Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Monoides conmutativos reticulados subresiduados

Autora: Lic. Valeria Anahí Sígal

Tesis para optar por el título de Doctora de la
Facultad de Ciencias Exactas especialidad Matemática

Directores: Dr. Hernán Javier San Martín
Dr. Juan Manuel Cornejo

Año: 2024

Índice general

Introducción

Un monoide conmutativo reticulado subresiduado (srl-monoide para abreviar) es un par $(\mathbf{A}, Q)$ donde $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \cdot, e)$ es un álgebra de tipo (2,2,2,0) tal que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, se satisface la ecuación

$$(a \vee b) \cdot c = (a \cdot c) \vee (b \cdot c)$$

y Q es una subálgebra de $\mathbf{A}$ tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$ el cual es denotado por $a \to b$. En particular, tenemos que $Q = \{a \in A : e \to a = a\}$. Los srl-monoides pueden ser considerados como álgebras $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$. Nos parece interesante remarcar que la definición de srl-monoide extiende la definición de retículo subresiduado a pares de álgebras (A, Q) con la propiedad de que si $A = Q$ entonces A es un retículo residuado conmutativo. Más aún, en los retículos residuados conmutativos tenemos que vale la propiedad de residuación (producto-implicación) y en los retículos subresiduados en general solo vale una de las dos implicaciones de la propiedad de residuación (ínfimo-implicación). En este sentido los srl-monoides proveen un marco común para estas dos clases de álgebras.

El objetivo de esta tesis es estudiar la clase de los srl-monoides, la cual es una variedad que contiene propiamente a las variedades de los retículos subresiduados [25] y de los retículos residuados conmutativos [29].

Esta tesis se divide en tres partes. En primer lugar, introducimos la clase de los srl-monoides, la cual es una variedad de álgebras en el lenguaje de retículos residuados conmutativos. Asimismo, damos una descripción de las congruencias y utilizamos la misma como herramienta para mostrar propiedades de la variedad de los srl-monoides. En particular, estudiamos la variedad de los srl-monoides integrales. Desde el punto de vista del álgebra universal es sumamente importante tener una buena descripción del retículo de congruencias de las álgebras pertenecientes a una variedad V. Esto nos permitió estudiar álgebras simples, álgebras subdirectamente irreducibles, funciones compatibles (que generalizan a las funciones polinómicas y son la contraparte algebraica de los conectivos implícitos definidos en la lógica proposicional correspondiente). Las congruencias también nos permitieron determinar descripciones ecuacionales de ciertas subvariedades de V, como por ejemplo caracterizar ecuacionalmente la subvariedad de V generada por sus miembros totalmente ordenados (suponiendo que las álgebras de V tienen estructura de orden). En segundo lugar, caracterizamos la clase de los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales, la cual resulta ser una variedad. Finalmente, presentamos un cálculo proposicional cuya semántica algebraica coincide con la variedad de los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales, y un cálculo proposicional cuya semántica algebraica coincide con la variedad de los srl-monoides integrales.

A continuación mencionamos algunos aspectos de los retículos subresiduados y de los retículos residuados conmutativos dado que estas álgebras son las que motivaron la definición de srl-monoide.

Los retículos subresiduados fueron introducidos en [25] con el objetivo de estudiar ciertas lógicas proposicionales definidas en un lenguaje sin implicación clásica pero con un conectivo de implicación llamado implicación estricta. Estas lógicas estudiadas en [25] son ejemplos de lógicas subintuicionistas, i.e., lógicas en el lenguaje de la lógica intuicionista que son definidas semánticamente usando modelos de Kripke, de la misma manera que está definida la lógica intuicionista pero sin exigir de los modelos ciertas propiedades requeridas en el caso intuicionista [9], [15], y [16].

Un *retículo subresiduado* [16], [25] es un par (A, Q), donde A es un retículo distributivo acotado, Q es un subretículo acotado de A y para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \wedge q \leq b\}$, el cual se denota por $a \to b$. Este par puede ser considerado como un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ de tipo (2,2,2,0,0) donde $Q = \{a \in A : 1 \to a = a\}$. La clase de los retículos subresiduados es una variedad [25] la cual contiene propiamente a la variedad de las álgebras de Heyting. La clase de los retículos subresiduados está caracterizada por la lógica R4 [25] la cual presenta una completud al estilo 'débil'. Sin embargo, si se considera a R4 junto con una regla adicional $\alpha \vdash \beta \to \alpha$, esta nueva lógica presenta una completud fuerte. Una base ecuacional diferente para la variedad de los retículos subresiduados a la dada en [25] fue presentada en [16], donde la misma es caracterizada como una subvariedad de la variedad de las álgebras de Heyting débiles.

Recordemos que las $S4-$álgebras son álgebras de Boole con un operador unario $\Box$ en el lenguaje que satisface las siguientes cuatro identidades:

1) $\Box(1) = 1$,

2) $\Box(x \wedge y) = \Box(x) \wedge \Box(y)$,

3) $\Box(x) \leq x$,

4) $\Box(x) \leq \Box(\Box(x))$.

Diremos que un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, \neg, 0, 1)$ es un retículo subresiduado booleano si $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un retículo subresiduado. Si $(A, \wedge, \vee, \to, \neg, 0, 1)$ es un retículo subresiduado booleano entonces $(A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0, 1)$ es una $S4-$álgebra, donde

$$\Box(x) := 1 \to x.$$

Recíprocamente, se tiene que si $(A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 0, 1)$ es una $S4-$álgebra entonces $(A, \wedge, \vee, \to, \neg, 0, 1)$ es un retículo subresiduado booleano, donde

$$x \to y := \Box(\neg x \vee y).$$

Más aún, la variedad de los retículos subresiduados booleanos es equivalente por términos a la variedad de las $S4-$álgebras. Además, la variedad de los retículos subresiduados coincide con la clase de los $\{\wedge, \vee, \to, 0, 1\}$-subreductos de las $S4-$álgebras [16].

En las últimas décadas ha surgido con gran ímpetu el interés en las llamadas lógicas subestructurales [27], [33]. Los modelos algebraicos de ciertas lógicas subestructurales son los retículos residuados conmutativos [33]. Un retículo residuado conmutativo es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo y para cada $a, b, c \in A$ se satisface la condición $b \cdot a \leq c$ si y sólo si $b \leq a \rightarrow c$. El estudio de los retículos residuados conmutativos provee un marco común para el estudio y comparación de modelos de diversas lógicas que habían sido estudiadas de manera independiente. El enmarque dentro de una misma teoría de modelos algebraicos de estas lógicas enriquece su compresión puesto que permite el intercambio de las diferentes técnicas y herramientas utilizadas en los estudios de las distintas teorías. La clase de los retículos residuados conmutativos forma una variedad [29]. Esta variedad contiene como subvariedades propias a los retículos residuados conmutativos integrales, las MTL-álgebras, las MV-álgebras, las BL-álgebras, los grupos reticulados y las álgebras de Heyting (donde se considera a estas clases de álgebras en el lenguaje de los retículos residuados conmutativos), entre otras.

Denotamos como $\mathbf{HFL_e}^+$ al sistema que se obtiene de $\mathbf{HFL_e}$ quitando la constante 0 del lenguaje, donde $\mathbf{HFL_e}$ denota al sistema Hilbert que se define a continuación [27]:

Axiomas:

(id) $\alpha \rightarrow \alpha$

(pf) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\delta \rightarrow \beta)]$

(per) $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)] \rightarrow [\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)]$

$(\cdot\wedge)$ $[(\alpha \wedge 1) \cdot (\beta \wedge 1) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)]$

$(\wedge \rightarrow)$ $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

$(\wedge \rightarrow)$ $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

$(\rightarrow \wedge)$ $[(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \delta)] \rightarrow [\alpha \rightarrow (\beta \wedge \delta)]$

$(\rightarrow \vee)$ $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

$(\rightarrow \vee)$ $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

$(\vee \rightarrow)$ $[(\alpha \rightarrow \delta) \wedge (\beta \rightarrow \delta)] \rightarrow [(\alpha \vee \beta) \rightarrow \delta]$

$(\rightarrow \cdot)$ $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \cdot \beta))$

$(\cdot \rightarrow)$ $[\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)] \rightarrow ((\alpha \cdot \beta) \rightarrow \delta)$

(1) 1

$(1 \rightarrow)$ $1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

Reglas:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\ (\mathbf{MP}) \qquad\qquad \frac{\alpha}{\alpha \wedge 1}\ (\mathbf{Adj})$$

La variedad de los retículos residuados conmutativos es la semántica algebraica equivalente para la relación de $\vdash_{\mathbf{HFL_e}^+}$, donde recordemos que las traducciones ρ y τ de ecuaciones a fórmulas y de fórmulas a ecuaciones respectivamente se definen como $s \approx t \ \mapsto^{\rho} \ (s \to t) \wedge (t \to s)$ y $\varphi \ \mapsto^{\tau} \ e \approx e \wedge \varphi$, donde e denota la constante en la signatura de los retículos residuados conmutativos.

Vamos a denotar como SR a la variedad de los srl-monoides, iSR a la variedad de los srl-monoides integrales, CRL a la variedad de los retículos residuados conmutativos, SRL a la variedad de los retículos subresiduados, iCRL a la variedad de los retículos residuados conmutativos integrales y Hey a la variedad de las álgebras de Heyting. En el siguiente diagrama mostramos cómo se relacionan las variedades definidas anteriormente. Resulta preciso notar que hay abuso de notación en algunas de las contenciones indicadas en el dibujo que tienen que ver con el lenguaje de las álgebras consideradas en cada clase [1].

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathsf{SR} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& \mathsf{iSR} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \mathsf{CRL} \arrow[dl, dash] \\
\mathsf{SRL} \arrow[dr, dash] & & \mathsf{iCRL} \arrow[dl, dash] & \\
& \mathsf{Hey} & &
\end{tikzcd}
$$

La tesis consta de seis capítulos y se encuentra organizada como mencionamos a continuación.

En el Capítulo 1 damos definiciones y resultados que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis. Más precisamente sobre álgebra universal, conjuntos ordenados, monoides, semi-retículos, retículos, retículos subresiduados y retículos residuados conmutativos.

En el Capítulo 2 recordamos la clase de los monoides conmutativos reticulados subresiduados, srl-monoides para abreviar, así como también el caso particular de los srl-monoides integrales. La clase de los srl-monoides contiene propiamente a la variedad de los retículos subresiduados y a la variedad de los retículos residuados conmutativos. En particular probamos que la clase de los srl-monoides forma una variedad y damos dos bases ecuacionales para la misma. En [29] se prueba que dado un retículo residuado conmutativo, existe un isomorfismo de orden entre su retículo de congruencias y su retículo de subálgebras convexas. Motivados por estas ideas introducimos y estudiamos, en el marco de los srl-monoides, las subálgebras fuertemente convexas. Más precisamente, mostramos que dado un srl-monoide existe un isomorfismo de orden entre su retículo de congruencias y su retículo de subálgebras fuertemente convexas. Luego damos algunas descripciones de la subálgebra fuertemente convexa generada por conjuntos arbitrarios, y como aplicación caracterizamos a las álgebras simples y subdirectamente irreducibles respectivamente. Asimismo, probamos que la clase de los srl-monoides tiene la propiedad de extensión de congruencias. Por último, damos una presentación de la congruencia generada por subconjuntos arbitrarios; en particular caracterizamos a las congruencias principales.

[1] La misma aclaración vale para el resto de los diagramas presentados en esta tesis.

En el Capítulo 3 estudiamos a las funciones compatibles sobre srl-monoides y, en particular, sobre srl-monoides integrales. Luego caracterizamos a las funciones compatibles y como aplicación probamos que la variedad de los srl-monoides es localmente afín completa. Los operadores modales monótonos como un caso particular de funciones compatibles fueron introducidos por [32] y [31] en el marco de las álgebras de Heyting y de los retículos residuados conmutativos con primer elemento respectivamente. Dado que los srl-monoides generalizan a las álgebras de Heyting y a los retículos residuados conmutativos, resulta natural extender los resultados en el contexto de los srl-monoides. Motivados por estas ideas, introducimos y estudiamos a los operadores modales monótonos en el marco de los srl-monoides. Además, probamos un teorema del filtro primo para los srl-monoides integrales con un operador modal monótono que satisface ciertas condiciones. Tomando ideas del estudio de los retículos subresiduados fuertes dados en [18], introducimos la variedad de los srl-monoides fuertes y estudiamos dos subvariedades de la misma. El estudio de los srl-monoides fuertes se encuentra motivado por dos propiedades; la primera, que todo srl-monoide integral prelineal es un srl-monoide fuerte. Además, la ecuación que caracteriza a los srl-monoides fuertes equivale a la validez de una propiedad similar al teorema del filtro primo. Finalmente, damos distintas bases ecuacionales para la subvariedad de la variedad de los srl-monoides generada por la clase de los srl-monoides totalmente ordenados.

En el Capítulo 4 introducimos la clase de los monoides conmutativos semi-reticulados acotados subresiduados (srs-monoides para abreviar). Esta clase de álgebras contiene propiamente a las variedades de semi-retículos subresiduados estudiados en [9] y de semi-retículos residuados estudiados en [19] respectivamente. Comenzamos el capítulo dando algunas propiedades algebraicas de los srs-monoides y probamos que la clase de los srs-monoides es una variedad. Luego mostramos que los srs-monoides son los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}-$subreductos de los srl-monoides integrales. Finalmente, estudiamos cómo se relacionan ciertas construcciones que hicimos anteriormente en este capítulo con otras construcciones presentadas en [12] las cuales fueron utilizadas para representar álgebras con implicación y fusión.

En el Capítulo 5 presentamos una lógica proposicional algebrizable cuya semántica algebraica coincide con la variedad de los srs-monoides. También estudiamos una expansión de dicha lógica cuya semántica algebraica coincide con la variedad de los srl-monoides integrales.

En el Capítulo 6, damos las conclusiones de la presente tesis así como también algunas líneas de trabajo futuro.

Los resultados de esta tesis forman parte de [21], [22] y [23].

Capítulo 1

Resultados básicos

En este capítulo daremos algunos resultados básicos que serán usados a lo largo de esta tesis. Comenzaremos enunciando algunos resultados de álgebra universal. Luego daremos las definiciones de monoide conmutativo, semi-retículo acotado y retículo respectivamente. Finalmente presentaremos algunos resultados básicos sobre retículos subresiduados [16], [25] y retículos residuados conmutativos [29].

1.1. Álgebra universal

En esta sección exponemos las nociones fundamentales del álgebra universal que son necesarias para este capítulo. Referencias sobre el tema pueden encontrarse, por ejemplo, en [4] (ver también [30]).

Sean A un conjunto no vacío y n un número natural. Una *operación n-aria sobre A* es una función $f : A^n \to A$, donde n se denomina la *aridad* o *rango* de f. Una *operación finitaria* sobre A es una operación de rango n, para cierto número natural n.

Un *lenguaje* o *tipo* de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *símbolos de función*, tal que un número natural n es asignado a cada miembro f de $\mathcal{F}$. Este número es llamado la *aridad* (o *rango*) de f, y f se dice un *símbolo de función n-aria*.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un *álgebra* de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\mathbf{A} = (A, F)$, donde A es un conjunto no vacío y F es un conjunto de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ le corresponde una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}$ sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama *universo* de $\mathbf{A}$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f en lugar de $f^{\mathbf{A}}$, y si $\mathcal{F}$ es finito, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_k\}$ (en donde la *aridad* de cada f_i es finita y $aridad(f_1) \geq aridad(f_2) \geq \ldots aridad(f_k)$), escribiremos $(A, f_1, ..., f_k)$ en lugar de $\mathbf{A}$. Diremos en tal caso que el tipo del álgebra es $(aridad(f_1), aridad(f_2), \ldots, aridad(f_k))$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \to B$ se dice un *homomorfismo* si para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$, $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$ para cada n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A. Si h es inyectiva, entonces h se dice un *monomorfismo* o una *inmersión* . Si h es suryectiva, entonces h se dice un *epimorfismo* y en tal caso diremos que $\mathbf{B}$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$. Si h es biyectiva, entonces h se dice un *isomorfismo*.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Diremos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathbf{B}}$ es la restricción de $f^{\mathbf{A}}$ a B.

Sean $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Diremos que θ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si satisface la siguiente relación de *compatibilidad*: si f es un símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ y $(a_i, b_i) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., n$ entonces $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$. Por lo tanto, para cada congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ y $f \in \mathcal{F}$ tenemos definido en el conjunto cociente A/θ una operación n-aria $f^{\mathbf{A}/\theta}$ que a cada n-upla de clases de equivalencia de elementos de A/θ le asigna el elemento $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$. Luego el *álgebra cociente* es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones fundamentales satisfacen la condición antes mencionada. Notemos que las álgebras cociente de $\mathbf{A}$ tienen el mismo tipo que $\mathbf{A}$.

Sean $\mathbf{A}$ un álgebra y $S \subseteq A \times A$. Vamos a denotar como $\Theta(S)$ a la menor congruencia Θ tal que $S \subseteq \Theta$. Esta congruencia es la intersección de todas las congruencias de A que contienen a S. Si $S = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ vamos a denotar como $\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ en lugar de $\Theta(\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\})$. Si $S = \{(a, b)\}$ vamos a denotar como $\Theta(a, b)$ en lugar de $\Theta(\{(a, b)\})$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra. Escribiremos $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ para referirnos al retículo de congruencias de A (con la inclusión como orden). Diremos que $\mathbf{A}$ es *simple* si $\mathrm{Con}(A) = \{\nabla, \Delta\}$, siendo $\Delta = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}$ y $\nabla = A \times A$.

Sea $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Definimos el *producto directo* $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es el producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$, y si f es un símbolo de operación n-ario, definimos la operación $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))$, donde $a_1, ..., a_n \in \prod_{i \in I} A_i$, y si $k = 1, .., n$, $a_k(i)$ denota la i-ésima coordenada del vector a_k.

Dada una clase de álgebras K de un mismo tipo, vamos a denotar como $\mathbb{H}(K)$, $\mathbb{I}(K)$, $\mathbb{S}(K)$ y $\mathbb{P}(K)$ a las clases de imágenes homomorfas, imágenes isomorfas, subálgebras y productos de álgebras de K, respectivamente. Diremos que K es una *variedad* si es cerrada bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos, es decir si $\mathbb{H}(K) \subseteq K$, $\mathbb{S}(K) \subseteq K$ y $\mathbb{P}(K) \subseteq K$. Vamos a denotar como $\mathbb{V}(K)$ a la menor variedad de álgebras que contiene a K. Si V y W son variedades tales que todo miembro de V es miembro de W, se dice que V es una *subvariedad* de W. Tarski probó que $\mathbb{V}(K) = \mathbb{HSP}(K)$ (Teorema 9.5 de [4]).

Sea X un conjunto cuyos elementos llamaremos *variables* y sea $\mathcal{F}$ un lenguaje de álgebras. El conjunto $T(X)$ de *términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre X* es el menor conjunto que contiene a las variables, a los símbolos de función 0-arios y tal que si $p_1, ..., p_n \in T(X)$ y f es un símbolo de función n-ario, entonces $f(p_1, ..., p_n) \in T(X)$. Sean $x_1, ..., x_n$ variables en X y sea $p(x_1, ..., x_n)$ un término de tipo $\mathcal{F}$ sobre las variables $x_1, .., x_n$. Entonces si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, se define una aplicación $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ como sigue:

(1) Si p es una variable x_i entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = a_i$.

(2) Si p es de la forma $f(p(x_1, ..., x_n), ..., p(x_1, ..., x_n))$, donde f es un símbolo de función k-ario, entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), ..., p_k^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n))$.

Una *identidad* de tipo $\mathcal{F}$ sobre X es una expresión de la forma $p \approx q$ donde p y q son términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre el conjunto X. Un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ satisface una identidad $p(x_1,\dots,x_n) \approx q(x_1,\dots,x_n)$, lo cual es indicado como, $\mathbf{A} \models p \approx q$, si para cada $a_1,\dots,a_n \in A$ se verifica $p^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) \approx q^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)$. Una clase de álgebras K satisface $p \approx q$, lo que denotamos $K \models p \approx q$, si cada miembro de K verifica $p \approx q$. Una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ se dice *ecuacional* si existe un conjunto de identidades Σ de tipo $\mathcal{F}$, tal que un álgebra está en K si y sólo si satisface todas las identidades de Σ. Un teorema fundamental del Álgebra Universal debido a Birkhoff es el siguiente: *una clase K es ecuacional si y sólo si K es una variedad* (Teorema 11.9 de [4]).

Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice *producto subdirecto* de una familia de álgebras $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ del mismo tipo si verifica las siguientes condiciones:

(P1) Existe una inmersión $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

(P2) Si $\pi_j : \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_j$ es la proyección sobre la j-ésima coordenada entonces $\pi_j\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ es surjectiva.

Un álgebra $\mathbf{A}$ es *subdirectamente irreducible* si siempre que $\mathbf{A}$ sea producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ mediante un monomorfismo α se tiene que existe $i \in I$ tal que $\pi_i\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo. Además se tiene que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si existe una congruencia mínima en $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \{\Delta\}$, (Teorema 8.4 de [4]).

La importancia del estudio de las álgebras subdirectamente irreducibles reside en el resultado de G. Birkhoff que afirma que toda álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles (Teorema 8.6 de [4]). Este resultado, aplicado al caso del estudio de una variedad en particular, afirma que toda álgebra de una variedad es isomorfa a un producto subdirecto de alguna familia de álgebras subdirectamente irreducibles que se hallan en la misma variedad.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $f : A^n \to A$ una función (no necesariamente un homomorfismo).

(a) Diremos que f es una *función compatible con una congruencia θ de* $\mathbf{A}$ si $(a_i, b_i) \in \theta$ para $i = 1, ..., n$ implica que $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$.

(b) Diremos que f es una *función compatible* de $\mathbf{A}$ si es compatible con todas las congruencias de $\mathbf{A}$.

Por esta razón, para cada congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ tenemos definido en el conjunto cociente A/θ una operación n-aria $f^{\mathbf{A}/\theta}$ (no necesariamente un homomorfismo) que a cada n-upla de clases de equivalencia de elementos de A/θ le asigna el elemento $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$.

Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Una función *polinómica n-aria* de $\mathbf{A}$ es una función obtenida al evaluar $m-n$ variables de $t^{\mathbf{A}}$ por elementos fijos de A, para cierto término m-ario t ($m \geq n$). Las funciones polinómicas, en particular las constantes, constituyen los ejemplos más sencillos de funciones compatibles sobre un álgebra $\mathbf{A}$. Un álgebra $\mathbf{A}$ es *afín completa* (o afínmente completa) si toda función compatible de $\mathbf{A}$ está dada por una función polinómica de $\mathbf{A}$. Un álgebra $\mathbf{A}$ es *localmente afín completa* si toda función compatible está dada por una función polinómica sobre todo subconjunto finito de A. Si consideramos una función polinómica de un álgebra $\mathbf{A}$ haremos abuso de lenguaje y la vamos a llamar *polinomio* de $\mathbf{A}$. Una variedad se dice *afín completa* (*localmente afín completa*) si todo miembro es afín completo (localmente afín completo).

A lo largo del trabajo haremos abuso de notación y escribiremos A tanto para las álgebras como para sus universos.

1.2. Posets, monoides conmutativos, semi-retículos y retículos

En esta sección vamos a recordar las definiciones de posets [4], monoides conmutativos [1], semi-retículos [19] y retículos [4] que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis.

Un álgebra $(M, *, e)$ de tipo (2,0) es un *monoide* si se satisfacen las siguientes ecuaciones:

- $x * (y * z) = (x * y) * z$,
- $x * e = e * x = x$.

Si además M verifica la ecuación:

- $x * y = y * x$,

entonces diremos que M es un *monoide conmutativo*.

Un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq)$ (de ahora en más *poset*), es un *semi-retículo inferior* si para cada $x, y \in M$, existe el ínfimo del conjunto $\{x, y\}$, el cual vamos a denotar como $x \wedge y$.

El concepto dual de semi-retículo inferior se denomina *semi-retículo superior*, esto es: un poset $(J, \leq)$ tal que para cada $x, y \in J$, existe el supremo del conjunto $\{x, y\}$, al cual vamos a denotar como $x \vee y$.

De ahora en adelante trabajamos, principalmente, con el concepto de semi-retículo inferior y hacemos referencia a este como semi-retículo.

Dado un semi-retículo $(M, \leq)$, podemos definir la operación ínfimo $\wedge : M \times M \longrightarrow M$. Notar que $\wedge$ es una función que preserva el orden en ambos argumentos y es claro que para cada $a, b \in M$, $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$.

Por esto último, podemos definir un semi-retículo como una estructura algebraica, de la siguiente manera: un álgebra $(M, \wedge)$ de tipo (2) es un semi-retículo si se verifican las siguientes identidades:

- $x \wedge x = x$,
- $x \wedge y = y \wedge x$,
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Decimos que $(M, \wedge)$ es *acotado superiormente* si existe $1 \in M$, tal que, para cada $x \in M$ se verifica $x \wedge 1 = x$. De esto se deduce que M tiene último elemento; en ese caso escribimos $(M, \wedge, 1)$, donde 1 es el último elemento de $(M, \leq)$. De ahora en adelante trabajamos, principalmente, con el concepto de semi-retículo acotado superiormente y hacemos referencia a este como semi-retículo acotado.

Resulta interesante notar que en particular, los semi-retículos acotados superiormente son casos particulares de monoides conmutativos. La clase cuyos elementos son los semi-retículos acotados superiormente constituyen una variedad.

Si $(L, \leq)$ es un poset y $U \subseteq L$, definimos

$$(U] = \{x \in L : x \leq u, \text{ para algún } u \in U\},$$

$$[U) = \{x \in L : x \geq u, \text{ para algún } u \in U\}.$$

Si $x \in L$ escribiremos $(x]$ en lugar de $(\{x\}]$ y $[x)$ en lugar de $[\{x\})$.

Si $(L, \leq)$ es un poset y $V \subseteq L$, diremos que V es *creciente* si para cada $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $x \in V$, entonces $y \in V$. De forma similar, diremos que V es *decreciente* si para cada $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \in V$, entonces $x \in V$. En particular, decir que un conjunto V es creciente equivale a decir que $V = [V)$. De forma dual, decir que un conjunto V es decreciente equivale a decir que $V = (V]$. Vamos a denotar como L^+ al poset de crecientes de $(L, \leq)$. Para cada familia $\{\mathrm{U}_i\}_{i \in I} \subseteq L^+$ vamos a denotar como $\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i$ para indicar la unión de la familia $\{\mathrm{U}_i\}_{i \in I}$, i.e., $x \in \bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Análogamente, vamos a denotar como $\bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i$ para indicar la intersección de la familia $\{\mathrm{U}_i\}_{i \in I}$, i.e., $x \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i$ si y sólo si $x \in U_i$ para cada $i \in I$. En particular, $\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i$ y $\bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i$ son crecientes de $(L, \leq)$.

Si L es un semi-retículo acotado y $F \subseteq L$, diremos que F es un *filtro* de L si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $1 \in F$.

(b) F es creciente.

(c) Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$.

Diremos que F es un filtro *propio* de L si $F \neq L$. Vamos a denotar como $\mathrm{Fil}(L)$ al conjunto de filtros de L.

Si X es un subconjunto de L entonces el *filtro generado por* X (es decir, el menor filtro que contiene a X) es igual a:

$$F(X) = \{x \in L : x \geq x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n, \text{ para } x_1, ..., x_n \in X\}.$$

Un *retículo* es un poset $(L, \leq)$ en el cual $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen para cualesquiera $x, y \in L$.

Si $(L, \leq)$ es un retículo entonces podemos definir un álgebra $(L, \wedge, \vee)$ que satisface las siguientes identidades:

(i) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ **(v)** $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(ii) $x \vee y = y \vee x$ **(vi)** $x \wedge y = y \wedge x$

(iii) $x \vee x = x$ **(vii)** $x \wedge x = x$

(iv) $x \vee (x \wedge y) = x$ **(viii)** $x \wedge (x \vee y) = x$

Recíprocamente, si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra con dos operaciones binarias que satisfacen **(i)-(viii)** entonces la relación $\leq$ definida como:

(ix) $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$ o $x \vee y = y$ es un orden.

Más aún, el poset $(L, \leq)$ es un retículo, siendo $\vee$ y $\wedge$ el supremo e ínfimo del mismo, respectivamente.

En un retículo L las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(I) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, para cada $x, y, z \in L$.

(II) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, para cada $x, y, z \in L$.

Un retículo L es *distributivo* si satisface alguna de las condiciones equivalentes **(I)** o **(II)**. Diremos que un retículo L es *acotado* si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que satisfacen las identidades

$$\textbf{(m)}\ x \wedge 0 = 0, \quad \textbf{(M)}\ x \vee 1 = 1 \text{ ó } x \wedge 1 = x.$$

De la definición se desprende que 0 es el primer elemento de L y que 1 es el último elemento.

Un retículo L se dice *completo* si todo subconjunto A de L admite supremo e ínfimo (en L). Notaremos al supremo e ínfimo de A como $\bigvee A$ y $\bigwedge A$ respectivamente. De esta manera, dado $(L, \leq)$ un poset, $(L^+, \cap, \cup, \emptyset, L)$ es un retículo distributivo completo (con respecto al orden dado por la inclusión).

Diremos que $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un *retículo distributivo acotado* si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo, y $0, 1$ satisfacen **(m)** y **(M)** respectivamente. Alternativamente, un retículo distributivo acotado es un álgebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que las dos primeras operaciones satisfacen **(i)-(viii)** junto con **(I)**, y las últimas dos operaciones satisfacen **(m)** y **(M)**. Por esta razón la clase de retículos distributivos acotados forma una variedad.

Sea L un retículo. Un elemento $a \in L$ se dice *compacto* si siempre que $\bigvee A$ existe y $a \leq \bigvee A$ para $A \subseteq L$, entonces $a \leq \bigvee B$ para algún subconjunto finito de A. Vamos a decir que L es *compactamente generado* si cada elemento de L es un supremo de elementos compactos. Un retículo L es *algebraico* si es completo y compactamente generado. En particular, los elementos compactos de $\mathrm{Con}(L)$ son los elementos $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2), ...(a_n, b_n))$ de $\mathrm{Con}(L)$ con $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ...(a_n, b_n) \in L \times L$ (para más detalles, ver Teorema 5.5 de [4]).

Si $F \subseteq L$, diremos que F es un *filtro primo* de L si F es un filtro propio que satisface la siguiente condición:

$$\text{para cada } x, y \in L, \text{ si } x \vee y \in F \text{ entonces } x \in F \text{ ó } y \in F.$$

Vamos a denotar como $\mathsf{X}(L)$ al conjunto de filtros primos de L.

Si $I \subseteq L$, diremos que I es un *ideal* de L si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $I \neq \emptyset$.

(b) I es decreciente.

(c) Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.

El *ideal generado por* X (es decir, el menor ideal que contiene a X) coincide con

$$I(X) = \{x \in L : x \leq x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n, \text{ para } x_1, ..., x_n \in X\}.$$

El siguiente resultado es conocido en la literatura con el nombre de *Teorema de Birkhoff-Stone* (o *Teorema del filtro primo*) [1], [24] y [35]:

Teorema 1.2.1. *Si L es un retículo distributivo, F un filtro de L, I un ideal de L y $F \cap I = \emptyset$ entonces existe un filtro primo P de L tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Sea $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ un retículo acotado. Un elemento $x \in L$ es *complementado* si existe $y \in L$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. En un retículo distributivo los complementos son únicos. Un *álgebra de Boole* es un retículo distributivo complementado. Si x es un elemento de un álgebra de Boole entonces escribiremos $\overline{x}$ para el complemento de x.

Diremos que H es un *álgebra de Heyting* si H es un retículo con 0 y para cada par de elementos $x, y \in H$ existe la operación binaria $\rightarrow$ dada por

$$x \rightarrow y = \mathit{max}\{z \in H : z \wedge x \leq y\}.$$

Toda álgebra de Heyting H tiene último elemento y verifica que

$$x \wedge y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow z,$$

para cada $x, y, z \in H$. Más aún, la operación $\rightarrow$ está caracterizada por esta propiedad.

Desde el punto de vista del álgebra universal, las álgebras de Heyting se consideran como álgebras $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$.

Si H es un álgebra de Heyting y $\bigvee S$ existe para cierto $S \subseteq H$ entonces se satisface la siguiente ley distributiva generalizada:

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{x \wedge y : y \in S\}.$$

Luego toda álgebra de Heyting es un retículo distributivo. En particular, si H es un retículo distributivo completo entonces H es un álgebra de Heyting si y sólo si satisface la condición $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I}(x \wedge x_i)$, para todo $x \in H$ y toda familia de elementos x_i de H. Luego un retículo finito es distributivo si y sólo si existe $\rightarrow$.

Alternativamente, un álgebra de Heyting es un álgebra $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ (es decir, un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0)$) tal que $(H, \vee, \wedge, 0)$ satisface las identidades de retículo con 0 y además se satisfacen las siguientes identidades:

(1) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$.

(2) $x \wedge (x \rightarrow z) = x \wedge ((x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z))$.

(3) $z \wedge ((x \wedge y) \rightarrow x) = z$.

En particular tenemos que la clase de álgebras de Heyting forma una variedad que denotaremos Hey. Notemos que toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting. En efecto, basta verificar que $x \rightarrow y = y \vee \overline{x}$.

1.3. Retículos subresiduados

Los retículos subresiduados fueron introducidos por Epstein y Horn en [25] con el objetivo de estudiar ciertas lógicas proposicionales definidas en un lenguaje sin la implicación clásica pero con un conectivo de implicación que es llamada implicación estricta. Estas álgebras tambien fueron estudiadas por Celani y Jansana en [16]. Las definiciones y propiedades que se enuncian a continuación fueron extraídas de [25].

Un *retículo subresiduado* (o sr-retículo de ahora en más) es un par (A, Q), donde A es un retículo distributivo acotado, Q es un subretículo acotado de A y para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto

$$\{q \in Q : a \wedge q \leq b\}.$$

Este máximo será notado por $a \to b$. En particular,

$$Q = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}.$$

Resulta interesante notar que el retículo distributivo acotado Q dotado de la operación binaria $\to$ es un álgebra de Heyting. En particular, el par (A, Q) puede ser visto como un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$.

Comenzaremos con algunos conceptos básicos que usaremos a lo largo de esta tesis. El siguiente resultado es el Teorema 10 de [25].

Teorema 1.3.1. *Sea $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un álgebra de tipo (2,2,2,0,0). Se tiene que $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un sr-retículo si y sólo si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las siguientes identidades:*

1) $(x \wedge y) \to a = 1$,

2) $x \to y \leq z \to (x \to y)$,

3) $x \wedge (x \to y) \leq y$,

4) $z \to (x \wedge y) = (z \to x) \wedge (z \to y)$.

Resulta inmediato que en todo sr-retículo A se satisface la siguiente condición para todo $a, b \in A$:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1.$$

Más aún, la clase de los sr-retículos forma una variedad la cual denotaremos SRL [25]. Esta variedad contiene propiamente a la variedad de las álgebras de Heyting [17],[36]. Además, en [16] se da una base ecuacional alternativa para la clase de los sr-retículos.

Teorema 1.3.2. *Sea $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un álgebra de tipo (2,2,2,0,0). Luego $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un sr-retículo si y sólo si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las siguientes identidades:*

C1) $(a \to b) \wedge (a \to c) = a \to (b \wedge c)$,

C2) $(a \to c) \wedge (b \to c) = (a \vee b) \to c$,

C3) $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$,

C4) $a \to a = 1$,

C5) $a \wedge (a \to b) \leq b$,

C6) $a \to b \leq c \to (a \to b)$.

A continuación introduciremos algunas definiciones adicionales para presentar una descripción del retículo de congruencias de cualquier sr-retículo.

Sea $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$. Para cada $a \in A$ definimos

$$\Box(a) := 1 \rightarrow a.$$

Definición 1.3.3. Sean $A \in \mathsf{SRL}$ y $F \subseteq A$.

- Vamos a decir que F es un *filtro abierto* si es un filtro tal que $\Box(a) \in F$ siempre que $a \in F$.
- Vamos a decir que F es un *filtro primo abierto* si es un filtro primo tal que $\Box(a) \in F$ siempre que $a \in F$.

Vamos a denotar como $\Box\mathrm{Fil}(A)$ al conjunto de filtros abiertos de A y $\mathrm{X}^{\Box}(A)$ al conjunto de filtros primos abiertos de A.

Sean $A \in \mathsf{SRL}$ y $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. Definimos

$$\theta_F = \{(a, b) \in A \times A : a \rightarrow b \in F \text{ } y \text{ } b \rightarrow a \in F\}.$$

El siguiente resultado se sigue del Teorema 6.12 de [16].

Teorema 1.3.4. *Sea $A \in \mathsf{SRL}$. Existe un isomorfismo de orden entre* $\mathrm{Con}(A)$ *y* $\Box\mathrm{Fil}(A)$*, el cual queda determinado por las asignaciones $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta_F$.*

Motivados por resultados de [8] definiremos una subvariedad de SRL que impulsa la existencia de un teorema análogo al Teorema del filtro primo.

Definición 1.3.5. Sea $A \in \mathsf{SRL}$. Vamos a decir que A es un *sr-retículo fuerte* si A satisface la siguiente identidad:

$$\Box(a \vee b) = \Box(a) \vee \Box(b).$$

Vamos a denotar como $\mathsf{S}^{\Box}$ a la subvariedad de SRL cuyos elementos son sr-retículos fuertes.

Sea $A \in \mathsf{SRL}$. Vamos a decir que A satisface el *$\Box$-teorema del filtro primo* si se satisface la siguiente condición: Para cada $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ e I ideal de A tal que $F \cap I = \emptyset$ existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.

El siguiente resultado es la Proposición 2.6 de [18].

Proposición 1.3.6. *Sea $A \in \mathsf{SRL}$. Luego A es un sr-retículo fuerte si y sólo si A satisface el $\Box$-teorema del filtro primo.*

Vamos a denotar como K_1 a la clase de los sr-retículos fuertes que satisfacen que para cada $a, b \in A$, $a \rightarrow b \in \{\Box(b), 1\}$ y K_2 a la clase de los sr-retículos que son totalmente ordenados.

La definición de la clase K_1 se encuentra motivada por dos puntos:

1. Si el orden de un sr-retículo A es total, entonces A satisface que para cada $a, b \in A$, $a \rightarrow b \in \{\Box(b), 1\}$, en otras palabras $\mathrm{K}_2 \subseteq \mathrm{K}_1$.
2. Las álgebras de Hilbert $(H, \rightarrow, 1)$ tales que $a \rightarrow b \in \{b, 1\}$ para todo $a, b \in A$. Estas álgebras, denominadas *order álgebras*, fueron introducidas y estudiadas en [3] (ver también [8]).

Como cada $A \in \mathrm{K}_2$ satisface la ecuación $\Box(a \vee b) = \Box(a) \vee \Box(b)$, la variedad generada por K_2 está contenida en $\mathsf{S}^{\Box}$. Más aún, la condición 1. implica que $\mathbb{V}(\mathrm{K}_2) \subseteq \mathbb{V}(\mathrm{K}_1)$.

Se puede caracterizar a $\mathbb{V}(\mathrm{K}_1)$ y $\mathbb{V}(\mathrm{K}_2)$ de la siguiente manera[1]:

$$\mathbb{V}(\mathrm{K}_1) = \mathsf{S}^{\Box} + \{(x \to y) \vee ((x \to y) \to \Box(y)),$$

$$\mathbb{V}(\mathrm{K}_2) = \mathsf{SRL} + \{(x \to y) \vee (y \to x) = 1\}$$

(para detalles, ver por ejemplo [13] y [18]).

Resulta interesante notar que la clase K_2 es una subclase propia de K_1. Basta considerar el álgebra de Boole A de cuatro elementos, donde a y b son los átomos. Luego $(A, \{0, 1\})$ es un sr-retículo que es un miembro de K_1 pero no de K_2. Más aún, $\mathbb{V}(\mathrm{K}_2)$ es una subvariedad propia de $\mathbb{V}(\mathrm{K}_1)$. En efecto, $A \in \mathbb{V}(\mathrm{K}_1)$ y $A \notin \mathbb{V}(\mathrm{K}_2)$ pues $(a \to b) \vee (b \to a) = 0 \neq 1$.

1.4. Retículos residuados conmutativos

Para detalles sobre retículos residuados conmutativos ver por ejemplo [29].

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ es un *retículo residuado conmutativo* si $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo y para cada $a, b, c \in A$ se satisface la siguiente condición:

$$a \cdot b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \to c.$$

La clase de los retículos residuados conmutativos forma una variedad que vamos a denotar como CRL [29].

Diremos que un retículo residuado conmutativo es *integral* si $a \leq e$ para todo a. En tal caso usaremos la notación 1 para indicar al elemento e. Vamos a denotar como iCRL a la variedad de los retículos residuados conmutativos integrales.

Sea $(A, \leq)$ un poset y $H \subseteq A$. Diremos que H es un conjunto *convexo* de A si para cualesquiera $a, b, c \in A$, si $a, b \in H$ y $a \leq c \leq b$ entonces $c \in H$.

Sean $A \in \mathsf{CRL}$ y $H \subseteq A$. Diremos que H es una *subálgebra convexa* de A, si es un subconjunto convexo que además es una subálgebra de A. Vamos a denotar como $\mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$ al conjunto de subálgebras convexas de A.

Sea $A \in \mathsf{CRL}$, $\theta \in \mathrm{Con}(A)$ y $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$. Definimos:

$$\theta_H = \{(a, b) \in A \times A : a \cdot h \leq b \text{ y } b \cdot h \leq a \text{ para } h \in H\},$$

El siguiente resultado es el Teorema 2.3 de [29].

Teorema 1.4.1. *Si A es un elemento de CRL entonces existe un isomorfismo de orden entre $\mathrm{Con}(A)$ y $\mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$. El isomorfismo queda establecido por las asignaciones $\theta \mapsto e/\theta$ y $H \mapsto \theta_H$.*

Ahora caracterizaremos a la subvariedad de CRL generada por la clase de retículos residuados conmutativos tales que el retículo subyacente es totalmente ordenado. Vamos a denotar como $\mathsf{CRL}^{\mathrm{c}}$ a esta variedad.

Consideremos las siguientes identidades:

[1] Sean V una variedad y $p \approx q$ una identidad en el lenguaje de V. La subvariedad de V cuyas álgebras satisfacen la identidad $p \approx q$ será denotada como $V + \{p \approx q\}$.

C_1 $e \leq (x \to y) \vee (y \to x)$,

C_2 $e \wedge (x \vee y) = (e \wedge x) \vee (e \wedge y)$.

El siguiente resultado es el Teorema 3.1 de [29].

Teorema 1.4.2. *Las identidades C_1 y C_2, junto a las que definen a* CRL *forman una base ecuacional para* $\mathsf{CRL}^{\mathrm{c}}$.

Consideremos las siguientes identidades:

E_1 $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$,

E_2 $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$.

El siguiente resultado nos da bases ecuacionales alternativas para la variedad $\mathsf{CRL}^{\mathrm{c}}$ (para detalles ver por ejemplo el Teorema 3.4 de [29]).

Teorema 1.4.3. *Junto con las identidades que definen a* CRL, *tanto* $\{C_2, E_1\}$ *como* $\{C_2, E_2\}$ *forman bases ecuacionales alternativas para* $\mathsf{CRL}^{\mathrm{c}}$.

Capítulo 2

Monoides conmutativos reticulados subresiduados (srl-monoides)

En este capítulo introduciremos la clase de los monoides conmutativos reticulados subresiduados (srl-monoides para abreviar), la cual será denotada por SR. La clase SR contiene propiamente a las variedades de retículos residuados conmutativos y de retículos subresiduados respectivamente.

En la Sección 2.1 daremos algunas propiedades algebraicas de los srl-monoides y probaremos que SR es una variedad. En la Sección 2.2 definiremos las subálgebras fuertemente convexas. En particular, probaremos que si $A \in \mathsf{SR}$ entonces existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de subálgebras fuertemente convexas de A. En la Sección 2.3 daremos algunas descripciones de la subálgebra fuertemente convexa generada por conjuntos arbitrarios. Finalmente, en la Sección 2.4 daremos algunas aplicaciones de la Sección 2.3. Más precisamente, presentaremos una caracterización para las álgebras simples y subdirectamente irreducibles respectivamente. Asimismo probaremos que SR tiene la propiedad de extensión de congruencias. Por último, daremos una descripción de la congruencia generada por subconjuntos arbitrarios. En particular caracterizaremos a las congruencias principales.

