Teoremas de existencia para problemas optimales

Claudia Ferrari
Facultad de Ciencias Exactas
U.N.L.P.
Director: Dr. Oscar A. Barraza

Mayo 2004

Resumen

Este trabajo corresponde a la materia *Trabajo de Iniciación a la Investigación* y está basado en el artículo *Teoremas de existencia para problemas óptimos con función de costo vectorialmente valuada* de Czeslaw Olech, 1969.

1 Optimización Dinámica

La optimización dinámica estudia la optimización de sistemas que evolucionan con el tiempo. Se trata de controlar el sistema a lo largo de un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo previamente fijado. Veamos algún ejemplo:

Una persona viaja en su coche desde una ciudad A hasta otra B. El coche se va moviendo, por lo que se trata de un sistema dinámico. En un momento dado, el estado del sistema viene dado por el lugar en que se encuentra el vehículo y por la velocidad que lleve. En cada instante el conductor tiene a su disposición los controles: volante, freno y acelerador. El sistema en un momento dado depende del estado del sistema en algún momento anterior y de los controles que haya introducido. La trayectoria que siga el vehículo dependerá del punto de partida y de los controles que el conductor vaya introduciendo en el sistema en cada instante, los cuales a su vez dependerán del objetivo del conductor: puede ser minimizar el tiempo o minimizar el costo o minimizar la cantidad de combustible.

1.1 Breve historia de la optimización dinámica

Se puede considerar que la optimización dinámica tiene raíces en el cálculo de variaciones, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal.

El cálculo de variaciones surgió en el siglo xvii y recibió en los trabajos de Euler y de Lagrange la forma de una teoría matemática rigurosa. El cálculo de variaciones se aplicó, tras su descubrimiento, sobre todo en física, especialmente en mecánica.

Durante la segunda guerra mundial aparecieron sistemas de control en los que la transición era más importante que la quietud: es la clase de los servomecanismos, sistemas de persecución. Aparece la llamada teoría clásica de control, basada fundamentalmente en el dominio frecuencia.

Sin embargo, esta teoría presentaba serias limitaciones pues restringía su estudio a sistemas lineales, con una sola variable de entrada y una de salida e invariantes en el tiempo. Por otra parte, había que considerar, en determinados problemas, otros criterios que valoraran la evolución del sistema.

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad introducidos por Kalman en 1960, así como los métodos de optimización de Belman en 1957 y Pontryagin en 1962 fueron el origen de lo que se conoce como teoría moderna de control o control óptimo, basada en la descripción de un sistema según el enfoque del espacio de los estados. Los nuevos avances y sus aplicaciones no sólo caían en el campo de la ingeniería, sino también en el de la economía, biología, medicina y ciencias sociales.

En los sesenta se utilizan sistemáticamente técnicas de control óptimo en la investigación de la teoría del crecimiento. A partir de los setenta, hay gran interés por la teoría de control en los distintos campos de la economía y desde entonces proliferan trabajos sobre el tema.

2 Introducción

En este trabajo consideramos el siguiente problema de control óptimo. Consideremos un sistema de control

$$\dot{y} = f(t, y, u), \tag{2.1}$$

donde f mapea $J_0 \times Y \times E$ en Y donde $J_0 = [a_0, b_0]$ es un intervalo y Y, E son espacios euclídeos.

Por una solución de (2.1) se entiende una terna *(J,y,u)*, donde $J \subset J_0$ es un intervalo, $y : J \to Y$ es absolutamente continua, $u : J \to E$ es medible Lebesgue, y $\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t))$, $u(t) \in U(t, y(t))$ en casi todo punto de J. El dominio de control U es una aplicación de $J_0 \times Y$ en subconjuntos de E.

Junto con el sistema (2.1), se considera una función que denominamos *"función de costo"*

$$I(J, y, u) = \int_J g(t, y(t), u(t))\, dt \tag{2.2}$$

donde (J, y, u) es una solución de (2.1) y g mapea $J_0 \times Y \times E$ en otro espacio euclídeo X.

Un orden "$\leq$"está dado en X con respecto al cual un cono positivo C es convexo y cerrado y $C - C = \{x | x = c_1 - c_2, c_1, c_2 \in C\} = X$.

El problema es minimizar I (con respecto al orden en X) en una cierta clase Ω de soluciones de (2.1). La clase Ω debe estar determinada, por ejemplo, por condiciones de acotación $y(a_0) \in A_0$, $y(b_0) \in B_0$, donde A_0, B_0 son conjuntos fijos dados.

Como el orden en general no es total, estamos, pues, buscando puntos minimales de $I(\Omega)$ más que un mínimo absoluto; eso significa que queremos encontrar $\omega^* \in \Omega$ tal que para todo $\omega \in \Omega$, la desigualdad $I(\omega) \leq I(\omega^*)$ implique $I(\omega^*) \leq I(\omega)$. Una tal ω^* será llamada *una solución óptima.*

En este trabajo, fijaremos condiciones sobre *f*, *g*, U y Ω que garanticen la existencia de una solución óptima.

En el artículo [2], Lamberto Cesari, dio numerosos teoremas de esta naturaleza para el caso en que X es unidimensional. En el mismo, dominios de control no compactos son considerados, lo que permite al autor dar una teoría general de existencia aplicando el problema de control óptimo de Pontrjagin y el clásico problema de Lagrange del cálculo de variaciones.

El artículo [4] de Olech está fuertemente inspirado por el trabajo [2] y presenta algunas generalizaciones de sus teoremas. Por un lado, trata con una función de costo vectorialmente valuada, mientras Cesari considera el caso escalar. Por otra parte, estamos en condiciones de relajar algunas condiciones de regularidad sobre f, g y U asumidas en [2].

Aunque la novedad (para la época) de este trabajo yace, tal vez, más en su tratamiento que en sus resultados.

Para probar la existencia de un punto minimal de $I(\Omega)$ se muestra primero que la clausura $\mathrm{cl}I(\Omega)$ tiene un punto tal. Esto da una sucesión minimizante $\{\omega_k\} \subset \Omega$; y ahora queremos conectar con tal sucesión un elemento ω^* de Ω tal que $I(\omega^*) \leq \lim_{k\to\infty} I(\Omega_k) =$ un punto minimal de $\mathrm{cl}I(\Omega)$. Esto es usualmente hecho, estableciendo alguna propiedad de compacidad para Ω y de continuidad para I.

3 El lema principal

Relevante para nuestras consideraciones es el rol que juegan los conjuntos cerrados y convexos que no contienen una recta y comenzaremos discutiendo algunas de sus propiedades.

Proposición 3.1. *Sea Z un espacio euclídeo de dimensión finita y P un subconjunto propio de Z. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *P es cerrado, convexo y no contiene una recta.*

(ii) *Para cada subconjunto denso D de Z, se cumple la siguiente igualdad*

$$P = \bigcap_{d\in D} \{z/\langle d, z\rangle \leq \sup_{p\in P}\langle d, p\rangle\} \tag{3.1}$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar en Z.

Para nuestro propósito, necesitaremos una modificación de (ii). Para cada subconjunto P de Z, definimos

$$C_P = \{a/p + \lambda a \in P, \text{ para todo } p \in P \ y \ \lambda \geq 0\}. \tag{3.2}$$

El conjunto C_P es no vacío (siempre contiene el cero) y es un cono ya que si $a, b \in C_P, a+b \in C_P$. Es claro de la definición (3.2) que si $a \in C_P$ y $\alpha \geq 0$, entonces $\alpha a \in C_P$; por lo que $\alpha C_P \subset C_P$ para cada $\alpha > 0$.

El conjunto C_P es llamado el *cono asintótico de P*.

- Si P es cerrado, entonces C_P es cerrado ya que si $a \in \overline{C_P}$,

  $$\exists (a_n)_n \subset C_P / \lim_{n\to\infty} a_n = a \, .$$

  Luego $\forall n :\ p + \lambda a_n \in P,\ p \in P, \lambda \geq 0$. Si fijamos $p \in P$ y $\lambda \geq 0$, se tiene que

  $$\lim_{n\to\infty} p + \lambda a_n = p + \lambda a \, .$$

  Pero por ser P cerrado , $a \in C_P$. Moviendo p y λ se tiene que $\overline{C_P} \subset C_P$.

- Si P es convexo, entonces también lo es C_P ya que tomando a_1 y $a_2 \in C_P$ y $0 \leq t \leq 1$, se tiene

  $$p + \lambda a_1 \in P \quad ,$$

  $$p + \lambda a_2 \in P \quad .$$

  Por la convexidad de P

  $$t.(p + \lambda a_1) + (1-t)(p + \lambda a_2) \in P \, ,$$

  es decir,

  $$p + \lambda\left[(t.a_1) + (1-t)a_2\right] \in P \, .$$

  Esto es,

  $$t.a_1 + (1-t)a_2 \in C_P \, .$$

- Si P es cerrado y convexo, el cono C_P es propio si y sólo si P no contiene una recta.

  Si C_P no es propio, existe $a \neq 0$ tal que $a \in C_P$ y $a \in (-C_P)$; pero esto equivale a $p + \lambda a \in P \ \wedge \ p + \lambda(-a) \in (-C_P)$, es decir, P contiene una recta.

Sintetizando, podemos establecer que para un conjunto P cerrado y convexo que no contiene una recta, el cono asintótico C_P es cerrado convexo y propio.

Consideremos, ahora el "polar" C_P^0 de C_P, eso es el conjunto

$$C_P^0 = \{c \,/ \langle c, a\rangle \ \leq 0 \text{ para cada } a \in C_P\} \, . \tag{3.3}$$

Notemos que el supremo en el lado derecho de (3.1) puede ser finito sólo si $d \in C_P^0$.

Supongamos que dicho supremo es infinito. Para cada $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande existe $p_n \in P$ tal que $\langle d, p_n \rangle > n$.

Tomemos $a \in C_P$ y llamemos $\widetilde{p_n} = p_n + \lambda a$ con $\lambda \geq 0$, de este modo $\widetilde{p_n} \in P$.

Sea $\widetilde{n} \in N$, $\widetilde{n} > n / \langle d, \widetilde{p} \rangle > \widetilde{n}$, entonces

$$\langle d, \widetilde{p} \rangle = \langle d, p_n \rangle + \langle d, \lambda a \rangle \quad .$$

Luego, $\langle d, \lambda a \rangle > 0$ y, por lo tanto, $d \notin C_P^0$

Es decir, (3.1) se mantiene si reemplazamos a D por $D \cap C_P^0$.

Como en (ii) la relación (3.1)es supuesta para cada denso D, se sigue que si (ii) es cierta, entonces C_p^0 tiene interior no vacío y D puede ser reemplazado en (3.1) por $D \cap \text{int } C_P^0$.

