o infinitamente pequeño** si y sólo si $|a| < {}^*x$ para todo ${}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}^{+11}$.
- iii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **finito o limitado** si y sólo si no es infinito, es decir si $\exists {}^*x \in {}^\sigma\mathbb{R}^+$ tal que $|a| < {}^*x$.¹²

En la siguiente figura, ilustramos la línea hiperreal:



Ejemplo 16 .

1. Consideremos $A = (A_n) = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ miembro de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y sea ${}^*x = (x, x, x, \dots) \in {}^\sigma\mathbb{R}$, luego existe algún $m \in \mathbb{N} : |{}^*x| < m$; por lo tanto, $|{}^*x| = |x| < |A_m| = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\{n : A_n > |x|\} \supset$

¹¹ Tomaremos $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales sin el cero. (Y sus equivalencias)

¹² Las siguientes son formas equivalentes de las definiciones dadas:

- i. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **infinitamente grande** si y sólo si $|a| > n \ \forall n \geq 1$.
- ii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **infinitesimal** si y sólo si $|a| < 1/n \ \forall n \geq 1$.
- iii. $a \in {}^*\mathbb{R}$ es **finito** si y sólo si $\exists n \in \mathbb{N} : |a| < n$.

$\{m, m+1, \dots\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Así, $a = [A]$ es un número infinito. El número $c = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ también es un número infinito que es mayor que el anterior.

2. Como infinitesimal podemos nombrar a *0 . Sea la sucesión $B = (B_n) = (1/n)$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $B_0 = 0$. Entonces $b = [B] \neq 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe algún $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ tal que $0 < 1/m < x$. Así $^*0 < (1/m) = |B_m| < |x| = ^*x$. Como $\mathbb{N} - \{n : B_n \geq x\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, entonces $\{n : 0 < B_n < x\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ y b es así infinitesimal. El número $d = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ también es infinitesimal.
3. Las clases representadas por las sucesiones constantes son números finitos. Si $A_n = (1 + 1/n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$, entonces $a = [A]$ es finito pues $\exists ^*3 \in {}^\sigma\mathbb{R}^+ : \{n : |A_n| < 3_n\} = \{n : |1 + 1/n| < 3_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, es decir $|a| < ^*3$.

Notación 17 Al conjunto de los números finitos lo denotaremos por $G(0)$ y lo llamaremos **galaxia** de $^*\mathbb{R}$ y es donde vive ${}^\sigma\mathbb{R}$.

El conjunto de los infinitesimales será $\mu(0)$

Se puede verificar fácilmente que los conjuntos $\mu(0)$ y $G(0)$ son subanillos totalmente ordenados de $^*\mathbb{R}$ sin divisores de cero y $G(0)$ tiene identidad. De igual modo, el conjunto de infinitesimales $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$. (ver apéndice B)

A partir de estas afirmaciones podemos obtener los siguientes resultados:
Si ϵ, δ son infinitesimales y a, b son finitos, entonces:

1. $-\epsilon$ es infinitesimal y $-a$ es finito.
2. $\epsilon + \delta$ es infinitesimal, $a + \epsilon$ es finito y $a + b$ es finito.
3. $\epsilon \cdot \delta$ es infinitesimal, $a \cdot \epsilon$ es infinitesimal y $a \cdot b$ es finito.

De ahora en adelante, cuando no haya confusión usaremos x en lugar de *x .

Definición 18 Sea $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$. Entonces la **mónada de x** es el conjunto $\mu(x) = \{x + \epsilon : \epsilon \in \mu(0)\}$.

Se ve claramente que el único elemento estándar en $\mu(x)$ es x .

Podemos ver ahora, que la notación para representar al conjunto de los infinitesimales, tiene aquí su explicación, ya que cualquier infinitesimal está en la mónada del cero.

Teorema 19 Sea A_n una sucesión de números reales. Entonces, $[A] \in \mu(x)$ para todo ultrafiltro libre si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = x$.¹³

¿Qué nos permite decir el teorema anterior?

Siempre que tengamos una sucesión convergente a un cierto número x , esa sucesión va a estar en la mónada de dicho x , sea cual fuere el ultrafiltro libre que hallamos elegido al principio de la construcción.

¿Qué sucede con las sucesiones divergentes?

Si la sucesión tiende a infinito, sea positivo o negativo, la identificaremos con un número infinito; si la sucesión, en cambio, diverge por otra causa, se tendrán distintos casos que dependerán del ultrafiltro elegido. Por ejemplo: la sucesión definida como: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, se identificará con la sucesión constante 1, si los pares están en el ultrafiltro, y con un infinito, si son los impares los que están en el ultrafiltro.

Sea $\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R} - G(0)$ el conjunto de los números infinitos. Es claro que si $a, b \in \mathbb{R}_\infty$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}_\infty$. Si $0 < a \in \mathbb{R}_\infty$ y $a < b$, entonces $b \in \mathbb{R}_\infty$. De igual modo si $a < 0$ y $b < a$.

Se pueden verificar fácilmente las siguientes propiedades:

Teorema 20 i Si $b \in \mathbb{R}_\infty$, entonces $1/b \in \mu(0)$.

ii. Si $0 \neq \epsilon \in \mu(0)$, entonces $1/\epsilon \in \mathbb{R}_\infty$.

iii. Sea $\epsilon \in \mu(0)$, $b \in \mu(x)$. Entonces $\epsilon + b \in \mu(x)$ y $\epsilon \cdot b \in \mu(0)$.

iv. Si $b \in \mathbb{R}_\infty$, y ${}^*x \neq {}^*0$, entonces $b \cdot {}^*x \in \mathbb{R}_\infty$. Si $a \in G(0) - \mu(0)$, entonces $b \cdot a \in \mathbb{R}_\infty$.

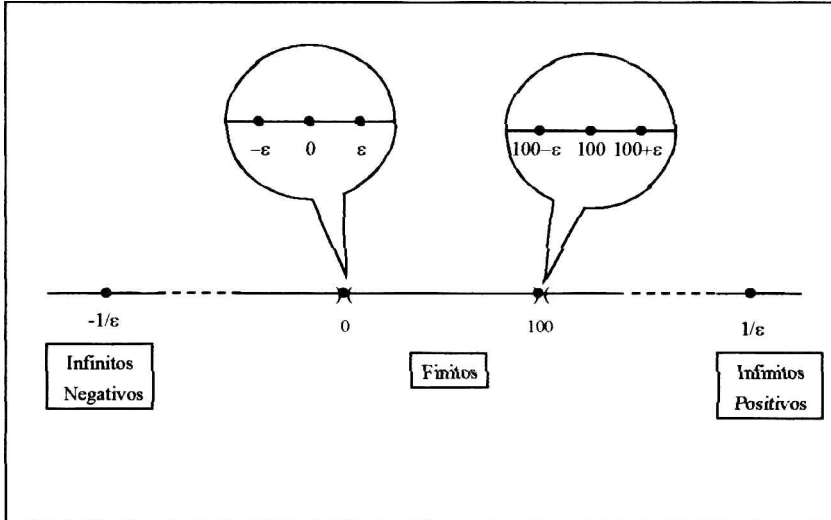
v. Si ${}^*x < {}^*y$, entonces ${}^*x + \epsilon < {}^*y + \lambda$ para cada $\epsilon, \lambda \in \mu(0)$.

Definición 21 a es *infinitamente cerrado para* b si y sólo si $a - b \in \mu(0)$. Esta relación la anotamos $a \approx b$.

La figura siguiente muestra un dibujo de la línea hiperreal como la ha representado Keisler [7]. Alrededor de cada número real c se encuentra una porción de la línea hiperreal compuesta de los números infinitamente cerrados

¹³Para la demostración de este teorema ver el apéndice B.

para c (se muestra bajo un microscopio infinitesimal para $c = 0$ y $c = 100$), es decir, los que componen la mónada de c . Las partes finita e infinita de la línea hiperreal están separadas una de otra por líneas de puntos.



Se tiene que la colección $\{\mu(x) : x \in {}^\sigma\mathbb{R}\}$ es una partición de $G(0)$:

Primero veremos que $\mu(x) \cap \mu(y) \neq \emptyset$ implica que $\mu(x) = \mu(y)$.

Supongamos que existe $a \in \mu(x) \cap \mu(y)$, entonces $a \in \mu(x)$ y $a \in \mu(y)$, entonces $a = x + \epsilon$ y $a = y + \lambda$, con $\epsilon, \lambda \in \mu(0)$ y $x, y \in {}^\sigma\mathbb{R}$. Luego, $x + \epsilon = y + \lambda$, entonces $\epsilon - \lambda = y - x$ y como $y - x \in {}^\sigma\mathbb{R}$ entonces $\epsilon - \lambda = 0$, así $y = x$. Por lo tanto, $\mu(x) = \mu(y)$.

Ahora veremos que $\cup\{\mu(x) : x \in {}^\sigma\mathbb{R}\} = G(0)$.

⊂) Sea $a \in \cup\{\mu(x) : x \in {}^\sigma\mathbb{R}\}$, entonces $a \in \mu(x)$ para algún $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$, entonces $a = x + \epsilon$, con $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mu(0)$. Luego, $|a| = |x + \epsilon| \leq |x| + |\epsilon| < |x| + 1$. Así $a \in G(0)$.

⊃) Sea $a \in G(0)$, entonces existe $x \in {}^\sigma\mathbb{R}^+ : |a| < x$. Sea $S = \{y \in {}^\sigma\mathbb{R} : y < a\}$. $S \neq \emptyset$ pues $-x \in S$. Como S está acotado superiormente tiene supremo $z \in {}^\sigma\mathbb{R}$.

Supongamos que $|z - a|$ no es infinitesimal, entonces existe $w \in {}^\sigma\mathbb{R}^+ : |z - a| > w$.

Se tiene que $z \neq a$. Luego $z < a$ ó $z > a$.

Por ser z supremo de S , no puede ocurrir que $z > a$ siendo a cota superior de S .

Si $z < a$ entonces $a - z > w$, entonces $a > w + z$, entonces $w + z \in S$ y $w + z > z$; absurdo pues z no podría ser supremo de S .

Luego, $|z - a|$ es infinitesimal, entonces $z - a = \epsilon$, entonces $a = z - \epsilon$, entonces $a \in \mu(z)$, entonces $a \in \cup\{\mu(x) : x \in {}^\sigma\mathbb{R}\}$.

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 22 Existe una función st de $G(0)$ en ${}^\sigma\mathbb{R}$ tal que, para cada $\mu(x)$, $st(\mu(x)) = {}^*x \leftrightarrow x$. La función st es llamada el **operador parte estándar**.

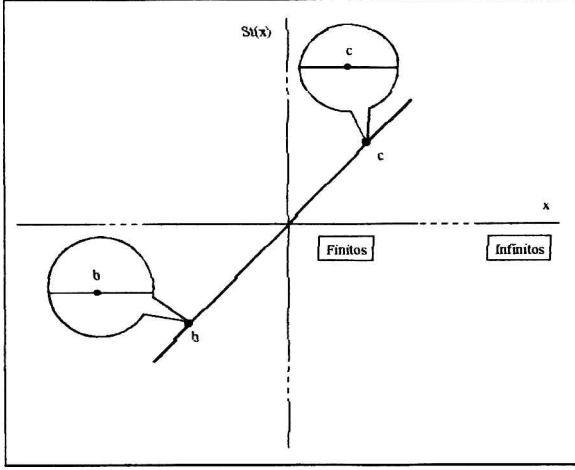
El número estándar $st(a)$ de a , será llamado **parte estándar de a**

Si $st : G(0) \rightarrow {}^\sigma\mathbb{R}$ es el operador parte estándar, entonces para cada $a, b \in G(0)$, se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

Teorema 23

- i. $st(a \pm b) = st(a) \pm st(b)$
- ii. $st(a \cdot b) = st(a) \cdot st(b)$
- iii. Si $a \leq b$, entonces $st(a) \leq st(b)$
- iv. $st(|a|) = |st(a)|$, $st(\max\{a, b\}) = \max\{st(a), st(b)\}$, $st(\min\{a, b\}) = \min\{st(a), st(b)\}$
- v. $st(a) = 0$ si y sólo si $a \in \mu(0)$
- vi. $\forall x \in {}^\sigma\mathbb{R}$, $st(x) = x$
- vii. $st(a) \geq 0$ si y sólo si $|a| \in \mu(st(a))$
- viii. $a \cong b$ si y sólo si $a - b \in \mu(0)$ si y sólo si $st(a) = st(b)$
- ix. Si $st(a) \leq st(b)$, entonces $a - b \in \mu(0)$ o $a < b$
- x. Si ${}^*0 < c$ (resp. $c < {}^*0$) y $c \in {}^*\mathbb{R}_\infty$, entonces para $a \geq {}^*0$, ${}^*0 < c + a \in {}^*\mathbb{R}_\infty$ (resp. $a \leq {}^*0$, $c + a \in {}^*\mathbb{R}_\infty$)

Podemos ver en el siguiente esquema como sería la representación del gráfico de la función u operador parte estándar st . Recordemos que el dominio son sólo los números finitos. Además, bajo un microscopio, se puede ver la imagen de una mónada que es una línea horizontal.



Definición 24 Para cada $C \subset \mathbb{R}$ (una relación 1-aria), el conjunto de todos los $b \in {}^*\mathbb{R}$ para los cuales existe un elemento $B \in b$ tal que $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$ se llama **extensión no estándar de C** y se denota por *C .

Sea ϕ una relación k -aria, es decir, $\phi \subset \mathbb{R}^k$ ($k > 1$), $(a_1, \dots, a_k) = ([A_1], \dots, [A_k]) \in {}^*\phi$ si y sólo si $\{n : (A_1(n), \dots, A_k(n)) \in \phi\} \in \mathcal{U}$. ${}^*\phi$ es llamada **extensión no estándar de ϕ** .