2.1. Propiedades algebraicas

En esta sección introduciremos la definición de srl-monoide. También daremos algunas propiedades algebraicas que serán de utilidad para caracterizar a estas álgebras. Finalmente, probaremos que la clase de srl-monoides forma una variedad.

Definición 2.1.1. Un *monoide conmutativo reticulado subresiduado* (o srl-monoide para abreviar) es un par $(\mathbf{A}, Q)$ donde $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \cdot, e)$ es un álgebra de tipo (2,2,2,0) tal que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, se satisface la identidad

$$(a \vee b) \cdot c = (a \cdot c) \vee (b \cdot c) \tag{2.1}$$

y Q es una subálgebra de $\mathbf{A}$ tal que para cada $a, b \in A$ existe $c \in Q$ con la propiedad que para todo $q \in Q$, $a \cdot q \leq b$ si y sólo si $q \leq c$. Este c es denotado por $a \to b$.

Notar que si A es un srl-monoide, la operación $\cdot$ es monótona, es decir que para cada $a, b, c \in A$ tales que $a \leq b$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Los srl-monoides pueden ser vistos como álgebras $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$.

Resulta interesante notar que si $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ es un srl-monoide entonces para cada $a, b \in A$ tenemos que

$$a \to b = \mathit{max}\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}.$$

En efecto, sean $a, b \in A$ y $E_{ab} = \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$. Sea c el elemento dado en la definición de srl-monoide. Dado que $c \in Q$ y $c \leq c$, se tiene que $a \cdot c \leq b$, por lo que $c \in E_{ab}$. Tomemos ahora un $q \in E_{ab}$. Luego, $q \in Q$ y $a \cdot q \leq b$. En particular, $q \leq c$. Por lo tanto, existe el máximo de E_{ab} y el mismo coincide con c. De manera recíproca, sean $a, b \in A$ y supongamos que existe $\mathit{max}\, E_{ab}$ que llamaremos c. Sea $q \in Q$ tal que $a \cdot q \leq b$. Luego $q \in E_{ab}$ y de esta manera $q \leq c$. Si $q \leq c$ luego por la monotonía de $\cdot$ y el hecho de que $c \in E_{ab}$ se tiene que $a \cdot q \leq a \cdot c \leq b$. Por lo tanto, $a \cdot q \leq b$.

Además, si $(A, \wedge, \vee, \cdot, e)$ es un álgebra de tipo (2,2,2,0) tal que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, se satisface la identidad (2.1) y Q es una subálgebra de $(A, \wedge, \vee, \cdot, e)$ tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$ (el cual se nota por $a \to b$) entonces $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ es un srl-monoide.

Sea $(\mathbf{A}, Q)$ un srl-monoide, si no hay lugar a confusión, vamos a denotar como (A, Q) en lugar de $(\mathbf{A}, Q)$. Si (A, Q) es un srl-monoide entonces

$$Q = \{a \in A : e \to a = a\} = \{e \to a : a \in A\}.$$

Veamos primero que $Q = \{a \in A : e \to a = a\}$. En efecto, sea $a \in Q$. Por definición $e \to a = \mathit{max}\{q \in Q : q \leq a\} = a$, por lo que $a \in \{a \in A : e \to a = a\}$. Recíprocamente, sea $a \in A$ tal que $e \to a = a$. Como $e \to a \in Q$, se tiene que $a \in Q$. Ahora probemos que $Q = \{e \to a : a \in A\}$. Sea $a \in Q$, por la prueba previa se tiene que $a = e \to a$, por lo que $a \in \{e \to a : a \in A\}$. En el otro sentido, sea $a \in A$. Dado que $e \in Q$, por definición de la implicación $e \cdot a \in Q$, por lo que $a \in Q$.

Definición 2.1.2. Un srl-monoide $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ se dice *integral* si tiene último elemento, el cual se nota por 1, y $e = 1$.

Vamos a denotar como SR a la clase de los srl-monoides e iSR a la clase de los srl-monoides integrales.

Las propiedades que se enuncian a continuación establecen la relación entre sr-retículos, retículos residuados conmutativos y srl-monoides:

- Si $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1) \in \mathsf{SRL}$ entonces $(A, \wedge, \vee, \wedge, \to, 1) \in \mathsf{iSR}$. En este sentido decimos que todo sr-retículo es un srl-monoide. Más aún, se satisface que $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1) \in \mathsf{SRL}$ si y sólo si $(A, \wedge, \vee, \wedge, \to, 1) \in \mathsf{iSR}$ y A es un retículo con primer elemento.

- Si $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e) \in \mathsf{CRL}$ entonces $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e) \in \mathsf{SR}$ (se puede demostrar definiendo $Q = A$). Además, $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e) \in \mathsf{CRL}$ si y sólo si $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e) \in \mathsf{SR}$ y $e \rightarrow a = a$ para todo $a \in A$.

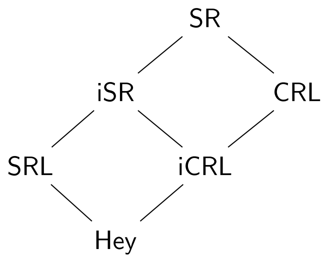
En todo srl-monoide A se satisface la siguiente condición para cada $a, b, c \in A$:

$$\text{Si } a \leq b \rightarrow c \text{ entonces } a \cdot b \leq c.$$

En efecto, supongamos que $a \leq b \rightarrow c$. Luego, a través de la monotonía de $\cdot$, se tiene que $a \cdot b \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$.

La recíproca de la propiedad previa se verifica si y sólo si $A \in \mathsf{CRL}$.

En el siguiente diagrama de Hasse (tomando como orden la inclusión) mostramos cómo se relacionan las variedades que nos interesan en este capítulo [1].



Ahora veamos algunos ejemplos de srl-monoides.

Ejemplo 2.1.3. *Sea $(A, \wedge, \vee, \cdot, 0, 1)$ un álgebra de tipo (2,2,2,0) tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo y se satisface la identidad (2.1). Se considera Q como un subconjunto de A que es una cadena finita cerrada bajo $\cdot, 0$ y 1. Luego para cada a y b elementos de A, se puede probar que $0 \in \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, por lo que se trata de un conjunto no vacío. Luego, existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$. Por lo tanto, (A, Q) es un srl-monoide integral.*

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos la cadena de tres elementos $A = \{0, e, 1\}$ con $0 < e < 1$. Se define la operación binaria $\cdot$ de la siguiente manera*

$\cdot$	0	e	1
0	0	0	0
e	0	e	1
1	0	1	1

Sea $Q = \{0, e\}$. Un cálculo directo muestra que (A, Q) es un srl-monoide. Más aún, la operación $\rightarrow$ está dada por

$\rightarrow$	0	e	1
0	e	e	e
e	0	e	e
1	0	0	e

[1] Notar que hay abuso de notación en algunas de las contenciones indicadas en el diagrama debido al lenguaje de las álgebras consideradas en cada clase. Por ejemplo, al decir que $\mathsf{SRL} \subseteq \mathsf{iSR}$ estamos considerando a los elementos de SRL en la signatura de iSR.

Dado que $e \neq 1$, $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e) \notin \mathsf{iSR}$. *Más aún, este álgebra no es un sr-retículo pues* $e \cdot 1 \neq e \wedge 1$ *y tampoco es un retículo residuado conmutativo dado que* $e \rightarrow 1 \neq 1$.

Ejemplo 2.1.5. *Se considera la cadena de tres elementos* $A = \{0, a, 1\}$ *con* $0 < a < 1$. *Se define la operación binaria* $\cdot$ *de la siguiente manera*

$\cdot$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

Sea $Q = \{0, 1\}$. *Se tiene que* (A, Q) *es un srl-monoide integral. Además, la operación* $\rightarrow$ *queda determinada como*

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	0	1

Notar que el álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, 1)$ *no es un sr-retículo dado que* $a \cdot a \neq a \wedge a$ *y tampoco es un retículo residuado conmutativo integral porque* $1 \rightarrow a \neq a$.

Ejemplo 2.1.6. *Sea* A *el intervalo real* $[0, 1]$. *Este conjunto puede ser visto como una MV-algebra [20] y como consecuencia también como un retículo residuado conmutativo. En particular, se satisface la identidad (2.1), donde se nota* $\cdot$ *al producto usual en la MV-algebra* $[0, 1]$. *Notar que para cada número natural* n *con* $n \geq 2$ *se tiene que* $Ł_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ *es una subálgebra del retículo residuado conmutativo* A. *En lo que sigue se nota también* A *al* $\{\wedge, \vee, \cdot, 1\}$*-reducto del retículo residuado conmutativo previamente mencionado. Luego* $(A, Ł_n)$ *es un srl-monoide integral.*

Ahora daremos una caracterización ecuacional para la clase de los srl-monoides.

Teorema 2.1.7. *Sea* $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e)$ *un álgebra de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0)$.

Se tiene $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e)$ *es un srl-monoide si y sólo si* $(A, \wedge, \vee)$ *es un retículo,* $(A, \cdot, e)$ *es un monoide conmutativo, se verifica la identidad (2.1) y además se satisfacen las siguientes identidades para cada* $a, b, c \in A$:

1) $e \leq (a \wedge b) \rightarrow b$,

2) $a \rightarrow b \leq (c \wedge e) \rightarrow (a \rightarrow b)$,

3) $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$,

4) $c \rightarrow (a \wedge b) = (c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow b)$,

5) $e \rightarrow ((e \rightarrow a) \cdot (e \rightarrow b)) = (e \rightarrow a) \cdot (e \rightarrow b)$,

6) $e \rightarrow b \leq a \rightarrow (a \cdot (e \rightarrow b))$.

Demostración. Supongamos que $(A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, e)$ es un srl-monoide. Resulta inmediato que las condiciones 5) y 6) se verifican. Dado que $e \in Q$ y $e \cdot (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$ se tiene que $e \leq (a \wedge b) \rightarrow b$, que es 1). Tomando en cuenta la definición de $a \rightarrow b$ obtenemos $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$, que es 3). Además, dado que

$(c \wedge e) \cdot (a \to b) \leq e \cdot (a \to b) = a \to b$ luego $a \to b \leq (c \wedge e) \to (a \to b)$, que es 2). Ahora veremos que

$$c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b).$$

Por 3), $c \cdot (c \to (a \wedge b)) \leq a \wedge b \leq a$, entonces $c \to (a \wedge b) \leq c \to a$. De una forma similar tenemos que $c \to (a \wedge b) \leq c \to b$. De este modo, $c \to (a \wedge b)$ es una cota inferior de $\{c \to a, c \to b\}$ en Q. Sea d otra cota inferior de $\{c \to a, c \to b\}$ en Q. Luego $d \in Q$, $d \leq c \to a$ y $d \leq c \to b$, por lo que $d \cdot c \leq a$ y $d \cdot c \leq b$. Por lo tanto, $d \cdot c \leq a \wedge b$, que implica la desigualdad $d \leq c \to (a \wedge b)$. Por consiguiente, hemos probado 4).

Recíprocamente, supongamos que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, (2.1) se verifica y las identidades 1) a 6) se satisfacen en A. Sean $Q = \{a \in A : e \to a = a\}$ y $a, b, c \in A$. Es consecuencia de 3) que

I) $e \to a \leq a$.

Se sigue de 4) que

II) Si $a \leq b$ entonces $c \to a \leq c \to b$.

Además tenemos que

III) Si $a \leq b$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Supongamos que $q, r \in Q$. Es consecuencia de I) y II) que $q = e \to q \leq e \to (q \vee r) \leq q \vee r$. Por la misma razón, $r \leq e \to (q \vee r) \leq q \vee r$. Así, $q \vee r = e \to (q \vee r)$, i.e., $q \vee r \in Q$. Por 4) también tenemos que $q \wedge r \in Q$. Por 1) y I) tenemos que $e \to e = e$, por lo que $e \in Q$. Es consecuencia de 5) que $e \to (q \cdot r) = q \cdot r$, luego $q \cdot r \in Q$. Por lo tanto, Q es una subálgebra de $(A, \wedge, \vee, \cdot, e)$.

Sean $a, b \in A$. Por I) y 2) tenemos que $e \to (a \to b) \leq a \to b \leq e \to (a \to b)$, por lo que $e \to (a \to b) = a \to b$. Luego, $a \to b \in Q$.

Finalmente, sean $a, b \in A$ y $q \in Q$. Asumamos que $a \cdot q \leq b$. Es consecuencia de 6) y II) que $q = e \to q \leq a \to (a \cdot q) \leq a \to b$, luego $q \leq a \to b$. Ahora asumamos que $q \leq a \to b$. Luego, por III) y 3), $a \cdot q \leq a \cdot (a \to b) \leq b$. De este modo, $a \cdot q \leq b$. Por lo tanto, $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ es un srl-monoide. □

Corolario 2.1.8. *La clase* SR *es una variedad.*

Resulta interesante notar que si $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide y $\cdot$ es una función monótona entonces las siguientes dos condiciones resultan equivalentes:

1) $a \cdot (a \to b) \leq b$ para cualesquiera $a, b \in A$.

2) Para cada $a, b, c \in A$, si $a \leq b \to c$ entonces $b \cdot a \leq c$.

Esta propiedad es un caso particular de la Proposición 1.1 de [18]. Por lo tanto, es consecuencia del Teorema 2.1.7 que la condición 2) previamente mencionada se satisface en cualquier srl-monoide.

Lema 2.1.9. *Sea* $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ *un srl-monoide. Las siguientes condiciones se verifican para cualesquiera* $a, b, c \in A$*:*

1) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

2) $(a \to b) \cdot (b \to c) \leq a \to c$,

3) $e \leq a \to a$,

4) $a \leq b$ si y sólo si $e \leq a \to b$,

5) $e \to a \leq a$,

6) $e \to (a \to b) = a \to b$,

7) $e \to a \leq b \to (a \cdot b)$,

8) si $a, b \leq e$ entonces $a \cdot b \leq a \wedge b$.

Demostración. 1) Dado que $a \cdot ((a \vee b) \to c) \leq (a \vee b) \cdot ((a \vee b) \to c) \leq c$, luego $(a \vee b) \to c \leq a \to c$. Similarmente, $(a \vee b) \to c \leq b \to c$. De este modo, $(a \vee b) \to c$ es una cota inferior de $\{a \to c, b \to c\}$ en Q. Sea d una cota inferior de $\{a \to c, b \to c\}$ en Q, entonces $d \in Q$, $d \leq a \to c$ y $d \leq b \to c$, por lo que $d \cdot a \leq c$ y $d \cdot b \leq c$. Por consiguiente, $d \cdot (a \vee b) = (d \cdot a) \vee (d \cdot b) \leq c$. Luego $d \leq (a \vee b) \to c$. De este modo, $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.

2) Dado que $a \cdot (a \to b) \leq b$ y $b \cdot (b \to c) \leq c$ se tiene que $a \cdot (a \to b) \cdot (b \to c) \leq b \cdot (b \to c) \leq c$. Sin embargo $(a \to b) \cdot (b \to c) \in Q$, por lo que $(a \to b) \cdot (b \to c) \leq a \to c$.

3) La desigualdad $e \leq a \to a$ es consecuencia de que $e \in Q$ y $e \cdot a = a \leq a$.

4) Supongamos que $a \leq b$. Luego $a \to b \geq b \to b$. Sin embargo $b \to b \geq e$, por lo que $e \leq a \to b$. Recíprocamente, supongamos que $e \leq a \to b$. Por consiguiente, $a = a \cdot e \leq a \cdot (a \to b) \leq b$. Luego $a \leq b$.

5) La desigualdad $e \to a \leq a$ es consecuencia de $e \to a = e \cdot (e \to a) \leq a$.

6) Es inmediato que la igualdad $e \to (a \to b) = a \to b$ se satisface.

7) Veamos que $e \to a \leq b \to (a \cdot b)$. Primero notemos que $e \to a \leq b \to (b \cdot (e \to a))$. Como $e \to a \leq a$ entonces $b \cdot (e \to a) \leq a \cdot b$, así $b \to (b \cdot (e \to a)) \leq b \to (a \cdot b)$. Por lo tanto, $e \to a \leq b \to (a \cdot b)$.

8) Supongamos que $a, b \leq e$. Luego, $a \cdot b \leq a$ y $a \cdot b \leq b$, con lo cual $a \cdot b \leq a \wedge b$. □

Sea $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$. Para cada $a \in A$ definimos

$$\Box(a) := e \to a.$$

El siguiente resultado está inspirado en la definición alternativa de retículo subresiduado dada por Celani y Jansana en [16].

Corolario 2.1.10. *Sea $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$. Luego $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, e)$ es un srl-monoide si y sólo si $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo, $(A, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo, la identidad (2.1) se verifica y se satisfacen las siguientes identidades:*

1) $z \to (x \wedge y) = (z \to x) \wedge (z \to y)$,

2) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$,

3) $e \leq x \to x$,

4) $x \cdot (x \to y) \leq y$,

5) $x \to y \leq (z \wedge e) \to (x \to y)$,

6) $\Box(\Box(x) \cdot \Box(y)) = \Box(x) \cdot \Box(y)$,

7) $\Box(y) \leq x \to (x \cdot \Box(y))$.

Demostración. Como consecuencia del Teorema 2.1.7 y Lema 2.1.9 tenemos todo srl-monoide satisface las condiciones 1) a 7). Recíprocamente, notemos que las condiciones 1), 4), 5), 6) y 7) son exactamente las condiciones 4), 3), 2), 5) y 6) del Teorema 2.1.7, por lo que solo nos resta probar la primera identidad del mismo teorema. Sean $a, b \in A$. Dado que $a \wedge b \leq b$ se tiene que $e \leq b \to b \leq (a \wedge b) \to b$, por lo que $e \leq (a \wedge b) \to b$. $\Box$

Observación 2.1.11. *En el caso de los sr-retículos las condiciones* 7) *y* 8) *del Corolario 2.1.10 previo resultan redundantes. En efecto, consideremos un sr-retículo A y sean $x, y \in A$.*

Para probar 7)*, notemos que*

$$\Box(x) \wedge \Box(y) = (1 \to x) \wedge (1 \to y) = 1 \to (x \wedge y) = \Box(x \wedge y).$$

Además, por definición de Q,

$$\Box(\Box(x) \wedge \Box(y)) = \Box(\Box(x \wedge y)) = \Box(x \wedge y),$$

por lo cual

$$\Box(\Box(x) \wedge \Box(y)) = \Box(x) \wedge \Box(y).$$

Para demostrar la condición 8)*, por un lado tenemos que*

$$x \to (x \wedge \Box(y)) = (x \to x) \wedge (x \to \Box(y)) = 1 \wedge (x \to \Box(y)) = x \to \Box(y).$$

Además,

$$x \to \Box(y) = \max\{q \in Q : x \wedge q \leq \Box(y)\}.$$

Como $\Box(y) \in Q$, $x \wedge \Box(y) \leq \Box(y)$. Por lo tanto,

$$\Box(y) \leq x \to (x \wedge \Box(y)).$$

En los retículos residuados conmutativos se cumple que

$$a \cdot b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \to c. \tag{2.2}$$

Ahora vamos a probar una versión débil de (2.2) en el contexto de los srl-monoides.

Proposición 2.1.12. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $a, b, c \in A$. Las siguientes condiciones se verifican:*

1) Si $a \leq b \to c$ luego $a \cdot b \leq c$.

2) Si $a \cdot b \leq c$ luego $\Box(a) \leq b \to c$.

2.2. Congruencias y subálgebras fuertemente convexas

En esta sección probaremos que para toda $A \in \mathsf{SR}$ existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de cierto tipo de subálgebras de A. Este resultado generaliza la propiedad que dice que si $A \in \mathsf{CRL}$ entonces existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de subálgebras convexas de A (Teorema 2.3 de [29]). Para ello, empezaremos con algunas definiciones y resultados preliminares que serán de utilidad.

Las siguiente definiciones cumplirán un rol fundamental en esta sección.

Definición 2.2.1. Sean $A \in \mathsf{SR}$ y H un subconjunto de A.

- Si H es una subálgebra de A y además H es un conjunto convexo diremos que H es una *subálgebra convexa* de A.
  Vamos a denotar como $\mathrm{Sub_C}(A)$ al conjunto de subálgebras convexas de A.

- Si es una subálgebra convexa de A tal que para todo $a \in A$ y $h \in H$ tal que $a \cdot h \leq e \leq h \to a$ se cumple que $a \in H$ diremos que H es una *subálgebra fuertemente convexa* de A.
  Vamos a denotar como $\mathrm{Sub_{SC}}(A)$ al conjunto de subálgebras fuertemente convexas de A.

Surge naturalmente la siguiente pregunta:

$$\text{¿existen } A \in \mathsf{SR} \text{ y } H \in \mathrm{Sub_C}(A) \text{ tales que } H \notin \mathrm{Sub_{SC}}(A)?$$

La respuesta es positiva. Para probarlo, consideremos el Ejemplo 2.1.4. Tenemos que $\{0, e\} \in \mathrm{Sub_C}(A)$ la cual no es una subálgebra fuertemente convexa dado que $1 \cdot 0 \leq e \leq 0 \to 1$ pero $1 \notin H$.

Lema 2.2.2. *Sea $A \in \mathsf{SR}$. Si $\theta \in \mathrm{Con}(A)$, entonces $e/\theta \in \mathrm{Sub_{SC}}(A)$.*

Demostración. Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. La convexidad de e/θ se sigue del hecho de que θ es una congruencia de retículos. Ahora probaremos que e/θ es una subálgebra. Para ello, sean $a, b \in e/\theta$, es decir, $(a, e), (b, e) \in \theta$. Resulta inmediato que $(a \wedge b, e), (a \vee b, e)$ y $(a \cdot b, e)$ son elementos de θ. Dado que $e \to e = e$ tenemos también que $(a \to b, e) \in \theta$. De este modo, e/θ es una subálgebra convexa de A.