Por otro lado, si int C_P^0 es no vacío y para cada denso $D \subset Z$

$$P = \bigcap_{d \in D \cap int C_P^0} \left\{ z / \langle d, z \rangle \leq \sup_{p \in P} \langle d, p \rangle \right\}, \tag{3.4}$$

entonces (3.1) se satisface. En realidad, para cada D, el conjunto P está incluído en el lado derecho de (3.1) y el último está incluído en el lado derecho de (3.4) y, en definitiva, en P.

Por lo tanto, modificamos la proposición anterior por la siguiente.

Proposición 3.2. *Si P es un subconjunto propio de Z, entonces (i) es equivalente a*

(ii') C_P tiene interior no vacío y (3.4) *se mantiene para cada subconjunto denso $D \subset Z$.*

Antes de la prueba, notemos que si P satisface (i), entonces $\max\limits_{p \in P} \langle d, p \rangle$ existe para cada $d \in$ int $C_P^0 - \{0\}$ y es finito. En realidad, el conjunto

$$P_{d,\alpha} = \{ z / \langle d, z \rangle \geq \alpha \} \cap P$$

es compacto para cada α si $d \in$ int C_P^0.

Si el conjunto $P_{d,\alpha}$ no fuera acotado, debería existir $a \neq 0$ tal que

$$p + \lambda a \in P_{d,\alpha} \quad ,$$

para cada $p \in P_{d,\alpha}$y $\lambda > 0$. Eso es $a \in C_{P_{d,\alpha}} \subset C_P$. Pero $\langle d, p + \lambda a \rangle \geq \alpha$ para cada $\lambda > 0$ lo que implica que $\langle d, a \rangle \geq 0$. La última desigualdad contradice la hipótesis de que $d \in \text{int } C_P^0 - \{0\}$, por lo tanto, $P_{d,\alpha}$ es acotado y como es cerrado (intersección de cerrados), es compacto de donde se sigue la existencia del $\max\limits_{p\in P}\langle d, p\rangle$.

Por lo tanto, en (3.4) el supremo se puede reemplazar por el máximo.

Demostración de la proposición 3.2

Probaremos que (i) implica (ii'). Por lo expresado anteriormente, C_P^0 tiene interior no vacío. Es trivial ver que $P \subset \bigcap\limits_{d\in D\cap \text{int } C_P^0} \left\{z/\ \langle d, z\rangle\ \leq \sup\limits_{p\in P}\langle d, p\rangle\right\}$.

Sea $p_0 \in \bigcap\limits_{d\in D\cap \text{int } C_P^0} \left\{z/\ \langle d, z\rangle\ \leq \sup\limits_{p\in P}\langle d, p\rangle\right\}$.

Haciendo $\alpha = \langle d, p_0\rangle$, se tiene que $\alpha \leq \max\limits_{p\in P}\langle d, p\rangle$. Si $\widetilde{p} \in P$ es el que realiza el máximo, entonces

$$\alpha = \langle d, p_0\rangle\ \leq \langle d, \widetilde{p}\rangle\quad (\diamond)$$

Pero si $p_0 \notin P$, se tiene que, $p_0 - \widetilde{p} \notin C_P$, lo que se ve haciendo $p_0 = \widetilde{p} + 1.(p_0 - \widetilde{p})$. Pero entonces $\exists \widetilde{c} \in C_P^0 : \langle \widetilde{c}; p_0 - \widetilde{p}\rangle\ > 0$.

Como D es denso existe $\widetilde{d} \in\ D \cap \text{int } C_P^0 : \langle \widetilde{d}, p_0 - \widetilde{p}\rangle > 0$.

Luego, $\langle \widetilde{d}, p_0\rangle\ >\ \langle \widetilde{d}, \widetilde{p}\rangle$. Lo que contradice ($\diamond$) y se tiene la inclusión buscada.

Ahora probaremos que (ii') implica (i). P es cerrado por ser intersección de cerrados en virtud de la continuidad del producto escalar. P es convexo por ser intersección de convexos.

P no contiene una recta. Supongamos que existe $L_a \subset P$ con

$$L_a = \{p_0 + \lambda a,\ p_0 \in P,\ \lambda \text{ real, algún } a \in Z\}\quad .$$

De aquí tanto a, $-a \in C_P$, luego cualquiera sea $d \in C_P^0$, $\langle d, a\rangle = 0$ lo que se opone a (ii'). □

En lo que sigue, Z será dotado con un orden " $\leq$ " tal que $(Z, \leq)$ forme un espacio vectorial ordenado y de modo que el cono positivo C sea cerrado y convexo.

Sea $X = C - C = \{z/\ z = c_1 - c_2,\ c_1,\ c_2\ \in C\}$. El conjunto X es un subespacio cerrado de Z. Con Y denotamos a su complemento ortogonal. En particular, X o Y pueden ser cero-dimensionales. En otras palabras, no descartamos $C = \{0\}$ o $C - C = Z$. Por supuesto, Z es suma directa de X

e Y y por lo tanto, cada $z \in Z$ puede ser representado de una única forma $x + y$, con $x \in X, y \in Y$.

Ahora podemos establecer nuestro lema.

Lema 3.3. *Sea P una aplicación de un intervalo $J = [a, b]$ en subconjuntos cerrados convexos de Z.*

Asumimos que

$$C_{P(t)} = C \text{ para cada } t \in J \tag{3.5}$$

y que para cada $c \in C^0 - \{0\}$, existe una $\phi_c : J \to R$ integrable tal que

$$\max_{p \in P(t)} \langle c, p \rangle \leq \phi_c(t) \quad , \tag{3.6}$$

donde C^0 es el polar de C.

Sea $z_k : J \to Z$ absolutamente continua y uniformemente acotada sobre J, $k = 1, 2, \ldots\ldots$ Asumimos que para cada k

$$\dot{z}_k(t) \in P(t) \text{ c.t.p. en } J \quad . \tag{3.7}$$

Bajo estas hipótesis, existe una subsucesión z_{k_i}, $i = 1, 2, \ldots$ convergente en todo punto en J a una función $z + v$ donde

1. *z es absolutamente continua y*

$$\dot{z}(t) \in P(t) \text{ c.t.p. en } J \quad ; \tag{3.8}$$

2. *v es singular y creciente, eso es*

$$\dot{v}(t) = 0 \text{ c.t.p. en } J \text{ y } v(s) \leq v(t) \text{ si } s \leq t \quad ; \tag{3.9}$$

3. *si $y_{k_i}(t)$ denota la componente en Y de $z_{k_i}(t)$,*

$$y_{k_i}(t) \to y(t) \text{ uniformemente en } J \quad , \tag{3.10}$$

donde $y(t)$ es la componente en Y de $z(t)$.

La prueba del lema será precedida por una proposición la que, esencialmente, es la versión unidimensional del mismo.

Proposición 3.4. *Sea* $\alpha_k : J \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua y uniformemente acotada,* $k = 1, 2, \ldots..$ *Asumimos que*

$$\dot{\alpha}_k(t) \leq \lambda(t) \leq \phi(t) \;\; \text{c.t.p. en } J \tag{3.11}$$

donde ϕ *es integrable.*

Entonces, existe una subsucesión $\{\alpha_{k_i}\}$ *convergente en todo punto a una función* $\alpha + \beta$ *donde* $\alpha : J \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua y*

$$\dot{\alpha}(t) \leq \lambda(t) \;\; \text{c.t.p. en } J \tag{3.12}$$

y $\beta : J \to \mathbb{R}$ *es singular y no creciente, eso es:*

$$\dot{\beta}(t) = 0 \;\; \text{c.t.p.en } J \;\; y \;\; \beta(t) \geq \beta(s) \;\; si \;\; t \leq s \;\; . \tag{3.13}$$

Más aún, para cada $\epsilon > 0$*, existe* i_0 *tal que*

$$\beta(b) - \epsilon \leq \alpha_{k_i}(t) - \alpha(t) \leq \beta(a) + \epsilon \; si \; i \geq i_0 \; , \; t \in J \; . \tag{3.14}$$

Demostración

Pongamos

$$\gamma(t) = \sup_k \; \dot{\alpha}_k(t)$$

y

$$\delta_k(t) = \alpha_k(t) - \int_a^t \gamma(\tau) \, d\tau \quad .$$

Por (3.11), $\gamma(t) \leq \lambda(t)$ c.t.p. en J y además γ es integrable por estar acotada por una función integrable excepto en un conjunto de medida nula.

De la acotación uniforme de $\{\alpha_k\}$ se tiene que

$$\mid \delta_k(t) \mid \leq \mid \alpha_k(t) \mid + \mid \int_a^t \gamma(\tau) \, d\tau \mid < M, \quad \forall k, \; \forall t$$

Luego, $\{\delta_k\}$ está uniformemente acotada. Además, si fijamos k y tomamos $t_0 \leq s_0$, tenemos que

$$\delta_k(t_0) - \delta_k(s_0) = \alpha_k(t_0) - \alpha_k(s_0) + \int_{t_0}^{s_0} \sup_k \; \dot{\alpha}_k(\tau) \, d\tau \geq 0,$$

luego, las δ_k resultan no crecientes para cada k, lo que implica que $\dot{\delta}_k(t) \leq 0$ c.t.p. en J, para todo k.

Así, es posible elegir una subsucesión convergente en todo punto $\{\delta_{k_i}\}$ resultando no creciente la función límite ; por el teorema de la descomposición canónica, ésta puede ser representada como la suma $\delta + \beta$ donde δ es absolutamente continua, β es singular y ambas no crecientes.

De este modo, la correspondiente sucesión $\{\alpha_{k_i}\}$ converge en todo punto a $\alpha + \beta$ donde $\alpha(t) = \delta(t) + \int_a^t \gamma(\tau)\, d\tau$.

Luego, α es absolutamente continua por ser suma de absolutamente continuas y

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\delta}(t) + \gamma(t) \leq \gamma(t) \leq \lambda(t) \ .$$

Así se satisface (3.12) y β cumple (3.13).

Para probar la segunda parte, tomemos $\epsilon > 0$ y elijamos una partición $a = t_0 < t_1 < ... < t_s = b$ de J tal que $0 \leq \delta(t_j) - \delta(t_{j+1}) < \epsilon/2$ ($\diamond$). Tomemos i_0 suficientemente grande que $|\ \delta_{k_i}(t_j) - \delta(t_j) - \beta(t_j)\ | < \epsilon/2$ ($\diamond\ \diamond$), para $i \geq i_0$ y $j = 0, 1, ..., s$. Estas desigualdades y la monotonía de $\delta_{k_i}, \delta, \beta$ producen para $i \geq i_0$ y $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\alpha_{k_i}(t) - \alpha(t) = \delta_{k_i}(t) - \delta(t) \leq \delta_{k_i}(t_j) - \delta(t) \ .$$

Por la desigualdad ($\diamond$), se tiene

$$\alpha_{k_i}(t) - \alpha(t) \leq \delta_{k_i}(t_j) - \delta(t_j) + \epsilon/2$$

Y usando ($\diamond\ \diamond$) se obtiene la cota superior de (3.14). En forma similar se obtiene la cota inferior, lo que completa la prueba. $\square$

Demostración del lema 3.3

Tomemos un elemento arbitrario $d \in \operatorname{int} C^0$ y hagamos $\alpha_k(t) = \langle d, z_k(t) \rangle$.