En particular tenemos la extensión de una función, que es una relación: Si $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, la función *F se extiende de la siguiente manera, ${}^*F(a_1, \dots, a_k) = b$ si y sólo si $\{n \in \mathbb{N} : F(A_1(n), \dots, A_k(n)) = B(n)\} \in \mathcal{U}$. $((a_1, \dots, a_k) = ([A_1], \dots, [A_k]))^{14}$

En general, se muestra que estas extensiones no estándar están bien definidas, entonces podemos agregar a nuestra estructura las relaciones adicionales n -arias ϕ_i , y conseguir las estructuras $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, \phi_i \rangle$ y $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, {}^*\phi_i \rangle$. En cuyo caso, tendríamos que $\phi \subset {}^*\phi$ pues todas estas relaciones se definen a partir de miembros de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 25 .

1. Sea $C = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, entonces $b \in {}^*C$ si y sólo si $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$. Se puede ver que ${}^*0 \notin {}^*C$ ya que $\{n : 0_n \in C\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. En cambio $b = (1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in {}^*C$ pues $\{n : 1/n \in C\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, así como los demás infinitesimales positivos. Podemos decir que se encuentran las mónadas de los $x \in {}^\sigma\mathbb{R}$ con $x \in (0, 1]$, exceptuando el 0 y los infinitesimales negativos en la mónada del cero, y en la mónada del 1 sólo tenemos los valores de la forma $1 + \epsilon$ con $\epsilon \leq 0$, infinitesimales.

¹⁴Puede verificarse que la extensión no estándar de una función es efectivamente una función.

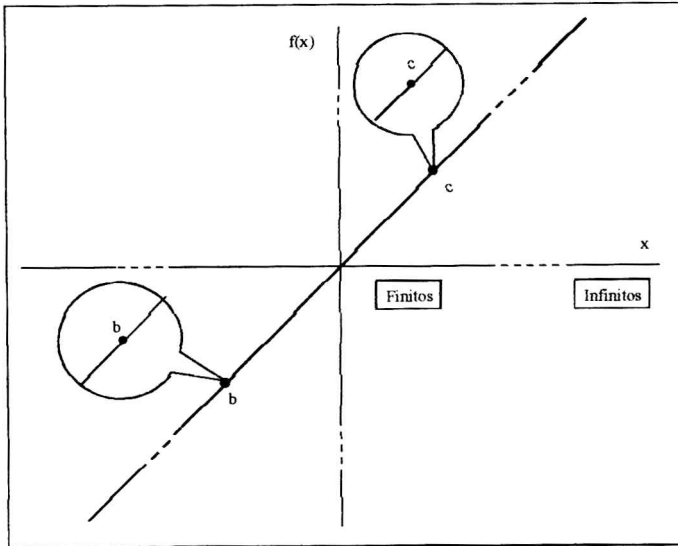
2. Si C es cualquier conjunto finito, *C no tendrá más elementos que C pues:

Sea $C = \{c_1, \dots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $b \in {}^*C$ si y sólo si $\{n : B_n \in C\} \in \mathcal{U}$.

$\{n : B_n \in C\} = \{n : B_n \in \{c_1, \dots, c_k\}\} = \{n : B_n = c_1 \vee \dots \vee B_n = c_k\} = \bigcup_{i=1}^k \{n : B_n = c_i\} \in \mathcal{U}$, entonces existe $i = 1, \dots, k$ tal que $\{n : B_n = c_i\} \in \mathcal{U}$, entonces $b = [c_i]$ para algún $i = 1, \dots, k$. Es decir, que si $b \in {}^*C$ entonces b es una sucesión constante identificada con un elemento de C .

3. Como ejemplo de extensión no estándar de una relación k -aria damos el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos una relación binaria ϕ definida por: $(x, y) \in \phi \leftrightarrow (\exists r)(r \in \mathbb{Q} \wedge x - y = r)$ que es de equivalencia. Su extensión no estándar toma la forma: $(x, y) \in {}^*\phi \leftrightarrow (\exists r)(r \in {}^*\mathbb{Q} \wedge x - y = r)$. Tendremos representantes nuevos de clases viejas como: $[(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3})]$, $[(\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n^2})]$. Y permanecen sin estar objetos tales como $[(\sqrt{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})]$.

4. Como mencionamos al ser una función un caso particular de relación, tendremos una extensión de ésta. Así, si f es la función identidad sobre los números reales, su extensión *f estará definida, y ${}^*f(x) = x$ para todo hiperreal x . En la siguiente figura mostramos el gráfico de *f .



Comentario 26 Aunque el gráfico anterior es similar con el del operador parte estándar, se pueden observar diferencias como el dominio: el de st sólo es $G(0)$ y en cambio el de *f es ${}^*\mathbb{R}$; además de lo diferente que se ven con el microscopio infinitesimal.

Un detalle importante es que st no es extensión de ninguna función estándar sino que es una función no estándar pura.

Se tienen las siguientes propiedades:

Teorema 27

- i. ${}^*\emptyset = \emptyset$
- ii. Si $X \subset \mathbb{R}$ [respectivamente $\mathbb{R}^n$], entonces ${}^\sigma X \subset {}^*\mathbb{R}$ [respectivamente ${}^*(\mathbb{R}^n)$].
- iii. Si $X \subset \mathbb{R}$, entonces ${}^*x \in {}^\sigma X$ si y sólo si $x \in X$ si y sólo si ${}^*x \in {}^*X$.
- iv Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces, $X \neq \emptyset$ y finito si y sólo si ${}^*X = {}^\sigma X$.
- v. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$, entonces $X \subset Y$ si y sólo si ${}^*X \subset {}^*Y$.
- vi. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$, entonces ${}^*(X - Y) = {}^*X - {}^*Y$.
- vii. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$, entonces ${}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y$. Además ${}^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y$.
- viii. Sea $X_1, \dots, X_n \subset \mathbb{R}$. La relación n -aria $\phi = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ si y sólo si ${}^*\phi = ({}^*X_1 \times \dots \times {}^*X_{n-1}) \times {}^*X_n$.
Se tiene que ${}^*(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times {}^*X_n = ({}^*X_1 \times \dots \times {}^*X_{n-1}) \times {}^*X_n$. Así, ${}^*(\mathbb{R}^n) = ({}^*\mathbb{R})^n$.
- ix. Las declaraciones *iii.*, *iv.*, *v.*, *vi.* y *vii.* son verdaderas para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

1.3. Lógica formal y principio de transferencia

Ya hemos visto que $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son similares en muchos aspectos; por ejemplo, ambos son cuerpos totalmente ordenados. Mostraremos ahora en qué sentido $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ son similares, es decir, especificaremos en más detalle cuáles propiedades de $\mathbb{R}$ se trasladan a ${}^*\mathbb{R}$. A este resultado se lo conoce como **Principio de Transferencia del Análisis No-estándar**.

Consideremos la estructura $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, |\cdot|, 0, 1 \rangle$, la cual está asociada a un lenguaje simple $L(\mathbb{R})$ que puede ser usado para describir el tipo de propiedades de $\mathbb{R}$ que son preservadas bajo la aplicación $*$: $\mathbb{R} \rightarrow *\mathbb{R}$.

Las fórmulas elementales de $L(\mathbb{R})$ son expresiones de la forma:

i. $t_1 + t_2 = t_3$

ii. $t_1 \cdot t_2 = t_3$

iii. $|t_1| = t_2$

iv. $t_1 = t_2$

v. $t_1 < t_2$

vi. $t_1 \in X$

donde t_1, t_2, t_3 son las constantes 0 o 1 o una variable para un número arbitrario $r \in \mathbb{R}$, y X es una variable para un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Con las fórmulas elementales generamos todas las fórmulas o expresiones de $L(\mathbb{R})$ usando los conectivos proposicionales:

$\wedge$ (conjunción),

$\vee$ (disyunción),

$\sim$ (negación),

$\rightarrow$ (implicación),

y los cuantificadores:

$\forall x$ (para todo $x \in \mathbb{R}$, cuantificador universal) y

$\exists x$ (para algún $x \in \mathbb{R}$, cuantificador existencial),

por las reglas:

vii. Si Φ y Ψ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$, entonces $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\sim \Phi$, $\Phi \rightarrow \Psi$ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

viii. Si Φ es una fórmula de $L(\mathbb{R})$ y x es una variable numérica, entonces $\forall x\Phi$ y $\exists x\Phi$ son fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

Donde fuera necesario agregaremos corchetes a las fórmulas de $L(\mathbb{R})$ para evitar confusiones.

El lenguaje $L(\mathbb{R})$ es básicamente un lenguaje de primer orden, es decir, se permite cuantificación de números pero no cuantificación de conjuntos.

El lenguaje $L(\mathbb{R})$ es potencialmente expresivo: $(x + 1) \cdot y = z$ no es una fórmula elemental en nuestro sentido; sin embargo, podemos escribir

fácilmente una fórmula de $L(\mathbb{R})$ que tome el significado de esta expresión:
 $\exists x_1[x + 1 = x_1 \wedge x_1 \cdot y = z]$.

Otro ejemplo, en el lenguaje $L(\mathbb{R})$, se pueden escribir propiedades como:

Reflexividad: $\forall x[x \leq x]$

Antisimetría: $\forall x \forall y[x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y]$

Transitividad: $\forall x \forall y \forall z[(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z]$

Totalidad: $\forall x \forall y[x \leq y \vee x = y \vee y \leq x]$

También podemos escribir en una fórmula $\Phi(X)$ que X es un conjunto abierto:

$$\Phi(X) =_{def} \forall y[y \in X \rightarrow \exists z[z > 0 \wedge \forall y_1[|y - y_1| < z \rightarrow y_1 \in X]]] \quad (1.1)$$

Una fórmula Φ de $L(\mathbb{R})$ es en general de la forma $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$, donde $x_1, \dots, x_n$ son variables numéricas libres de Φ , es decir, variables que no se encuentran afectadas por los cuantificadores $\forall$ o $\exists$, y $X_1, \dots, X_m$ variables de conjuntos libres de Φ . Cada fórmula en $L(\mathbb{R})$ tiene una interpretación inmediata en la estructura $\mathbb{R}$; por ejemplo, si $\Phi(X)$ es la fórmula 1.1 y $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\Phi(A)$ expresa el hecho que A es un abierto en $\mathbb{R}$.

Pero toda fórmula de $L(\mathbb{R})$ puede además ser interpretada en la estructura extendida ${}^*\mathbb{R}$:

- Para interpretar las declaraciones elementales mencionadas en **i.** y **ii**, usaremos las definiciones dadas de adición y multiplicación en ${}^*\mathbb{R}$.
- Para interpretar **iii**, usaremos la definición de valor absoluto.
- Para interpretar **iv.** y **v.** usaremos las definiciones de igualdad respecto al ultrafiltro y de orden, respectivamente.
- Para interpretar **vi**, usaremos la definición de extensión no estándar de un objeto estándar.

Dado que los simbolos lógicos tienen un significado fijo sobre cualquier dominio, entonces cada fórmula Φ en $L(\mathbb{R})$ tiene una interpretación en $\mathbb{R}$ y otra en ${}^*\mathbb{R}$. Volviendo a la fórmula 1.1 $\Phi(X)$; dado $A \subseteq \mathbb{R}$, ya hemos explicado que queremos decir con $\Phi(A)$. Ahora podemos interpretar también $\Phi({}^*A)$ bajo ${}^*\mathbb{R}$ como que *A es abierto en ${}^*\mathbb{R}$.

Ya podemos establecer el resultado principal acerca de las extensiones de los ultrafiltros, el cual tiene como corolario el principio general de transferencia.

Teorema 28 (Teorema de Los) Sea $\Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ una fórmula de $L(\mathbb{R})$. Entonces para cada $A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ y $a_1, \dots, a_n \in {}^*\mathbb{R}$, se tiene que $\Phi({}^*A_1, \dots, {}^*A_m, a_1, \dots, a_n)$ si y sólo si $\{k \in \mathbb{N} : \Phi(A_1, \dots, A_m, a_1(k), \dots, a_n(k))\} \in \mathcal{U}$.

Teorema 29 (Principio de Transferencia) Sea $\Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ una fórmula de $L(\mathbb{R})$. Entonces para cada $A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ y $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Phi(A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n)$ es verdadero en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\Phi({}^*A_1, \dots, {}^*A_m, {}^*r_1, \dots, {}^*r_n)$ es verdadero en ${}^*\mathbb{R}$.

Las demostraciones de los dos teoremas anteriores se pueden encontrar en Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics [1].

La existencia de la aplicación $*$: $\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ satisfaciendo el principio de transferencia es todo lo que necesitamos para el análisis no estándar elemental.

Para ver cómo usaremos el principio de transferencia, consideremos la siguiente proposición: si $\mu(r) \subseteq {}^*E$, para todo $r \in E$, entonces $E \subseteq \mathbb{R}$ es abierto. Podemos demostrarlo por dos caminos:

1. Supongamos que E no es abierto, entonces $\exists r \in E : \forall U_r$ (entorno de r), $U_r \cap E^C \neq \emptyset$. Encontraremos un elemento $x \in \mu(r) : x \notin {}^*E$: para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos $r_n \notin E : |r - r_n| < 1/n$. Sea $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(n) = r_n$. Por la definición de extensión no estándar de un objeto estándar se tiene que $a = [A] \notin {}^*E$ (pues $r_n \notin E$). Pero $a \in \mu(r)$ ya que por su construcción $|{}^*r - a| < \delta$, donde δ es el infinitesimal asociado con la sucesión $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En la prueba anterior trabajamos dentro del modelo, ahora usamos transferencia: sea $a \in E$, como $\mu(a) \subseteq {}^*E$, la declaración $\Phi(X, x) = \exists z[0 < z \wedge \forall y[|x - y| < z \rightarrow y \in X]]$ es verdadera en ${}^*\mathbb{R}$ cuando X es interpretado como *E y x como *a . Por transferencia $\Phi(E, a)$ es verdadero en $\mathbb{R}$, lo que quiere decir que algún entorno estándar de a está contenido en E , es decir, E es abierto.