Finalmente probaremos que e/θ es una subálgebra fuertemente convexa de A. Para demostrarlo, sean $h \in e/\theta$ y $a \in A$ tales que $a \cdot h \leq e \leq h \to a$, es decir, $a \cdot h \leq e$ y $h \leq a$. Como $(h, e) \in \theta$, luego $((a \cdot h) \vee e, a \vee e) \in \theta$, es decir, $(e, a \vee e) \in \theta$. De nuevo, dado que $(h, e) \in \theta$ se tiene que $(h \vee a, e \vee a) \in \theta$, es decir, $(a, e \vee a) \in \theta$. Se sigue de la simetría y la transitividad de θ que $(a, e) \in \theta$, el cual era nuestro objetivo. $\square$

Corolario 2.2.3. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $\theta, \psi \in \mathrm{Con}(A)$. Luego $\theta \subseteq \psi$ si y sólo si $e/\theta \subseteq e/\psi$.*

Demostración. Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $\theta, \psi \in \mathrm{Con}(A)$. Resulta inmediato que si $\theta \subseteq \psi$ entonces $e/\theta \subseteq e/\psi$. Recíprocamente supongamos que $e/\theta \subseteq e/\psi$ y sea $(a, b) \in \theta$. Como θ es una congruencia y $e \leq a \to a$, $((a \to b) \wedge e) \in e/\theta$ y de forma similar, $((b \to a) \wedge e) \in e/\theta$. Teniendo en cuenta la hipótesis tenemos que $(a \to b) \wedge e, (b \to a) \wedge e \in e/\psi$ y usando la compatibilidad de ψ, $(b \vee a \cdot ((a \to b) \wedge e), b \vee (a \cdot e)) \in \psi$. Como $a.((a \to b) \wedge e) \leq a.(a \to b) \leq b$, $b \vee a \cdot ((a \to b) \wedge e) = b$. En otras palabras, $(b, b \vee a) \in \psi$. Análogamente, dado que $b.((b \to a) \wedge e) \leq b.(b \to a) \leq a$, $a \vee b \cdot ((b \to a) \wedge e) = a$ se tiene que $(a, a \vee b) \in \psi$. Finalmente, usando la conmutatividad de $\vee$ y la transitividad de ψ, $(a, b) \in \psi$ el cual era nuestro objetivo.

$\square$

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $H \in \mathrm{Sub_C}(A)$. Definimos el siguiente subconjunto de $A \times A$:

$$\theta_H = \{(a, b) \in A \times A : a \cdot h \leq b \text{ y } b \cdot h \leq a \text{ para } h \in H\}.$$

Lema 2.2.4. *Sean $A \in \mathsf{SR}, H \in \mathrm{Sub_C}(A)$ y $a, b \in A$. Las siguientes condiciones resultan equivalentes:*

a) $(a, b) \in \theta_H$.

b) $(a \to b) \wedge e \in H$ y $(b \to a) \wedge e \in H$.

c) Existe $h \in H$ tal que $h \leq a \to b$ y $h \leq b \to a$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Supongamos que $(a, b) \in \theta_H$, luego por definición de θ_H existe $h \in H$ tal que $a \cdot h \leq b$ y $b \cdot h \leq a$. Se sigue de la Proposición 2.1.12 que $\Box(h) \leq a \to b$ y $\Box(h) \leq b \to a$. Dado que $h \in H$ se tiene que $\Box(h) \in H$ y $\Box(h) \wedge e \in H$. De este modo, $\Box(h) \wedge e \leq (a \to b) \wedge e \leq e$. Similarmente, $\Box(h) \wedge e \leq (b \to a) \wedge e \leq e$. Por la convexidad de H tenemos que $(a \to b) \wedge e \in H$ y $(b \to a) \wedge e \in H$.

b) $\Rightarrow$ c). Resulta directo teniendo en cuenta que $(a \to b) \wedge e \leq a \to b$ y $(b \to a) \wedge e \leq b \to a$.

c) $\Rightarrow$ a). Finalmente, supongamos que existe $h \in H$ tal que $h \leq a \to b$ y $h \leq b \to a$. Luego, $a \cdot h \leq a \cdot (a \to b) \leq b$. Análogamente, $b \cdot h \leq a$. Por lo tanto, $(a, b) \in \theta_H$. $\square$

Lema 2.2.5. *Sea $A \in \mathsf{SR}$. Si $H \in \mathrm{Sub_C}(A)$, entonces $\theta_H \in \mathrm{Con}(A)$.*

Demostración. Veamos que θ_H es una relación de equivalencia. La reflexividad es consecuencia de que $e \in H$ por ser subálgebra de A, dado que $e \cdot a \leq a$ y $a \cdot e \leq a$ pues $\cdot$ es conmutativa. La simetría resulta inmediata de la definición de θ_H. Para probar la transitividad, consideremos $(a, b), (b, c) \in \theta_H$, con lo cual $a \cdot h \leq b$, $b \cdot h \leq a$, $b \cdot k \leq c$ y $c \cdot k \leq b$ para $h, k \in H$. Luego, teniendo en cuenta la monotonía de $\cdot$, $a \cdot h \cdot k \leq b \cdot k \leq c$, con lo cual $a \cdot h \cdot k \leq c$. De forma análoga, $c \cdot h \cdot k \leq a$. Como $h \cdot k \in H$, concluimos que $(a, c) \in \theta_H$.

Sean $(a, b), (c, d) \in \theta_H$. Primero mostraremos que $(a \cdot c, b \cdot d), (a \vee c, b \vee d) \in \theta_H$. Como $(a, b), (c, d) \in \theta_H$ entonces se sigue del Lema 2.2.4 que existen $h, j \in H$ tales que $h \leq a \to b$, $h \leq b \to a$, $j \leq c \to d$ y $j \leq d \to c$. Es inmediato que podemos reemplazar h y j por $k = h \wedge j$, que es un elemento de H. Luego

$$(a \cdot c) \cdot k^2 = (a \cdot k) \cdot (c \cdot k) \leq b \cdot d,$$

es decir, $(a \cdot c) \cdot k^2 \leq b \cdot d$. De una forma similar podemos probar que $(b \cdot d) \cdot k^2 \leq a \cdot c$, con lo cual $(a \cdot c, b \cdot d) \in \theta_H$. Además

$$(a \vee c) \cdot k = (a \cdot k) \vee (c \cdot k) \leq b \vee d.$$

Análogamente podemos mostrar que $(b \vee d) \cdot k \leq a \vee c$, entonces $(a \vee c, b \vee d) \in \theta_H$. Además,

$$k \cdot (a \to c) \cdot k \leq (b \to a) \cdot (a \to c) \cdot (c \to d) \leq b \to d.$$

Luego, $(a \to c) \cdot k^2 \leq b \to d$. La desigualdad $(b \to d) \cdot k^2 \leq a \to c$ se sigue de la misma manera. Por lo tanto, como $k^2 \in H$, $(a \to c, b \to d) \in \theta_H$.

Finalmente veremos que $(a \wedge c, b \wedge d) \in \theta_H$. Para demostrarlo, notemos que

$$\begin{aligned}(a \wedge c) \to (b \wedge d) &= ((a \wedge c) \to b) \wedge ((a \wedge c) \to d) \\ &\geq (a \to b) \wedge (c \to d) \\ &\geq k.\end{aligned}$$

Análogamente, $(b \wedge d) \to (a \wedge c) \geq k$. Por ende, $(a \wedge c, b \wedge d) \in \theta_H$. $\square$

Teorema 2.2.6. *Si A es un miembro de* SR *entonces existe un isomorfismo de orden entre* $\mathrm{Con}(A)$ *y* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$. *El isomorfismo queda establecido por las asignaciones $\theta \mapsto e/\theta$ y $H \mapsto \theta_H$.*

Demostración. Sea $F : \mathrm{Con}(A) \to \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ dada por $F(\theta) = e/\theta$. Por el Lema 2.2.2, F está bien definida. Teniendo en cuenta el Lema 2.2.3 tenemos que F es inyectiva. Para probar la suryectividad sea $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$, usando el Lema 2.2.5, $\theta_H \in \mathrm{Con}(A)$. Ahora veamos que $e/\theta_H = H$ considerando $a \in H$. Dado que H es una subálgebra de A y $a \in H$, se tiene que $a \to e, e \to a, e \in H$. Luego, $(a \to e) \wedge e \in H$ y $(e \to a) \wedge e \in H$. Por el Lema 2.2.4 tenemos que $(a, e) \in \theta_H$, es decir, $a \in e/\theta_H$. De este modo, $H \subseteq e/\theta_H$. Recíprocamente, sea $a \in e/\theta_H$, o análogamente, $(a, e) \in \theta_H$. Por lo tanto, existe $h \in H$ tal que $a \cdot h \leq e$ y $h \leq a$. Dado que H es una subálgebra fuertemente convexa de A tenemos que $a \in H$. En consecuencia, $e/\theta_H \subseteq H$. De este modo hemos probado la igualdad $e/\theta_H = H$. Teniendo en cuenta el Corolario 2.2.3 resulta que F es un isomorfismo de orden. $\square$

La siguiente definición será utilizada para dar una descripción diferente de las congruencias de las álgebras de iSR.

Definición 2.2.7. Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $H \subseteq A$. Diremos que H es un $\square$-*filtro* si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) $1 \in H$,

b) H es creciente,

c) para cada $a, b \in H$, $a \cdot b \in H$,

d) para cada $a \in H$, $\square(a) \in H$.

Vamos a denotar como $\square\mathrm{Fil}(A)$ al conjunto de $\square$-filtros de A.

Sea $A \in \mathsf{iSR}$. Dado $F \subseteq A$, diremos que F es un *filtro implicativo* de A si $1 \in F$ y $b \in F$ siempre que $a, a \to b \in F$. Si además F es cerrado bajo $\Box$, es decir, $\Box(a) \in F$ siempre que $a \in F$, diremos que F es un $\Box$-*filtro implicativo* de A. Vamos a denotar como $\Box\mathrm{IFil}(A)$ al conjunto de los $\Box$-filtros implicativos de A.

A continuación, veremos un resultado que muestra la conexión entre subálgebras convexas, subálgebras fuertemente convexas, $\Box$-filtros y $\Box$-filtros implicativos de un srl-monoide integral.

Lema 2.2.8. *Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $H \subseteq A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$,

2) $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$,

3) $H \in \Box\mathrm{Fil}(A)$,

4) $H \in \Box\mathrm{IFil}(A)$.

Demostración. Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $H \subseteq A$. Es inmediato que si $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ entonces $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$. Recíprocamente, sean $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A), a \in A$ y $h \in H$ tales que $a \cdot h \leq 1$ y $h \leq a$ (en este caso la primera desigualdad es redundante). En particular, $h \leq a \leq 1$. Como $h, 1 \in H$ entonces se sigue de la convexidad de H que $a \in H$. Por consiguiente, $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$. De esta forma hemos probado la equivalencia entre 1) y 2).

Ahora mostraremos la equivalencia entre 2) y 3). Sea $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$. Con el fin de mostrar que H es creciente, sean $h \in H$ y $a \in A$ tales que $h \leq a$. Como $a \leq 1$, se sigue por la convexidad de H que $a \in H$. Por lo tanto, H es creciente y en consecuencia $H \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. Recíprocamente, supongamos que $H \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. Para mostrar que H es una subálgebra de A, notemos que para $a, b \in H$ tenemos que $a \cdot b \leq a \wedge b$ y $a \cdot b \leq a \vee b$, luego el hecho de que H es creciente implica que $a \wedge b \in H$ y $a \vee b \in H$. Además, $\Box(b) \leq a \to b$. Como $\Box(b) \in H$ y H es un creciente, $a \to b \in H$. Por lo tanto, H es una subálgebra de A. Finalmente, notemos que si $h \leq a \leq k$ para $a \in A$ y $h, k \in H$ entonces $a \in H$ porque H es creciente. Por lo tanto, $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$.

Por último, veamos la equivalencia entre 3) y 4). Sea $H \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. Como $a \cdot (a \to b) \leq b$ para todo $a, b \in A$, F es un filtro implicativo abierto de A. Recíprocamente, sea $F \in \Box\mathrm{IFil}(A)$. Notemos que F es creciente ya que dados $a \in F, b \in A$ tales que $a \leq b$, luego $a \to b = 1$, y $1 \in F$. Luego, por modus ponens, $b \in F$. Para mostrar que F es cerrado por $\cdot$, sean $a, b \in F$. Como $\Box(b) \leq a \to (a \cdot b)$ y $\Box(b) \in F$ entonces $a \to (a \cdot b) \in F$. Pero $a \in F$, por lo que $a \cdot b \in F$. Por lo tanto, $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. $\Box$

El siguiente resultado se sigue del Teorema 2.2.6 y del Lema 2.2.8.

Corolario 2.2.9. *Si $A \in \mathsf{iSR}$ entonces existe un isomorfismo de orden entre* $\mathrm{Con}(A)$ *y* $\Box\mathrm{Fil}(A)$. *El isomorfismo de orden queda determinado por las funciones $\theta \mapsto 1/\theta$ y $H \mapsto \theta_H$.*

A continuación usaremos el Teorema 2.2.6 para los casos particulares de CRL y SRL respectivamente.

Lema 2.2.10. *Sea $A \in \mathsf{CRL}$. Luego* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A) = \mathrm{Sub}_{\mathrm{C}}(A)$.

Demostración. Sea $A \in \mathsf{CRL}$. Sean $H \in \mathrm{Sub_C}(A), a \in A$ y $h \in H$ tales que $a \cdot h \leq e \leq h \to a$, es decir, $h \leq a \leq h \to e$. Se sigue de la convexidad de H que $a \in H$, por lo que $H \in \mathrm{Sub_{SC}}(A)$. De este modo, $\mathrm{Sub_C}(A) \subseteq \mathrm{Sub_{SC}}(A)$. Dado que $\mathrm{Sub_{SC}}(A) \subseteq \mathrm{Sub_C}(A)$ entonces $\mathrm{Sub_{SC}}(A) = \mathrm{Sub_C}(A)$. $\square$

Es consecuencia del Lema 2.2.10 que el Teorema 2.2.6 generaliza el Teorema 1.4.1, el cual establece un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias y el retículo de las subálgebras convexas de un retículo residuado conmutativo dado. Además, notemos que si A es un retículo residuado conmutativo integral entonces todo subconjunto de A que satisface las condiciones a), b) y c) de la Definición 2.2.7 satisface automaticamente la condición d), por lo que se sigue del Corolario 2.2.9 que el retículo de congruencias de A y el retículo de subconjuntos de A que satisfacen las condiciones a), b) y c) de la Definición 2.2.7 son isomorfos.

Proposición 2.2.11. *Sea $A \in \mathsf{SRL}$ (vista como un álgebra de SR). Luego $\mathrm{Sub_{SC}}(A)$ coincide con el conjunto de filtros abiertos de A.*

Demostración. Es consecuencia directa del Lema 2.2.8. $\square$

La Proposición 2.2.11 muestra que el Teorema 2.2.6 es una generalización del Teorema 1.3.4, el cual establece un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias y el retículo de $\square$-filtros de un sr-retículo dado.

2.3. Subálgebras fuertemente convexas generadas por conjuntos

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A$. En esta sección daremos algunas caracterizaciones para la subálgebras fuertemente convexa generada por S.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sean $A \in \mathsf{SR}, a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a^0 = e$ y $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Además definimos $\square^0(a) = a$, $\square^1(a) = \square(a)$ y para $n \geq 1$, $\square^{n+1}(a) = \square(a) \cdot \square^n(a)$.

El siguiente lema es consecuencia de un cálculo directo.

Lema 2.3.1. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $a, a_1, \ldots, a_n \in A$. Luego*

1) $\square(\square(a_1) \cdot \square(a_2) \cdot \ldots \cdot \square(a_n)) = \square(a_1) \cdot \square(a_2) \cdot \ldots \cdot \square(a_n)$.

2) $\square(a_1) \cdot \square(a_2) \cdot \ldots \cdot \square(a_n) \leq a \to (a \cdot \square(a_1) \cdot \square(a_2) \cdot \ldots \cdot \square(a_n))$.

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y H una subálgebra de A. Definimos

$$H^- = \{a \in H : a \leq e\}.$$

Este conjunto se denomina el *cono negativo* de H.

Observación 2.3.2. *Dado A un srl-monoide, para todo $a \in A^-$ se cumple que $\square(a) \in A^-$. En efecto, como $\square(a) \leq a$ y $a \leq e$, se tiene que $\square(a) \leq e$.*

La siguiente observación será de gran utilidad para esta tesis.

Observación 2.3.3. *Sean $A \in \mathsf{SR}, a \in A^-$ y $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Un cálculo directo muestra que si $n_1 \geq n_2$ y $m_1 \geq m_2$ entonces $a^{m_1} \leq a^{m_2}$ y $\Box^{n_1}(a^{m_1}) \leq \Box^{n_2}(a^{m_2})$.*

Sea $A \in \mathsf{SR}$. Para cada $S \subseteq A$ vamos a denotar como $\mathrm{C}[S]$ a la menor subálgebra fuertemente convexa que contiene a S [2]. Para cada $a \in A$ escribiremos $\mathrm{C}[a]$ en lugar de $\mathrm{C}[\{a\}]$. Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A$. Vamos a definir

$$\widehat{S} = \{e \wedge a \wedge (a \to e) : a \in S\}.$$

El siguiente resultado nos permite pensar a cada subálgebra fuertemente convexa de A generada por un subconjunto arbitrario como una subálgebra fuertemente convexa generada por un subconjunto del cono negativo de A.

Lema 2.3.4. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A$. Luego $C[S] = C[\widehat{S}]$. En particular, $C[a] = C[a \wedge e \wedge (a \to e)]$ para cada $a \in A$.*

Demostración. Primero probaremos que $C[\widehat{S}] \subseteq C[S]$, es decir, que $\widehat{S} \subseteq C[S]$. Para mostrarlo, sea $b \in \widehat{S}$. Por definición de $\widehat{S}$ existe $a \in S$ tal que $b = a \wedge e \wedge (a \to e)$. Como $a, e \in C[S]$ se tiene que $b \in C[S]$. Luego, $\widehat{S} \subseteq C[S]$. De forma recíproca veremos que $C[S] \subseteq C[\widehat{S}]$, es decir que $S \subseteq C[\widehat{S}]$. Sea $a \in S$ y definamos $b = e \wedge a \wedge (a \to e)$. En particular, $b \in \widehat{S}$ y en consecuencia $b \in C[\widehat{S}]$. Además, $a \cdot b \leq a \cdot (a \to e) \leq e$ y como $b \leq a$ entonces $e \leq b \to a$. Por lo tanto,

$$a \cdot b \leq e \leq b \to a.$$

Dado que $b \in C[\widehat{S}]$ y $C[\widehat{S}]$ es una subálgebra fuertemente convexa de A, entonces por la desigualdad anterior tenemos que $a \in C[\widehat{S}]$. Así, $S \subseteq C[\widehat{S}]$. Por consiguiente, $C[S] = C[\widehat{S}]$. $\Box$

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A$. Vamos a denotar como $m(S)$ al submonoide de $(A, \cdot, e)$ generado por S. El siguiente resultado es una generalización del Lema 2.7 de [29].

Lema 2.3.5. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A^-$. Luego*

$$\mathrm{C}[S] = \{x \in A : \Box^n(h) \leq x \text{ y } x \cdot \Box^n(h) \leq e, \text{ para } h \in m(S) \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Sea $S \subseteq A^-$. Luego, $m(S) \subseteq A^-$. Consideremos

$$K = \{x \in A : \Box^n(h) \leq x \text{ y } x \cdot \Box^n(h) \leq e, \text{ para } h \in m(S) \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Primero veamos que $S \subseteq K$. En efecto, sea $x \in S$. Tomando $n = 0$ y $h = x$ se tiene que $\Box^0(x) = x \leq x$, usando la monotonía de $\cdot$ y el hecho de que $x \in S^-$ se tiene además que $x \cdot \Box^0(x) = x \cdot x \leq e \cdot x = x$. Por lo tanto, $x \in K$.

Ahora probemos que $K \subseteq C[S]$ tomando $x \in K$. Luego, existen $n \in \mathbb{N}$ y $h \in m(S)$ tales que $\Box^n(h) \leq x$ y $x \cdot \Box^n(h) \leq e$. Notemos que h es un elemento de $C[S]$, por lo cual $\Box^n(h) \in C[S]$. Dado que $\Box^n(h) \leq x$ se tiene que $e \leq \Box^n(h) \to x$. Por lo tanto, $x \cdot \Box^n(h) \leq e \leq \Box^n(h) \to x$, y usando que $C[S]$ es fuertemente convexa tenemos que $x \in C[S]$. De esta manera, $K \subseteq C[S]$.

[2] Notar que dicha subálgebra fuertemente convexa existe porque la intersección de subálgebras fuertemente convexas es una subálgebra fuertemente convexa.

Es suficiente mostrar que K es una subálgebra fuertemente convexa de A. Sean $a, b \in K$. Por lo tanto, existen $h_a, h_b \in m(S)$ y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\Box^n(h_a) \leq a, a \cdot \Box^n(h_a) \leq e, \Box^m(h_b) \leq b$ y $b \cdot \Box^m(h_b) \leq e$. Podemos reemplazar h_a y h_b por $h = h_a \cdot h_b$, y n, m por $k = \boldsymbol{max}\{n, m, 1\}$.

Además, $\Box^k(h) \leq a \wedge b \leq a \vee b$ y

$$\begin{aligned}\Box^k(h) \cdot (a \wedge b) &\leq \Box^k(h) \cdot (a \vee b)\\ &= (\Box^k(h) \cdot a) \vee (\Box^k(h) \cdot b)\\ &\leq e,\end{aligned}$$

de modo que K es cerrado bajo supremos e ínfimos. A su vez,

$$\Box^{2k}(h) = \Box^k(h) \cdot \Box^k(h) \leq a \cdot b$$

y

$$\Box^{2k}(h) \cdot (a \cdot b) = (\Box^k(h) \cdot a) \cdot (\Box^k(h) \cdot b) \leq e,$$

luego K es también cerrado bajo el producto.

Ahora veremos que K es cerrado bajo la implicación. Primero notemos que

$$a \cdot \Box^{2k}(h) = (a \cdot \Box^k(h)) \cdot \Box^k(h) \leq \Box^k(h) \leq b,$$

entonces

$$a \to (a \cdot \Box^{2k}(h)) \leq a \to b. \tag{2.3}$$

Además, se sigue del Lema 2.3.1 que

$$\Box^{2k}(h) \leq a \to (a \cdot \Box^{2k}(h)). \tag{2.4}$$

Por lo tanto, se sigue de (2.3) y (2.4) que

$$\Box^{2k}(h) \leq a \to b. \tag{2.5}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}\Box^{2k}(h) \cdot (a \to b) &= \Box^k(h) \cdot \Box^k(h) \cdot (a \to b)\\ &\leq \Box^k(h) \cdot a \cdot (a \to b)\\ &\leq \Box^k(h) \cdot b\\ &\leq e,\end{aligned}$$

por lo que

$$\Box^{2k}(h) \cdot (a \to b) \leq e. \tag{2.6}$$

Por lo tanto, se sigue de (2.5) y (2.6) que $a \to b \in K$. De este modo, K es una subálgebra de A.