Por (3.6) y (3.7), $\{\alpha_k\}$ satisface las hipótesis de la proposición (3.4) con $\lambda(t) = \max\limits_{p \in P(t)} \langle d, p \rangle$, que existe por la continuidad del producto escalar.

Debido a la continuidad absoluta de $z_k(t)$, se obtiene, fijando k , que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} |\ \alpha_k(t_{i+1}) - \alpha_k(t_i)\ | &= \sum_{i=0}^{n} |\ \langle d, z_k(t_{i+1}) - z_k(t_i) \rangle\ | \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \|\ d\ \|\ \|\ z_k(t - i + 1) - z_k(t_i)\ \| \\ &= \|\ d\ \| \sum_{i=0}^{n} \|\ z_k(t_{i+1}) - z_k(t_i)\ \| < \epsilon \end{aligned}$$

Además, por ser $\{z_k\}$ uniformemente acotada, se tiene:

$$| \alpha_k(t) |=| \langle d, z_k(t)\rangle |\leq\| d \| \| z_k(t) \|\leq\| d \| \quad M = \widetilde{M}$$

donde M es la cota uniforme de $\{z_k\}$.

Por último, como $\dot{\alpha}_k(t) = \langle d, \dot{z}_k(t)\rangle$ y por (3.7) $\dot{z}_k(t) \in P(t)$ c.t.p. en J, entonces

$$\dot{\alpha}_k(t) \leq \lambda(t) \text{ c.t.p. en } J.$$

Así, tomando a $\phi = \phi_d$, existe una subsucesión $\{z_{k_i}\}$ convergente en todo punto tal que

$$\langle d, z_{k_i}\rangle \to \alpha_d(t) + \beta_d(t), \quad t \in j \tag{3.15}$$

con α_d absolutamente continua,

$$\dot{\alpha}_d(t) \leq \max_{p\in P(t)} \langle d, p\rangle \quad c.t.p.\ en\ J, \tag{3.16}$$

β_d singular y no creciente.

Como int C^0 es no vacío y abierto, existe una base $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ de Z contenida en el int C^0. De modo evidente, existe una subsucesión $\{z_{k_i}\}$ tal que (3.15) y (3.16) se satisfacen para cada $d = d_j$, $j = 1, ..., n$. Pero $\{d_1, ..., d_n\}$ es una base y por lo tanto la subsucesión $\{z_{k_i}\}$ debe ser ella misma convergente. En consecuencia la función límite puede ser representada como una suma $z + v$ donde $z(t)$ y $v(t)$ son las únicas soluciones de los siguientes sistemas, respectivamente:

$$\langle d_j, z(t)\rangle = \alpha_{d_j}(t)\ ,\ \langle d_j, v(t)\rangle = \beta_{d_j},\ \ j = 1, ..., n,$$

y z es absolutamente continua y v es singular. Ahora, ya que tenemos una subsucesión convergente, (3.15) se cumple para cada $d \in$ int C^0 y

$$\alpha_d(t) = \langle d, z(t)\rangle\ ,\ \beta_d(t) = \langle d, v(t)\rangle\ .$$

Claramente, α_d es absolutamente continua y β_d es singular. Más aún, por la proposición (3.4), (3.16) se cumple y β_d es no creciente para cada $d \in$ int C^0. Luego

$$\dot{\alpha}_d(t) = \langle d, \dot{z}(t)\rangle \leq \max_{p\in P(t)} \langle d, p\rangle \quad c.t.p.\ en\ J \tag{3.17}$$

y

$$\langle d, v(t) - v(s)\rangle \leq 0 \quad si\ \ t > s\ \ , \tag{3.18}$$

ya que

$$\beta_d(t) = \langle d, v(t)\rangle \leq \beta_d(s) = \langle d, v(s)\rangle\ .$$

Ambas (3.17) y (3.18) se verifican para cada $d \in \text{int } C^0$. Ahora hipótesis (3.5) y (3.17) producen (3.8), haciendo $z = \dot{z}(t)$ y $P = P(t)$ en la proposición (3.1).

Mientras que (3.18) implica que $v(t) - v(s) \in C$, eso es la segunda parte de (3.9), por ser el cono positivo.

Para probar que la componente en Y, y_{k_i} de z_{k_i} converge uniformemente a la componente en Y, y de z, notemos que si $c \in \text{int } C^0 \cap X$, $d \in Y$, entonces $d + \lambda c \in \text{int } C^0$ para cada $\lambda > 0$. Esto es $\langle d + \lambda c, a\rangle \leq 0$, $\forall a \in C$, pues $\langle d, a\rangle = 0$ por ser Y el complemento ortogonal de X y $\langle c, a\rangle \leq 0$.

Sea $\{d_1, ..., d_s\}$ una base ortonormal de Y y sea c_0 un elemento fijo de int $C^0 \cap X$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $v(a) = 0$. Entonces por (3.9),haciendo $s = a$, se tiene que $v(t) \in C \subset X$ para cada $t \in J$.

Tomemos $\epsilon > 0$ y elijamos $\lambda > 0$ tal que para cada $i = 1, 2, ...$

$$\lambda \mid \langle c_0, x_{k_i}(t) - x(t)\rangle \mid + \lambda \mid \langle c_0, v(b)\rangle \mid < \epsilon \ , \ t \in J \ . \tag{3.19}$$

Además, por ser Y complemento ortogonal de X se tiene que

$$\langle d_j + \lambda c_0, z_{k_i}(t)\rangle = \langle d_j, y_{k_i}(t)\rangle + \lambda\langle c_0, x_{k_i}(t)\rangle \ .$$

Luego, por (3.14) de la proposición (3.4), (3.19) y la última desigualdad, obtenemos

$$\mid \langle d_j, y_{k_i}(t) - y(t)\rangle \mid \leq 2\,\epsilon, \text{ si } \ t \in J, \ \ i \geq i_0 \tag{3.20}$$

Es claro que i_0 puede ser elegido independientemente de j , ya que pertenece a un conjunto finito. Por lo tanto, (3.20) implica convergencia uniforme de y_{k_i} a y, hecho que completa la prueba. □

En la próxima sección trabajaremos con soluciones de ecuaciones diferenciales generalizadas y ellas no están en general definidas en el mismo intervalo. Para nuestro propósito necesitamos extender el lema 3.3.

Supongamos una sucesión $z_k : J_k = [a_k, b_k] \to Z \ , \ k = 1, 2, ...$ dada, donde el intervalo dominio puede variar con k. Denotamos esta sucesión $\{z_k, J_k\}$. Asumimos que $J_k \subset J$ para cada k.

Definición 3.5. *Decimos que* $\{z_k, J_k\}$ *converge cuando* $k \to \infty$ *a* (z_0, J_0), $J_0 = [a_0, b_0]$, *puntualmente (uniformemente) si:*

$$a_k \to a_0, \ \ b_k \to b_0, \ \ con \ \ k \to \infty$$

y la sucesión $\{\widetilde{z}_k\}$, *definida por*

$$\begin{aligned}
\widetilde{z}_k(t) &= z_k(a_k) \quad a \leq t \leq a_k, \\
&= z_k(t) \quad a_k \leq t \leq b_k, \\
&= z_k(b_k) \quad b_k \leq t \leq b \ .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

converge puntualmente (uniformemente en J*) a* $\widetilde{z}_0$ *donde ésta es una extensión similar de* (z_0, J_0).

Observación 3.6. *El lema sigue valiendo para la sucesión* $\{z_k, J_k\}$, *cuando* $J_k \subset J$ *si* (3.7) *es reemplazado por* $\dot{z}_k(t) \in P(t)$ *c.t.p. en* J_k *y la convergencia en la conclusión es en el sentido de la definición precedente. En particular, para la subsucesión convergente* $\{z_{k_i}, J_{k_i}\}$ *tenemos:*

$$(a_{k_i}, y_{k_i}(a_{k_i})) \to (a_0, y(a_0)) \tag{3.22}$$

y

$$(b_{k_i}, y_{k_i}(b_{k_i})) \to (b_0, y(b_0))$$

$$x(b_0) - x(a_0) \leq \lim_{i \to \infty} (x_{k_i}(b_{k_i}) - x_{k_i}(a_{k_i})) \ . \tag{3.23}$$

Notemos que la función modificada

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_\delta(t) &= P(t), & t \in [a_0 + \delta, b_0 - \delta] \\
&= \text{clco}\,[\{0\} \cup P(t)], & t \in J - [a_0 + \delta, b_0 - \delta]
\end{aligned}$$

satisface todas las hipótesis del lema si $P(t)$ lo hace y que el lema puede ser aplicado a la sucesión $\{\widetilde{z}_k\}$ definida por (3.21). Como esto puede ser hecho para cada $\delta > 0$ y como una subsucesión elegida convergente es buena para cualquier otro δ, podemos reemplazar δ con cero y por lo tanto (3.7) se satisface en J_0. Ahora, de forma similar al lema, (3.22) se sigue de la convergencia uniforme de $\widetilde{y}_{k_i}$, mientras que, por la monotonía de $\widetilde{v}$,

$$\lim_{i \to \infty}((x_{k_i}(b_{k_i}) - x_{k_i}(a_{k_i})) = x(b_0) - x(a_0) + \widetilde{v}(b_0) - \widetilde{v}(a_0) \geq x(b_0) - x(a_0) \ .$$

Observación 3.7. *Si en la precedente, asumimos que* $x_k(a_k) = 0$, *entonces, por la definición* (3.5), $\widetilde{x}_k(t) = 0$ *si* $t \in [a, a_k]$ *para cada* k *y por lo tanto, la componente en* X *de la función límite* $\widetilde{x}(t) + \widetilde{v}(t) = 0$ *si* $a \leq t < a_0$. *Luego, fijando* $\widetilde{v}(a) = 0$, *concluimos, por la continuidad de* $\widetilde{x}$, *que* $\widetilde{x}(a_0) = 0$. *Luego la función límite satisface la misma condición inicial.*

Observación 3.8. *Si $C = \{0\}$, entonces $Z = Y$, y tenemos el caso discutido en la introducción: cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente uniformemente. Este caso especial del lema está en* [3]. *Tal vez vale la pena señalar que la función a "conjuntos"P puede ser eliminada de las hipótesis y de la conclusión del lema. En otras palabras, si asumimos que la sucesión $\{z_k\}$ de funciones absolutamente continuas es acotada y que, para cada $c \in \operatorname{int} C^0$, $\langle c, \dot{z}_k(t)\rangle$ es acotada por una función integrable independientemente de k, la conclusión del lema sigue valiendo, suprimiendo* (3.8).