Otros ejemplos en los que usaremos transferencia:

Ejemplo 30 Ya dijimos que si tenemos una función f podemos extenderla a una función *f , pero nos quedaba comprobar que realmente *f es una función, esto lo vemos usando el principio de transferencia de la siguiente manera: si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces se tiene que la declaración $\forall x \forall y \forall z (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \wedge (f(x) = y \wedge f(x) = z) \rightarrow y = z)$ es verdadera. Por

transferencia $\forall x \forall y \forall z (x \in {}^*\mathbb{R}, y \in {}^*\mathbb{R}, z \in {}^*\mathbb{R} \wedge ({}^*f(x) = y \wedge {}^*f(x) = z) \rightarrow y = z)$ también es verdadera (donde *f es la extensión de f), entonces ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ es también una función.

Ejemplo 31 Sea f una función real definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. La función f tiene un máximo absoluto sobre I si y sólo si existe un punto $s \in I$ tal que ${}^*f(x) \leq f(s) \forall x \in {}^*I$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si f tiene un máximo absoluto sobre I , entonces $\exists s \in I : f(x) \leq f(s) \forall x \in I$. Por transferencia ${}^*f(x) \leq {}^*f(s) = f(s) \forall x \in {}^*I$, con $s \in I$ como queríamos.

$\Leftarrow$) Si $\exists s \in I : {}^*f(x) \leq f(s) \forall x \in {}^*I$, en particular para $x \in I$. Entonces $f(x) \leq {}^*f(x) \leq f(s)$ y así f tiene un máximo absoluto sobre I . ■

1.4. Universo extendido

Para trabajar en análisis más general que el cálculo, necesitamos considerar sistemas matemáticos que contengan entidades correspondientes a conjuntos de conjuntos, conjuntos de espacios de funciones, etc. Por ejemplo, si queremos probar teoremas que involucren el conjunto de los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, o el conjunto de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Para ello introduciremos el concepto de superestructura.

1.4.1. Superestructuras

Partiendo de un conjunto básico X , construiremos una superestructura $V(X)$ que contiene todas las entidades encontradas normalmente en la matemática.

Además, generalizaremos la construcción de ultrapotencia y de la aplicación $*$: $X \rightarrow {}^*X$ para superestructuras, obteniendo una superestructura $V({}^*X)$ y una aplicación $*$: $V(X) \rightarrow V({}^*X)$.

Definición 32 Sea X un conjunto no vacío que contiene al menos los números naturales y sean:

$$\begin{aligned} V_0(X) &= X \\ V_{n+1}(X) &= V_n(X) \cup \mathcal{P}(V_n(X)), n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

La **superestructura sobre X** es la unión numerable $V(X) = \bigcup_n V_n(X)$.

El análisis clásico vive dentro de $V(\mathbb{R})$.

Definición 33 Los elementos de X se llaman *individuales*.

Los elementos de $V(X)$ se llaman *entidades*.

Si $x \in V(X)$, el **rango de x** es el menor n tal que $x \in V_n(X)$.

Ejemplo 34 Si $X = \mathbb{N}$.

Algunas entidades de $V_1(\mathbb{N})$ son $7, \{7\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$.

Algunas entidades de $V_2(\mathbb{N})$ son $7, \{7\}, \{\{7\}\}, \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}, \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$.

Comentario 35 Si $X \subseteq Y$ entonces $V(X) \subseteq V(Y)$.

$$X = V_0(X) \subseteq V_1(X) \subseteq \dots \subseteq V(X)$$

$$X = V_0(X) \in V_1(X) \in \dots \in V(X)$$

$$X = V_0(X), V_1(X), \dots \in V(X)$$

Proposición 36 .

1. El conjunto vacío es una entidad es decir, $\emptyset \in V(X)$
2. $\forall A \subseteq V(X), A \in V(X)$ si y sólo si $A \subseteq V_n(X)$, para algún $n \in \mathbb{N}$.
3. Si A es una entidad pero no es un individual, entonces es un subconjunto de $V(X)$. Es decir si $A \in V(X) - X$ entonces $A \subseteq V(X)$.
4. $V(X)$ es transitivo en el siguiente sentido: si A es una entidad y $a \in A$, entonces a es una entidad. Es decir, si $A \in V(X)$ y $a \in A$, entonces $a \in V(X)$.
5. Si A es una entidad y $B \subseteq A$ entonces B es una entidad. Es decir, si $A \in V(X)$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in V(X)$.
6. Si A es una entidad $\mathcal{P}(A)$ es una entidad.
7. $a_1, \dots, a_m \in V_n(X)$ entonces $\{a_1, \dots, a_m\} \in V_{n+1}(X)$.
8. Si $A_i \in V_n(X) - X$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in V_n(X)$.
9. $A \in V_{n+1}(X), A \cap X = \emptyset$ entonces $\bigcup_{B \in A} B \in V_n(X)$.

Comentario 37 Se tiene que $A \subseteq V(X)$ no implica que $A \in V(X)$. Por ejemplo: si $a \in X$, entonces $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \dots\} \subseteq V(X)$ y $A \notin V(X)$, pues $A \in V(X)$ si $A \in V_n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

El universo extendido de análisis no estándar será obtenido postulando una extensión ${}^*\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}$ y una aplicación $*$: $V(\mathbb{R}) \rightarrow V({}^*\mathbb{R})$ que tendrá propiedades similares a la aplicación $*$: $\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ construída anteriormente.

Extenderemos la construcción de ultrapotencia para demostrar que la aplicación entre superestructuras $*$: $V(\mathbb{R}) \rightarrow V({}^*\mathbb{R})$ satisface un principio de transferencia análogo al dado para la estructura ${}^*\mathbb{R}$.

Haremos esta construcción en dos partes: primero construiremos una ultrapotencia acotada de $V(\mathbb{R})$ usando un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ (similar a lo hecho para ${}^*\mathbb{R}$). Luego aplicaremos la ultrapotencia acotada sobre la superestructura $V({}^*\mathbb{R})$ de tal manera que la aplicación $*$: $V(\mathbb{R}) \rightarrow V({}^*\mathbb{R})$ obedezca el principio de transferencia.

1) Construcción de la ultrapotencia acotada:

Definición 38 Una *sucesión* $(A_1, A_2, \dots)$ de elementos de $V(\mathbb{R})$ es *acotada* si existe un $n \in \mathbb{N}$ fijo tal que $A_i \in V_n(\mathbb{R}) \forall i \in I, I$ un conjunto infinito de índices.¹⁵

Definición 39 Dos sucesiones A y B son *equivalentes con respecto al ultrafiltro libre* $\mathcal{U}$ si y sólo si $\{i \in \mathbb{N} : A_i = B_i\} \in \mathcal{U}$, lo anotamos $A =_{\mathcal{U}} B$.

Es claro que la relación definida anteriormente es una relación de equivalencia entre elementos de $V(\mathbb{R})$.

Notación 40 Anotamos $A_{\mathcal{U}}$ a la clase de equivalencia de A , es decir $A_{\mathcal{U}} = \{B : A =_{\mathcal{U}} B\}$.

Definición 41 Se llama *ultrapotencia acotada* a:

$$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / =_{\mathcal{U}} = \{A_{\mathcal{U}} : A \text{ es una sucesión de } V(\mathbb{R}) \text{ acotada}\}$$

Definición 42 Se tiene la siguiente *relación número de miembros* $\in_{\mathcal{U}}$ en la ultrapotencia:

$$A_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} B_{\mathcal{U}} \text{ si y sólo si } \{i \in \mathbb{N} : A_i \in B_i\} \in \mathcal{U}.$$

¹⁵Por ejemplo, $A_n = (0, 1/n)$ es una sucesión de elementos de $V(\mathbb{R})$ acotada pues existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in V_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (con $I = \mathbb{N}$).

En cambio, la sucesión definida de la siguiente manera:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{\{1\}\}, \text{ y así siguiendo...}$$

no es acotada ya que $A_n \in V_n(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Existe una aplicación propia natural $i : V(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$ tal que $i(A) = (A, A, \dots)_{\mathcal{U}}$, la clase de equivalencia correspondiente a la sucesión constante.

2) Aplicación $*V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$ sobre $V(*\mathbb{R})$:

$*\mathbb{R}$ es la ultrapotencia (acotada) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$. Pero $*V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$ no será lo mismo que la superestructura completa $V(*\mathbb{R})$ sino se que tendrá $*V(\mathbb{R}) \subset V(*\mathbb{R})$.

Construimos una aplicación $j : *V(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}} \rightarrow V(*\mathbb{R})$ tal que:

1. j es la identidad sobre $*\mathbb{R}$.
2. Si $A_{\mathcal{U}} \notin *\mathbb{R}$ entonces $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) : B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$.

La aplicación j se construye en etapas:

Sea $V_k(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) / \approx_{\mathcal{U}} = \{A_{\mathcal{U}} : A \text{ es una sucesión de } V_k(\mathbb{R})\}$. La ultrapotencia acotada es la unión de la cadena $*\mathbb{R} = V_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}} \subseteq \dots \subseteq V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}} \subseteq \dots$ y podemos definir j por inducción.

Para $k = 0$, j es la identidad.

Si $A_{\mathcal{U}} \in V_{k+1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$ y $A_{\mathcal{U}} \notin *\mathbb{R}$, entonces $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) : B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$ pues si $B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}$, se tiene que $B_{\mathcal{U}} \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$, que quiere decir que $j(B_{\mathcal{U}})$ está definido en la etapa previa de la construcción por inducción, que es la hipótesis inductiva.

Combinando i y j tenemos un modelo del universo no estándar extendido:

$$\begin{array}{ccc} & j & \\ & \nearrow & \\ V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}} & \rightarrow & V(*\mathbb{R}) \\ i \nwarrow & & \nearrow * \\ & V(\mathbb{R}) & \end{array}$$

donde $*A = j(i(A))$, para todo $A \in V(\mathbb{R})$.

La aplicación $*$ satisface las siguientes propiedades:

1. $*$ preserva $\in$: si A es una entidad de $V(X)$ y $a \in A$, $*a \in *A$.

2. $*$ preserva igualdad: si A es una entidad de $V(X)$, $*\{(x, x) : x \in A\} = \{(y, y) : y \in *A\}$.
3. $*$ preserva conjuntos finitos: $*\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{*a_1, *a_2, \dots, *a_n\}$, para $a_1, a_2, \dots, a_n \in V(X)$.
4. $*$ preserva operaciones básicas de conjuntos:
 - $*\emptyset = \emptyset$
 - $*(A \cup B) = *A \cup *B$
 - $*(A \cap B) = *A \cap *B$
 - $*(A - B) = *A - *B$
 - $*(A \times B) = *A \times *B$

donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son entidades.

5. $*$ produce una extensión propia: $*A \supseteq {}^\sigma A$ con la igualdad si y sólo si A es un conjunto finito.

La estructura $\mathbb{R}$ tiene asociado un lenguaje elemental $L(\mathbb{R})$, que usamos para dar la precisión necesaria al principio de transferencia; necesitamos una herramienta formal similar para extenderlo.

1.4.2. El lenguaje restringido $L(V(\mathbb{R}))$ y el principio de transferencia extendido

El lenguaje $L(V(\mathbb{R}))$ será una extensión del lenguaje $L(\mathbb{R})$. Adicionamos a nuestro stock de fórmulas elementales expresiones de la forma $X \in Y$, donde X e Y son variables para conjuntos arbitrarios en $V(\mathbb{R})$. Mantenemos los símbolos lógicos de $L(\mathbb{R})$, pero adicionamos cuantificadores limitados de conjuntos: $\forall X \in Y$ (para todos los conjuntos X que son elementos de Y), $\exists X \in Y$ (para algún conjunto X que es elemento de Y). Fórmulas Φ de $L(V(\mathbb{R}))$ son entonces construídas exactamente de la misma manera que las fórmulas de $L(\mathbb{R})$.

Una fórmula Φ de $L(V(\mathbb{R}))$ puede ser interpretada de manera natural en cada una de las estructuras $V(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \equiv_{\mathcal{U}}$ y $V(*\mathbb{R})$; notar que en $V(\mathbb{R})$ y $V(*\mathbb{R})$ tenemos la interpretación estándar del símbolo $\in$, en $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} / \equiv_{\mathcal{U}}$ usamos $\in_{\mathcal{U}}$ como se introdujo antes.

Dada una fórmula $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ con $X_1, \dots, X_n$ parámetros libres de conjuntos, y dados conjuntos $A_1, \dots, A_n \in V(\mathbb{R})$, tenemos que $\Phi(A_1, \dots, A_n)$

es una declaración en $V(\mathbb{R})$ obtenida dando a las variables libres $X_1, \dots, X_n$ los valores $A_1, \dots, A_n$, respectivamente. De manera similar interpretamos $\Phi(*A_1, \dots, *A_n)$ como una condición sobre $V(*\mathbb{R})$ obtenida dando a cada X_k el valor $*A_k = j(i(A_k))$, $k = 1, \dots, n$.