Finalmente veremos que K es una subálgebra fuertemente convexa de A. El conjunto K es convexo dado que si $a \leq x \leq b$ entonces $\Box^k(h) \leq a \leq x$ y $x \cdot \Box^k(h) \leq b \cdot \Box^k(h) \leq e$, entonces $\Box^k(h) \leq x$ y $x \cdot \Box^k(h) \leq e$, es decir, $x \in K$. De esta forma hemos probado la convexidad de K. Consideremos $x \in A$ tal que $x \cdot a \leq e$ y $a \leq x$ para algún $a \in K$. Como $\Box^k(h) \leq a \leq x$ entonces $\Box^k(h) \leq x$. Además, $x \cdot \Box^k(h) \leq a \cdot x \leq e$, por lo que $x \cdot \Box^k(h) \leq e$. Luego $x \in K$. Por lo tanto, K es una subálgebra fuertemente convexa de A. $\Box$

Sea A un srl-monoide. Dado $a_1 \in A$ definimos $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$. Dados $a_1, \ldots, a_k \in A$ con $k \geq 2$, para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ definimos $\prod_{i=1}^{j+1} a_i = a_{j+1} \cdot \prod_{i=1}^{j} a_i$. También se define

$$\Box(A) := \{a \in A : \Box(a) = a\}.$$

Lema 2.3.6. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $S \subseteq A^- \cap \Box(A)$. Las siguientes condiciones resultan equivalentes:*

1) $x \in \mathrm{C}[S]$.

2) Existen $s_1, \ldots, s_k \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq x$ y $x \cdot \prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq e$.

3) Existen $s_1, \ldots, s_k \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n \leq x$ y $x \cdot (\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n \leq e$.

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) es consecuencia del Lema 2.3.5 y el hecho de que $\Box(h) = h$ para todo $h \in \Box(A)$.

Ahora probaremos la equivalencia entre 2) y 3). Supongamos que existen $s_1, \ldots, s_k \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq x$ y $x \cdot \prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq e$. Como $\bigwedge_{i=1}^{k} s_i \leq s_j$ para $j = 1, \ldots, k$ entonces $(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n \leq s_j^n$, entonces $(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^{nk} \leq \prod_{i=1}^{k} s_i^n$. Por consiguiente, $(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^{nk} \leq x$ y $x \cdot (\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^{nk} \leq e$. Por lo tanto, se satisface 3). Recíprocamente, supongamos que existen $s_1, \ldots, s_k \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n \leq x$ y $x \cdot (\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n \leq e$. Dado que $\prod_{i=1}^{k} s_i \leq \bigwedge_{i=1}^{k} s_i$ entonces $\prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq (\bigwedge_{i=1}^{k} s_i)^n$. Luego $\prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq x$ y $x \cdot \prod_{i=1}^{k} s_i^n \leq e$. Por lo tanto, se satisface 2). $\Box$

Corolario 2.3.7. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $a \in A^-$. Luego*

$$\mathrm{C}[a] = \{x \in A : \Box^n(a) \leq x \text{ y } x \cdot \Box^n(a) \leq e, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Más aún, si $x \in A^-$ entonces $x \in \mathrm{C}[a]$ si y sólo si existe n tal que $\Box^n(a) \leq x$.

2.4. Algunas aplicaciones de las subálgebras fuertemente convexas generadas por conjuntos

En esta sección presentaremos algunas aplicaciones de la Sección 2.3. En particular, daremos una caracterización para las álgebras simples y subdirectamente irreducibles respectivamente. Asimismo probaremos que SR tiene la propiedad de extensión de congruencias. Por último, daremos una descripción de la congruencia generada por subconjuntos arbitrarios.

A continuación daremos una caracterización de las álgebras simples de SR.

Proposición 2.4.1. *Sea $A \in \mathsf{SR}$. Las siguientes condiciones resultan equivalentes:*

1) A es simple.

2) $\mathrm{C}[a] = A$ para todo $a \in A$ tal que $a \neq e$.

3) Para todo $a \in A$ tal que $a \neq e$ se verifica la siguiente condición: para todo $b \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Box^n((a \wedge e \wedge (a \to e))) \leq b$ y $b \cdot \Box^n((a \wedge e \wedge (a \to e))) \leq e$.

Demostración. Supongamos que A es simple. Luego $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A) = \{\{e\}, A\}$. Sea $a \in A$ tal que $a \neq e$. De este modo, $\mathrm{C}[a] \neq \{e\}$, así $\mathrm{C}[a] = A$.

Ahora supongamos que se satisface la condición 2). Para probar 1), sea $F \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ tal que $F \neq \{e\}$. Luego, existe $a \in A$ tal que $a \neq e$ y $a \in F$, por lo que $\mathrm{C}[a] \subseteq F$. Sin embargo, $\mathrm{C}[a] = A$, entonces $A = F$. Por lo tanto, A es simple.

La equivalencia entre 2) y 3) es consecuencia del Lema 2.3.4 y el Corolario 2.3.7. □

Ahora daremos una caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles de SR.

Proposición 2.4.2. *Sea $A \in \mathsf{SR}$ tal que A no es trivial. Las siguientes condiciones resultan equivalentes:*

1) A es subdirectamente irreducible.

2) Existe $a \in A$, $a \neq e$, tal que para todo $b \neq e$ se cumple que $a \in \mathrm{C}[b]$.

3) Existe $a \in A$, $a \neq e$, tal que para todo $b \neq e$ existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\Box^n((b \wedge e \wedge (b \to e))) \leq a$ y $a \cdot \Box^n((b \wedge e \wedge (b \to e))) \leq e$.

Demostración. Supongamos que A es subdirectamente irreducible. De este modo, existe $F \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ tal que $F \neq \{e\}$ y $F \subseteq H$ para todo $H \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ tal que $H \neq \{e\}$. Dado que $F \neq \{e\}$ existe $a \neq e$ tal que $a \in F$. Sea $b \in A$ tal que $b \neq e$. Luego $\mathrm{C}[b] \neq \{e\}$, por lo que $F \subseteq \mathrm{C}[b]$. Dado que $a \in F$ se tiene que $a \in \mathrm{C}[b]$. Por lo tanto, se satisface 2).

Ahora supongamos que se satisface la condición 2). De este modo, existe $a \in A$ tal que $\mathrm{C}[a] \neq \{e\}$. Sea $F \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ tal que $F \neq \{e\}$. Veremos que $\mathrm{C}[a] \subseteq F$, lo cual equivale a probar que $a \in F$. Como $F \neq \{e\}$ existe $b \in F$ tal que $b \neq e$. Es consecuencia de la hipótesis que $a \in \mathrm{C}[b]$. Pero $\mathrm{C}[b] \subseteq F$, con lo cual $a \in F$, que era nuestro objetivo. Por lo tanto, A es subdirectamente irreducible.

La equivalencia entre 2) y 3) se sigue del Lema 2.3.4 y Corolario 2.3.7. □

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $a, b \in A$. Definimos

$$t(a,b) := ((a \to b) \wedge e) \cdot ((b \to a) \wedge e)$$

y

$$s(a,b) := (a \to b) \wedge (b \to a) \wedge e.$$

Lema 2.4.3. *Sean $A \in \mathsf{SR}$, H una subálgebra convexa de A y $a, b \in A$. Luego $s(a,b) \in H$ si y sólo si $t(a,b) \in H$.*

Demostración. Es consecuencia de que $t(a,b) \leq s(a,b) \leq e$, $s(a,b)^2 \leq t(a,b) \leq e$ y el hecho de que H es una subálgebra convexa de A. □

Lema 2.4.4. *Sean $A \in \mathsf{SR}$, $\theta \in \mathrm{Con}(A)$ y $a, b \in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $(a,b) \in \theta$,

2) $s(a,b) \in e/\theta$,

3) $t(a,b) \in e/\theta$.

Demostración. Notar que por el Teorema 2.2.6, $\theta = \theta_{e/\theta}$. Luego $(a,b) \in \theta$ si y sólo si $(a \to b) \wedge e \in e/\theta$ y $(b \to a) \wedge e \in e/\theta$, con lo cual $(a,b) \in \theta$ si y sólo si $s(a,b) \in e/\theta$. La equivalencia ente 2) y 3) es consecuencia del Lema 2.4.3. $\square$

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $X \subseteq A \times A$. Definimos

$$A_{(X,s)} := \{s(a,b) : (a,b) \in X\}$$

y

$$A_{(X,t)} := \{t(a,b) : (a,b) \in X\}.$$

Lema 2.4.5. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $X \subseteq A \times A$. Luego $e/\Theta(X) = \mathrm{C}[A_{(X,s)}] = \mathrm{C}[A_{(X,t)}]$.*

Demostración. Primero notemos que es consecuencia del Lema 2.4.4 que para toda $\theta \in \mathrm{Con}(A)$, $X \subseteq \theta$ si y sólo si $A_{(X,s)} \subseteq e/\theta$. Si denotamos como Θ a un elemento arbitrario de $\mathrm{Con}(A)$ y como S a un elemento arbitrario de $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$, se sigue del Teorema 2.2.6 y del Lema 2.4.4 que

$$\begin{array}{rcl} e/\Theta(X) & = & \bigcap\{e/\theta : X \subseteq \theta\} \\ & = & \bigcap\{e/\theta : A_{(X,s)} \subseteq e/\theta\} \\ & = & \bigcap\{S : A_{(X,s)} \subseteq S\} \\ & = & \mathrm{C}[A_{(X,s)}], \end{array}$$

entonces $e/\Theta(X) = \mathrm{C}[A_{(X,s)}]$. Análogamente se puede probar que $e/\Theta(X) = \mathrm{C}[A_{(X,t)}]$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia de un cálculo directo basado en el Lema 2.3.6, el Lema 2.4.5 y el hecho de que para cada $A \in \mathsf{SR}$ y $X \subseteq A \times A$ se cumple que $A_{(X,s)} \subseteq A^- \cap \square(A)$ y $A_{(X,t)} \subseteq A^- \cap \square(A)$.

Lema 2.4.6. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $x \in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $x \in e/\Theta(X)$.

2) Existen $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^k s(a_i,b_i)^n \leq x$ y $x \cdot \prod_{i=1}^k s(a_i,b_i)^n \leq e$.

3) Existen $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^k t(a_i,b_i)^n \leq x$ y $x \cdot \prod_{i=1}^k t(a_i,b_i)^n \leq e$.

4) Existen $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^k s(a_i,b_i))^n \leq x$ y $x \cdot (\bigwedge_{i=1}^k s(a_i,b_i))^n \leq e$.

5) Existen $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^k t(a_i,b_i))^n \leq x$ y $x \cdot (\bigwedge_{i=1}^k t(a_i,b_i))^n \leq e$.

A continuación presentaremos uno de los principales resultados de este capítulo.

Teorema 2.4.7. *Sean $A \in \mathsf{SR}$, $X \subseteq A \times A$ y $x, y \in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $(x, y) \in \Theta(X)$.

2) Existen $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^{k} s(a_i, b_i)^n \leq s(x, y)$.

3) Existen $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^{k} t(a_i, b_i)^n \leq t(x, y)$.

4) Existen $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{k} s(a_i, b_i))^n \leq s(x, y)$.

5) Existen $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{k} t(a_i, b_i))^n \leq t(x, y)$.

Demostración. Es consecuencia de un cálculo directo basado en el Lema 2.4.4 y Lema 2.4.6. $\square$

La prueba del corolario siguiente se sigue de un cálculo directo basado en el Teorema 2.4.7.

Corolario 2.4.8. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $x, y, a_1, b_1, \ldots a_k, b_k \in A$. Las siguientes condiciones resultan equivalentes:*

1) $(x, y) \in \Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k))$.

2) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{k} s(a_i, b_i)^n \leq s(x, y)$.

3) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{k} t(a_i, b_i)^n \leq t(x, y)$.

4) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigwedge_{i=1}^{k} s(a_i, b_i))^n \leq s(x, y)$.

5) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigwedge_{i=1}^{k} t(a_i, b_i))^n \leq t(x, y)$.

El siguiente teorema es consecuencia directa del Corolario 2.4.8.

Teorema 2.4.9. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $a, b \in A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $(x, y) \in \theta(a, b)$.

2) Existe un natural n tal que $(s(a, b))^n \leq s(x, y)$.

3) Existe un natural n tal que $(t(a, b))^n \leq t(x, y)$.

Finalmente usaremos el Teorema 2.4.7 para mostrar que SR tiene la propiedad de extensión de congruencias.

Teorema 2.4.10. *La variedad SR tiene la propiedad de la extensión de congruencias.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathsf{SR}$ tales que B es una subálgebra de A. Consideremos $\theta \in \mathrm{Con}(B)$ y sea $\hat{\theta}$ la congruencia de A generada por θ. Resulta inmediato que $\theta \subseteq \hat{\theta} \cap B^2$. Con el fin de ver la otra inclusión, sea $(x, y) \in \hat{\theta} \cap B^2$. En particular, $x, y \in B$. Más aún, es consecuencia del Teorema 2.4.7 que existen $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \theta$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\prod_{i=1}^{k} s(a_i, b_i)^n \leq s(x, y)$. Se sigue del Lema 2.4.4 que $s(a_1, b_1), \ldots, s(a_k, b_k) \in e/\theta$. Por lo tanto, dado que $\prod_{i=1}^{k} s(a_i, b_i)^n \leq s(x, y) \leq e$ y e/θ es una subálgebra convexa de B se tiene que $s(x, y) \in e/\theta$. De nuevo por el Lema 2.4.4 tenemos que $(x, y) \in \theta$. Por consiguiente, $\theta = \hat{\theta} \cap B^2$. □

Teorema 2.4.11. *Sea* $A \in \mathsf{SR}$. *Luego* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ *es un retículo distributivo y algebraico tal que para cada* $a, b \in A^-$,

$$\mathrm{C}[a \wedge b] = \mathrm{C}[a] \vee \mathrm{C}[b].$$

Más aún, los elementos compactos de $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ *son los elementos de la forma* $\mathrm{C}[a]$ *para* $a \in A^-$.

Demostración. Sea $A \in \mathsf{SR}$. Luego, el retículo de congruencias de A es distributivo (dado que A es un retículo). Por esta razón, es consecuencia del Teorema 2.2.6 que $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ es un retículo distributivo.

Sean $a, b \in A^-$. Notemos que $\mathrm{C}[a] \vee \mathrm{C}[b] = \mathrm{C}[\{a, b\}]$. En lo que sigue veremos que $\mathrm{C}[a \wedge b] = \mathrm{C}[\{a, b\}]$. Como $a \wedge b \in \mathrm{C}[\{a, b\}]$ entonces $\mathrm{C}[a \wedge b] \subseteq \mathrm{C}[\{a, b\}]$. Recíprocamente, dado que $a \wedge b \leq a \leq e$ y $a \wedge b \leq b \leq e$ entonces $a \in \mathrm{C}[a \wedge b]$ y $b \in \mathrm{C}[a \wedge b]$, es decir, $\{a, b\} \subseteq \mathrm{C}[a \wedge b]$. Luego, $\mathrm{C}[\{a, b\}] \subseteq \mathrm{C}[a \wedge b]$. Por ende,

$$\mathrm{C}[a \wedge b] = \mathrm{C}[a] \vee \mathrm{C}[b]. \tag{2.7}$$

Es consecuencia de los teoremas 5.5 y 5.7 de [4] que los elementos compactos de $\mathrm{Con}(A)$ son los elementos finitamente generados $\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ de $\mathrm{Con}(A)$, por lo que los elementos compactos de $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ son de la forma $e/\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$. Sin embargo,

$$\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n),$$

por lo que es consecuencia del Lema 2.4.5 y (2.7) que

$$e/\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = \mathrm{C}[s(a_1, b_1) \wedge \ldots \wedge s(a_n, b_n)].$$

Por lo tanto, los elementos compactos de $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ son de la forma $\mathrm{C}[a]$ para $a \in A^-$. □

Resulta natural la siguiente pregunta:

¿Es cierto que para toda $A \in \mathsf{SR}$ y $a, b \in A^-$ se satisface la igualdad $\mathrm{C}[a \vee b] = \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$?

La respuesta es negativa. Para probarlo, sea A el retículo distributivo acotado de cuatro elementos, donde 0 es el mínimo, 1 es el máximo y a, b son elementos incomparables. Consideremos $Q = \{0, 1\}$. Se puede probar que (A, Q) es un retículo subresiduado, donde la operación binaria $\rightarrow$ queda determinada por

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	0	1
b	0	0	1	1
1	0	0	0	1

De este modo, este retículo subresiduado puede ser visto como un álgebra de SR. Más aún, para $c \in \{0, a, b, 1\}$ tenemos que $\mathrm{C}[c]$ es el $\Box$-filtro generado por c. Es inmediato que $\mathrm{C}[1] = \{1\}$ y $\mathrm{C}[a] = \mathrm{C}[b] = \{0, a, b, 1\}$, con lo cual $\mathrm{C}[a \vee b] \neq \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$.

Capítulo 3

Funciones compatibles y algunas subvariedades de la variedad de los srl-monoides

En este capítulo estudiaremos a las funciones compatibles definidas en los srl-monoides y también algunas subvariedades de la variedad formada por estas estructuras algebraicas.

En la Sección 3.1 daremos una caracterización para las funciones compatibles. Como aplicación probaremos que la variedad SR es localmente afín completa. En la Sección 3.2 introduciremos y estudiaremos a los operadores modales monótonos, los cuales son una generalización de los operadores modales monótonos estudiados en el marco de retículos residuados conmutativos integrales con primer elemento. Más aún, probaremos un teorema del filtro primo para srl-monoides con un operador modal que satisface ciertas condiciones. Este resultado será utilizado en la Sección 3.3, en donde introduciremos la variedad de los srl-monoides fuertes (definición motivada por [18]). Además estudiaremos dos subvariedades de la variedad de los srl-monoides fuertes. Finalmente, en la Sección 3.4 daremos distintas caracterizaciones para la subvariedad de SR generada por sus miembros totalmente ordenados.

3.1. Funciones compatibles

El estudio de las funciones compatibles resulta de gran interés en el marco del Álgebra Universal [30]. En [7] las funciones compatibles fueron estudiadas en el contexto de las álgebras de Heyting como la contraparte algebraica de los conectivos intuicionistas del cálculo proposicional intuicionista [5]. En [10] y [36] estas ideas fueron generalizadas para estudiar las funciones compatibles en las variedades de los retículos residuados conmutativos y de los retículos subresiduados respectivamente [37].

Recordemos que dada un álgebra A de tipo $\mathcal{F}$ y $f : A^n \to A$ una función.

(a) Diremos que f es una *función compatible con una congruencia* θ *de* A si $(a_i, b_i) \in \theta$ para $i = 1, ..., n$ implica que $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$.

(b) Diremos que f es una *función compatible* de A si es compatible con todas las congruencias de A.

Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A^k \to A$ una función. Notemos que f es compatible si y sólo si para cada $a = (a_1, \dots, a_k)$ y $b = (b_1, \dots, b_k)$ elementos de A^k,

$$(f(a), f(b)) \in \Theta((a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)).$$

De hecho, supongamos que f es compatible y sean $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in A$. Dado que $(a_i, b_i) \in \Theta((a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k))$ para $i = 1, \dots, k$ tenemos que

$$(f(a), f(b)) \in \Theta((a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)).$$

Recíprocamente, supongamos que para cada $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in A$ se cumple que

$$(f(a), f(b)) \in \Theta((a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)).$$

Sea θ una congruencia de A y $(a_i, b_i) \in \theta$ para $i = 1, \dots, k$. Dado que

$$\Theta((a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k))$$

tenemos que $(f(a), f(b)) \in \theta$. Por lo tanto, f es compatible.

La siguiente proposición es consecuencia del Corolario 2.4.8.

Proposición 3.1.1. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A^k \to A$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) f es compatible.

2) Para cada $a, b \in A^k$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{k} s(a_i, b_i)^n \leq s(f(a), f(b))$.

3) Para cada $a, b \in A^k$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{k} t(a_i, b_i)^n \leq t(f(a), f(b))$.

4) Para cada $a, b \in A^k$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigwedge_{i=1}^{k} s(a_i, b_i))^n \leq s(f(a), f(b))$.

5) Para cada $a, b \in A^k$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigwedge_{i=1}^{k} t(a_i, b_i))^n \leq t(f(a), f(b))$.

Corolario 3.1.2. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A \to A$ una función tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se satisface la desigualdad $a \to b \leq f(a) \to f(b)$. Luego f es compatible.*

Demostración. Sean $a, b \in A$. Por hipótesis, $a \to b \leq f(a) \to f(b)$. De manera similar, $b \to a \leq f(b) \to f(a)$. Luego,

$$(a \to b) \wedge (b \to a) \wedge e \leq (f(a) \to f(b)) \wedge (f(b) \to f(a)) \wedge e.$$

En otras palabras, $s(a, b) \leq s(f(a), f(b))$. Se sigue de la Proposición 3.1.1 que f resulta compatible. $\square$

Resulta conocido que la variedad de las álgebras de Boole es afín completa; la variedad de las álgebras de Heyting es localmente afín completa a pesar de que no es afín completa (ver [7] para los detalles). La variedad de los retículos subresiduados y la variedad de los retículos residuados conmutativos también resultan localmente afín completas [10], [36].

Nuestro siguiente objetivo es probar que la variedad SR es localmente afín completa.