Observación 3.9. *Si la sucesión $\{z_k\}$ en el lema converge puntualmente a una función absolutamente continua, entonces la convergencia es uniforme. En realidad, si en la proposición* (3.4), *la parte singular β es cero, entonces por* (3.14), *$\alpha_{k_i} \to \alpha(t)$ uniformemente. Así, bajo nuestra hipótesis, $\beta_d(t) \equiv 0$ en* (3.15) *y la convergencia es uniforme para cada $d \in \operatorname{int} C^0$. Luego, la parte singular v debe ser igual a cero y $z_k(t) \to z(t)$ uniformemente. En realidad la misma afirmación podría ser probada si la función límite es continua. Para este propósito,* (3.14) *debería ser modificada.*

Finalmente, mencionemos que la integrabilidad de la función ϕ_d no es esencial para la validez de esta observación. En realidad es suficiente que ϕ_d sea localmente integrable; eso es, para casi todo $t \in J$ existe una vecindad de t en el cual ϕ_d es integrable.

4 Teoremas de existencia para campos orientadores

Consideremos una aplicación $Q : J_0 \times Z \to 2^Z$. La siguiente expresión

$$\dot{z} \in Q(t, z) \tag{4.1}$$

es llamada *un campo orientador* o una *ecuación diferencial multivaluada a derecha.*

Por una solución de (4.1) entendemos un par $(J,\ z)$ donde $J = [a, b] \subset J_0$ es un intervalo, z es una función absolutamente continua de J en Z y (4.1) se satisface c.t.p. en J; eso es, $\dot{z}(t) \in Q(t, z(t))$ c.t.p. en J.

El problema óptimo que describimos en la introducción puede ser reducido al siguiente problema de optimización para (4.1). Como antes, sea C un cono propio, cerrado y convexo en Z, $X = C - C$ y sea Y el complemento ortogonal de X. Para cualquier solución $\omega = (J, z)$ de (4.1) definimos

$$I(J,z) = x(b) - x(a), \tag{4.2}$$

donde $x(t)$ denota la componente en X de $z(t)$.

El problema en cuestión es minimizar I en una clase dada Ω de soluciones de (4.1). Más precisamente, queremos condiciones que implicarán para una Ω dada, la existencia de una solución óptima; eso es, una $\omega* \in \Omega$ tal que para cada $\omega \in \Omega$ la desigualdad $I(\omega) \leq I(\omega*)$ implique $I(\omega*) = I(\omega)$, donde el orden es aquel inducido por el cono C.

Naturalmente, Ω no puede ser arbitrario e imponemos sobre Ω las siguientes condiciones. Ya que tales condiciones son diferentes para las partes en X e Yde la solución, en adelante, denotaremos una solución por (J, x, y) y significará que $x : J \to X$, $y : J \to Y$ son ambas absolutamente continuas y que $z(t) = x(t) + y(t)$ satisface (4.1) en J.

(I) Si $(J, x, y) \in \Omega$, entonces $x(a) = 0$.

(II) Si $(J, x, y) \in \Omega$, $(J, \overline{x}, y)$ es una solución de (4.1) y $\overline{x}(a) = 0$, entonces $(J, \overline{x}, y) \in \Omega$.

(III) Si $(J_k, x_k, y_k) \in \Omega$, $k = 1, 2...$, (J_0, x_0, y_0) es una solución de (4.1), $(J_k, y_k) \to (J_0, y_0)$ uniformemente, $x_0(a) = 0$, entonces $(J_0, x_0, y_0) \in \Omega$.

(IVa) Existe una constante $M > 0$ tal que $\| y(t) \| \leq M$ para cada $(J, x, y) \in \Omega$ y para cada $t \in J$, donde $\| \, . \, \|$ denota la norma en Z.

(IVb) Existe una constante $M > 0$ con la propiedad que para cada $(J, x, y) \in \Omega$, existe $t \in J$ tal que $\| y(t) \| \leq M$.

Las restricciones precedentes sobre Ω están motivadas por aplicaciones. En realidad la componente en Y de z será una solución del sistema (2.1), mientras que $x(b)$ es el valor de (2.2). La condición (III) es reemplazada en la mayoría de los casos concretos por una condición de tipo acotación; por ejemplo, los puntos finales $(a, y(a))$, $(b, y(b))$ están en conjuntos compactos. En este caso (IVb) se cumplirá automáticamente. Encontramos la condición (IVa), por ejemplo, cuando nos restringimos a soluciones de (2.1) cuyos gráficos están en un conjunto compacto.

Por simplicidad, llamaremos una clase Ω *admisible* si se cumplen las condiciones (I), (II), (III) y (IVb) y *admisible acotada* si (IVb) es reemplazada por (IVa).

Los dos teoremas que siguen proveen condiciones suficientes para la existencia de un elemento óptimo en Ω admisible acotada y en Ω admisible, respectivamente.

Además, por una *aplicación semicontinua superior (u.s.c.)* $Q : Y \to 2^Z$ (con Y, Z espacios topológicos en general) entendemos simplemente que el gráfico de Q en $Y \times Z$ es cerrado. En particular, la aplicación Q en (4.1) es u.s.c. en z para cada t fijo si para cualquier $z_k \to z_0$, $q_k \to q_0$ tal que $q_k \in Q(t, z_k)$ podemos concluir que $q_0 \in Q(t, z_0)$. Si Q es u.s.c., entonces los valores de Q son conjuntos cerrados.

Teorema 4.1. *Asumimos que Q en (4.1) es u.s.c. en z para cada t fijo, valores de Q son conjuntos convexos, y el cono asintótico de $Q(t,z)$ es constante e igual a C; eso es*

$$C_{Q(t,z)} = C = constante \tag{4.3}$$

Además, asumimos que

$$Q(t, \tilde{z}) \subset Q(t, \bar{z}), \quad si \ \bar{z} \leq \tilde{z} \ , \tag{4.4}$$

y que para cada $d \in \operatorname{int} C^0$ y r positivo, existe una integrable $\phi_d(t,r)$ tal que

$$\max_{q \in Q(t,z)} \langle d, q \rangle \leq \phi_d(t,r) \ , \quad si \parallel y \parallel \leq r \ , \tag{4.5}$$

donde la y es la componente en Y de z.

Bajo estas hipótesis, cualquier clase admisible acotada Ω contiene un elemento óptimo.

Si la condición (IVa) para Ω es reemplazada por la condición más débil (IVb), entonces la conclusión sigue siendo válida siempre que algunas condiciones adicionales sobre ϕ_d en (4.5) sean impuestas. Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *Sea Q en (4.1) que satisface todas las hipótesis del teorema anterior. Además, asumimos que existe $c \in (\operatorname{int} C^0) \cap X$ tal que, al menos, una de las siguientes condiciones se cumpla*

(A) *La función $\phi_c(t,r)$ en (4.5) no depende de r y existe un $\eta > 0$ tal que para cada $d \in Y$, $\parallel d \parallel = 1$, la función $\phi_{d+\eta c}$ es lineal en r,*

(B) *La función $\phi_c(t,r)$, igual que $\phi_{\eta c+d}$ es lineal en r para cada $d \in Y$, $\parallel d \parallel = 1$ y eta $\in (0, \eta_0]$, $\eta_0 > 0$ y si $\phi_{\eta c+d}(t) + r\psi_{\eta c+d}(t)$, entonces*

$$\int_{J_0} \psi_{\eta c+d}(t) \leq m < +\infty, \quad si \parallel d \parallel = 1, \ \eta \in (0, \eta_0] \ . \tag{4.6}$$

Entonces toda clase admisible Ω de soluciones de (4.1) *contiene un elemento óptimo.*

Observación 4.3. *En aplicaciones de estos teoremas al problema discutido en la introducción, la condición* (4.4) *se satisface automáticamente ya que la función a "conjuntos"es independiente de "x"y depende sólo de $\| y \|$. Por lo que $Q(t,\overline{z}) = Q(t,\tilde{z})$ para todo $\overline{z} \leq \tilde{z}$.*

Antes de probar estos teoremas, mostraremos la siguiente proposición.

Proposición 4.4. *Asumimos que la aplicación $Q : Z \to 2^Z$ es u.s.c., los valores de Q son subconjuntos convexos de Z, el cono asintótico $C_{Q(z)} = C =$ constante y que para cada $r > 0$ y $d \in \operatorname{int} C^0$*

$$\sup_{\|z\|<r} \sup_{q\in Q(z)} \langle d,q\rangle \ \textit{es finito}. \tag{4.7}$$

Entonces la aplicación Q tiene la siguiente propiedad (propiedad (Q) de Cesari):

$$Q(z_0) = \bigcap_{r>0} \operatorname{clco} \bigcup_{\|z-z_0\|\leq r} Q(z). \tag{4.8}$$

Demostración

Seleccionemos r_0 y z_0 de modo que $\| z_0 \| < r_0$. Es claro que el primer miembro de (4.8) está contenido en el derecho. Para probar la otra inclusión, tomemos $q_0 \notin Q(z_0)$, entonces $Q(z_0)$ es propio de 2^Z y, por la proposición (3.2), tenemos que $C^0_{Q(z_0)}$ tiene interior no vacío y además, existe $d_0 \in \operatorname{int} C^0_{Q(z_0)}$ tal que para todo D denso de 2^Z

$$Q(z_0) = \bigcap_{d\in D\cap int\ C^0_{Q(z_0)}} \{z/\langle d,z\rangle \leq \max_{q\in Q(z_0)} \langle d,q\rangle\} \ .$$

Bajo nuestra suposición, q_0 no pertenece a la intersección anterior. Luego, existe $d_0 \in \operatorname{int} C^0_{Q(z_0)}$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$\max_{q\in Q(z_0)} \langle d_0,q\rangle \ < \ \langle d_0,q_0\rangle \ - \ \epsilon \ . \tag{4.9}$$

Por otro lado, por las mismas razones

$$Q(z) \cap \{q/\langle d_0,q\rangle \geq \langle d_0,q_0\rangle - \epsilon\} \tag{4.10}$$

es compacto para cada z cuya norma está acotada por r_0, en virtud de (4.7). Queremos mostrar que (4.10) es vacío si $\| z - z_0 \| < r_1$ con r_1 suficientemente chico. Supongamos lo contrario. Entonces existiría una sucesión $z_n \to z_0$ y $q_n \in Q(z_n)$ tal que

$$\langle d_0, q_n \rangle \to \gamma \geq \langle d_0, q_0 \rangle - \epsilon .$$

Si q_n fuera convergente o contuviera una subsucesión convergente, entonces tendríamos una contradicción con la semicontinuidad superior de Q debido a (4.9). Por lo tanto, $\| q_n \| \to \infty$. Pero en este caso, como C^0 tiene interior no vacío, existe $d_* \in \operatorname{int} C^0$ tal que $\limsup \langle d_*, q_n \rangle$ es infinito, lo que contradice (4.7). Luego, existe un $r_1 > 0$ tal que para $\| z - z_0 \| < r_1$, el conjunto (4.10) es vacío, lo que muestra que q_0 no pertenece al segundo miembro de (4.8) y completa la prueba. □

Observación 4.5. *Notemos que bajo las hipótesis de la proposición anterior, la función* $\sup_{q \in Q(z)} \langle d, q \rangle$ *es u.s.c. en* z *para cada* $d \in \operatorname{int} C^0$. *Ésta es una consecuencia inmediata de* (4.8). *Notemos también que es suficiente asumir* (4.7) *para todo* d *perteneciente a cualquier subconjunto denso* $D \subset \operatorname{int} C^0$. *La última observación y la proposición anterior producen la siguiente consecuencia.*

Corolario 4.6. *Si* $Q : J \times Z \to 2^Z$ *satiface las hipótesis del teorema* (4.1), *entonces existe un subconjunto* $N \subset J$ *de medida cero tal que* $Q(t, z)$ *tiene la propiedad* (4.8) *en* z *si* $t \in J - N$.