Teorema 43 (Principio de transferencia extendido) *Sea $A_1, \dots, A_n \in V(\mathbb{R})$. Toda declaración Φ en $L(V(\mathbb{R}))$ que es verdadera para $A_1, \dots, A_n$ en $V(\mathbb{R})$ es verdadera para $*A_1, \dots, *A_n$ en $V(*\mathbb{R})$, y recíprocamente.*

1.4.3. Conjuntos internos

Una de las cosas que hacemos cuando introducimos una nueva estructura matemática es buscar las clases de conjuntos “buenos” (como conjuntos abiertos y funciones continuas en topología, conjuntos y funciones medibles en teoría de la medida). En análisis no estándar los conjuntos “buenos” son llamados internos.

Definición 44 *Sea $A \in V(*\mathbb{R})$, entonces:*

- i. *A se llama **estándar** si $A = *B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$,*
- ii. *A se llama **interno** si $A \in *B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$, y*
- iii. *A se llama **externo** si A no es interno.*

Cada conjunto estándar es interno pues: si A es un conjunto estándar, entonces $A = *B$ para algún $B \in V(\mathbb{R})$. Luego, como $B \in \mathcal{P}(B)$ y $*$ preserva la relación de pertenencia, $*B \in *\mathcal{P}(B)$. Así $A \in *\mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(B) \in V(\mathbb{R})$, con lo que A es interno.

Sin embargo, no todo conjunto interno es estándar, por ejemplo, $[0, 1]$ es un conjunto interno pues $[0, 1] \in *[0, 1]$ y sin embargo $[0, 1] \neq *B$ cualquiera sea $B \in V(\mathbb{R})$.

Cada elemento de un conjunto interno es interno pues: si $A \in V(*\mathbb{R}) \implies$ para algún k , $A \subseteq V_k(*\mathbb{R}) \implies A \in V_{k+1}(*\mathbb{R}) \implies$ (por ser A interno) $A \in *(V_{k+1}(\mathbb{R}))$. Sea $D \in A \in *(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ entonces $D \in *(V_k(\mathbb{R})) \implies D$ es interno.

Comentario 45 *Describiremos en detalle los conjuntos internos en el modelo: sea A interno, entonces $A \in *(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ para algún $k \geq 0$. Esto quiere decir que A será de la forma $A = j(A_U)$, para algún A_U . Por la construcción de j , tenemos que $A \in *(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ si y sólo si $j(A_U) \in j(i(V_{k+1}(\mathbb{R})))$ si y sólo si $A_U \in_U i(V_{k+1}(\mathbb{R}))$, donde i es la aplicación de $V(\mathbb{R})$ sobre la ultrapotencia. Por la definición de $\in_U$ se tiene que $A \in *(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ si y sólo si*

$\{i \in \mathbb{N} : A_i \in V_{k+1}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{U}$, donde $(A_1, A_2, \dots)$ es la sucesión acotada que define a $A_{\mathcal{U}}$. Así los conjuntos internos son precisamente los objetos obtenidos comenzando con una sucesión acotada arbitraria $(A_1, A_2, \dots)$; los objetos estándar son obtenidos comenzando de una sucesión constante $(A, A, \dots)$.

Como un ejemplo consideremos la sucesión $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$, donde $A_n = [0, n] \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto interno (pero no estándar) definido por esta sucesión es el intervalo $[0, \omega] \subseteq {}^*\mathbb{R}$, donde ω es el número infinito en ${}^*\mathbb{R}$ definido por la sucesión $(1, 2, \dots, n, \dots)$; es decir, un número $x \in {}^*\mathbb{R}$ está en $[0, \omega]$ si y sólo si $0 \leq x \leq \omega$.

Tenemos la siguiente propiedad de conjuntos internos.

Proposición 46 .

- i. Cada subconjunto interno no vacío de ${}^*\mathbb{N}$ tiene un menor elemento.
- ii. Cada subconjunto interno no vacío de ${}^*\mathbb{R}$ con cota superior tiene supremo.
- iii. Si A es interno y $\mathbb{N} \subseteq A$, entonces A contiene algún número natural infinito, es decir, un elemento de ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.
- iv. Si A es interno y cada infinito $n \in {}^*\mathbb{N}$ está en A , entonces A contiene algún estándar $n \in \mathbb{N}$.
- v. Si un conjunto interno A contiene a todo infinitesimal positivo, entonces A contiene algún estándar real positivo.
- vi. Si un conjunto interno A contiene a todo estándar real positivo, entonces A contiene algún positivo infinitesimal.

Ejemplo 47 .

De i. se sigue que ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ es externo ya que no existe menor elemento en ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ son externos por ii.: $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$ y está acotado superiormente por un $a \in {}^*\mathbb{N}$, y sin embargo no tiene supremo; lo mismo para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$.

Las mónadas también son externas pues están acotadas y no tienen supremo.

También se tiene que si A, B son internos, entonces $A \cup B, A \cap B, A - B$ y $A \times B$ son internos.

¿Cómo reconocemos un conjunto como interno? Para ello tenemos el siguiente principio:

Proposición 48 (Definición de principio interno) Sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos internos en $V({}^*\mathbb{R})$ y sea $\Phi(X_1, \dots, X_n, x)$ una declaración en $L(V(\mathbb{R}))$. Entonces el conjunto $\{x \in A_1 : \Phi(A_1, \dots, A_n, x)\}$ es interno.

Ejemplo 49 Sean las funciones f y g internas, es decir, internas como conjuntos en $V({}^*\mathbb{R})$. Supongamos que tenemos probado que para todo $t \in {}^*[0, 1]$ existe algún infinitesimal $\delta_t > 0$ tal que $|f(t) - g(t)| < \delta_t$. ¿Existe δ tal que $|f(t) - g(t)| < \delta$ para todo $t \in {}^*[0, 1]$?

La respuesta es si y se sigue inmediatamente. El conjunto $A = \{r \in {}^*\mathbb{R} : r > 0 \wedge \forall t \in {}^*[0, 1] (|f(t) - g(t)| < r)\}$ es interno por la definición de principio interno. Además A contiene cada positivo estándar real, por lo tanto, por la proposición 46 vi., contiene algún infinitesimal positivo δ como queríamos..

1.4.4. Límite, continuidad y derivada

Para terminar este capítulo daremos algunas definiciones que nos van a permitir entender formalmente los ejemplos presentados en la introducción del mismo.

Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una aplicación $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, con lo cual tiene una extensión a una aplicación ${}^*a : {}^*\mathbb{N} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$. Para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$ escribimos $a_n = {}^*a(n)$. Usamos $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ para denotar la sucesión extendida.

En la siguiente proposición caracterizamos la noción de límite en términos no estándar y además damos una definición de qué quiere decir que una sucesión estándar converja.

Proposición 50 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si y sólo si $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$.

Demostración. Notar que el lado izquierdo de la equivalencia tiene su significado estándar dentro de $V(\mathbb{R})$. El lado derecho es una declaración sobre el universo extendido $V({}^*\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que la siguiente declaración es verdadera en $V(\mathbb{R})$: $\forall m \in \mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \epsilon)$. Por el principio de transferencia, la declaración $\forall m \in {}^*\mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \epsilon)$ es verdadera en $V({}^*\mathbb{R})$. Si $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces $|a - a_\omega| < \epsilon$ es verdadero en $V({}^*\mathbb{R})$. Como esto es verdadero para todo estándar $\epsilon > 0$, quiere decir que la diferencia $|a - a_\omega|$ es infinitesimal, es decir, $a_\omega \cong a$.

$\Leftarrow$) Si $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces, en particular, la siguiente declaración es verdadera en $V({}^*\mathbb{R})$, donde $\epsilon > 0$ es algún real estándar: $\Phi(\epsilon, {}^*\mathbb{N})$ sii $\exists n \in {}^*\mathbb{N} \forall m \in {}^*\mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \epsilon)$. Por transfrencia $\Phi(\epsilon, \mathbb{N})$ es verdadera en $V(\mathbb{R})$. Como ϵ es arbitrario esto quiere decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en el sentido estándar.¹⁶

■

Ahora vemos brevemente continuidad. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función real estándar, donde I es algún intervalo en $\mathbb{R}$.

Proposición 51 *f es continua en $a \in I$ sii $f(x) \cong f(a)$ para todo $x \in {}^*I$ tal que $a \cong x$.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del principio de transferencia, teniendo las correspondientes declaraciones. La condición suficiente puede ser demostrada también de la siguiente forma:

Supongamos que $f(x) \cong f(a)$ para todo $x \in {}^*I$ tal que $a \cong x$. Fijamos un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, es decir, $\epsilon > 0$. El conjunto $A = \{\delta \in {}^*\mathbb{R} / \forall x \in {}^*I (|a - x| < \delta \rightarrow |f(a) - f(x)| < \epsilon)\}$ es interno por la definición de principio interno y contiene todo infinitesimal positivo. Por la proposición 46 v., se tiene que A contiene algún positivo $\delta \in \mathbb{R}$; se tiene la continuidad en el sentido estándar.

■

Ahora introducimos la versión no estándar de la derivada.

Definición 52 *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sea dx un infinitesimal diferente de cero. Llamamos $dy = f(a + dx) - f(a)$ la diferencial de f en $a \in I$. Si la parte estándar de dy/dx existe y es la misma para todo dx no nulo, entonces f tiene derivada en a y $f'(a) = st(dy/dx)$.*

Volviendo al ejemplo presentado en la introducción donde queríamos calcular la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = a$, dado $dx \neq 0$ un infinitesimal y considerando el cociente entre un cambio infinitesimal de la función y un cambio infinitesimal en $x = a$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(a + dx) - f(a)}{dx} = \frac{(a + dx)^2 - a^2}{dx} = 2a + dx$$

¹⁶ Podría ser demostrado también de la siguiente manera:

Sea $a_\omega \cong a$ para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ y fijamos $\epsilon > 0$ en $\mathbb{R}$. El conjunto $A = \{n \in {}^*\mathbb{N} \text{ tal que } |a - a_m| < \epsilon, m \geq n, \forall m \in {}^*\mathbb{N}\}$ es interno por la definición de principio interno. Por la proposición 46 iv. A contiene algún finito $n_\epsilon \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces convergencia en el sentido estándar.

Luego, la pendiente de la recta tangente buscada será $2a$, que es la parte estándar de $2a + dx$.

¿Cómo vemos que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$?

Sea $dx > 0$ un infinitesimal, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} = \frac{f(dx)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$ y $st(1) = 1$.

Sea $dx < 0$ un infinitesimal, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} = \frac{f(dx)}{dx} = -\frac{dx}{dx} = -1$ y $st(-1) = -1$.

Luego, la parte estándar de dy/dx es distinta para distintos infinitesimales, entonces f no es derivable en 0.

Bibliografía

- [1] Albeverio Sergio, Hoegh-Krohn Raphael, Fenstad Jens Erik, Lindstrom Tom. Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Academic Press, Inc. 1986.
- [2] Coriat Moisés y Scaglia Sara. Representación de los números reales en la recta.
- [3] Herrmann Robert A. Nonstandard analysis. A simplified approach (arXiv:math.GM/0310351 v2 1 Nov 2003).
- [4] Hurd, Alberte E y Loeb, Peter A. An introduction to Nonstandard Real Analysis. Academic Press. 1985.
- [5] Ivorra, Carlos. Análisis no estándar.
- [6] K. D. Stroyan y W. A. J. Luxemburg. Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press, Inc. 1976.
- [7] Keisler H. Jerome. Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals On-line Edition.
- [8] Lindstrom Tom. An invitation to nonstandard analysis. Department of Mathematics. University of Trondheim. N-7034 Trondheim.NTH, Norway.
- [9] Luxemburg W. A. J. Non-standard analysis. Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers. Mathematics Department. California Institute of Technology. Pasadena, California 1973.
- [10] Recalde, Luis Cornelio. La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.
- [11] Robinson, Abraham. Non-Standard Analysis. North-Holland Publishing Company Amsterdam-London. Segunda Edición. 1970.

- [12] Rosinger Elemér E. Short introduction to nonstandard analysis (arXiv:math.GM/0407178 v1 10 Jul 2004).
- [13] Scarfiello Roque. Análisis no estándar y Mecánica cuántica. Julio de 1992 (Notas).

Capítulo 2

El problema del subespacio invariante

2.1. Introducción

Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 53 *Sea T un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert complejo H de dimensión infinita y sea $p(z) \neq 0$ un polinomio con coeficientes complejos tal que $p(T)$ es completamente continuo (compacto). Entonces T deja invariante al menos a un subespacio lineal cerrado de H distinto de H y $\{0\}$.*

La demostración, con la estructura de análisis no estándar, se debe a Abraham Robinson y Allen Bernstein. El problema del subespacio invariante era un “problema abierto”. Para $p(z) = z^2$ había sido resuelto, en análisis clásico, por P. R. Halmos y reconocido por K. T. Smith. También se había solucionado el problema para $p(z) = z$, cuyos argumentos fueron utilizados por Robinson y Bernstein, y que se debió a Von Newman y Aronszajn en el caso de espacios de Hilbert y, a Aronszajn y Smith para espacios generales de Banach.¹

Las propiedades y nociones básicas de análisis no estándar expuestas en el capítulo anterior son aplicadas aquí.

La teoría general sobre espacios de Hilbert no estándar sólo será relatada hasta lo requerido para la demostración del teorema principal.

Antes de comenzar enunciamos una proposición que será usada en lo que sigue, la cual no fue considerada anteriormente:

¹Estos datos fueron tomados de [2]

Teorema 54 Sea $\{a_n\}$ una sucesión interna en ${}^*\mathbb{C}$ tal que a_n es infinitesimal para todo finito n . Entonces existe un entero infinito positivo ω tal que a_n es infinitesimal para todo n más pequeño que ω .