Observación 3.1.3. *Sea $A \in \mathsf{SR}$, $f : A^k \to A$ una función compatible y B un subconjunto finito de A^k. Sea n el máximo de los naturales asociados a 2) de la Proposición 3.1.1 para todos los pares (b, x) donde x y b abarcan todos los puntos de B. En particular,*

$$\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^n \leq s(f(b), f(x)).$$

En efecto, sean $b, x \in B$. Por la Proposición 3.1.1, existe $n_{bx} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^{n_{bx}} \leq s(f(b), f(x)).$$

Definimos $n = \mathbf{max}\{n_{bx} : b, x \in B\}$ Dados $b, x \in B$,

$$\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^n \leq \prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^{n_{bx}} \leq s(f(b), f(x)).$$

Teorema 3.1.4. *Sean $A \in \mathsf{SR}$, $f : A^k \to A$ una función compatible, B un subconjunto finito de A^k y $x \in B$. Sea*

$$T_x = \{(\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^n) \cdot f(b) : b \in B\},$$

donde n es el número natural dado en la Observación 3.1.3. Luego, $f(x) = \bigvee T_x$.

Demostración. Sea $x \in B$. Para cada $b \in B$, se sigue de la Observación 3.1.3 que

$$\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^n \leq f(b) \to f(x).$$

Esta desigualdad implica que

$$(\prod_{i=1}^{k} s(b_i, x_i)^n) \cdot f(b) \leq f(x).$$

Esto prueba que $f(x)$ es una cota superior de T_x.

Además, como $s(x_i, x_i) = e$ para todo $i = 1, \ldots, k$ tenemos que

$$(\prod_{i=1}^{k} s(x_i, x_i)^n) \cdot f(x) = f(x),$$

con lo cual $f(x) \in T_x$. Por lo tanto, $f(x) = \bigvee T_x$. □

Corolario 3.1.5. *La variedad SR es localmente afín completa.*

3.2. Operadores modales monótonos

A continuación generalizaremos, en el contexto de los srl-monoides, la definición de operador modal monótono introducida originalmente en el contexto de las álgebras de Heyting [32] y generalizada luego para el caso de retículos residuados conmutativos con primer elemento [31],[32].

Dada un álgebra de Heyting H, una función $f : H \to H$ se llama *operador modal* (Definición 0.1 de [32]) si satisface las siguientes condiciones para cada $a, b \in A$:

1) $a \leq f(a)$,

2) $f(f(a)) = f(a)$,

3) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Nuestro interés en estos operadores proviene de la propiedad de que los mismos resultan ser compatibles. En efecto, si H es un álgebra de Heyting y $f : H \to H$ es un operador modal, entonces para cada $a, b \in H$, $f(a \wedge b) \wedge b = f(a) \wedge f(b) \wedge b = f(a) \wedge b$. Es decir, $f(a \wedge b) \wedge b = f(a) \wedge b$. Luego, por el Lema 2.1 de [7] tenemos que f es compatible.

Como ya mencionamos, los operadores modales definidos anteriormente sobre las álgebras de Heyting fueron generalizados en el contexto de los retículos residuados conmutativos con primer elemento [31].

Sea $A \in \mathsf{SR}$. Una función $f : A \to A$ se dice que es *monótona* si para cualesquiera $a, b \in A$, si $a \leq b$ entonces $f(a) \leq f(b)$.

Definición 3.2.1. Sea $A \in \mathsf{SR}$. Una función $f : A \to A$ es un *operador modal* si se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b \in A$:

1) $a \leq f(a)$,

2) $f(f(a)) = f(a)$,

3) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Si además f es una función monótona, diremos que f es un *operador modal monótono*.

Notemos que si $A \in \mathsf{SR}$ entonces la función identidad en A es un operador modal monótono.

Ejemplo 3.2.2. *Sea A el retículo distributivo acotado de cuatro elementos, donde 0 es el mínimo, 1 es el máximo y a, b son elementos incomparables. Sea $Q = \{0, 1\}$. De esta manera, (A, Q) es un sr-retículo. Además escribiremos A para indicar a este sr-retículo, que puede ser visto como un srl-monoide integral. Mediante un cálculo directo se puede probar que $f : A \to A$ dada por $f(0) = f(b) = b$ y $f(a) = f(1) = 1$ es un operador modal monótono.*

Ejemplo 3.2.3. *Sea A un sr-retículo cuyo orden es total (esta álgebra puede verse como un srl-monoide integral). Resulta inmediato que toda función $f : A \to A$ dada por $f(a) = a \vee f(0)$, donde $f(0)$ es un elemento fijo de A, es un operador modal monótono.*

A continuación daremos algunas propiedades que involucran a operadores modales en el contexto de srl-monoides.

Observación 3.2.4. *Notar que la definición de operador modal (monótono) para el caso de los srl-monoides es una generalización directa de la definición de operador modal (monótono) dada en el marco de los retículos residuados conmutativos con primer elemento [31].*

Lema 3.2.5. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A \to A$ una función que satisface* 1) *y* 3) *de la Definición 3.2.1. Luego, f es monótono si y sólo si $a \to b \leq f(a) \to f(b)$ para cada $a, b \in A$.*

Demostración. Supongamos que f es monótono y sean $a, b \in A$. Dado que $a \cdot (a \to b) \leq b$ se tiene que $f(a \cdot (a \to b)) \leq f(b)$. De este modo, $f(a) \cdot f(a \to b) \leq f(b)$. Además tenemos que $a \to b \leq f(a \to b)$. Teniendo en cuenta la monotonía del producto obtenemos

$$f(a) \cdot (a \to b) \leq f(a) \cdot f(a \to b) \leq f(b).$$

Dado que $a \to b \in Q$ se tiene que $a \to b \leq f(a) \to f(b)$.

Recíprocamente, sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$. Por consiguiente, $e \leq a \to b$. Dado que $a \to b \leq f(a) \to f(b)$ entonces $e \leq f(a) \to f(b)$, es decir, $f(a) \leq f(b)$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del Corolario 3.1.2 y del Lema 3.2.5.

Corolario 3.2.6. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A \to A$ un operador modal monótono. Luego f es compatible.*

A continuación daremos una caracterización de los operadores modales monótonos.

Proposición 3.2.7. *Sean $A \in \mathsf{SR}$ y $f : A \to A$ una función. Luego f es un operador modal monótono si y sólo si se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

1) $f(a) \to f(b) = a \to f(b)$,

2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Demostración. Supongamos que f es un operador modal monótono. Solo necesitamos probar 1). Para verlo, consideremos $a, b \in A$. Dado que $a \leq f(a)$ entonces $f(a) \to f(b) \leq a \to f(b)$. Más aún, se sigue del Lema 3.2.5 que

$$a \to f(b) \leq f(a) \to f(f(b)) = f(a) \to f(b),$$

luego $a \to f(b) \leq f(a) \to f(b)$. Por lo tanto, $f(a) \to f(b) = a \to f(b)$.

Recíprocamente, supongamos que f satisface 1) y 2) y consideremos $a, b \in A$. Dado que $e \leq f(a) \to f(a)$ y $f(a) \to f(a) = a \to f(a)$, tenemos que $a \leq f(a)$. Además, $e \leq f(a) \to f(a) = f(f(a)) \to f(a)$, es decir, $f(f(a)) \leq f(a)$. Dado que se satisface la otra desigualdad, $f(a) = f(f(a))$. Para demostrar la monotonía de f, supongamos que $a \leq b$. Dado que $b \leq f(b)$ se tiene que $a \leq f(b)$, por lo que $e \leq a \to f(b) = f(a) \to f(b)$, es decir, $f(a) \leq f(b)$. Por lo tanto, f es monótono. $\square$

A continuación presentaremos un lema técnico y algunas definiciones que serán de utilidad para presentar un teorema similar al teorema del filtro primo para retículos distributivos pero en el contexto de srl-monoides integrales con operadores modales monótonos.

Definición 3.2.8. Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $S \subseteq A$. Vamos a denotar como $\langle S \rangle$ al $\Box$-filtro generado por S, el cual coincide con $\mathrm{C}[S]$. Si $S = \{a\}$ escribimos $\langle a \rangle$ en lugar de $\langle \{a\} \rangle$.

Lema 3.2.9. *Sean $A \in \mathsf{iSR}$, $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ y $a \in A$. Luego*

$$\langle F \cup \{a\} \rangle = \{b \in A : b \geq x \cdot \Box^n(a) \textit{ para } x \in F \textit{ y } n \geq 1\}.$$

Demostración. Sean

$$G = \{b \in A : b \geq \Box^n(\prod_{i=1}^{m} s_i) \text{ para algunos } s_1, ..., s_m \in F \cup \{a\} \; y \; n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$H = \{b \in A : b \geq x \cdot \Box^n(a) \text{ para } x \in F \text{ y } n \geq 1\}.$$

Se sigue del Lema 2.3.5 que $G = \langle F \cup \{a\} \rangle$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $G = H$. Para probar la igualdad, sea $b \in G$. Luego, existen $n \in \mathbb{N}$ y $s_1, s_2, \ldots, s_m \in F \cup \{a\}$ tales que $b \geq \Box^n(\prod_{i=1}^{m} s_i)$. Consideraremos los siguientes casos:

a) $s_i \in F$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Sea $x = \Box^n(\prod_{i=1}^{m} s_i)$. Luego $x \in F$. Como $b \geq x \geq x \cdot \Box(a)$ entonces $b \in H$. b) $s_i = a$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Luego, $b \geq \Box^n(a^m)$. Pero $a^m \geq \Box^m(a)$, entonces $b \geq \Box^n(a^m) \geq \Box^n(\Box^m(a)) = \Box^{nm}(a) = 1 \cdot \Box^{nm}(a)$. Así, $b \in H$. c) $s_1 = \ldots = s_i = a$ y $s_{i+1} = \ldots = s_m \in F$ para algún $i = 1, \ldots, m-1$. Sea $f = \prod_{j=i+1}^{m} s_i$, entonces

$$b \geq \Box^n(a^i \cdot f) \geq \Box^n(\Box^i(a) \cdot \Box(f)) = \Box^{ni}(a) \cdot \Box^n(f).$$

Como F es cerrado bajo $\Box$ y $\cdot$ tenemos $\Box^n(f) \in \mathrm{F}$. Por lo tanto, $b \in H$.

Recíprocamente, sea $b \in H$, por lo que $b \geq x \cdot \Box^n(a)$ para $x \in F$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, como $x \geq x \cdot a \geq \Box(x \cdot a) \geq \Box^n(x \cdot a)$ y $\Box^n(a) \geq \Box^n(x \cdot a)$ entonces

$$b \geq x \cdot \Box^n(a) \geq \Box^n(x \cdot a) \cdot \Box^n(x \cdot a) \geq \Box^{2n}(x \cdot a).$$

Así, $b \in G$. Por lo tanto, $G = H$. $\Box$

Las siguientes definiciones nos serán de utilidad más adelante.

Definición 3.2.10. Sea $A \in \mathsf{iSR}$.

1) Sea $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ tal que F es propio (es decir, $F \neq A$). Diremos que F es un $\Box$-*filtro primo* de A si para cada $a, b \in A$ se cumple que si $a \vee b \in F$ entonces $a \in F$ ó $b \in F$. Vamos a denotar como $\mathrm{X}^{\Box}(A)$ al conjunto de los $\Box$-filtros primos de A.

2) Sea $f : A \to A$ un operador modal monótono de A. Un subconjunto I de A se dice f-*ideal* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $I \neq \emptyset$, I es decreciente,

- $a \vee b \in I$ siempre que $a, b \in I$,
- $f(a) \in I$ para todo $a \in I$.

Si f es la función identidad, diremos que I es un *ideal* en lugar de un f-ideal.

3) Diremos que A satisface el $\Box_f$*-teorema del filtro primo* si para cada $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ e I f-ideal de A tales que $F \cap I = \emptyset$ existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $f(\Box^n(a \vee b)) \to (f(\Box^n(a) \vee f(\Box^n(b))) \in P$ para cada $a, b \in A$ y $n \geq 1$, $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.
Si f es la función identidad, simplemente decimos que A satisface el $\Box$-*teorema del filtro primo.*

Observación 3.2.11. *1) Sean A la cadena de tres elementos con $0 < a < 1$ y $Q = \{0, 1\}$. Se puede probar que (A, Q) es un sr-retículo. Escribiremos A para indicar a este sr-retículo. Notemos que $\{1\}$ es un $\Box-$filtro primo, por lo cual $\mathrm{X}^{\Box}(A) \neq \emptyset$. Además, $\{a, 1\}$ es un filtro primo tal que $\Box(a) = 0 \notin \{a, 1\}$, por lo que $\{a, 1\}$ no es un $\Box-$filtro primo. De este modo, el conjunto de filtros primos de A no es necesariamente igual al conjunto de $\Box$-filtros primos de A.*

2) Sea A el srl-monoide dado en 1). Es consecuencia del Ejemplo 3.2.3 que la función $f : A \to A$ dada por $f(x) = x \vee a$ es un operador modal monótono. Notar que $\{0, a\}$ es un f-ideal ya que $f(0) = f(a) = a$, con lo cual el conjunto de f-ideales es no vacío. Además, $\{0\}$ es un ideal que no es un f-ideal ya que $f(0) = a \neq 0$. Por lo tanto, el conjunto de ideales de A no es necesariamente igual al conjunto de f-ideales de A.

3) Como caso particular del Teorema 3.13 de [17] se tiene que si A es un sr-retículo que satisface $\Box(a \vee b) = \Box(a) \vee \Box(b)$ para cada $a, b \in A$ (por ejemplo, si A es un sr-retículo totalmente ordenado) entonces A satisface el $\Box$-teorema del filtro primo.

Teorema 3.2.12. *Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $f : A \to A$ un operador modal monótono que satisface*
$$f(\Box^n(a \vee b)) = f(\Box^n(a)) \vee f(\Box^n(b))$$
para cada $a, b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego A satisface el $\Box_f$-teorema del filtro primo.

Demostración. Sean $G \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ e I un f-ideal de A tales que $G \cap I = \emptyset$. Definimos
$$\Sigma = \{H \in \Box\mathrm{Fil}(A) : G \subseteq H \text{ y } H \cap I = \emptyset\}.$$
Como $G \in \Sigma$, $\Sigma \neq \emptyset$. Un cálculo directo muestra que Σ se encuentra bajo las hipótesis del Lema de Zorn, por lo que existe P un elemento maximal en Σ. Notemos que $P \neq A$ dado que $I \neq \emptyset$. A continuación veremos que P es primo. Para probarlo, supongamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \vee b \in P$ y $a, b \notin P$. Definimos $P_a = \langle P \cup \{a\}\rangle$ y $P_b = \langle P \cup \{b\}\rangle$. Como P es maximal en Σ y $a, b \notin P$ entonces $P_a \cap I \neq \emptyset$ y $P_b \cap I \neq \emptyset$. De este modo, es consecuencia del Lema 3.2.9 que existen $u \in P_a \cap I$, $v \in P_b \cap I$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y $p_1, p_2 \in P$ tales que
$$u \geq p_1 \cdot \Box^{n_1}(a)$$
$$v \geq p_2 \cdot \Box^{n_2}(b).$$

Sean $p = p_1 \cdot p_2$ y $n = \mathit{max}\{n_1, n_2\}$. Luego, $u \geq p \cdot \Box^n(a)$ y $v \geq p \cdot \Box^n(b)$. Por lo tanto,

$$u \vee v \geq (p \cdot \Box^n(a)) \vee (p \cdot \Box^n(b)) = p \cdot (\Box^n(a) \vee \Box^n(b)).$$

Teniendo en cuenta que f es monótona, f preserva $\cdot$ y 1) tenemos que

$$f(u \vee v) \geq f((p \cdot \Box^n(a)) \vee (p \cdot \Box^n(b))) = f(p) \cdot f(\Box^n(a) \vee \Box^n(b)) = f(p) \cdot f(\Box^n(a \vee b)).$$

Más aún, como $a \vee b \in P$ y $P \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ se tiene que $f(\Box^n(a \vee b)) \in P$. Además, dado que $p \in P$ y $p \leq f(p)$ entonces $f(p) \in P$, por lo que $f(p) \cdot f(\Box^n(a \vee b)) \in P$. De este modo, $f(a \vee b) \in P$. Pero $f(a \vee b) \in I$ dado que $a \vee b \in I$ e I es un f-ideal, es decir $f(a \vee b) \in P \cap I$. Así, $P \cap I \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto P es primo, que era nuestro objetivo.

$\Box$

Notemos que todo operador modal monótono definido sobre un srl-monoide integral cuyo orden subyacente es total satisface la hipótesis del Teorema 3.2.12. Por ejemplo, consideremos A un sr-retículo cuyo orden es total (esta álgebra puede ser vista como un srl-monoide integral). Se puede probar que cada función $f : A \to A$ dada por $f(a) = a \vee f(0)$, donde $f(0)$ es un elemento fijo de A, es un operador modal monótono (Ejemplo 3.2.3). Por lo tanto, estas funciones definidas sobre A satisfacen la hipótesis del Teorema 3.2.12.

Observación 3.2.13. *La hipótesis del Teorema 3.2.12 no es necesariamente cierta en todo srl-monoide integral. De hecho, consideremos el Ejemplo 3.2.2. Luego* $f(\Box(a \vee b)) = f(1) = 1$ *y* $f(\Box(a)) \vee f(\Box(b)) = f(0) = b$*, por lo que* $f(\Box(a \vee b)) \neq f(\Box(a)) \vee f(\Box(b))$.

3.3. La variedad de los srl-monoides fuertes y algunas de sus subvariedades

Consideremos la variedad

$$\mathsf{iSR}^{\Box} := \mathsf{iSR} + \{\Box^n(x \vee y) = \Box^n(x) \vee \Box^n(y), n \in \mathbb{N}\},$$

cuyos miembros llamaremos *srl-monoides fuertes*.

En esta sección estudiaremos a los srl-monoides fuertes, cuya definición está inspirada en la definición de sr-retículos fuertes [18]. Esta variedad se obtiene considerando en 1) del Teorema 3.2.12 la función identidad como operador modal monótono.

En esta sección vamos a estudiar dos subvariedades de $\mathsf{iSR}^{\Box}$:

- La subvariedad de $\mathsf{iSR}^{\Box}$ generada por la clase C de sus miembros totalmente ordenados (notar que todo srl-monoide totalmente ordenado es un srl-monoide fuerte).
- La subvariedad de $\mathsf{iSR}^{\Box}$ generada por la clase Or cuyos miembros son los srl-monoides A que cumplen que $a \to b \in \{\Box(b), 1\}$ para cada $a, b \in A$; dicha clase está inspirada por la clase de las order $\Box$-algebras presentadas y estudiadas en [18] (ver también [8]).

El siguiente diagrama resume las variedades que son de interés en esta sección:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathsf{iSR} \arrow[d, no head] & \\ & \mathsf{iSR}^{\Box} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \mathbb{V}(\mathrm{C}) & & \mathbb{V}(\mathrm{Or}) \end{tikzcd}$$

A continuación mostraremos que $\mathsf{iSR}^{\Box}$ es una subvariedad propia de iSR.

Observación 3.3.1. *Sea A el retículo de Boole de cuatro elementos, donde a y b son sus átomos. Luego $(A, \{0, 1\})$ es un sr-retículo, y en particular un srl-monoide integral. Sin embargo, no es un srl-monoide fuerte dado que $\Box(a \vee b) = 1$ y $\Box(a) \vee \Box(b) = 0$. Por lo tanto, $\mathsf{iSR}^{\Box}$ es una subvariedad propia de iSR.*

Proposición 3.3.2. *Sea $A \in \mathsf{iSR}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$.

2) A satisface el $\Box$-teorema del filtro primo.

Demostración. El hecho de que 1) implica 2) se sigue del Teorema 3.2.12 considerando f como la función identidad. Recíprocamente, supongamos que se satisface la condición 2). Asumamos que la condición 1) no se verifica, por lo que existen $a, b \in A$ y $n \geq 1$ tales que

$$\Box^n(a \vee b) \neq \Box^n(a) \vee \Box^n(b),$$

es decir, $\Box^n(a \vee b) \nleq \Box^n(a) \vee \Box^n(b)$. Definimos

$$c = \Box^n(a \vee b) \to (\Box^n(a) \vee \Box^n(b)).$$

En particular, $c \neq 1$. Por lo tanto, $(c] \cap \{1\} = \emptyset$. De este modo, por hipótesis tenemos que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $c \notin P$, lo cual es una contradicción. Luego, se satisface la condición 1). $\Box$

A continuación daremos algunos corolarios de la proposición anterior.

Corolario 3.3.3. *Sean $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$, $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ y $a \notin F$. Luego, existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $F \subseteq P$ y $a \notin P$.*

Demostración. Sea $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ y $a \notin F$. En particular, $(a] \cap F = \emptyset$. De este modo, se sigue de la Proposición 3.3.2 que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $F \subseteq P$ y $(a] \cap P = \emptyset$. Por lo tanto, $a \notin P$. $\Box$

Sea $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$ no trivial. Luego $\mathrm{X}^{\Box}(A) \neq \emptyset$. En efecto, existe $a \in A$ tal que $a \neq 1$. Como $a \notin \{1\}$ entonces es consecuencia del Corolario 3.3.3 que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$. Por lo tanto $\mathrm{X}^{\Box}(A) \neq \emptyset$.

Corolario 3.3.4. *Sea $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$. Luego, cada miembro propio de $\Box\mathrm{Fil}(A)$ es intersección de $\Box$-filtros primos. Más aún, si A no es trivial entonces la intersección de todos los $\Box$-filtros primos es igual a $\{1\}$.*

Corolario 3.3.5. *Sea* $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$*. Sean* $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ *y* $a, b \in A$*. Luego para cada* $n \geq 1$ *se verifica que* $\Box^n(a) \to b \notin F$ *si y sólo si existe* $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ *tal que* $F \subseteq P$*,* $a \in P$ *y* $b \notin P$*.*

Demostración. Primero supongamos que $\Box^n(a) \to b \notin F$ para todo $n \geq 1$ y sea $G = \langle F \cup \{\Box(a)\}\rangle$. Tenemos que $b \notin G$. Para mostrarlo, supongamos que $b \in G$. Es consecuencia del Lema 3.2.9 que existen $f \in F$ y $n \geq 1$ tales que $f \cdot \Box^n(a) \leq b$. Sin embargo, $\Box(f) \leq f$, por lo que $\Box(f) \cdot \Box^n(a) \leq b$. De esta manera, $\Box(f) \leq \Box^n(a) \to b$. Como $f \in F$, entonces $\Box(f) \in F$, y consecuentemente $\Box^n(a) \to b \in F$, lo cual es una contradicción. De esta manera hemos probado que $b \notin G$.