En realidad, fijando un subconjunto $D \subset \operatorname{int} C^0$ denso numerable y una sucesión $r_n \to \infty$, existe un conjunto N de medida cero tal que $\phi_d(t, r)$ es finito si $t \in J - N, r \in \{r_n\}, d \in D$. Luego (4.7) se satisface para cada t fijo en $J - N$.

Demostración del teorema 4.1

Sea $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que $I(\Omega_1)$ es totalmente ordenado por " $\leq$ ". Por el lema de Zorn, el teorema será probado si mostramos que para cada Ω_1 tal, existe $\overline{\omega} \in \Omega$ tal que $I(\overline{\omega}) \leq I(\omega)$, para cada $\omega \in \Omega_1$.

Sea $p \in I(\Omega_1)$ arbitrario. Como $I(\Omega_1)$ es totalmente ordenado,

$$I(\Omega_1) \subset p + (C \cup (-C)) \quad . \tag{4.11}$$

En particular, si tomamos $d \in \operatorname{int} C^0 - \{0\}$ arbitrario, y denotamos por $\pi(d,p)$ el hiperplano que pasa por p perpendicular a d, entonces por (4.11)

$$I(\Omega_1) \cap \pi(d,p) = \{p\} \ , \tag{4.12}$$

pues si $\widetilde{p} \in (I(\Omega_1) \cap \pi(d,p))$, entonces $\widetilde{p} = p + \widetilde{c}$ y $\langle \widetilde{p}, d\rangle = 0$, luego $\widetilde{c} = 0$ y $\widetilde{p} = p$. Esto se cumple para cada $p \in I(\Omega_1)$. Luego, podemos concluir que $I(\Omega_1)$ es el gráfico de una aplicación de un subconjunto de la recta $\{z/z = \lambda d,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ en el subespacio $\{x/\langle x, d\rangle = 0\}$ de X. Más aún, por (4.11) y el hecho que C es cerrado, la aplicación en cuestión satisface una condición de Lipschitz y, por lo tanto, es continua.

En consecuencia, también la clausura cl $I(\Omega_1)$ es un conjunto totalmente ordenado, ya que es otra vez el gráfico de una aplicación lipschiciana. Por otro lado, por (4.5) y la integrabilidad de $\phi_d(.\ , M)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{p \in I(\Omega_1)} \langle d, p\rangle &= \sup_{x(b)-x(a) \in I(\Omega_1)} \langle d, x(b) - x(a)\rangle \\
&= \sup_{x(b)-x(a) \in I(\Omega_1)} \langle d, \int_a^b \dot{x}(t)\, dt\rangle \\
&= \sup_{x(b)-x(a) \in I(\Omega_1)} \int_a^b \langle d, \dot{x}(t)\rangle\, dt \\
&\leq \sup_{x(b)-x(a) \in I(\Omega_1)} \int_a^b \max_{q \in Q(t,x)} \langle d, q\rangle\, dt \\
&\leq \int_a^b \phi_d(\tau, M)\, d\tau \ .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sup_{p \in I(\Omega_1)} \langle d, p\rangle \leq \int_{J_0} \phi_d(\tau, M)\, d\tau \ < +\infty \ , \tag{4.13}$$

donde M es la constante en (IVa).

Así, podemos concluir que existe $p_0 \in$ cl $(I(\Omega_1))$ tal que $p_0 \leq p$ para cada $p \in I(\Omega_1)$.

Veamos que si esto no sucede, obtenemos una contradicción. Supongamos que existe $p \in I(\Omega_1)$ tal que $p < p_0$, para todo $p_0 \in$ cl $I(\Omega_1)$. Llamando $S = \sup_{p \in I(\Omega_1)} \langle d, p\rangle$, se tiene que $S \leq \langle d, p_0\rangle$. Además, existe $\{p_k\} \subset I(\Omega_1)$ tal que $p_k \to p_0$ luego, por continuidad, $S < \langle d, p_0\rangle \leq S$.

Para completar la prueba necesitamos mostrar que existe $p_* \in I(\Omega)$ tal que $p_* \leq p$. Ahora es cuando se necesita el lema (3.3).

Sea $(J_k, x_k, y_k) \in \Omega_1$ y tal que

$$I(J_k, x_k, y_k) = x_k(b_k) \to p_0 \quad , \text{para } \ k \to \infty \ . \tag{4.14}$$

Pongamos $z_k = x_k + y_k$ y

$$P(t) = \text{clco} \bigcup_{k \in K(t)} Q(t, z_k(t)) \ , \tag{4.15}$$

donde $K(t) = \{k/t \in J_k\}$. En este sentido (4.15) define una aplicación a conjuntos sobre $\bigcup J_k$ cuyos valores son conjuntos cerrados y convexos. Es fácil comprobar que la sucesión $\{z_k\}$ y la aplicación P satisfacen todas las hipótesis del lema. Por lo que esto último, junto con las observaciones de la sección 3, implican que existe una subsucesión (por comodidad también indicada como (J_k, x_k, y_k)) puntualmente convergente a $(J_*, x_* + v, y_*)$ y tal que $v(t) \geq 0$,

$$\dot{z}_*(t) = \dot{x}_*(t) + \dot{y}_*(t) \in P(t) \quad c.t.p. \ en \ \ J_* = [a_*, b_*] \ , \tag{4.16}$$

$$(J_k, y_k) \to (J_*, y_*) \ \text{ uniformemente} \ , \tag{4.17}$$

$$x_*(a_*) = 0, \tag{4.18}$$

y

$$x_*(b_*) = I(J_*, z_*) \leq p_0 = \lim_{k \to \infty} x_k(b_k) \ . \tag{4.19}$$

Para finalizar la prueba, es suficiente probar que (J_*, z_*) es una solución de (4.1) perteneciente a Ω. La pertenencia a Ω es una consecuencia se (4.17), (4.18) y la condición (III), supuesto que (J_*, z_*) sea solución de (4.1). Esto último será probado ahora.

A tal fin, definimos

$$P_j(t) = \text{clco} \bigcup_{k \in K(t),\, k \geq j} Q(t, z_k(t)) \ .$$

Por la misma razón que antes, tenemos

$$\dot{z}_*(t) \in P_j(t) \quad c.t.p. \ en \ J_*, \quad j = 1, 2, ... \tag{4.20}$$

El corolario de la proposición (4.4), (4.20), la hipótesis (4.3), la convergencia puntual de (J_k, z_k) a $(J_*, z_* + v)$ y la monotonía de v producen

$$\dot{z}_*(t) \in \bigcap_{j=1} P_j(t) = Q(t, z_*(t) + v(t)) \subset Q(t, z_*(t)) \tag{4.21}$$

para casi todo $t \in J_*$. Luego, (J_*, z_*) es una solución de (4.1) y la prueba del teorema se completa. □

Demostración del teorema 4.2

Tomemos $\overline{\omega} = (\overline{J}, \overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$ arbitrario y sea $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega / I(\omega) \leq I(\overline{\omega})\}$. Es claro que cualquier punto minimal de $I(\Omega_0)$ es también minimal de $I(\Omega)$. Luego, es suficiente probar la existencia de elemento óptimo en Ω_0. Esto lo haremos probando que Ω_0 satisface la condición (IVa) y, por lo tanto, reduciendo la prueba al teorema (4.1).

Con este propósito, consideremos $\omega = (J, x, y) \in \Omega_0$ arbitrario pero fijo. Llamemos

$$\beta(t) = \| y(t) \| \quad \text{y} \quad \alpha(t) = \langle c, x(t) \rangle, \tag{4.22}$$

donde c es el punto fijo de $(\text{int } C^0 - \{0\}) \cap X$ en las condiciones (A) y (B). Notemos que para cada $d \in Y$ y $\eta > 0$, $\eta c + d \in \text{int } C^0$, ya que para todo $a \in C$, $\langle \eta c + d, a \rangle \leq 0$ debido a la ortogonalidad de X e Y.

Supongamos que para algún $\eta > 0$ y cada $d \in Y$, $\| d \| = 1$, la función en el segundo miembro de (4.5) es de la forma $\phi_{d+\eta c}(t) + r\ \psi_{d+\eta c}(t)$. Usando la ortogonalidad de X e Y tenemos

$$\langle d, \dot{y}(t) \rangle + \eta \dot{\alpha}(t) \leq \phi_{d+\eta c}(t) + \beta(t) \psi_{d+\eta c}(t) \ , \tag{4.23}$$

pues

$$\max_{\dot{z}(t) \in Q(t, z(t))} \langle \widetilde{d}, \dot{z}(t) \rangle \geq \langle \eta c + d, \dot{x}(t) + \dot{y}(t) \rangle$$

y este último miembro es igual a $\langle d, \dot{y}(t) \rangle + \eta \dot{\alpha}(t)$.