El lector interesado podrá encontrar la demostración en [3].

2.2. Espacios de Hilbert no estándar

Tomamos H un espacio de Hilbert complejo consistente de todas las sucesiones $\sigma = \{s_n\}$ de números complejos, con producto interno $\langle, \rangle$ con norma asociada $\|\sigma\|^2 = \langle \sigma, \sigma \rangle$ tal que $\|\sigma\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$ converja.

Estas dos funciones se extienden a *H y tienen las mismas propiedades formales, por transferencia. El correspondiente espacio *H sobre ${}^*\mathbb{C}$ consiste de todas las sucesiones internas $\{s_n\}$ en ${}^*\mathbb{C}$ tal que $\|\sigma\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$ converge.

Identificamos los puntos de H con su extensión en *H y podemos entonces considerar H como un subconjunto de *H .

Definición 55 Un punto σ de *H es llamado **norma-finito** si $\|\sigma\|$ es un número hiperreal finito.

Definición 56 Un punto σ de *H es **casi-estándar** si $\|\sigma - y\|$ es infinitesimal para algún $y \in H$. Si tal y existe entonces está determinado únicamente por σ y será $y = st(\sigma)$ (la parte estándar de σ).

Teorema 57 Para cada $\sigma = \{s_n\}$ en H y cada entero positivo infinito ω , la suma $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal.

Demostración. Como $\sigma \in H \implies \|\sigma\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$ converge a $s \implies \left| s - \sum_{n=1}^N |s_n|^2 \right|$ es infinitesimal para todo N infinito entero positivo $\implies \left| \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 - \sum_{n=1}^N |s_n|^2 \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n|^2 \right|$ es infinitesimal para todo N infinito entero positivo $\implies \sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal para todo ω entero positivo infinito. ■

Teorema 58 *Un punto $\sigma = \{s_n\}$ en *H es casi-estándar si y sólo si es norma-finito y $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal para todo infinito ω .*

Demostración. .

$\Rightarrow$) Sea σ casi-estándar $\Rightarrow \|\sigma - st(\sigma)\|$ es infinitesimal.

Queremos ver que $\|\sigma\|$ es un número hiperreal finito:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &= \|\sigma - st(\sigma) + st(\sigma)\| \leq \underbrace{\|\sigma - st(\sigma)\|}_{< 1 \text{ pues es infinitesimal}} + \|st(\sigma)\| < \\ &< 1 + \underbrace{\|st(\sigma)\|}_{\text{finito}} \end{aligned}$$

Entonces σ es norma-finito².

Veremos ahora que $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal para todo infinito ω :

Sea $st(\sigma) = \{\tilde{s}_n\}$ en $H \Rightarrow$ por el teorema anterior se tiene que $\sum_{n=\omega}^{\infty} |\tilde{s}_n|^2$ es infinitesimal para cada infinito ω .

Además, $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 = \|\sigma - st(\sigma)\|$ que es infinitesimal por hipótesis $\Rightarrow \sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2$ es infinitesimal.

Por la desigualdad de Minkowski, que es válida por transferencia, tenemos:

$$\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2 \leq \left(\underbrace{\left(\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 \right)^{1/2}}_{\text{infinitesimal}} + \underbrace{\left(\sum_{n=\omega}^{\infty} |\tilde{s}_n|^2 \right)^{1/2}}_{\text{infinitesimal}} \right)^2$$

Entonces $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal como queríamos ver.

²La desigualdad triangular vale por transferencia.

$\Leftarrow$) Se tiene que $\sigma \in {}^*H$ es norma-finito y $\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2$ es infinitesimal para todo infinito ω . Queremos ver que σ es casi-estándar, es decir que $\exists y \in H$ tal que $\|\sigma - y\|$ es infinitesimal.

Como $\|\sigma\|$ es finita $\Rightarrow |s_n|$ es finito para cada n y por lo tanto s_n posee parte estándar, $st(s_n)$.

Consideramos $\tilde{\sigma} = \{\tilde{s}_n\}$ tal que $\tilde{s}_n = st(s_n)$ para n finito entero positivo $\Rightarrow$ veremos que $\tilde{\sigma} \in H$, es decir que $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{s}_n|^2$ converge o sea que $\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n|^2$ está acotada $\forall N$ finito.

La diferencia

$$\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n|^2 - \sum_{n=1}^N |s_n|^2 = \sum_{n=1}^N |st(s_n)|^2 - \sum_{n=1}^N |s_n|^2 \leq \sum_{n=1}^N \underbrace{|st(s_n) - s_n|^2}_{\text{infinitesimal}}$$

es infinitesimal.

Además $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$ es finita $\Rightarrow \exists m - 1$ un número positivo estándar tal que

$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < m - 1$; por lo tanto $\sum_{n=1}^N |s_n|^2 < m - 1$. Luego $\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n|^2 < m$ pues:

$$\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^N |\tilde{s}_n|^2 - \sum_{n=1}^N |s_n|^2}_{= \epsilon} + \sum_{n=1}^N |s_n|^2 < m \underbrace{- 1 + \epsilon}_{< 0} < m$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{s}_n|^2$ converge.

Por último veremos que $\exists y = \tilde{\sigma} \in H$ tal que $\|\sigma - \tilde{\sigma}\|$ es infinitesimal:

$$\begin{aligned} \|\sigma - \tilde{\sigma}\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^k |s_n - \tilde{s}_n|^2}_{(1)} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 = \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\omega-1} |s_n - \tilde{s}_n|^2}_{\text{infinitesimal}} + \sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n - \tilde{s}_n|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \leq \\ \downarrow \end{array} & \epsilon + \left(\underbrace{\left(\sum_{n=\omega}^{\infty} |s_n|^2 \right)^{1/2}}_{\substack{\text{infinitesimal} \\ \text{por hipótesis}}} + \underbrace{\left(\sum_{n=\omega}^{\infty} |\tilde{s}_n|^2 \right)^{1/2}}_{\substack{\text{infinitesimal} \\ \text{por teorema 57}}} \right)^2 \\
\text{desigualdad} & & \\
\text{de Minkowski} & &
\end{array}$$

((1) es infinitesimal para k finito, pues $\tilde{s}_n = st(s_n)$ y luego, por el teorema 54, es infinitesimal aún para algún k infinito ($k = \omega - 1$).)

Así $\|\sigma - \tilde{\sigma}\|$ es infinitesimal $\implies \sigma$ es casi-estándar con $\tilde{\sigma} = st(\sigma)$.

■

Teorema 59 Sea A un conjunto compacto en H . Entonces todos los puntos de *A son casi-estándar.

Demostración. Supongamos que A es compacto pero que $\exists \sigma \in {}^*A$ que no es casi-estándar, es decir que $\forall \varphi \in H$, $\exists r$ estándar positivo tal que $\|\sigma - \varphi\| > r$. Luego, todo $\varphi \in H$ posee un entorno abierto U_φ tal que $\sigma \notin {}^*U_\varphi$. (1)

Como A es compacto $\implies A \subset \bigcup_{\alpha} \{U_\alpha\}$ cubrimiento por abiertos de A , luego existe un subcubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_k\}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^k \{U_n\}$, entonces ${}^*A \subset {}^*\left(\bigcup_{n=1}^k \{U_n\}\right) = \bigcup_{n=1}^k \{{}^*U_n\}$. Por lo tanto como $\sigma \in {}^*A$ entonces $\sigma \in {}^*U_t$ para algún t entre 1 y k . Absurdo por (1), con lo cual todos los puntos de *A son casi-estándar. ■

2.3. Operadores en espacios de Hilbert no estándar

Dado un operador T de H en H , el operador *T de *H en *H será denotado también por T , lo cual no dará lugar a confusión. Para $\tau = T\sigma$ en H entonces $\tau = T\sigma$ en *H .

En particular, sea T un operador lineal acotado definido sobre todo H . Para la representación asumida de H por sucesiones, T tiene una representación matricial, $T = (a_{jk})$, $j, k = 1, 2, 3, \dots$. Los coeficientes de esta matriz satisfacen las condiciones:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

En *H estos subíndices de (a_{jk}) varían además sobre enteros positivos infinitos. Por 2.1, 2.2, y el teorema 57, se tiene que:

$$\sum_{k=\omega}^{\infty} |a_{jk}|^2 \text{ es infinitesimal para } \omega \text{ infinito, siendo } j \text{ finito.} \quad (2.3)$$

Esto no es necesariamente verdadero para j infinito, por ejemplo, si $T = I$, la matriz identidad, entonces $a_{jk} = 1$, para $j = \omega$.

Teorema 60 Sea T un operador lineal totalmente continuo (compacto) en H . Entonces T aplica cada punto norma-finito en *H sobre un punto casi-estándar.

Demostración. Sea $\sigma \in {}^*H$ un punto norma-finito $\Rightarrow \|\sigma\|$ es un número hiperreal finito $\Rightarrow \|\sigma\| < r$ para algún número positivo estándar r . Queremos ver que $T\sigma$ es casi-estándar.

Sea $B = \{\xi \in H : \|\xi\| < r\}$, luego B es acotada en H y, como T es totalmente continuo, $\overline{TB} = A$ es compacto.

Siendo *B y *A las extensiones de B y A en *H , se tiene que, como $\|\sigma\| < r$, $\sigma \in B$ y por lo tanto en ${}^*B \Rightarrow T\sigma \in {}^*A$ con lo cual es casi estándar, pues se aplica el teorema anterior ya que $A \subset H$ es compacto. ■

Teorema 61 Si $T = (a_{jk})$ es un operador lineal totalmente continuo (compacto) en H , entonces a_{jk} es infinitesimal para todo infinito k (j finito o infinito).

Demostración. Si j es finito mientras k es infinito, por 2.3 $\sum_{n=k}^{\infty} |a_{jn}|^2$ es infinitesimal. Además $|a_{jk}|^2 < \sum_{n=k}^{\infty} |a_{jn}|^2$, luego a_{jk} es infinitesimal.

Si j es infinito mientras k es infinito, definimos $\sigma = \{s_n\}$ como

$$s_n = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$$

Se tiene que $\|\sigma\| = 1$ y, como T es compacto, $T\sigma$ es casi estándar por el teorema anterior.

Si llamamos $\tau = \{t_j\} = T\sigma \Rightarrow t_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}s_n = a_{jk}$. Entonces, por el teorema 58, $\sum_{j=\omega}^{\infty} |t_j|^2$ es infinitesimal para todo infinito entero ω .

Luego, como $t_j = a_{jk}$ se tiene que $\sum_{j=\omega}^{\infty} |a_{jk}|^2$ es infinitesimal y por lo tanto a_{jk} también lo es. ■

Definición 62 Un operador $T = (a_{jk})$ será llamado *casi superdiagonal* si $a_{jk} = 0$ para $j > k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Esta definición depende de la base especificada de H .

Teorema 63 Sea T un operador lineal acotado sobre H el cual es casi superdiagonal. Sea

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0, \quad m \geq 1 \quad (2.4)$$

un polinomio con coeficientes complejos estándar tal que $p(T)$ es totalmente continuo. Entonces existe un entero infinito positivo ω tal que $a_{\omega+1, \omega}$ es infinitesimal.

Demostración. Sea $p(T) = (b_{jk})$, efectuando los cálculos correspondientes se tiene que, para cada $h \geq 1$,

$$b_{h+m, h} = c_m a_{h+1, h} a_{h+2, h+1} a_{h+3, h+2} \dots a_{h+m, h+m-1} \quad (2.5)$$

Por el teorema anterior se tiene que $b_{h+m, h}$ es infinitesimal para todo infinito h . Por lo tanto, como c_m no es infinitesimal, se tendrá que uno de los factores restantes sobre el lado derecho de 2.5 debe ser infinitesimal, por ejemplo, $a_{h+j+1, h+j}$ con $0 \leq j \leq m$. Si $\omega = h + j$, el teorema queda demostrado. ■

2.4. Operadores Projectivos

Sea E un subespacio lineal interno cerrado de *H .

Definición 64 Dado E definimos un subconjunto ${}^\circ E$ de H como: $\sigma \in H$, $\sigma \in {}^\circ E$ si y sólo si $\exists \bar{\sigma} \in E$ tal que $\|\sigma - \bar{\sigma}\|$ es infinitesimal, lo que es lo mismo ${}^\circ E = \{\sigma \in H / E \cap \mu(\sigma) \neq \emptyset\}$.

Teorema 65 Dado E como arriba, el conjunto ${}^\circ E$ es un subespacio lineal cerrado de H .

Demostración. Queremos ver que ${}^\circ E$ es un subespacio lineal, es decir que si $\lambda \in {}^*\mathbb{C}$ (finito) y $\sigma_1, \sigma_2 \in {}^\circ E \implies \lambda\sigma_1 \in {}^\circ E$ y $\sigma_1 + \sigma_2 \in {}^\circ E$.

Sean σ_1, σ_2 elementos de ${}^\circ E \implies \exists \tau_1, \tau_2 \in E$ tales que $\|\sigma_1 - \tau_1\|$ y $\|\sigma_2 - \tau_2\|$ son infinitesimales. Como E es un subespacio lineal, $\tau_1 + \tau_2 \in E$ y como $\|(\sigma_1 + \sigma_2) - (\tau_1 + \tau_2)\|$ es infinitesimal pues:

$$\begin{aligned} \|(\sigma_1 + \sigma_2) - (\tau_1 + \tau_2)\| &= \|\sigma_1 - \tau_1 + \sigma_2 - \tau_2\| \leq \\ &\leq \underbrace{\|\sigma_1 - \tau_1\|}_{\text{infinitesimal}} + \underbrace{\|\sigma_2 - \tau_2\|}_{\text{infinitesimal}} \end{aligned}$$

Entonces $\sigma_1 + \sigma_2 \in {}^\circ E$.