Así, se sigue del Corolario 3.3.3 que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $G \subseteq P$ y $b \notin P$. Teniendo en cuenta que $\Box(a) \in G \subseteq P$ y $\Box(a) \leq a$ tenemos que $a \in P$. Luego $F \subseteq P$, $a \in P$ y $b \notin P$.

Recíprocamente, supongamos que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tal que $F \subseteq P$, $a \in P$ y $b \notin P$. Asumamos que $\Box^n(a) \to b \in F$ para algún $n \geq 1$, luego $\Box^n(a) \to b \in P$. Sin embargo, dado que $a \in P$ se tiene que $\Box^n(a) \in P$. Por consiguiente, $\Box^n(a) \cdot (\Box^n(a) \to b) \in P$ y $\Box^n(a) \cdot (\Box^n(a) \to b) \leq b$, por lo que $b \in P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\Box^n(a) \to b \notin F$ para cada $n \geq 1$. $\Box$

El siguiente resultado es consecuencia directa del Corolario 3.3.5.

Corolario 3.3.6. *Sea* $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$*. Para cada* $a, b \in A$*, si* $\Box^n(a) \not\leq b$ *para todo* $n \geq 1$ *entonces existe* $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ *tal que* $a \in P$ *y* $b \notin P$*.*

En la siguiente proposición daremos una caracterización de los $\Box$-filtros primos para cada miembro de $\mathsf{iSR}^{\Box}$.

Proposición 3.3.7. *Sean* $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$ *y* $P \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ *tales que* $P \neq A$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$.

2) Para cada $F_1, F_2 \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ tales que $F_1 \cap F_2 \subseteq P$ vale que $F_1 \subseteq P$ ó $F_2 \subseteq P$.

3) Para cada $F_1, F_2 \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ tales que $F_1 \cap F_2 = P$ vale que $F_1 = P$ ó $F_2 = P$.

Demostración. Para mostrar que 1) implica 2), supongamos que P es un $\Box$-filtro primo y asumamos que existen $F_1, F_2 \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ tales que $F_1 \cap F_2 \subseteq P$ con $F_1 \not\subseteq P$ y $F_2 \not\subseteq P$. Luego existen $a, b \in A$ tales que $a \in F_1$, $b \in F_2$, $a \notin P$ y $b \notin P$. Dado que $a \vee b \in F_1 \cap F_2 \subseteq P$ entonces $a \vee b \in P$, por lo que $a \in P$ ó $b \in P$, lo cual es una contradicción.

El hecho de que 2) implica 3) es inmediato.

Finalmente mostraremos que 3) implica 1). Supongamos que se satisface 3) y asumamos que existen $a, b \in A$ tales que $a \vee b \in P$ con $a \notin P$ y $b \notin P$. Sean $F_1 = \langle P \cup \{a\}\rangle$ y $F_2 = \langle P \cup \{b\}\rangle$. En particular, $P \subseteq F_1 \cap F_2$. Para mostrar la otra inclusión, sea $c \in F_1 \cap F_2$. Luego se sigue del Lema 3.2.9 que $c \geq p_1 \cdot \Box^{n_1}(a)$ y $c \geq p_2 \cdot \Box^{n_2}(b)$ para $p_1, p_2 \in P$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Sean $p = p_1 \cdot p_2$ y $n = \mathit{max}\{n_1, n_2\}$. De este modo, $p \in P$. Más aún, $c \geq p \cdot \Box^n(a)$ y $c \geq p \cdot \Box^n(b)$. Por ello,

$$c \geq (p \cdot \Box^n(a)) \vee (p \cdot \Box^n(b)) = p \cdot (\Box^n(a) \vee \Box^n(b)) = p \cdot \Box^n(a \vee b).$$

Dado que $p \in P$ y $a \vee b \in P$ se tiene que $p \cdot \Box^n(a \vee b) \in P$, luego $c \in P$. Así, $P = F_1 \cap F_2$. Teniendo en cuenta la hipótesis podemos concluir que $P = F_1$ ó $P = F_2$, por lo que $a \in P$ ó $b \in P$, lo que es una contradicción. $\Box$

Notemos que la Proposición 3.3.7 no es necesariamente cierta en el marco de los srl-monoides integrales. En efecto, sea A el srl-monoide integral dado en la Observación 3.3.1, el cual no es un srl-monoide fuerte. Tenemos que $\Box\mathrm{Fil}(A) = \{\{1\}, A\}$. Resulta inmediato que $P = \{1\}$ satisface la condición 3) de la Proposición 3.3.7. Sin embargo, $P \notin \mathrm{X}^{\Box}(A)$ ya que $a \vee b = 1 \in P$ y $a, b \notin P$.

En la siguiente proposición proporcionaremos bases ecuacionales alternativas para la variedad de los srl-monoides fuertes.

Proposición 3.3.8. *Sean $A \in \mathsf{iSR}$ y $n \geq 1$. Las siguientes identidades resultan equivalentes:*

1) $\Box^n(a \vee b) = \Box^n(a) \vee \Box^n(b)$,

2) $\Box^n(a \vee b) \leq \Box^n(a) \vee \Box^n(b)$,

3) $(\Box^n(a) \to c) \wedge (\Box^n(b) \to c) \leq \Box^n(a \vee b) \to c$,

4) $(\Box^n(a) \to c) \wedge (\Box^n(b) \to c) = \Box^n(a \vee b) \to c$.

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) resulta inmediata, como así también la equivalencia entre 3) y 4). Mostraremos la equivalencia entre 2) y 3). Asumamos que se satisface la condición 2) y consideremos $a, b \in A$. Es consecuencia de la hipótesis que $(\Box^n(a) \vee \Box^n(b)) \to c \leq \Box^n(a \vee b) \to c$, es decir, $(\Box^n(a) \to c) \wedge (\Box^n(b) \to c) \leq \Box^n(a \vee b) \to c$. Recíprocamente, asumamos que se verifica la condición 3). Sea $c = \Box^n(a) \vee \Box^n(b)$. Dado que las desigualdades $\Box^n(a) \leq c$ y $\Box^n(b) \leq c$ se satisfacen en cualquier srl-monoide entonces $\Box^n(a) \to c = 1$ y $\Box^n(b) \to c = 1$. De hecho,

$$(\Box^n(a) \to c) \wedge (\Box^n(b) \to c) = 1. \tag{3.1}$$

Sin embargo,

$$(\Box^n(a) \to c) \wedge (\Box^n(b) \to c) \leq \Box^n(a \vee b) \to c. \tag{3.2}$$

Luego, por (3.1) y (3.2) concluimos que $\Box^n(a \vee b) \to c = 1$. Por lo tanto, $\Box^n(a \vee b) \leq c$, que era nuestro objetivo. $\Box$

Recordemos que C denota la clase de los miembros totalmente ordenados de $\mathsf{iSR}^{\Box}$, la cual coincide con la clase de los miembros totalmente ordenados de iSR. A continuación daremos una prueba de que $\mathbb{V}(\mathrm{C})$ es igual a la subvariedad de $\mathsf{iSR}^{\Box}$ cuyos miembros satisfacen la ecuación de prelinealidad

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$$

Dados $A \in \mathsf{iSR}$, $a \in A$ y $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$, vamos a denotar como a/F en lugar de $a/\Theta(F)$ y A/F en lugar de $A/\Theta(F)$.

Proposición 3.3.9. $\mathbb{V}(\mathrm{C}) = \mathsf{iSR}^{\Box} + \{(x \to y) \vee (y \to x) = 1\}$.

Demostración. Dado que cada álgebra de C satisface la ecuación de prelinealidad entonces $\mathbb{V}(\mathrm{C}) \subseteq \mathsf{iSR}^{\Box} + \{(x \to y) \vee (y \to x) = 1\}$.

Recíprocamente, sea A un álgebra no trivial de $\mathsf{iSR}^{\Box}$ tal que satisface la ecuación de prelinealidad. Consideremos el homomorfismo $\rho : A \to \prod_{P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)} A/P$ dado por $\rho(a) = (a/P)_{P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)}$. Se sigue del Corolario 3.3.4 que ρ es una función inyectiva, por lo que ρ es un monomorfismo. Más aún, un cálculo directo basado en la ecuación de prelinealidad muestra que $A/P \in \mathrm{C}$ para toda $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$, por lo que $\prod_{P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)} A/P \in \mathbb{V}(\mathrm{C})$. Por lo tanto, $A \in \mathbb{V}(\mathrm{C})$. $\Box$

En el marco de los srl-monoides integrales definimos el término binario

$$u(x, y) = (x \to y) \vee ((x \to y) \to \Box(y)).$$

Inspirados en la definición de order $\Box$-algebras [18], nuestro próximo objetivo es probar que

$$\mathbb{V}(\mathrm{Or}) = \mathsf{iSR}^{\Box} + \{u(x, y) = 1\}.$$

Lema 3.3.10. *Sea $A \in \mathsf{iSR}^{\Box}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) Para cada $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ y $a, b \in A$, $a \to b \in P$ ó $(a \to b) \to \Box(b) \in P$.

2) Para cada $a, b \in A$, $u(a, b) = 1$.

3) Para cada $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$, $A/P \in \mathrm{Or}$.

Demostración. Supongamos que se satisface 1) y que existen $a, b \in A$ tales que $u(a, b) \neq 1$. Es consecuencia del Corolario 2.2.2 que existe $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ tales que $(a \to b) \vee ((a \to b) \to \Box(b)) \notin P$. Luego, $a \to b \notin P$ y $(a \to b) \to \Box(b) \notin P$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se satisface 2).

Supongamos que se satisface la condición 2). Para mostrar 3), sea $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$. Sean $a, b \in A$ y supongamos que $a/P \not\leq b/P$, es decir, $a \to b \notin P$. Teniendo en cuenta que $(a \to b) \vee ((a \to b) \to \Box(b)) = 1 \in P$ tenemos que $(a \to b) \to \Box(b) \in P$, por lo que $(a \to b)/P \leq \Box(b)/P$. Un cálculo sencillo muestra que $\Box(b)/P \leq a/P \to b/P$. Luego, $\Box(b)/P = a/P \to b/P$. Por lo tanto, $A/P \in \mathrm{Or}$.

Finalmente, supongamos que se satisface 3). Para probar 1), sean $P \in \mathrm{X}^{\Box}(A)$ y $a, b \in A$. Es consecuencia de la hipótesis que $a/P \to b/P \in \{\Box(b)/P, 1/P\}$. Si $a/P \to b/P = 1/P = P$ entonces $a \to b \in P$. Si $a/P \to b/P = \Box(b)/P$ entonces $(a \to b) \to \Box(b) \in P$. Por lo tanto, se verifica 1). $\Box$

Proposición 3.3.11. $\mathbb{V}(\mathrm{Or}) = \mathsf{iSR}^{\Box} + \{u(x, y) = 1\}$.

Demostración. La prueba es similar a la dada en la Proposición 3.3.9 pero usando el Lema 3.3.10. $\Box$

En el contexto de los srl-monoides integrales definimos el término

$$o(x, y, z) = ((x \to y) \to z) \to ((((x \to y) \to \Box(y)) \to z)) \to z.$$

Corolario 3.3.12. $\mathbb{V}(\mathrm{Or}) = \mathsf{iSR}^{\Box} + \{o(x, y, z) = 1\}$.

Demostración. Sean $A \in \mathbb{V}(\mathrm{Or})$ y $a, b, c \in A$. Notemos que

$$o(a, b, c) = 1$$

si y sólo si

$$(a \to b) \to c \leq (((a \to b) \to \Box(b)) \to c) \to c.$$

A su vez, notemos que la desigualdad anterior equivale a probar la desigualdad siguiente:

$$((a \to b) \to c) \cdot (((a \to b) \to \Box(b)) \to c) \leq c. \tag{3.3}$$

Para probar (3.3) haremos la siguiente cuenta basada en la Proposición 3.3.11:

$$\begin{aligned}
((a \to b) \to c) \cdot (((a \to b) \to \Box(b)) \to c) &\leq [((a \to b) \to c)] \wedge [(((a \to b) \to \Box(b)) \to c)] \\
&= [(a \to b) \vee ((a \to b) \to \Box(b))] \to c \\
&= 1 \to c \\
&= c.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $A \models o(x, y, z) = 1$. Sean $a, b \in A$ y consideremos $S = \{a \to b, (a \to b) \to \Box(b)\}$. Sea c una cota superior de S, es decir $a \to b \leq c$ y $(a \to b) \to \Box(b) \leq c$. En otras palabras $(a \to b) \to c = 1$ y $((a \to b) \to \Box(b)) \to c = 1$. Luego, $(((a \to b) \to \Box(b)) \to c) \to c = \Box(c)$. Como $o(a, b, c) = 1$,

$$1 = (((a \to b) \to \Box(b)) \to c) \to ((((a \to b) \to \Box(b)) \to c) \to c) = 1 \to \Box(c),$$

de modo que $\Box(c) = 1$ y por lo tanto $c = 1$. $\Box$

A continuación veremos que las clases C y Or son incomparables, y que las variedades $\mathbb{V}(\mathrm{C})$ y $\mathbb{V}(\mathrm{Or})$ son también incomparables.

- Sean A la MV-algebra $[0, 1]$ y $Q = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Luego $(A, Q) \in \mathrm{C}$. De ahora en más escribiremos A en lugar de (A, Q). Notemos que

  $$\frac{1}{2} \to 0 = \mathit{max}\{q \in Q : q \cdot \frac{1}{2} = 0\} = \frac{1}{2}$$

  y

  $$\Box(0) = \mathit{max}\{q \in Q : q \cdot 1 = 0\} = 0,$$

  es decir, $\frac{1}{2} \to 0 \notin \{\Box(0), 1\}$. Así, $A \in \mathrm{C}$ y $A \notin \mathrm{Or}$, por lo que $\mathrm{C} \not\subseteq \mathrm{Or}$. Además, $u(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2} \neq 1$, así $A \notin \mathbb{V}(\mathrm{Or})$. Luego $\mathbb{V}(\mathrm{C}) \not\subseteq \mathbb{V}(\mathrm{Or})$.

- Sea A el álgebra de Heyting de cinco elementos dada por el álgebra de Boole de cuatro elementos con un último elemento adicional. Sean a y b los átomos. Luego $(A, \{0, 1\})$ es un sr-retículo. De ahora en más escribiremos A en lugar de $(A, \{0, 1\})$. Consideremos $x, y \in A$ tales que $x \not\leq y$, por lo que $y \neq 1$. De este modo, $x \to y = 0$ y $1 \to y = 0$. De esta manera, $x \to y \in \{1, \Box(y)\}$, en otras palabras $A \in \mathrm{Or}$. Sin embargo $A \notin \mathbb{V}(\mathrm{C})$ dado que $(a \to b) \vee (b \to a) = 0 \neq 1$. Por lo tanto $\mathbb{V}(\mathrm{Or}) \not\subseteq \mathbb{V}(\mathrm{C})$. De este modo, $\mathrm{Or} \not\subseteq \mathrm{C}$.

Hemos mostrado que las clases C y Or son incomparables, y que las variedades $\mathbb{V}(\mathrm{C})$ y $\mathbb{V}(\mathrm{Or})$ también son incomparables. Sin embargo, en el contexto de los sr-retículos tenemos que todo sr-retículo totalmente ordenado es una order $\Box$-algebra [18].

3.4. La variedad generada por los srl-monoides totalmente ordenados

Vamos a denotar como SR^{c} a la subvariedad de SR generada por sus miembros totalmente ordenados. El objetivo de esta sección es dar bases ecuacionales para la variedad SR^{c}. Comenzaremos enunciando algunos resultados que serán de utilidad.

Ahora, consideremos las siguientes identidades:

C_1 $e \leq (x \to y) \vee (y \to x)$,

C_2 $e \wedge (x \vee y) = (e \wedge x) \vee (e \wedge y)$,

E_1 $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$,

E_2 $z \to (x \vee y) = (z \to x) \vee (z \to y)$.

Lema 3.4.1. *Sea* $A \in \mathsf{SR}$.

a) Si A satisface E_1 o E_2 entonces A satisface C_1.

b) Si A satisface C_1 entonces para cualesquiera $a, b \in A^-$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$(a \vee b)^{2^m} = a^{2^m} \vee b^{2^m}.$$

c) Si A satisface E_2 entonces para cualesquiera $a, b \in A^-$ y $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\Box^{2^n}((a \vee b)^{2^m}) = \Box^{2^n}(a^{2^m}) \vee \Box^{2^n}(b^{2^m}).$$

Demostración. a) Primero supongamos que A satisface E_1 y sean $a, b \in A$. Luego

$$\begin{aligned} e &\leq (a \wedge b) \to (a \wedge b) \\ &= (a \to (a \wedge b)) \vee (b \to (a \wedge b)) \\ &\leq (a \to b) \vee (b \to a), \end{aligned}$$

por lo que $e \leq (a \to b) \vee (b \to a)$ y A satisface C_1.

Ahora supongamos que A satisface E_2 y sean $a, b \in A$. Luego

$$\begin{aligned} e &\leq (a \vee b) \to (a \vee b) \\ &= ((a \vee b) \to a) \vee ((a \vee b) \to b) \\ &= ((a \vee b) \to b) \vee ((a \vee b) \to a) \\ &\leq (a \to b) \vee (b \to a), \end{aligned}$$

por lo que $e \leq (a \to b) \vee (b \to a)$ y A satisface C_1.

b) Asumamos que A satisface C_1 y sean $a, b \in A^-$. Primero notemos que

$$(a \vee b)^2 = a^2 \vee b^2 \vee (a \cdot b).$$

Dado que $e \leq (a \to b) \vee (b \to a)$ entonces

$$\begin{aligned} a \cdot b &\leq (b \cdot a \cdot (a \to b)) \vee (a \cdot b \cdot (a \to b)) \\ &\leq b^2 \vee a^2, \end{aligned}$$

luego

$$(a \vee b)^2 = a^2 \vee b^2. \tag{3.4}$$

Ahora supongamos que $(a \vee b)^{2^m} = a^{2^m} \vee b^{2^m}$ para algún m. Como $a^{2^m}, b^{2^m} \in A^-$ entonces se sigue de (3.4) que

$$\begin{aligned} (a \vee b)^{2^{m+1}} &= ((a \vee b)^{2^m})^2 \\ &= (a^{2^m} \vee b^{2^m})^2 \\ &= a^{2^{m+1}} \vee b^{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

c) Finalmente asumamos que A satisface E_2, sean $a, b \in A^-$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Primero veremos que $\Box((a \vee b)^{2^m}) = \Box(a^{2^m}) \vee \Box(b^{2^m})$. En efecto, se sigue de b) y E_2 que

$$\begin{aligned} \Box((a \vee b)^{2^m}) &= \Box(a^{2^m} \vee b^{2^m}) \\ &= \Box(a^{2^m}) \vee \Box(b^{2^m}). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\Box((a \vee b)^{2^m}) = \Box(a^{2^m}) \vee \Box(b^{2^m}). \tag{3.5}$$

Por lo tanto, como $\Box(a^{2^m}), \Box(b^{2^m}) \in A^-$, por b) y (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \Box^{2^n}((a \vee b)^{2^m}) &= (\Box(a^{2^m}) \vee \Box(b^{2^m}))^{2^n} \\ &= \Box^{2^n}(a^{2^m}) \vee \Box^{2^n}(b^{2^m}), \end{aligned}$$

el cual era nuestro objetivo. $\Box$

Lema 3.4.2. *Asumamos que* $A \in \mathsf{SR}$ *satisface* E_2. *Si* $a, b \in A^-$ *se tiene que* $\mathrm{C}[a \vee b] = \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$.

Demostración. Consideremos $a, b \in A^-$. Como $a \leq a \vee b \leq e$ y $b \leq a \vee b \leq e$ entonces $a \vee b \in \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$, por lo que $\mathrm{C}[a \vee b] \subseteq \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$. Recíprocamente, sea $x \in \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$. En consecuencia, se sigue del Corolario 2.3.7 que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\Box^n(a) \leq x$, $\Box^m(b) \leq x$, $x \cdot \Box^n(a) \leq e$ y $x \cdot \Box^m(b) \leq e$. Más aún, como $n \leq 2^n$ y $m \leq 2^m$, es consecuencia de la Observación 2.3.3 que $\Box^{2^n}(a) \leq x$ y $\Box^{2^n}(b) \leq x$, $x \cdot \Box^{2^n}(a) \leq e$ y $x \cdot \Box^{2^n}(b) \leq e$. Luego, se sigue por item c) del Lema 3.4.1 que

$$\Box^{2^n}(a \vee b) = \Box^{2^n}(a) \vee \Box^{2^n}(b),$$

luego $\Box^{2^n}(a \vee b) \leq x$ dado que $\Box^{2^n}(a) \leq x$ y $\Box^{2^n}(b) \leq x$.

Además,

$$\begin{aligned} x \cdot \Box^{2^n}(a \vee b) &= x \cdot (\Box^{2^n}(a) \vee \Box^{2^n}(b)) \\ &= (x \cdot \Box^{2^n}(a)) \vee (x \cdot \Box^{2^n}(b)) \\ &\leq e, \end{aligned}$$

i.e. $x \cdot \Box^{2^n}(a \vee b) \leq e$. Así, nuevamente por el Corolario 2.3.7 tenemos que $x \in \mathrm{C}[a \vee b]$. Por lo tanto, $\mathrm{C}[a \vee b] = \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b]$. $\Box$

El siguiente resultado se sigue del Teorema 2.4.11 y del Lema 3.4.2.

Teorema 3.4.3. *Asumamos que* $A \in \mathsf{SR}$ *satisface* E_2*. Luego* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ *es un retículo algebraico y distributivo cuyos elementos compactos son de la forma* $\mathrm{C}[a]$ *para* $a \in A^-$*. Más aún, los elementos compactos de* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$ *forman un subretículo de* $\mathrm{Sub}_{\mathrm{SC}}(A)$*, con supremos e ínfimos dados por las siguientes fórmulas para cada* $a, b \in A^-$*:*

$$\mathrm{C}[a \wedge b] = \mathrm{C}[a] \vee \mathrm{C}[b] \quad y \quad \mathrm{C}[a \vee b] = \mathrm{C}[a] \cap \mathrm{C}[b].$$

Observación 3.4.4. *Los miembros totalmente ordenados de* SR *satisfacen* E_2*. Por lo tanto, los miembros de* SR^{c} *satisfacen* E_2*.*

La estructura de la prueba del siguiente resultado está dado por el Teorema 3.1 de [29]. De todas maneras, por completitud hemos optado por dar una demostración del mismo.