Como en ambas condiciones (A) y (B) $\phi_c(t, r)$ se asume lineal en r, podemos reemplazarla por $\phi_c(t) + r\ \psi_c(t)$ y el análogo de (4.23) para $d = 0$, $\eta = 1$, es

$$\dot{\alpha}(t) \leq \phi_c(t) + \beta(t)\ \psi_c(t) \ . \tag{4.24}$$

Como (4.23) se satisface para d y -d, se cumple además con $\langle d, \dot{y}(t) \rangle$ reemplazado por su valor absoluto, con los cambios obvios en el segundo miembro; es decir

$$\begin{aligned} | \langle d, \dot{y}(t) \rangle | + \eta\ \dot{\alpha}(t) &\leq \max\{\phi_{d+\eta c}(t) + \beta(t)\ \psi_{d+\eta c}(t), \phi_{-d+\eta c}(t) + \beta(t)\ \psi_{-d+\eta c}(t)\} \\ &\leq \max\{\phi_{d+\eta c}(t), \phi_{-d+\eta c}(t)\} + \beta(t) \max\{\psi_{d+\eta c}(t), \psi_{-d+\eta c}(t)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $d_1, ... d_n$ es una base ortonormal en Y, podemos deducir de (4.23) la siguiente desigualdad

$$\| \dot{y}(t) \| + \eta\ \dot{\alpha}(t) \leq \lambda_n(t) + \mu_n(t)\ \beta(t) \quad c.t.p. \ en \ J, \tag{4.25}$$

donde

$$\lambda_n(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi_{d_i+\eta c}(t), \phi_{-d_i+\eta c}(t)\},$$

$$\mu_n(t) = \max_{1\le i\le n}\{\psi_{d_i+\eta c}(t), \psi_{-d_i+\eta c}(t)\},$$

y ambas son integrables sobre J por máximos. Como $(J,x,y) \in \Omega_0 \subset \Omega$ tenemos por (I) y (4.22) que $\alpha(a) = 0$ y, de la definición de Ω_0, que

$$\alpha(b) = \langle c, x(b)\rangle \ge \langle c, \overline{x}(b)\rangle = N_0, \tag{4.26}$$

pues $c \in -C$ y C es un cono positivo.

Más aún, (IVb) implica que existe un $t_0 \in J$ tal que

$$0 \le \| y(t_0) \| = \beta(t_0) \le M \ . \tag{4.27}$$

Teniendo en cuenta (4.22),

$$| \dot\beta(t) | = \frac{1}{\| y(t) \|} \; | \langle \dot y(t), y(t)\rangle | \le \| \dot y(t) \| \ .$$

Luego, por (4.27) obtenemos de (4.25), para $t \ge t_0$,

$$\dot\beta(t) \le \lambda_n(t) + \mu_n(t)\, \beta(t) - \eta\, \dot\alpha(t) \ .$$

Por la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$\beta(t) \le e^{\int_{t_0}^t \mu_n(\tau)\, d\tau} \left[M + \int_{t_0}^t (\lambda_n(\tau) - \eta\, \dot\alpha(\tau))\, e^{-\int_{t_0}^t \mu_n(s)\, ds}\, d\tau \right] \tag{4.28}$$

y de la misma forma, para $t \le t_0$, obtenemos

$$\beta(t) \le e^{-\int_{t_0}^t \mu_n(\tau)\, d\tau} \left[M + \int_{t_0}^t (-\lambda_n(\tau) + \eta\, \dot\alpha(\tau))\, e^{\int_{t_0}^t \mu_n(s)\, ds}\, d\tau \right] \ . \tag{4.29}$$

Como λ_n y μ_n son no negativas, podemos, usando (4.28) y (4.29) estimar $\beta(t)$ como sigue

$$\beta(t) \le e^{\int_J \mu_n(\tau)\, d\tau}\, (M + \eta N_1 + N_2), \quad t \in J_0, \tag{4.30}$$

donde $N_1 = -\int_{J_0} \delta_-(\tau)\, d\tau$, $\delta_-(t) = \min(0, \dot\alpha(t))$ y $N_2 = \int_J \lambda_n(\tau)\, d\tau$. Por otro lado, poniendo $\delta_+(t) = \max(0, \dot\alpha(t))$ obtenemos por (4.26)

$$\dot\alpha(t) = \delta_+(t) + \delta_-(t)$$

y así integrando se tiene

$$\alpha(b) = \int_J \delta_+(\tau)\, d\tau + \int_J \delta_-(\tau)\, d\tau \ge N_0 \ , \tag{4.31}$$

y por (4.24)

$$\int_J \delta_+(\tau)\, d\tau \le \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau \;+\; \int_J \beta(\tau)\, \psi_c(\tau)\, d\tau\ . \tag{4.32}$$

Si (A) se cumple, entonces en (4.32) $\psi_c \equiv 0$, pues ϕ no depende de r, y así N_1 está acotada por una constante que depende sólo de N_0 y ϕ_c, ya que

$$N_1 = -\int_{J-0} \delta_-(\tau)\, d\tau \le \int_J \delta_+(\tau)\, d\tau \;\; - N_0 \le \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau \;\; - N_0\ .$$

Pero (4.23) se satisface para algún $\eta > 0$ y, por lo tanto, (4.30) es válida para tal η e implica la acotación de $\beta(t)$ por una constante que no depende de $\omega \in \Omega_0$. Luego, Ω_0 satisface la condición (IVa).

Si (B) se cumple, entonces (4.30) puede usarse para $\eta \in (0, \eta_0]$, $\eta_0 > 0$ y es fácil ver que (4.6) implica condiciones análogas para μ_n. Luego, tenemos

$$\int_{J_0} \mu_n(\tau)\, d\tau \le m_0 < +\infty\ , \qquad \eta \in (0, \eta_0],$$

que junto con (4.30) - (4.32) producen

$$\begin{aligned}
N_1 = -\int_{J_0} \delta_-(\tau)\, d\tau \;\; &\le \;\; \int_J \delta_+(\tau)\, d\tau \;\; - N_0 \\
&\le \;\; \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau + \int_J \beta(\tau)\, \psi_c(\tau)\, d\tau \;\; - N_0 \\
&\le \;\; \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau + \int_J e^{\int_{J_0} \mu_n(s)\, ds}(M + \eta\, N_1 + N_2)\, \psi_c(\tau)\, d\tau \;\; - N_0 \\
&\le \;\; \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau + \int_J e^{m_0}(M + \eta\, N_1 + N_2)\, \psi_c(\tau)\, d\tau \;\; - N_0 \\
&\le \;\; \int_J \phi_c(\tau)\, d\tau + e^{m_0}(M + \eta\, N_1 + N_2) \int_J \psi_c(\tau)\, d\tau \;\; - N_0\ .
\end{aligned}$$

Esto muestra que si $\eta > 0$ es suficientemente chico, entonces N_1 puede ser estimado por una constante que depende sólo de η y c pero no de un elemento particular de Ω_0. Así nuevamente, Ω_0 satisface la condición (IVa). Por lo que en ambos casos podemos aplicar el teorema 4.1 a Ω_0 y esto completa la prueba. $\square$

EJEMPLO 1. Para ilustrar los teoremas precedente consideremos un ejemplo en el cual tanto X como Y son unidimensionales. Entonces Z es un plano, $C = \{(x, y) \in Z/x \ge 0,\ y = 0\}$, $C^0 = \{(x, y)/x \le 0\}$ y supongamos que

$J_0 = [0,1]$. Como $Q(t,z)$ tomemos la función a conjuntos dependiendo sólo de y y dada por

$$Q(t,y) = \{q = (q_x, q_y)/q_x \geq \alpha(t,y)q_y^2 + \beta(t,y)q_y + \gamma(t,y)\} \ , \tag{4.33}$$

de modo que la condición (4.4) se satisface automáticamente por la observación.

El conjunto (4.33) es convexo si $\alpha(t,y) \geq 0$ y semicontinua superior en y, si α, β, γ son continuas en y. El cono asintótico $C_{Q(t,y)} = C =$ constante si y sólo si $\alpha(t,y) > 0$. Es claro que es suficiente asumir que $\alpha(t,y) > 0$ para cada $(t,y) \in (J - N) \times Y$ donde N es un conjunto de medida nula.

Ahora el máximo en (4.5) puede ser fácilmente calculado; el punto crítico es $q^0 = (q_x^0, q_y^0) \in \partial Q(t,z)$ tal que la recta $\langle(-\eta, \pm d), q\rangle = K^0$ sea tangente a $\partial Q(t,z)$ en q^0.

Entonces,

$$(-\eta, \pm d) = \delta\nabla\left(q_x - \alpha(t,y)\, q_y^2 - \beta(t,y)q_y - \gamma(t,y)\right) \mid q^0$$

de donde,

$$(-\eta, \pm d) = \delta\left(1 - 2\alpha(t,y)\, q_y^0 - \beta(t,y)\right) \ .$$

Luego, $-\eta = \delta$ y $\pm d = -\delta(2\alpha(t,y)\, q_y^0 + \beta(t,y))$.

Además, $q^0 \in \partial Q(t,y)$, por lo tanto

$$q_x^0 = \alpha(t,y)\, q_y^{0^2} - \beta(t,y)q_y^0 - \gamma(t,y) \ .$$

Entonces el valor óptimo es

$$\begin{aligned}
\langle(-\eta, \pm d), (q_x^0, q_y^0)\rangle &= -\eta q_x^0 + (\pm d)q_y^0 \\
&= -\eta(\alpha(t,y)\, q_y^{0^2} + \beta(t,y)q_y^0) + (\pm d)q_y^0 - \eta\gamma(t,y) \\
&= \left[-\frac{\pm d - \eta\beta(t,y)}{2} - \eta\beta(t,y) + (\pm d)\right]\frac{\eta\alpha(t,y)q_y^0}{\eta\alpha(t,y)} - \eta\gamma(t,y) \\
&= \frac{[-\eta\beta(t,y) + (\pm d)]\,[-\eta\beta(t,y) + (\pm d)]}{4\eta\alpha(t,y)} - \eta\gamma(t,y) \\
&= \frac{(\eta\beta(t,y) \mp d)^2}{4\eta\alpha(t,y)} - \eta\gamma(t,y) \ .
\end{aligned}$$

Por lo que el máximo es igual (para $(-\eta, \pm d) \in \operatorname{int} C^0$) a

$$(\eta\, \beta(t,y) \ \mp d)^2 / 4\eta\, \alpha(t,y) \ - \eta\, \gamma(t,y) \ . \tag{4.34}$$

Ahora, la hipótesis (4.5) establece en este caso, que (4.34) es acotado en cada compacto de Y por una función integrable dependiendo de η y de d.

El teorema 4.1 trata el caso donde Ω es acotado (condición (IVa)) y ese es el motivo por el cual estamos interesados en tener una cota para (4.34) sobre subconjuntos compactos de Y.

En el ejemplo consideremos la hipótesis adicional (A) del teorema 4.2 expresada particularmente por dos desigualdades:

$$\beta^2(t,y)/4\alpha(t,y) - \gamma(t,y) \leq \mu_0(t), \quad y \in Y \tag{4.35}$$

y para algún $\eta > 0$;

$$(\eta\, \beta(t,y) \pm 1)^2 /4\eta\, \alpha(t,y) - \eta\, \gamma(t,y) \leq \mu_n(t) + \mid y \mid \ \lambda_n(t), \tag{4.36}$$

donde μ_0, μ_n, λ_n son integrables.