Sean $\sigma_1 \in {}^\circ E$ y $\lambda \in {}^*\mathbb{C} \implies \exists \tau \in E$ tal que $\|\sigma_1 - \tau\|$ es infinitesimal. Como E es subespacio lineal $\implies \lambda\tau \in E$ y como $\|\lambda\sigma_1 - \lambda\tau\|$ es infinitesimal pues:

$$\|\lambda\sigma_1 - \lambda\tau\| = \|\lambda(\sigma_1 - \tau)\| \leq |\lambda| \underbrace{\|\sigma_1 - \tau\|}_{\text{infinitesimal}}$$

Entonces $\lambda\sigma \in {}^\circ E$ ya que λ es finito.

Por lo tanto ${}^\circ E$ es un subespacio lineal.

Para ver que ${}^\circ E$ es cerrado, tomamos $\sigma \in \overline{{}^\circ E}$ y veremos que $\sigma \in {}^\circ E$.

Como $\sigma \in \overline{{}^\circ E} \implies \exists \tilde{\sigma} \in {}^\circ E \cap B(\sigma, \frac{1}{2n})$ con n un entero finito positivo.

Como $\tilde{\sigma} \in {}^\circ E \implies E \cap \mu(\tilde{\sigma}) \neq \emptyset \implies \exists \tau \in E$ tal que $\tau \in B(\tilde{\sigma}, \frac{1}{2n})$
 $\implies \|\sigma - \tau\| = \|\sigma - \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} - \tau\| \leq \|\sigma - \tilde{\sigma}\| + \|\tilde{\sigma} - \tau\| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

Sea $D = \{n \in {}^*\mathbb{N} / E \cap B(\sigma, \frac{1}{n}) \neq \emptyset\}$. Se tiene que D es interno por propiedad 48 y $\mathbb{N} \subset D$, por lo tanto, aplicando la propiedad 46.iii. D contiene algún entero positivo infinito, por ejemplo ω .

Luego para ω entero infinito $\exists \tau_0 \in E$ tal que $\|\sigma - \tau_0\| < \frac{1}{\omega}$. Así, $\sigma \in {}^\circ E$.

■

Un subespacio lineal interno E de *H puede ser de dimensión finita en el sentido no estándar (es decir, Q -finito-dimENSIONAL)³, aunque no necesariamente en el sentido estándar. La dimensión de E será denotada por $d(E)$.

Sea ω un número natural infinito. El subespacio lineal cerrado de *H que consiste de todos los puntos $\sigma = \{s_n\}$ tales que $s_n = 0$ para $n > \omega$ será denotado por H_ω . Se tiene que $d(H_\omega) = \omega$, y así es de dimensión finita en el sentido no estándar.

El correspondiente operador proyectivo, que será denotado por P_ω aplica cada $\sigma = \{s_n\}$ en *H sobre el punto $\tilde{\sigma} = \{\tilde{s}_n\}$, donde $\tilde{s}_n = s_n$ para $n \leq \omega$ y $\tilde{s}_n = 0$ para $n > \omega$. Para cada punto $\sigma \in H$,

$$\|\sigma - P_\omega\sigma\| = \left(\sum_{n=\omega+1}^{\infty} |s_n|^2 \right)^{1/2} \text{ es infinitesimal, por el teorema 57.} \quad (2.6)$$

Se tiene que $\|P_\omega\| = 1$.

Para cada operador lineal acotado T sobre H , definimos un operador interno, T_ω en H_ω como $T_\omega = P_\omega T P_\omega$. Entonces $\|T_\omega\| \leq \|P_\omega\| \|T\| \|P_\omega\| = \|T\|$.

Teorema 66 *Sea E un subespacio lineal cerrado interno de H_ω que es invariante por T_ω , es decir, $T_\omega E \subseteq E$. Entonces ${}^\circ E$ es invariante por T , $T{}^\circ E \subseteq {}^\circ E$.*

Demostración. Sea $\sigma \in {}^\circ E$, tenemos que mostrar que $T\sigma \in {}^\circ E$, es decir que $\exists \mu \in E$ tal que $\|T\sigma - \mu\|$ es infinitesimal.

Como $\sigma \in {}^\circ E \implies \exists \tau \in E$ tal que $\|\sigma - \tau\|$ es infinitesimal. Como $\tau \in E \implies T_\omega \tau \in E$ (por hipótesis).

Veremos que $\exists \mu = T_\omega \tau$

$$\|T\sigma - T_\omega \tau\| = \left\| T\sigma - P_\omega T \underbrace{P_\omega \tau}_{=\tau} \right\| = \|T\sigma - P_\omega T\tau\| =$$

³Una sucesión interna $\{a_n\}$ de ${}^*\mathbb{R}$ es **finita** si n varía sobre ${}^*\mathbb{N}$ tales que $n \leq v$, con v un número natural finito.

Una sucesión interna $\{a_n\}$ de ${}^*\mathbb{R}$ es **Q -finita** si n varía sobre ${}^*\mathbb{N}$ tales que $n \leq v$, con v un número natural finito o infinito.

Una sucesión interna $\{a_n\}$ de ${}^*\mathbb{R}$ es **infinita** si n varía sobre todo ${}^*\mathbb{N}$ o sobre un conjunto interno que es uno a uno con ${}^*\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&= \|T\sigma - P_\omega T\sigma + P_\omega T\sigma - P_\omega T\tau\| = \|(T - P_\omega T)\sigma + P_\omega T(\sigma - \tau)\| \leq \\
&\leq \underbrace{\|(T - P_\omega T)\sigma\|}_{\text{infinitesimal por 2.6}} + \underbrace{\|P_\omega\|}_{=1} \underbrace{\|T\|}_{\leq M} \underbrace{\|\sigma - \tau\|}_{\text{infinitesimal}}
\end{aligned}$$

Luego, $\|T\sigma - T_\omega\tau\|$ es infinitesimal. ■

Teorema 67 Sean E y E_1 dos subespacios lineales cerrados internos de H_ω tales que $E \subseteq E_1$ y $d(E_1) = d(E) + 1$. Entonces ${}^\circ E \subseteq {}^\circ E_1$ y cada dos puntos de ${}^\circ E_1$ son linealmente dependientes módulo ${}^\circ E$.

Demostración. Como $E \subseteq E_1$, se tiene que ${}^\circ E \subseteq {}^\circ E_1$: sea $\sigma \in {}^\circ E \implies \exists \tau \in E$ tal que $\|\sigma - \tau\|$ es infinitesimal, entonces (como $E \subseteq E_1$) $\exists \tau \in E_1$ tal que $\|\sigma - \tau\|$ es infinitesimal $\implies \sigma \in {}^\circ E_1$.

Sean σ_1 y σ_2 dos puntos de ${}^\circ E_1$, queremos ver que son linealmente dependientes módulo ${}^\circ E$, es decir que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in {}^*\mathbb{C}$ tales que $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 \in {}^\circ E$.

Como $\sigma_1, \sigma_2 \in {}^\circ E_1 \implies \exists \tau_1, \tau_2 \in E_1$ tales que $\|\sigma_1 - \tau_1\|$ y $\|\sigma_2 - \tau_2\|$ son infinitesimales. Como la dimensión de E_1 excede la de E sólo por uno, existe una representación

$$\tau_2 = \lambda\tau_1 + \tau \quad (2.7)$$

o viceversa, con $\tau \in E$ y $\lambda \in {}^*\mathbb{C}$.

Supongamos ahora que σ_1 y σ_2 son linealmente independientes módulo ${}^\circ E$.

Si λ fuera infinitesimal entonces $\lambda\tau_1$ también pues τ_1 es finito. Luego $\tau_2 - \tau = \lambda\tau_1$ es infinitesimal $\implies \tau_2 \cong \tau$. Como $\sigma_2 \cong \tau_2$, entonces $\sigma_2 \cong \tau$, lo que implica que $\sigma_2 \in {}^\circ E$ pues $\tau \in E$. Por lo tanto $\exists 0, 1 \in {}^*\mathbb{C}$ tales que $0.\sigma_1 + 1.\sigma_2 = \sigma_2 \in {}^\circ E \implies \sigma_1$ y σ_2 son linealmente dependientes módulo ${}^\circ E$, lo que contradice la suposición.

Si λ fuera infinito, entonces:

$$\text{Como } \tau_2 = \lambda\tau_1 + \tau \text{ se tiene que } \underbrace{\tau_2\lambda^{-1}}_{\text{infinitesimal}} = \tau_1 + \underbrace{\tau\lambda^{-1}}_{\in E}$$

Luego, $\tau_1 \cong \tau\lambda^{-1}$ y como $\sigma_1 \cong \tau_1 \implies \sigma_1 \cong \tau\lambda^{-1} \implies \sigma_1 \in {}^\circ E$. Por lo tanto $\exists 0, 1 \in {}^*\mathbb{C}$ tales que $1.\sigma_1 + 0.\sigma_2 = \sigma_1 \in {}^\circ E \implies \sigma_1$ y σ_2 son linealmente

dependientes módulo ${}^\circ E$, lo que también contradice la suposición.

Luego, λ debe ser finito $\implies \exists st(\lambda) \neq 0$.

Además, $\tau = \tau_2 - \lambda\tau_1$ es infinitamente cerrado a $\sigma = \sigma_2 - st(\lambda)\sigma_1$, ya que $\|\tau - \sigma\| = \|\tau_2 - \lambda\tau_1 - (\sigma_2 - st(\lambda)\sigma_1)\| = \|\tau_2 - \lambda\tau_1 - (\sigma_2 - st(\lambda)\sigma_1) - \lambda\sigma_1 + \lambda\sigma_1\| \leq \|\tau_2 - \sigma_2\| + |\lambda|\|\tau_1 - \sigma_1\| + |\lambda - st(\lambda)|\|\sigma_1\|$ es infinitesimal. Luego σ se encuentra en ${}^\circ E$ y así σ_1 y σ_2 son linealmente dependientes módulo ${}^\circ E$. Esta contradicción prueba el teorema. ■

2.5. Demostración del teorema principal

Haremos ahora la prueba del teorema principal:

Sea T un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert complejo H de dimensión infinita y sea $p(z) \neq 0$ un polinomio con coeficientes complejos tal que $p(T)$ es completamente continuo (compacto). Entonces T deja invariante al menos a un subespacio lineal cerrado de H distinto de H y $\{0\}$.

El método de la demostración está basado en el hecho que en un espacio de dimensión finita μ , cada operador lineal posee una cadena de subespacios invariantes:

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_\mu \quad (2.8)$$

donde $d(E_j) = j$, con $0 \leq j \leq \mu$, de manera que $E_0 = \{0\}$.

Dado T como en el teorema, consideremos el conjunto $A = \{\sigma, T\sigma, T^2\sigma, \dots, T^n\sigma, \dots\}$ en H , donde σ es un punto en H tal que $\|\sigma\| = 1$.

Si A es linealmente dependiente $\implies$ existe un natural finito n tal que $T^{n+1}\sigma = \sum_{k=0}^n \lambda_k T^k \sigma$ y, en este caso, $\overline{\{\sigma, T\sigma, \dots, T^n\sigma\}}$ será un subespacio lineal cerrado propio de H invariante por T pues:

$$\begin{aligned} \text{Sea } \eta \in \overline{\{\sigma, T\sigma, \dots, T^n\sigma\}} &\implies \eta = \sum_{k=0}^n a_k T^k \sigma \implies T\eta = T \left(\sum_{k=0}^n a_k T^k \sigma \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k T(T^k \sigma) = \sum_{k=0}^n a_k T^{k+1} \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^{k+1} \sigma + a_n T^{n+1} \sigma = \sum_{k=0}^n b_k T^k \sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T\eta \in \overline{\{\sigma, T\sigma, \dots, T^n\sigma\}}.$$

Luego, supongamos que A es linealmente independiente y genera todo el espacio H ; si no genera todo el espacio, el subespacio generado por él es invariante por T .

Elegimos una base $\{e_1, e_2, \dots\}$ para H de la siguiente manera: sea $e_1 = \sigma$, luego $H_2 = \overline{\{e_1, Te_1\}} = \overline{\{\sigma, T\sigma\}}$ tiene dimensión 2. Elegimos e_2 en H_2 tal que $\|e_2\| = 1$ y $\langle e_1, e_2 \rangle = 0 \Rightarrow$ se tiene que $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal para H_2 .

Así obtenemos una sucesión ortonormal de puntos $\{e_n\}$ en H , $n = 1, 2, 3, \dots$ tal que para cada $n \geq 1$, el subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ coincide con el subespacio generado por $\{\sigma, T\sigma, T^2\sigma, \dots, T^{n-1}\sigma\}$.

Por esta construcción se tiene que Te_n es linealmente dependiente con $e_1, \dots, e_{n+1}$ y puede escribirse como:

$$Te_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{n+1,n}e_{n+1} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Como el subespacio lineal cerrado generado por A coincide con H , $\{e_n\}$ es una base para H y así 2.9 muestra que la matriz (a_{jk}) que representa T con respecto a esta base es casi superdiagonal.

Pasando a *C y *H , por el teorema 63, tenemos que existe un entero positivo infinito ω tal que $a_{\omega+1,\omega}$ es infinitesimal.

Fijando ω , consideraremos el espacio H_ω y el operador $T_\omega = P_\omega TP_\omega$.

Sea $\xi = \{x_i\}$ un punto norma-finito de *H y sea $\gamma = \{z_i\} = (TP_\omega - T_\omega)\xi = (I - P_\omega)TP_\omega\xi$.

Haciendo los cálculos correspondientes se tiene que:

$$z_{\omega+1} = \begin{cases} a_{\omega+1,\omega}x_\omega & \text{si } i = \omega + 1 \\ 0 & \text{si } i \neq \omega + 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $\|\gamma\| \leq \underbrace{|a_{\omega+1,\omega}|}_{\text{infinitesimal}} \underbrace{\|\xi\|}_{\text{finito}}$ y así γ será infinitesimal.

Luego $(TP_\omega - T_\omega)\xi$ es infinitesimal $\Rightarrow TP_\omega\xi \cong T_\omega\xi$ para todo punto norma-finito ξ en *H . Más generalmente, veremos por inducción que:

$$T^r P_\omega \xi \cong T_\omega^r \xi \quad \text{para } \xi \text{ norma-finito en } {}^*H, r = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Si $r = 1$, vale.

Supongamos 2.10 válido para $r - 1, r \geq 2$.

$$T^r P_\omega \xi = T T^{r-1} P_\omega \xi \underset{\text{H. I.}}{\cong} T T_\omega^{r-1} \xi = T P_\omega T_\omega^{r-1} \xi \underset{\text{H. I.}}{\cong} T_\omega T_\omega^{r-1} \xi = T_\omega^r \xi$$

Aplicando 2.10 a $p(T)$ y teniendo en cuenta que $P_\omega \xi = \xi$ para $\xi \in H_\omega$, obtenemos que:

$$p(T)\xi \cong p(T_\omega)\xi \quad \text{para todo } \xi \text{ norma-finito en } H_\omega. \quad (2.11)$$

Sea $\tilde{T}$ la restricción de T_ω a H_ω . Como H_ω es de dimensión finita en el sentido no estándar (es decir Q -finito-dimensional), la teoría estándar de operadores lineales (o matrices) para espacios de dimensión finita se transfieren y así $\tilde{T}$ posee una cadena de subespacios invariantes:

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_\omega \quad (2.12)$$

donde $d(E_j) = j$, $0 \leq j \leq \omega$, con $E_0 = \{0\}$ y $E_\omega = H_\omega$.

Luego, $\tilde{T}E_j \subseteq E_j$ con $j = 0, 1, 2, 3, \dots, \omega$.

Sea $\tilde{P}_j$ el operador proyección de *H sobre E_j con $j = 0, 1, 2, \dots, \omega$. Así $\tilde{P}_\omega = P_\omega$.

Elegimos $\xi \in H$ tal que $\|\xi\| = 1$. Podemos suponer que $p(T)\xi \neq 0$, de otro modo $\xi, T\xi, \dots, T^n\xi$ será linealmente dependiente, contrario a la asunción.

Como $\xi \cong P_\omega \xi$ (por el teorema 57) tenemos que $p(T)\xi \sim p(T)P_\omega \xi \implies p(T)P_\omega \xi$ no es infinitesimal y por 2.11, $p(T_\omega)P_\omega \xi$ no es infinitesimal.

Pero $p(T_\omega)P_\omega \xi \cong p(T_\omega)\xi \implies p(T_\omega)\xi$ no es infinitesimal $\implies \|p(T_\omega)\xi\| > r$ para algún estándar positivo r .

Definimos r_j con $j = 0, 1, \dots, \omega$ por:

$$r_j = \left\| p(T_\omega)\xi - p(T_\omega)\tilde{P}_j\xi \right\| \quad j = 0, 1, 2, \dots, \omega \quad (2.13)$$

$$\text{Luego, } r_j = \left\| p(T_\omega)\xi - p(T_\omega)\tilde{P}_j\xi \right\| = \left\| p(T_\omega)(\xi - \tilde{P}_j\xi) \right\| \leq \|p(T_\omega)\| \left\| \xi - \tilde{P}_j\xi \right\|.$$

Como $r_0 = \|p(T_\omega)\xi\|$ entonces $r_0 > r$.

Además, $\|\xi - \tilde{P}_\omega \xi\| = \|\xi - P_\omega \xi\|$ es infinitesimal, y en particular $r_\omega < r/2$ pues:

$$r_\omega = \left\| p(T_\omega) \xi - p(T_\omega) \tilde{P}_\omega \xi \right\| \leq \underbrace{\|p(T_\omega)\|}_{\leq M} \underbrace{\left\| \xi - \tilde{P}_\omega \xi \right\|}_{\text{infinitesimal}}$$

Entonces existe un entero positivo más pequeño λ , que puede ser finito o infinito, tal que $r_\lambda < r/2$ pero $r_{\lambda-1} \geq r/2$.

A cada E_j le asociamos el subespacio lineal cerrado ${}^\circ E_j$ de H .

Se tiene que ${}^\circ E_{\lambda-1} \neq H$. En caso contrario $\xi \in {}^\circ E_{\lambda-1} \Rightarrow \|\xi - \tilde{P}_{\lambda-1} \xi\|$ sería infinitesimal. Luego:

$$r_{\lambda-1} \leq \underbrace{\|p(T_\omega)\|}_{\leq M} \underbrace{\left\| \xi - \tilde{P}_{\lambda-1} \xi \right\|}_{\text{infinitesimal}}$$

$\Rightarrow r_{\lambda-1}$ sería infinitesimal que es contrario a la elección de λ .

Por otro lado ${}^\circ E_\lambda \neq \{0\}$. En caso contrario, consideramos el punto $\eta = p(T_\omega) \tilde{P}_\lambda \xi \in E_\lambda$ ya que $\tilde{P}_\lambda \xi \in E_\lambda$ que es invariante bajo $p(\tilde{T})$ o equivalentemente bajo $p(T_\omega)$. Como $\tilde{P}_\lambda \xi \in H_\omega$ ($E_\lambda \subset H_\omega$) $\Rightarrow$

$$\eta = p(T_\omega) \tilde{P}_\lambda \xi \cong \underbrace{p(T)}_{\text{compacto}} \underbrace{\tilde{P}_\lambda \xi}_{\text{norma-finito}}$$

$\Rightarrow \eta$ es casi estándar (por teorema 60). Luego, existe $st(\eta) \in {}^\circ E_\lambda = \{0\} \Rightarrow st(\eta) = 0 \Rightarrow \eta$ es infinitesimal. Por lo tanto, por 2.13:

$$r_\lambda = \left\| p(T_\omega) \xi - p(T_\omega) \tilde{P}_\lambda \xi \right\| \geq \underbrace{\|p(T_\omega) \xi\|}_{> r} - \underbrace{\left\| p(T_\omega) \tilde{P}_\lambda \xi \right\|}_{= \eta \text{ infinitesimal}} > r - \epsilon$$

con ϵ infinitesimal. Por lo tanto $r_\lambda > r/2$, contrario a la elección de λ .

Se tiene que ambos, ${}^\circ E_{\lambda-1}$ y ${}^\circ E_\lambda$ son invariantes por T , por el teorema 66.

Supongamos que ninguno es subespacio invariante propio de H por T , entonces ${}^\circ E_{\lambda-1} = \{0\}$ y ${}^\circ E_\lambda = H$. Luego, por el teorema 67, H es linealmente dependiente módulo $\{0\}$, lo que es un absurdo.

Por lo tanto, concluimos que alguno de los dos es un subespacio propio de H invariante por T , como queríamos.

Bibliografía

- [1] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial Mir. Moscú. 1972.
- [2] Bernstein, Allen R. and Robinson, Abraham. Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 16. N° 3. 1966.
- [3] Robinson, Abraham. Non-Standard Analysis. North-Holland Publishing Company Amsterdam-London. Segunda Edición. 1970.
- [4] Albeverio Sergio, Hoegh-Krohn Raphael, Fenstad Jens Erik, Lindstrom Tom. Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics. Academic Press, Inc. 1986.

Apéndice A

Filtros y ultrafiltros

Aquí demostraremos, para el lector interesado, algunos resultados que hemos usado a lo largo del trabajo.

Teorema 68 *Sea $p \in X$. Entonces $[p]$ es un ultrafiltro sobre X .*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$. Entonces $p \in A$ o $p \in X - A$. Así, $(A \subseteq X \text{ y } \{p\} \subseteq A)$ o $(A \subseteq X \text{ y } \{p\} \subseteq X - A)$, entonces $A \in [p]$ o $X - A \in [p]$. Por lo tanto, por la proposición 5, $[p]$ es un $\mathcal{U}_X$ pues $[p]$ es un filtro. ■

Teorema 69 *Si $\mathcal{U}_X$ no es un ultrafiltro principal, entonces $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.*

Demostración. Sea $\{p_0, \dots, p_k\} \subset X$ un conjunto arbitrario finito no vacío. Como $X - (X - \{p_0, \dots, p_k\}) = \{p_0, \dots, p_k\}$ finito, entonces $X - \{p_0, \dots, p_k\} \in \mathcal{C}_X$. Como $\mathcal{U}_X$ no es principal, entonces $\mathcal{U}_X \neq [p_i]$, $i = 0, \dots, k$. Por lo tanto, para cada $i = 0, \dots, k$ existe algún $A_i \subseteq X$ tal que $A_i \in \mathcal{U}_X$ y $A_i \notin [p_i]$, o sea $p_i \notin A_i$ (pues si $p_i \in A_i$ para algún $A_i \in \mathcal{U}_X$, entonces $[p_i] \subseteq \mathcal{U}_X$ y como $\mathcal{U}_X$ es ultrafiltro, sería $\mathcal{U}_X = [p_i]$), luego $\{p_0, \dots, p_k\} \cap (A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_k) = \emptyset$. Además $(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_k) \in \mathcal{U}_X$ pues $\mathcal{U}_X$ es un filtro, entonces $\{p_0, \dots, p_k\} \notin \mathcal{U}_X$ (si no fuese así, $\{p_0, \dots, p_k\} \cap (A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_k) = \emptyset$ estaría en $\mathcal{U}_X$). Por lo tanto se tendrá que $X - \{p_0, \dots, p_k\} \in \mathcal{U}_X$ (por la proposición 5). Así $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$. ■

Proposición 70 *$\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \emptyset$.*

Demostración. .

$\Rightarrow$) $\mathcal{U}_X$ es libre, entonces, $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{U}_X$.

$$\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\} = \underbrace{\cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}}_{=\emptyset^1} \cap \{F : F \in \mathcal{U}_X - \mathcal{C}_X\} = \emptyset$$

$\Leftarrow$) Queremos ver que $\mathcal{U}_X$ es libre, es decir que contiene a $\mathcal{C}_X$, o equivalentemente que $\mathcal{U}_X$ no es principal.

Supongamos que $\mathcal{U}_X$ es principal, entonces $\mathcal{U}_X = [A] = \{B \subset X \wedge A \subset B\}$, con $A \subset X$ no vacío. Luego $\cap\{F : F \in \mathcal{U}_X\}$ debe contener a A , lo que contradice la hipótesis. ■

Proposición 71 $\mathcal{U}_X$ es libre si y sólo si $\nexists F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, tal que $F \in \mathcal{U}_X$.

Demostración. .

$\Rightarrow$) Sea $F \subset X$, $F \neq \emptyset$ y F finito, entonces $X - F \in \mathcal{C}_X$ (por definición del filtro cofinito), luego $X - F \in \mathcal{U}_X$ (por ser $\mathcal{U}_X$ libre) y así $F \notin \mathcal{U}_X$, por ser un ultrafiltro.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}_X$ no es libre, entonces $\mathcal{C}_X \not\subseteq \mathcal{U}_X$, luego $\exists A \in \mathcal{C}_X$ tal que $A \notin \mathcal{U}_X$ y así $X - A$ es finito y $X - A \in \mathcal{U}_X$, en contradicción con la hipótesis. ■

¹Se tiene que $X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} \subset X$. Si $a \in X$ entonces $X - \{a\} \in \mathcal{C}_X$ luego $X - (X - \{a\}) = \{a\} \subset X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}$ pues $X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} = \cup\{X - F : F \in \mathcal{C}_X\}$ y así $X \subset X - \cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\}$ con lo cual son iguales y $\cap\{F : F \in \mathcal{C}_X\} = \emptyset$.

Apéndice B

Algunos resultados de ${}^*\mathbb{R}$

Sea ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \approx_{\mathcal{U}}$, con $\approx_{\mathcal{U}}$ relación de equivalencia. Se tiene que la relación $\approx_{\mathcal{U}}$ es compatible con las operaciones de suma y multiplicación definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- ¿Si $A \approx_{\mathcal{U}} B$ y $C \approx_{\mathcal{U}} D$ entonces $A \oplus C \approx_{\mathcal{U}} B \oplus D$?

Como $A \approx_{\mathcal{U}} B$ entonces $U_1 = \{n : A_n = B_n\} \in \mathcal{U}$, y como $C \approx_{\mathcal{U}} D$ entonces $U_2 = \{n : C_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Además, $U_1 \cap U_2 \subset \{n : A_n + C_n = B_n + D_n\} = U_3$.

Como $\mathcal{U}$ es un filtro se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ al igual que U_3 .

Luego, $A \oplus C \approx_{\mathcal{U}} B \oplus D$, y así $\approx_{\mathcal{U}}$ es compatible con la suma definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- ¿Si $A \approx_{\mathcal{U}} B$ y $C \approx_{\mathcal{U}} D$ entonces $A \odot C \approx_{\mathcal{U}} B \odot D$?

Como $A \approx_{\mathcal{U}} B$ entonces $U_1 = \{n : A_n = B_n\} \in \mathcal{U}$, y como $C \approx_{\mathcal{U}} D$ entonces $U_2 = \{n : C_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Además, $U_1 \cap U_2 \subset \{n : A_n \cdot C_n = B_n \cdot D_n\} = U_3$.

Como $\mathcal{U}$ es un filtro se tiene que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ al igual que U_3 .