En el caso (B) la condición (4.35) es relajada, permitiendo en el segundo miembro un término $\gamma_0(t) \ \mid y \mid$; y además, existe $m_0 < +\infty$ tal que

$$\int_{J_0} \lambda_n(\tau)\, d\tau \leq m_0 < +\infty\ , \quad \eta \in (0, \eta_0]. \tag{4.37}$$

Es fácil dar condiciones específicas a α, β, γ tal que alguno de estos casos se cumpla. Pongamos $\beta \equiv 0$. Primero consideremos

$$\alpha(t,y) = \frac{t^{1-\epsilon}}{1+ \mid y \mid}$$

de modo que el primer término de (4.36) es $t^{-1+\epsilon}(4\eta)^{-1}(1+ \mid y \mid)$; por lo tanto, si γ se supone lineal en y, la desigualdad (4.36) se cumple para $\eta > 0$. Aunque (4.37) no se satisface; estamos, pues, en el caso (A) asumiendo que $\gamma(t,y) \geq \mu_0(t)$, con μ_0 integrable.

Por otro lado, si ponemos

$$\alpha(t,y) = t^{1-\epsilon}$$

la condición (B) se cumple asumiendo que $\gamma(t,y) \geq \mu_0(t) + \lambda_0(t) \mid y \mid$, donde μ_0, λ_0 son integrables y posiblemente negativas.

Observación 4.7. *Notemos que si Q en (4.1) no depende de z entonces no existe diferencia entre las hipótesis de los teorema 4.1 y 4.2, y ellas coinciden con las hipótesis sobre P en el lema. Luego, se sigue del teorema 4.2 que el problema de minimizar $x(b)$ en una clase de funciones absolutamente continuas $z = (x,y) : J \to Z$ tal que $x(a) = 0$, $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$, $\dot{z}(t) \in P(t)$, admite un solución óptima si $P(t)$ satisface las hipótesis del lema.*

EJEMPLO 2. El propósito de este ejemplo es mostrar que la afirmación en la observación precedente no sigue siendo válida si ϕ_c en el lema no es integrable para algún c. Sean $Z = \mathbb{R}^2$ y $P(t)$ un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $t \in [0,1]$

$$P(t) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\} = \{(0,0)\}, \tag{4.38}$$

$$C_{P(t)} = C = \{(x,y)/y = 0,\ x \geq 0\}, \tag{4.39}$$

y

$$\max_{(x,y)\in P(t)} (-x + \eta_n\, y) = \phi_n(t), \tag{4.40}$$

donde $\eta_n > 0$, $\eta_n \to 0$, $\phi_n(t)$ es positiva y medible, pero $\int_0^1 \phi_n(t)\, dt = +\infty$. Finalmente, asumimos que para cada $n = 1, 2, ...$ existen α_n, β_n medibles tales que $(\alpha_n(t), \beta_n(t)) \in P(t)$ c.t.p. en $[0,1]$ y

$$-\alpha_n(t) + \eta_n\, \beta_n(t) = \phi_n(t)\ . \tag{4.41}$$

Bajo estas hipótesis la clase Ω compuesta de todas las $z : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $z = (x,y)$ absolutamente continuas, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ y $\dot{z}(t) \in P(t)$ c.t.p. en $[0,1]$ no contiene una solución óptima.

Claramente Ω satisface

- (I) pues $x(0) = 0$,
- (II) ya que si $(J, x, y) \in \Omega$, $(J, \overline{x}, y)$ es solución de (4.1) y $\overline{x}(0) = 0$, entonces $(J, \overline{x}, y) \in \Omega$ trivialmente,
- (III) pues, si $(J_k, x_k, y_k) \in \Omega$, (J_0, x_0, y_0) es solución de (4.1) y $(J_k, y_k) \to (J_0, y_0)$ uniformemente, con $x_0(0) = 0$, entonces $(J_0, x_0, y_0) \in \Omega$, por paso al límite,
- (IVb) por continuidad sobre compactos.

De (4.38) se sigue que $\dot{x}(t) \geq 0$ c.t.p. en J para cada $(x,y) \in \Omega$. Así, $x(1) \geq 0$, ya que $x(t)$ es creciente y $x(0) = 0$, y $\inf I(\Omega) = \inf x(1)$ es no negativo. Mostraremos que es cero. A tal efecto, sabemos que existe un conjunto medible $E_n \subset J$ tal que $\int_{E_n} \beta_n(\tau)\, d\tau = 1$. En realidad, de (4.38) y la convexidad de $P(t)$, $(\alpha_n(t), \beta_n(t)) \in P(t)$, entonces $\alpha_n(t) \geq 0$; luego de la positividad de $\phi_n(t)$, $\beta_n(t) > 0$, así, tanto $\alpha_n(t)$ como $\beta_n(t)$ son positivas; y si $\eta_n < 1$, entonces además, por (4.41) $\alpha_n(t) < \beta_n(t)$. Por lo tanto, la no integrabilidad de ϕ_n implica la existencia de ese conjunto. Más aún,

$$\int_{E_n} \alpha_n(t)\, dt < +\infty\ ,$$

a partir de algún n.

Llamemos ahora $\dot{z}_n(t) = (\alpha_n(t), \beta_n(t))$, $t \in E_n$, y $(0,0)$ en caso contrario con $z_n(0) = (0,0)$. Ya que $y_n(1) = \int_{E_n} \beta_n(t)\, dt = 1$, entonces claramente $z_n \in \Omega$.

Ahora como $\eta_n \to 0$, y $\alpha_n(t)$, $\phi_n(t)$ son positivas, $\int_{E_n} \alpha_n(t)\, dt \to 0$ para $n \to \infty$. Pero, $\int_{E_n} \alpha_n(t)\, dt = x_n(1) = I(z_n)$. Luego $\inf_{\omega \in \Omega} I(\omega) = 0$.

Supongamos que existe $\omega^* \in \Omega$, tal que $I(\omega^*) = 0$. Esto implicaría que $\dot{x}^*(t) = 0$ c.t.p. en [0,1]. Se sigue de (4.38) que $(\dot{x}^*(t), \dot{y}^*(t)) = (0,0)$ c.t.p. en [0.1]. Luego, $y^*(1) = y^*(0) = 0$ lo que contradice el hecho de que $\omega^* = (x^*, y^*) \in \Omega$. Por lo tanto el ínfimo no se alcanza.

5 Teoremas de existencia: sistema de control

En esta sección procedemos con la discusión del problema óptimo de control presentado en la introducción.

Para ello consideramos una clase Ω de soluciones de (J, y, u) del sistema (2.1); eso significa que J es un intervalo, $y : J \to Y$ es absolutamente continua, $u : J \to E$ es medible, y

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad u(t) \in U(t, y(t)) \text{ c.t.p. en } J. \tag{5.1}$$

La función de costo

$$I(J, y, u) = \int_J g(t, y(t), u(t))\, dt \tag{5.2}$$

es una aplicación $I : \Omega \to X$.

Como antes, E, X, Y son espacios euclídeos. Asumimos que un orden está dado en X tal que el cono positivo C es convexo, cerrado y propio y $X = C - C$. Nuestro objetivo es dar condiciones que impliquen la existencia de puntos minimales de $I(\Omega)$.

Las siguientes hipótesis serán impuestas sobre f, g, U y Ω a lo largo de esta sección.

Hipótesis

- Las aplicaciones $f : J_0 \times Y \times E \to Y$, y $g : J_0 \times Y \times E \to X$ son ambas continuas en (y, u) para cada $t \in J_0 = [a_0, b_0]$ fijo y medible en t para cada $(y, u) \in Y \times E$. La aplicación $U : J_0 \times Y \to 2^E$ es semicontinua superior en la dos variables.

- Respecto a Ω asumimos las siguientes condiciones:

(1) Si $\{(J_k, y_k, u_k)\} \subset \Omega$, (J_*, y_*, u_*) es una solución de (5.1) y si $(J_k, y_k) \to (J_*, y_*)$ uniformemente, entonces $(J_*, y_*, u_*) \in \Omega$.

(2a) Existe $M > 0$ tal que $\| y(t) \| \leq M$ para cada $(J, y, u) \in \Omega$, $t \in J$, o bien,

(2b) Existe $M > 0$ tal que para cada $(J, y, u) \in \Omega$ existe $t \in J$ con $\| y(t) \| \leq M$.

Hagamos $Z = X \times Y$, y definimos el producto escalar (y por lo tanto la norma) mediante

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle, \tag{5.3}$$

donde $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos en Z y en el segundo miembro de (5.3) los productos escalares son en X e Y respectivamente. En este sentido, podemos identificar X e Y con los subespacios $X \times \{0\}$ y $\{0\} \times Y$ de Z, respectivamente. Como antes, éstos son mutuamente ortogonales y $Z = X \bigoplus Y$. Podemos considerar también al cono C como un cono en Z y así extender el orden a Z. Sin embargo, notemos que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 = y_2$. El polar C^0 de C en Z es entonces

$$C^0 = \{d = (d_x, d_y) / \langle d_x, a \rangle \leq 0 \text{ para cada } a \in C,\ d_y \in Y\} \ , \tag{5.4}$$

ya que por definición, $\langle d, a \rangle \leq 0$ para todo $a \in C$, pero $a \in X$ luego, $a_y = 0$, y por (5.3) resulta

$$\langle (d_x, d_y), (a_x, 0) \rangle \leq 0 \ .$$

Denotemos por h la aplicación de $J_0 \times Y \times E$ en Z que envía (t, y, u) en $(g(t, y, u), f(t, y, u))$. Esta aplicación satisface las **Hipótesis**.

Los siguientes dos teoremas de existencia corresponden a los teoremas 4.1 y 4.2 de la sección precedente.

Teorema 5.1. *Supongamos que las hipótesis se cumplen. Asumimos que*

(i) *el conjunto*

$$Q(t, y) = \{q \in Z / q \geq h(t, y, u),\ \ u \in U(t, y)\} \tag{5.5}$$

es convexo para cada $(t, y) \in J_0 \times Y$;

(ii) *la aplicación Q es semicontinua superior en y para cada t fijo;*

(iii) *para cada $d \in \operatorname{int} C^0$ y r positivo existe sobre J_0 una función integrable con valores esclares $\phi_d(. , r)$ tal que*

$$\langle d, h(t, y, u) \rangle \leq \phi_d(t, r), \quad si \ \| y \| \leq r \quad y \quad u \in U(t, y). \tag{5.6}$$

Bajo estas hipótesis, cada clase Ω *no vacía de soluciones de* (5.1) *cumpliendo* (1) *y* (2a) *contiene una solución óptima.*

Teorema 5.2. *Además de todas las hipótesis del teorema anterior, asumimos que o la condición* (A) *o* (B) *del teorema* 4.2 *se cumple para la función* $\phi_d(.\ ,r)$ *en* (5.6). *Entonces cada clase* Ω *que satisface* (1) *y* (2b) *contiene una solución óptima.*

Para la prueba de los teoremas anteriores necesitaremos la siguiente estensión del "Lema de Filippov para funciones implícitas". (Ver esquema de la prueba en el anexo A).