Luego, $A \odot C \approx_{\mathcal{U}} B \odot D$, y así $\approx_{\mathcal{U}}$ es compatible con la multiplicación definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposición 72 *La relación dada por ${}^* \leq$ está bien definida (no depende de las sucesiones elegidas en las clases).*

Demostración. Sean $A, C \in a$ y $B, D \in b$. Luego, $A \approx_{\mathcal{U}} C$ y $B \approx_{\mathcal{U}} D$, es decir $\{n : A_n = C_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n = D_n\} \in \mathcal{U}$. Queremos ver que $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ si y sólo si $\{n : C_n \leq D_n\} \in \mathcal{U}$.

Por ser $\mathcal{U}$ un filtro $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : A_n = C_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : A_n = C_n\} \subset \{n : C_n \leq B_n\}$, entonces $\{n : C_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$.

Como $\{n : C_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n = D_n\} \subset \{n : C_n \leq D_n\}$, entonces $\{n : C_n \leq D_n\} \in \mathcal{U}$.

De la misma manera sale la otra implicación.. ■

Teorema 73 *La estructura $\langle {}^*\mathbb{R}, * +, * \cdot, * \leq \rangle$ es un cuerpo totalmente ordenado.*

Demostración. Se tiene que la estructura $\langle {}^*\mathbb{R}, * +, * \cdot, * \leq \rangle$ es un cuerpo, hay que ver que $* \leq$ es un orden total y que se verifican las leyes de monotonía de la adición y multiplicación:

- i. $\{n : A_n \leq A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, entonces $a * \leq a$. Así $* \leq$ es reflexiva.
- ii. Sean $[A] * \leq [B]$ y $[B] * \leq [A]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n \leq A_n\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n \leq A_n\} \subset \{n : B_n = A_n\} \in \mathcal{U}$. Luego, $[A] =_{\mathcal{U}} [B]$ y así $* \leq$ es antisimétrica.
- iii. Sean $[A] * \leq [B]$ y $[B] * \leq [C]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : B_n \leq C_n\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : B_n \leq C_n\} \subset \{n : A_n \leq C_n\} \in \mathcal{U}$. Luego, $[A] * \leq [C]$ y así $* \leq$ es transitiva.

Por los puntos anteriores tenemos que $* \leq$ es un orden sobre ${}^*\mathbb{R}$. Probaremos que se cumple la ley tricotómica:

Sean $[A], [B] \in {}^*\mathbb{R}$. Supongamos que $[A] * \not\leq [B]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \notin \mathcal{U}$ y por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, $\{n : B_n < A_n\} \in \mathcal{U}$, por lo tanto se cumple la ley tricotómica y así $[B] * < [A]$ ó $[A] * < [B]$ ó $[A] =_{\mathcal{U}} [B]$.

Luego $* \leq$ es un orden total sobre ${}^*\mathbb{R}$.

Falta ver que se satisfacen las dos propiedades relativas a este orden y los hiper-operadores, es decir, las leyes de monotonía:

- i. Sean $[A], [B], [C] \in {}^*\mathbb{R}$ y $[A] * \leq [B]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : A_n \leq B_n\} \subset \{n : A_n + C_n \leq B_n + C_n\} \in \mathcal{U}$ por ser $\mathcal{U}$ un filtro. Así $[A] * + [C] * \leq [B] * + [C]$.
- ii. Sean $[A], [B], [C] \in {}^*\mathbb{R}$, $[A] * \leq [B]$, $[0] * \leq [C]$, entonces $\{n : A_n \leq B_n\} \in \mathcal{U}$ y $\{n : 0 \leq C_n\} \in \mathcal{U}$. Luego $\{n : A_n \leq B_n\} \cap \{n : 0 \leq C_n\} \subset \{n : A_n \cdot C_n \leq B_n \cdot C_n\} \in \mathcal{U}$, por ser $\mathcal{U}$ un filtro. Así, $[A] * \cdot [C] * \leq [B] * \cdot [C]$.

Finalmente, podemos concluir que $\langle {}^*\mathbb{R}, * +, * \cdot, * \leq \rangle$ es un cuerpo totalmente ordenado. ■

Teorema 74 Los conjuntos $\mu(0)$ y $G(0)$ son subanillos totalmente ordenados de ${}^*\mathbb{R}$ sin divisores de cero y $G(0)$ tiene identidad.

Demostración. Para verificar que $G(0)$ es un anillo totalmente ordenado sin divisores de cero sólo nos resta ver que es cerrado bajo las operaciones, ya que el resto de las condiciones se verifican en ${}^*\mathbb{R}$

Como ${}^*1 \in G(0)$, éste tiene unidad.

Mencionaremos primero que la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ también se transfiere a ${}^*\mathbb{R}$ así como la propiedad: el valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos.

Sean $a, b \in G(0)$, entonces existen ${}^*x, {}^*y \in {}^*\mathbb{R}$ tales que $|a| < {}^*x$ y $|b| < {}^*y$. Luego $|a + b| \leq |a| + |b| < {}^*x + {}^*y = {}^*(x + y)$. Luego $a + b \in G(0)$.

Sean $a, b \in G(0)$, entonces existen ${}^*x, {}^*y \in {}^*\mathbb{R}$ tales que $|a| < {}^*x$ y $|b| < {}^*y$. Luego $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| < {}^*x \cdot {}^*y = {}^*(x \cdot y)$. Luego $a \cdot b \in G(0)$.

Para ver que $\mu(0)$ es un anillo totalmente ordenado, procedemos de igual manera que con $G(0)$.

■

Recordamos que si A es un anillo, $I \subset A$ es un ideal de A si y sólo si es un subanillo de A y para cada $a \in A, b \in I$, el producto $a \cdot b \in I$. Un ideal $I \subset A$ es maximal si y sólo si para cualquier otro ideal I_1 , tal que $I \subset I_1$, entonces $I = I_1$ o $I = A$.

Teorema 75 El conjunto de infinitesimales $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$.

Demostración. Primero veremos que es un ideal (que es subanillo ya lo probamos): sean $a \in G(0)$ y $\epsilon \in \mu(0)$. Entonces existe un ${}^*x \in {}^*\mathbb{R}$ tal que $|a| \leq {}^*x$, es decir $\{n : |A_n| \leq X_n = x\} \in \mathcal{U}$. Sea $\epsilon = g = [G]$ y consideremos $y \in \mathbb{R}^+$ arbitrario tal que $g < {}^*y$, es decir $\{n : |G_n| \leq Y_n = y\} \in \mathcal{U}$. Entonces, $F = \{n : |A_n| \leq X_n = x\} \cap \{n : |G_n| \leq Y_n = y\} \in \mathcal{U}$ por ser filtro. Luego, $F \subset \{n : |A_n \cdot G_n| \leq x \cdot y\} \in \mathcal{U}$ pues es filtro. Como $x \cdot y$ es arbitrario, $a \cdot \epsilon \in \mu(0)$. Así, $\mu(0)$ es un ideal de $G(0)$.

Para ver que es maximal, tomemos I ideal de $G(0)$ tal que $\mu(0) \subset I$, y supongamos que $\mu(0) \neq I$. Entonces existe algún $b \in I - \mu(0)$, $b \neq 0$ y existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{n : |B_n| \geq x\} \in \mathcal{U}$. Luego, $\{n : |1/B_n| \leq 1/x\} \in \mathcal{U}$. En consecuencia $[B^{-1}] = b^{-1} \in G(0)$ entonces ${}^*1 = b \cdot b^{-1} \in I$ pues I es un ideal de $G(0)$ y por esto $I = G(0)$. Por lo tanto, $\mu(0)$ es un ideal maximal de $G(0)$.

■

Teorema 76 Sea A_n una sucesión de números reales. Entonces $[A] \in \mu(x)$ para todo ultrafiltro libre si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = x$.

Demostración. Primero notemos que para un ultrafiltro libre fijo $\mathcal{U}$ y su mónada $\mu(x)$, $[A] \in \mu(x)$ si y sólo si existe algún $\epsilon \in \mu(0)$ tal que $[A] = x + \epsilon$, $[A] - x = \epsilon$ si y sólo si $[A] - x \in \mu(0)$ si y sólo si $\{n : |A_n - X_n| < r\} \in \mathcal{U}$, para todo positivo r arbitrario.

$\Rightarrow$) Supongamos que $A_n \not\rightarrow x$, entonces existe un positivo r tal que $X = \{n : |A_n - x| \geq r\}$ es un conjunto infinito y cada subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ está en algún ultrafiltro libre $\mathcal{U}_1$. Así $X \in \mathcal{U}_1$ y por ser $\mathcal{U}_1$ un ultrafiltro, el complemento de X , $\{n : |A_n - x| < r\} \notin \mathcal{U}_1$ entonces $[A] \notin \mu(x)$ (por lo dicho al principio de la demostración), lo cual contradice la hipótesis. Luego, $A_n \rightarrow x$.

$\Leftarrow$) Asumimos que $A_n \rightarrow x$ y tomamos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre. Entonces para un positivo r arbitrario tenemos que $|A_n - x| < r$ para un número infinito de A_n , así $\{n : |A_n - x| < r\} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Como r es arbitrario $[A] \in \mu(x)$. ■

Apéndice C

Ideales y filtros

A cada $A = (A_n)$ asociamos un conjunto (su conjunto cero) dado por $C(A) = \{n \in \mathbb{N} : A(n) = 0\} \subseteq \mathbb{N}$.

Dado un ideal $\mathcal{I} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le asociamos el conjunto de sus conjuntos cero:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{C(A) : A \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad (\text{C.1})$$

que resulta ser un filtro sobre los $\mathbb{N}$:

- Como $\mathcal{I} \neq \emptyset$ por ser ideal, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.
- Sean $C(A), C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces $A, B \in \mathcal{I}$. Luego $A^2 + B^2 \in \mathcal{I}$ (por ser $\mathcal{I}$ un ideal) y $C(A^2 + B^2) = \{n : (A^2 + B^2)(n) = 0\} = \{n : A^2(n) + B^2(n) = 0\} = \{n : A^2(n) = 0 \wedge B^2(n) = 0\} = \{n : A(n) = 0 \wedge B(n) = 0\} = \{n : A(n) = 0\} \cap \{n : B(n) = 0\} = C(A) \cap C(B)$ y así $C(A) \cap C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.
- Sean $C(A) \subseteq C(B) \subseteq \mathbb{N}$ y $C(A) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces $A \in \mathcal{I}$. Sea $F(n) = \begin{cases} 0 & n \in C(B) \\ 1 & n \notin C(B) \end{cases}$, entonces $F \cdot A \in \mathcal{I}$ pues $\mathcal{I}$ es un ideal. Además $C(F \cdot A) = \{n : (F \cdot A)(n) = 0\} = \{n : F(n) = 0 \vee A(n) = 0\} = \{n : F(n) = 0\} \cup \{n : A(n) = 0\} = C(B) \cup C(A) = C(B)$ y así $C(B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.
- Supongamos que $\emptyset \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, entonces existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $C(A) = \emptyset$, es decir $A(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, podemos definir $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por $B(n) = 1/A(n)$. Así $A \cdot B = 1 \in \mathcal{I}$, con lo que $\mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, lo que contradice la hipótesis. Entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.

Luego $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ es un filtro sobre los $\mathbb{N}$.

Existe, además, la construcción inversa: si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre los $\mathbb{N}$, le asociamos el conjunto de funciones:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / C(A) \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad (\text{C.2})$$

que resulta ser un ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ distinto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- Sean $A, B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, entonces $A + B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$?

Como $A, B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ se tiene que $C(A), C(B) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $C(A) \cap C(B) \in \mathcal{F}$. Además $C(A) \cap C(B) = \{n : A(n) = 0\} \cap \{n : B(n) = 0\} = \{n : A(n) = 0 \wedge B(n) = 0\} \subseteq \{n : (A + B)(n) = 0\} = C(A + B)$, entonces $C(A + B) \in \mathcal{F}$; luego $A + B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

- Sean $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ y $B \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces $A \cdot B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$?

Como $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ se tiene que $C(A) \in \mathcal{F}$. Además $C(A) = \{n : A(n) = 0\} \subseteq \{n : (A \cdot B)(n) = 0\} = C(A \cdot B)$, entonces por ser $\mathcal{F}$ un filtro, $C(A \cdot B) \in \mathcal{F}$ y así $A \cdot B \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

- Falta ver que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Si $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ entonces $C(A) \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $C(A) \neq \emptyset$, con lo que $\nexists A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ tal que $A(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, así $1 \notin \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ quedando demostrado que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Luego $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es un ideal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Podemos ver que dado un ideal $\mathcal{I}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y un filtro $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$, tenemos lo siguiente:

1. $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$: $A \in \mathcal{I}$ si y sólo si $C(A) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ si y sólo si $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I}}}$ (por C.1 y C.2)
2. $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$: $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$ si y sólo si $M = C(A)$ con $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$. Y $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ si y sólo si $C(A) \in \mathcal{F}$ (por C.1 y C.2).

Por 1 y 2 se sigue que cada ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es de la forma $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, donde $\mathcal{F}$ es cierto filtro en $\mathbb{N}$. Además, cada filtro sobre $\mathbb{N}$ es de la forma $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, donde $\mathcal{I}$ es cierto ideal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Notamos que dado un filtro $\mathcal{F}$ en $\mathbb{N}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es un ideal maximal en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Es decir, todos los ideales maximales $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son de la forma: $\mathcal{M} = \mathcal{I}_{\mathcal{U}}$ cuando $\mathcal{U}$ son ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Esto lo podemos deducir por lo hecho anteriormente y la definición de ultrafiltro. Análisis no estándar