Proposición 5.3. *Sea* $i : J \times E \to Z$ *continua en* $u \in E$ *para cada* $t \in J$ *y medible en* $t \in J$ *para cada* $u \in E$. *Sea* $W : J \to 2^E$ *semicontinua superior. Definimos*

$$Q(t) = \{z/z \geq i(t,u), \quad u \in W(t)\} \tag{5.7}$$

y supongamos que existe $z : J \to Z$ *tal que*

$$z(t) \in Q(t) \text{ c.t.p. en } J. \tag{5.8}$$

Entonces existe $u : J \to E$ *medible tal que*

$$z(t) \geq i(t, u(t)) \quad y \quad u(t) \in W(t) \text{ c.t.p. en } J. \tag{5.9}$$

Demostración de los teoremas 5.1 y 5.2

Consideremos el campo orientador

$$\dot{z}(t) \in Q(t, y(t)) \ , \tag{5.10}$$

donde Q está dada por (5.5). Sea $\overline{\Omega}$ el conjunto de soluciones de (5.10) tal que $(J, x, u) \in \overline{\Omega}$ si y sólo si $x(a) = 0$.

Ahora existe $u : J \to E$ medible tal que (J, y, u) satisface (5.1) y pertenece a Ω. Si $(J, y, u) \in \Omega$ con $x(t) = \int_a^t g(\tau, y(\tau), u(\tau))\, d\tau$, entonces es claro que $\dot{z}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = h(t, y(t), u(t)) \in Q(t, y(t))$ y que $x(a) = 0$, por lo que $(J, x, y) \in \overline{\Omega}$. Luego tenemos $e : \Omega \to \overline{\Omega}$ que aplica $(J, y, u) \to (J, x, y)$ donde $x(t)$ es la definida arriba. Esta aplicación tiene la propiedad

$$I(\omega) = \overline{I}(e(\omega)) \text{ para cada } \omega \in \Omega, \tag{5.11}$$

donde $\overline{I} : \overline{\Omega} \to X$ y $\overline{I}(J, x, y) = x(b)$.

Por otro lado, por la proposición (5.3), para cada $\overline{\omega} = (J, x, y) \in \overline{\Omega}$ existe $u : J \to E$ medible tal que $z(t) \geq i(t, u(t))$, $u(t) \in W(t)$ c.t.p. en J donde $i(t, u) = h(t, y(t), u) = (g(t, y(t), u), f(t, y(t), u))$ y $W(t) = U(t, y(t))$. Pero la primera desigualdad de (5.9) significa que

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \text{ y } \dot{x}(t) \geq g(t, y(t), u(t))$$

por la relación $\leq$ en Z.

Luego, (J, y, u) es solución de (5.1) perteneciente a Ω. Además $x(b) \geq \int_J g(t, y(t), u(t))\, dt$. Así, $\overline{\Omega}$ puede ser mapeado en Ω; llamemos $\overline{e}$ a esa aplicación, con la propiedad

$$I(\overline{e}(\omega)) \leq \overline{I}(\omega), \quad \omega \in \overline{\Omega}\ . \tag{5.12}$$

Se sigue de (5.11) y (5.12) que cada punto minimal de $\overline{I}(\overline{\Omega})$ es minimal de $I(\Omega)$. En realidad, consideremos $p \in \overline{I}(\overline{\Omega})$ minimal. Por (5.12) existe $q \in I(\Omega)$ tal que $q \leq p$. Afirmamos que $q = p$ y q es minimal de $I(\Omega)$. Sea $q_1 \in I(\Omega)$ y $q_1 \leq q$. Entonces por (5.11) $q_1 \in \overline{I}(\overline{\Omega})$ y $q_1 \leq q \leq p$. Pero p es minimal y, por lo tanto $q_1 = p$. Luego $q_1 = q = p$ y q es minimal de $I(\Omega)$.

Con el objeto de probar el teorema 5.1 (o 5.2) es suficiente mostrar que $\overline{\Omega}$ y Q definidas en (5.5) satisfacen las condiciones del teorema 4.1 (o 4.2). Por definición, $\overline{\Omega}$ satisface (I) y (II). La condición (III) se sigue fácilmente de (i) y la proposición 5.3. Finalmente (IVa) y (IVb) resultan de (iia) y (iib) respectivamente.

La hipótesis (4.4) vinculada a Q es satisfecha ya que Q depende sólo de y y no depende de x. Q es semicontinua superior por hipótesis. Es claro por (5.5) que el cono asintótico $C_{Q(t,y)}$ contiene a C. Supongamos que para algún (t, y) el cono C es propio de $C_{Q(t,y)}$ y sea $a \in C_{Q(t,y)} - C$. Entonces, existe $d \in \text{int } C^0$, tal que $\langle d, a \rangle > 0$. Pero para cada $q \in Q(t, y)$ y $\lambda > 0$, $q + \lambda a \in Q(t, y)$. Este hecho junto con (5.5) contradice (5.6). Luego (4.3) se cumple. Finalmente (4.5) se sigue de (5.6) y (5.5), y las condiciones (A) y (B) son las mismas tanto en el teorema 4.2 como 5.2. Así se completa la prueba. □

Observación 5.4. *Se sigue de las **Hipótesis** que cualquier cambio de f o g o ambas sobre un conjunto $N \times Y \times E$ donde $N \subset J_0$ tiene medida cero es irrelevante y no afecta las conclusiones de ambos teoremas* 5.1 *y* 5.2. *Por otro lado, se sigue que si Q es definida por* (5.5) *y $\phi_d(t, r)$ con (t, r) fijo es finito para d de un subconjunto denso de* int C^0, *entonces debe ser finito para cada $d \in$* int C^0. *Por lo tanto, no se pierde generalidad en asumir que* (5.6) *se cumpla en todo punto en J o que $\phi_d(t, r)$ es finito para cada t.*

Observación 5.5. *El propósito de esta observación es contrastar los teoremas* 5.1 *y* 5.2 *con los resultados análogos de Cesari dados en* [2]*. A tal fin, podemos pensar que X es uno dimensional, C es el semieje positivo de las x en Z, y* $\operatorname{int} C^0 = \{(x,y) \in Z / x < 0\}$*. En el caso correspondiente al teorema* 5.1 *(Ω satisface* (2a)*), Cesari asume la así llamada* condición de crecimiento *sobre cada subconjunto acotado de Y; eso es que para cada $B \subset Y$ acotado existe una función continua $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(\zeta)/\zeta \to \infty$ cuando $\zeta \to \infty$ y dos constantes positivas G, H tales que $g(t,y,u) \geq \Phi(\| u \|)$ y $\| f(t,y,u) \| \leq G + H \ \| u \|$ para $(t,y) \in J \times B$ y $u \in U(t,y)$. Esto implica* (5.6) *con ϕ_d independiente de t. En realidad, si $d \in$* int C^0, *$d = (d_x, d_y)$ entonces $d_x g(t,y,u) + \langle d_y, f(t,y,u)\rangle \leq + d_x \Phi(\| u \|) + \| d_y \| (G + H \| u \|)$. Las hipótesis sobre el conjunto Q son las mismas con la excepción que Cesari asume la condición* (4.8) *con respecto a ambas variables mientras que en este trabajo asumimos que Q es semicontinua superior en un sentido más débil y sólo con respecto a una variable. Análogamente, f y g son asumidas por Cesari como continuas en t.*

Con respecto al caso no acotado (condición (2b)*), además de la condición de crecimiento se asume en* [2] *que existen constantes G_1 y H_1 tales que $g(t,y,u) \geq G_1 \ \| f(t,y,u) \|$ si $\| y \| > H_1$, $u \in U(t,y)$. Esas condiciones implican que ϕ_d en* (5.6) *puede ser tomada como constante si $d = (\eta d_x, d_y)$, $d_x < 0$ y η suficientemente chico. Por lo tanto, esto lleva al caso* (A) *del teorema* 5.2*. No existe un análogo al caso* (B)*. En otras palabras, Cesari asume casi explícitamente una cota a priori para el ínfimo de la funcional de costo.*

EJEMPLO 3. El problema que consideramos contiene como un caso especial el clásico problema de Lagrange del cálculo de variaciones que corresponde al caso en que $f(t,y,u) \equiv u$ y $U(t,y) = E = Y$. La convexidad del conjunto $Q(t,y)$ es ahora equivalente a la convexidad de g en u.

Supongamos que deseamos minimizar la funcional

$$\int_0^t [\alpha(t,y(t))\dot{y}^2(t) + \gamma(t,y(t))]\, dt \tag{5.13}$$

en una clase Ω de funciones absolutamente continuas cumpliendo la condición de borde

$$y(0) = 1, \quad y(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1.$$

Si $\alpha(t,y) = t$ y $\gamma \equiv 0$, una solución óptima no existe. En realidad en este caso la cota en (5.6) es t^{-1} y, por lo tanto, no integrable. Sin embargo, si $\alpha \geq t^{1-\epsilon}$, entonces una solución óptima existe aún con $\gamma(t,y) = \gamma_0(t) + \gamma_1(t) y$ siempre que ambas γ_0, γ_1 sean integrables en [0,1].

A Esquema de la pueba de la proposición 5.3

Deseamos probar la existencia de la función $u : J \to E$ con la propiedad

$$u(t) \in V(t) = \{u \in W(t)/i(t,u) \leq z(t)\}. \tag{A.1}$$

En otras palabras u es una selección medible de funciones a valores conjuntos $V : J \to 2^E$. Tal selección existe si V es ella misma medible; eso es que si para cada $F \subset E$ cerrado, el conjunto

$$V^- F = \{t/V(t) \cap F \neq \emptyset\} \tag{A.2}$$

es medible. Ahora (A.2) es verdadera si uno muestra que lo es para cada compacto F, ya que cada cerrado $F = \bigcup F_k$ donde F_k son compactos y $V^-(\bigcup F_k) = \bigcup(V^- F_k)$. El conjunto (A.2) es cerrado cuando F es compacto si i y z en (A.1) son continuas. Esto es así debido a que el cono positivo es cerrado y, por lo tanto, la desigualdad es preservada en el límite. Si i y z en (A.1) no son continuas pero satisfacen las hipótesis de la proposición 5.3, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $K \subset J$ cerrado tal que la medida $\mu(J - K) < \epsilon$, y z restringida a K e i restringida a $K \times E$ son ambas continuas. La primera es el célebre Teorema de Lusin, la segunda es una extensión de un resultado debido a Scorza Dragoni. Pero esto significa que el conjunto (A.2) puede ser aproximado tanto como se quiera por un conjunto cerrado. Luego es medible.

Referencias

[1] Cerdá Tena E., *Optimización Dinámica*. Prentice Hall, 2001.

[2] Cesari Lamberto, *Existence for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints*. I, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 369 - 412.

[3] Lasota A. and Olech C., *On the clodness of the set of trajectories of a control system*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér.Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397 - 403.

[4] Olech Czeslaw, *Existence theorems for optimal problemas with vector-valued cost function*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1967), 159 - 180.