Teorema 3.4.5. *Las identidades* C_2 *y* E_2*, junto con las que definen a* SR*, forman una base ecuacional para* SR^{c}*.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de SR determinada por las identidades C_2 y E_2. Como todo elemento totalmente ordenado de SR satisface estas identidades, se sigue que $\mathsf{SR}^{\mathrm{c}} \subseteq \mathcal{V}$.

Para probar la recíproca es suficiente probar que todo miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{V}$ es totalmente ordenado. Probaremos el contrarrecíproco. Supongamos que A satisface las identidades C_2 y E_2 pero no es totalmente ordenada. Sean a y b elementos incomparables en A, es decir, $e \not\leq a \to b$ y $e \not\leq b \to a$. Sean $u = e \wedge (a \to b)$ y $v = e \wedge (b \to a)$. Notemos que $u \neq e$ y $v \neq e$. Por la identidad C_2, $u \vee v = e \wedge ((a \to b) \vee (b \to a))$. Como A satisface E_2 entonces se sigue de a) del Lema 3.4.1 que A satisface C_1. Luego, por la identidad C_1, $u \vee v = e$. Por lo tanto, se sigue de c) del Lema 3.4.1 y Lema 3.4.2 que

$$\begin{aligned} \mathrm{C}[u] \cap \mathrm{C}[v] &= \mathrm{C}[u \vee v] \\ &= \mathrm{C}[e] \\ &= \{e\}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathrm{C}[u] \cap \mathrm{C}[v] = \{e\}$ y en consecuencia $\mathrm{Con}(A)$ no puede tener un monolito. Por lo tanto, A no es subdirectamente irreducible. Luego, $\mathcal{V} \subseteq \mathsf{SR}^{\mathrm{c}}$. □

El siguiente resultado es similar al Teorema 3.4 de [29].

Corolario 3.4.6. *Junto con las identidades que definen* SR*,* $\{\mathrm{E}_1, \mathrm{C}_2\}$ *y* $\{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2\}$ *forman bases ecuacionales alternativas para* SR^{c}*.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de SR la cual satisface las ecuaciones $\mathrm{E}_1, \mathrm{C}_2$ y $\mathcal{W}$ la subvariedad de SR la cual satisface las ecuaciones $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$. Dado que cada cadena en SR satisface $\mathrm{E}_1, \mathrm{C}_2$, se sigue del Teorema 3.4.5 que $\mathsf{SR}^{\mathrm{c}} \subseteq \mathcal{V}$. La inclusión $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ se sigue del Lema 3.4.1.

Finalmente veremos que $\mathcal{W} \subseteq \mathsf{SR}^{\mathrm{c}}$. Sean $A \in \mathcal{W}$ y $a, b, c \in A$. Definimos $u = (a \to b) \vee (a \to c)$. Resulta inmediato que $u \leq a \to (b \vee c)$. Nuestro objetivo es mostrar la otra desigualdad, que es equivalente a mostrar que

$$e \leq (a \to (b \vee c)) \to u.$$

Para verlo, primero notemos que $(b \vee c) \to b \leq ((a \to (b \vee c)) \to u$ si y sólo si

$$((a \to (b \vee c)) \cdot ((b \vee c) \to b) \leq u.$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} ((a \to (b \vee c)) \cdot ((b \vee c) \to b) &\leq a \to b \\ &\leq (a \to b) \vee (a \to c) \\ &= u, \end{aligned}$$

entonces $((a \to (b \vee c)) \cdot ((b \vee c) \to b) \leq u$. Luego,

$$(b \vee c) \to b \leq ((a \to (b \vee c)) \to u.$$

Similarmente, tenemos que $((a \to (b \vee c)) \cdot ((b \vee c) \to c) \leq u$, luego

$$(b \vee c) \to c \leq ((a \to (b \vee c)) \to u.$$

Así, teniendo en cuenta C_1 y C_2 obtenemos

$$\begin{aligned} ((a \to (b \vee c)) \to u &\geq ((b \vee c) \to b) \vee ((b \vee c) \to c) \\ &= ((b \to b) \wedge (c \to b)) \vee ((c \to c) \wedge (b \to c)) \\ &\geq ((e \wedge (c \to b)) \vee (e \wedge (b \to c)) \\ &= e \wedge ((c \to b) \vee (b \to c)) \\ &= e, \end{aligned}$$

luego $e \leq ((a \to (b \vee c)) \to u$, es decir, $a \to (b \vee c) \leq u$. □

Sea A un miembro totalmente ordenado de SR. Un cálculo directo muestra que para todo $a, b, c \in A$, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ y $a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b) \wedge (a \cdot c)$. Así, estas dos ecuaciones se satisfacen también en SR^{c}. El hecho de que el retículo subyacente de un álgebra de SR^{c} es distributivo puede probarse también usando el Corolario 3.4.6 mediante la demostración hecha en el Teorema 3.5 de [29].

Finalmente, notemos que el Corolario 3.4.6 en el marco de retículos residuados conmutativos es el Teorema 3.4 de [29]. También es consecuencia del Corolario 3.4.6 que la subvariedad de SRL generada por sus miembros totalmente ordenados está caracterizada por la ecuación (**??**) o, equivalentemente, por las ecuaciones E_1 o E_2 (estas propiedades pueden ser obtenidas también como resultado de [13]).

La siguiente proposición es consecuencia del Corolario 3.4.6.

Proposición 3.4.7. $\mathbb{V}(\mathrm{C}) = \mathsf{iSR} + \{(x \to y) \vee (y \to x) = 1\}$.

Observación 3.4.8. *La Proposición 3.4.7 nos asegura que la ecuación de prelinealidad (**??**) caracteriza a la subvariedad* $\mathbb{V}(\mathrm{C})$ *de* iSR. *Este resultado da una caracterización más precisa de la base ecuacional obtenida en la Proposición 3.3.9.*

En el marco de los srl-monoides integrales definimos el término

$$l(x, y, z) = ((y \to x) \to z) \to (((x \to y) \to z) \to z).$$

Vamos a finalizar esta sección dando una base alternativa para $\mathbb{V}(\mathrm{C})$.

Proposición 3.4.9. $\mathbb{V}(\mathrm{C}) = \mathsf{iSR} + \{l(x,y,z) = 1\}$.

Demostración. Sean $A \in \mathbb{V}(\mathrm{C})$ y $a, b, c \in A$. Veremos que $l(a,b,c) = 1$, lo cual equivale a probar que $((b \to a) \to c) \cdot ((a \to b) \to c) \leq c$. Notemos que

$$((b \to a) \to c) \cdot ((a \to b) \to c) \leq ((b \to a) \to c) \wedge ((a \to b) \to c)$$

y

$$((b \to a) \to c) \wedge ((a \to b) \to c) = ((a \to b) \vee (b \to a)) \to c.$$

Más aún, por hipótesis y Proposición 3.3.9 tenemos $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$. Teniendo en cuenta que $\Box(c) \leq c$ obtenemos

$$((b \to a) \to c) \cdot ((a \to b) \to c) \leq c,$$

el cual era nuestro objetivo.

Recíprocamente, sean $A \in \mathsf{iSR} + \{l(x,y,z) = 1\}$ y $a, b \in A$. Veremos que se satisface la ecuación (**??**). Probaremos que 1 es una cota inferior de $\{a \to b, b \to a\}$. Sea c una cota inferior de $\{a \to b, b \to a\}$, lo que equivale a que $(a \to b) \to c = 1$ y $(b \to a) \to c = 1$. Pero se sigue de la hipótesis que $l(a,b,c) = 1$, por lo que $\Box(c) = 1$. Sin embargo, $\Box(c) \leq c$, por lo que $c = 1$. En consecuencia, se satisface (**??**). Por lo tanto, se sigue de la Proposición 3.3.9 que $A \in \mathbb{V}(\mathrm{C})$. $\square$

Capítulo 4

Algunos subreductos de los srl-monoides integrales

En este capítulo introduciremos la clase de los monoides conmutativos semi-reticulados acotados subresiduados (srs-monoides para abreviar), la cual será denotada por SR^{s}. La clase SR^{s} contiene propiamente a las variedades de semi-retículos subresiduados [9] y de semi-retículos residuados respectivamente [19].

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 4.1 daremos algunas propiedades algebraicas de los srs-monoides y probaremos que SR^{s} es una variedad. En la Sección 4.2 probaremos que los srs-monoides son los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}-$subreductos de los srl-monoides integrales. El estudio de estos subreductos resulta de interés ya que desde el punto de vista lógico nos proporciona el fragmento $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, \top\}$ del cálculo proposicional cuya semántica algebraica es la variedad de los srl-monoides integrales. Finalmente, en la Sección 4.3, estudiaremos cómo se relacionan ciertas construcciones hechas en la Sección 4.2 con otras construcciones hechas en [12] utilizadas para representar álgebras con implicación y fusión.

4.1. Propiedades algebraicas

En esta sección introduciremos la definición de semi-retículo monoidal conmutativo acotado y de srs-monoide respectivamente. Luego daremos algunas propiedades básicas sobre srs-monoides que usaremos en las próximas secciones. En particular, probaremos que la clase de los srs-monoides es una variedad.

Definición 4.1.1. Un *semi-retículo monoidal conmutativo acotado* (semi-retículo monoidal para abreviar) es un álgebra $(A, \wedge, \cdot, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo y la operación binaria $\cdot$ es monótona.

La siguiente definición está inspirada en la definición de srl-monoide integral.

Definición 4.1.2. Un *monoide conmutativo semi-reticulado acotado subresiduado* (srs-monoide para abreviar) es un par $(\mathbf{A}, Q)$ donde $\mathbf{A} = (A, \wedge, \cdot, 1)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 0)$ tal que satisface las siguientes condiciones:

1) $(A, \wedge, \cdot, 1)$ es un semi-retículo monoidal.

2) Q es una subálgebra de $\mathbf{A}$.

3) Para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$.

Sean $(\mathbf{A}, Q)$ un srs-monoide y $a, b \in A$. Vamos a denotar como $a \to b$ al máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$. Los srs-monoides pueden ser considerados como álgebras $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$. Más aún, si $(\mathbf{A}, Q)$ es un srs-monoide entonces

$$Q = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}.$$

Si no existe ambigüedad vamos a escribir (A, Q) en lugar de $(\mathbf{A}, Q)$.

La definición de srs-monoide se encuentra motivada por la definición de semi-retículo subresiduado [9] y semi-retículo residuado [19] respectivamente. Vamos a recordar ambas definiciones a continuación.

Un *semi-retículo subresiduado* [9] es un par $(\mathbf{A}, Q)$, donde A es un semi-retículo acotado, Q es una subálgebra de $\mathbf{A}$ y para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \wedge q \leq b\}$, el cual vamos a denotar como $a \to b$. Sea $(\mathbf{A}, Q)$ un semi-retículo subresiduado. El par $(\mathbf{A}, Q)$ puede ser considerado como un álgebra $(A, \wedge, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$. Más aún, $Q = \{a \in A : 1 \to a = a\}$. La clase de los semi-retículos subresiduados es una variedad [9], la cual vamos a denotar por SRS. Esta variedad contiene propiamente a la variedad de los semi-retículos implicativos [36]. Si $(A, \wedge, \to, 1)$ es un semi-retículo subresiduado y $a, b, c \in A$, la siguiente condición se satisface:

$$\text{si } a \leq b \to c \text{ entonces } a \wedge b \leq c.$$

Sin embargo, la recíproca de esta propiedad no es cierta en general. Los semi-retículos subresiduados son los $\{\wedge, \to, 1\}$-subreductos de los sr-retículos [9].

Un álgebra $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ es un *semi-retículo residuado* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado;
2. $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo;
3. para cada $a, b, c \in A$, $a \leq b \to c$ si y sólo si $a \cdot b \leq c$ [1].

La clase de los semi-retículos residuados es una variedad (Observación 7.1.11 de [19]). Los semi-retículos residuados son los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los retículos residuados conmutativos integrales. Resulta interesante notar que si (A, Q) es un srs-monoide entonces el álgebra $(Q, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un semi-retículo residuado.

Las siguientes dos propiedades elementales vinculan a los srs-monoides, los semi-retículos subresiduados y los semi-retículos residuados respectivamente:

- Si $(A, \wedge, \to, 1)$ es un semi-retículo subresiduado entonces $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide, donde $\cdot = \wedge$ (en este sentido vamos a decir que todo semi-retículo subresiduado es un srs-monoide).

[1] Sea $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ un semi-retículo residuado. Luego la operación $\cdot$ es monótona. En efecto, sean $a, b, c \in A$ tales que $a \leq b$. Luego, $a \leq b \leq c \to (b \cdot c)$, por lo que $a \leq c \to (b \cdot c)$, i.e., $a \cdot c \leq b \cdot c$.

- Si $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un semi-retículo residuado entonces $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide (se puede probar definiendo $Q = A$). Más aún, $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es semi-retículo residuado si y sólo si $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide y $1 \to a = a$ para cada $a \in A$.

Las propiedades previas pueden ser resumidas en la siguiente figura, donde SRS, RS e IS son las variedades de semi-retículos subresiduados, semi-retículos residuados y semi-retículos implicativos (cuyos miembros se consideran en la signatura de los srs-monoides) respectivamente:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & \mathsf{SR^s} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathsf{SRS} \arrow[dr] & & \mathsf{RS} \arrow[dl] \\ & \mathsf{IS} & \end{tikzcd}$$

En cada srs-monoide A se satisface la siguiente condición para cada $a, b, c \in A$:

$$\text{si } a \leq b \to c \text{ luego } a \cdot b \leq c.$$

La recíproca de la propiedad previa se verifica si y sólo si A es un semi-retículo residuado.

En la presente sección generalizaremos algunos resultados sobre semi-retículos subresiduados y semi-retículos residuados respectivamente en el marco de los srs-monoides. En particular, probaremos que la clase de los srs-monoides forma una variedad. Nuestro objetivo principal es mostrar que la variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales. [2].

La estructura de la prueba del siguiente resultado está dado por el Teorema 2.1.7. De todas maneras, por completitud hemos optado por dar una demostración del mismo.

Teorema 4.1.3. *Sea $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0)$. Luego $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide si y sólo si $(A, \wedge, \cdot, 1)$ es un semi-retículo monoidal y se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:*

1) $(a \wedge b) \to b = 1$,

2) $a \to b \leq c \to (a \to b)$,

3) $a \cdot (a \to b) \leq b$,

4) $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$,

5) $1 \to ((1 \to a) \cdot (1 \to b)) = (1 \to a) \cdot (1 \to b)$,

6) $1 \to b \leq a \to (a \cdot (1 \to b))$.

[2]En esta sección consideramos como subreducto de un álgebra A, a cualquier imagen isomorfa de una subálgebra del reducto correspondiente de A. Con esta definición, la clase de los subreductos de una clase de álgebras es siempre cerrada por subálgebras e imágenes isomorfas.

Demostración. Supongamos que $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide. Sea

$$Q = \{a \in A : 1 \to a = a\}.$$

La condición 5) es consecuencia de que $(Q, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un semi-retículo residuado. Además, la condición 6) se sigue del hecho de que $1 \to b \in Q$ para todo $b \in A$.

Dado que $1 \in Q$ y $1 \cdot (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$ se tiene que $1 \leq (a \wedge b) \to b$, i.e., $(a \wedge b) \to b = 1$, por lo que se satisface la condición 1). Teniendo en cuenta que $a \to b \in Q$ tenemos que $a \cdot (a \to b) \leq b$, que es 3). Además, como $c \cdot (a \to b) \leq a \to b$ luego $a \to b \leq c \to (a \to b)$, que es 2). Ahora veremos que

$$c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b).$$

Primero notemos que Q es una subálgebra de A. Por 3), $c \cdot (c \to (a \wedge b)) \leq a \wedge b \leq a$, luego $c \to (a \wedge b) \leq c \to a$. De una manera similar se puede probar que $c \to (a \wedge b) \leq c \to b$. De este modo, $c \to (a \wedge b)$ es una cota inferior de $\{c \to a, c \to b\}$ en Q. Sea d una cota inferior de $\{c \to a, c \to b\}$ en Q. Luego $d \in Q$, $d \leq c \to a$ y $d \leq c \to b$, por lo que $c \cdot d \leq c \cdot (c \to a) \leq a$ y $c \cdot d \leq c \cdot (c \to b) \leq b$ con lo cual $c \cdot d \leq a$ y $c \cdot d \leq b$. Por lo tanto, $d \cdot c \leq a \wedge b$, que implica la desigualdad $d \leq c \to (a \wedge b)$. Por lo tanto, hemos probado 4).

Recíprocamente, supongamos que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo, $\cdot$ es monótona y que se satisfacen las identidades 1),..., 6) en A. Sean $Q = \{a \in A : 1 \to a = a\}$ y $a, b, c \in A$. Es consecuencia de 3) que

I) $1 \to a \leq a$

y se sigue de 4) que

II) si $a \leq b$ entonces $c \to a \leq c \to b$.

Supongamos que $q, r \in Q$. Por 4) tenemos que $q \wedge r \in Q$. Es consecuencia de 1) que $1 \to 1 = 1$, por lo que $1 \in Q$. Por 5) tenemos que $1 \to (q \cdot r) = q \cdot r$, por lo que $q \cdot r \in Q$. Por lo tanto, Q es una subálgebra de $(A, \wedge, \cdot, 1)$.

Sean $a, b \in A$. Por I) y 2) se tiene que

$$\begin{aligned} 1 \to (a \to b) &\leq a \to b \\ &\leq 1 \to (a \to b), \end{aligned}$$

Luego $1 \to (a \to b) = a \to b$. Por lo tanto, $a \to b \in Q$. Además se sigue de 3) que $a \to b \in \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$. Finalmente, sea $r \in Q$ y asumamos que $a \cdot r \leq b$. Es consecuencia de 6) y II) que

$$\begin{aligned} r &= 1 \to r \\ &\leq a \to (a \cdot r) \\ &\leq a \to b. \end{aligned}$$

por lo que $r \leq a \to b$. Así, $a \to b$ es el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$.

Por lo tanto, $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ es un srs-monoide. □

Notemos que la monotonía de $\cdot$ en la definición de semi-retículo monoidal puede reemplazarse por la desigualdad $(a \wedge b) \cdot c \leq a \cdot c$. El siguiente resultado se sigue del Teorema 4.1.3.

Corolario 4.1.4. *La clase de los srs-monoides es una variedad.*

Vamos a denotar como SR^{s} a la variedad de los srs-monoides.

En la prueba del siguiente lema usaremos el Teorema 4.1.3.

Lema 4.1.5. *Sea* $(A, \wedge, \cdot, \rightarrow, 1)$ *un srs-monoide.*

Luego se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$*:*

1) Si $a \leq b$ entonces $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ y $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$,

2) $(a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$,

3) $a \rightarrow a = 1$,

4) $a \leq b$ si y sólo si $a \rightarrow b = 1$,

5) $1 \rightarrow a \leq a$,

6) $1 \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$,

7) $1 \rightarrow a \leq b \rightarrow (a \cdot b)$,

8) $a \cdot b \leq a$ y $a \cdot b \leq b$,

9) $a \cdot b \leq a \wedge b$.

Demostración. Sean $a, b \in A$. Para probar 1), supongamos que $a \leq b$. En particular, $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$. Más aún, $a \cdot (b \rightarrow c) \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$, por lo que $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$. Luego hemos probado 1). La condición 2) se sigue de que $a \cdot (a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow c) \leq c$. Un cálculo directo prueba las condiciones 3), 4) y 5). La condición 6) es consecuencia de que para cada $q \in Q$ se cumple que $1 \rightarrow q = q$ y la condición 7) se sigue de que $(1 \rightarrow a) \cdot b \leq a \cdot b$. La condición 8) es consecuencia de la monotonía de $\cdot$ y el hecho de que $c \leq 1$ para cada $c \in A$. Finalmente, la condición 9) es una consecuencia directa de 8). □

4.2. Sobre los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales

El objetivo de esta sección es probar que la variedad SR^{s} coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales. Comenzaremos dando algunas definiciones y resultados preliminares, los cuales están inspirados en definiciones y resultados de [9] y [12].

Sea $(A, \wedge, \cdot, 1)$ un semi-retículo monoidal. Para cada $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ definimos

$$F \circ G = \{x \in A : f \cdot g \leq x \text{ para } f \in F \text{ y } g \in G\}.$$

Lema 4.2.1. *Sea* $(A, \wedge, \cdot, 1)$ *un semi-retículo monoidal. Luego se satisfacen las siguientes condiciones para cada* $F, G, H \in \mathrm{Fil}(A)$*:*

1) $F \circ G \in \mathrm{Fil}(A)$,

2) $F \circ G = G \circ F$,

3) $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$,

4) si $F \subseteq G$ entonces $F \circ H \subseteq G \circ H$.

Demostración. Sean $F, G, H \in \mathrm{Fil}(A)$. Para probar 1), notemos que resulta inmediato que $1 \in F \circ G$ y que $F \circ G$ es creciente. Ahora veremos que dados $F \circ G$ es cerrado por $x \wedge y$. Consideremos $x, y \in F \circ G$. Luego existen $f_1, f_2 \in F$ y $g_1, g_2 \in G$ tales que $x \geq f_1 \cdot g_1$ e $y \geq f_2 \cdot g_2$. Sean $f = f_1 \wedge f_2$ y $g = g_1 \wedge g_2$. Dado que $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ se tiene que $f \in F$ y $g \in G$. Teniendo en cuenta que $\cdot$ es monótona tenemos que $x \wedge y \geq (f_1 \cdot g_1) \wedge (f_2 \cdot g_2) \geq f \cdot g$, por lo que $x \wedge y \geq f \cdot g$. Por lo tanto, $x \wedge y \in F \circ G$. De este modo, $F \circ G \in \mathrm{Fil}(A)$, que es 1). La conmutatividad de $\cdot$ prueba 2). Ahora probaremos 3). Sea $x \in F \circ (G \circ H)$, por lo que existen $f \in F$ e $y \in G \circ H$ tales que $x \geq f \cdot y$. Luego, existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $y \geq g \cdot h$, con lo cual se tiene que $x \geq f \cdot y \geq f \cdot (g \cdot h)$. De este modo, $x \geq (f \cdot g) \cdot h$, por lo que $x \in (F \circ G) \circ H$. Así, $F \circ (G \circ H) \subseteq (F \circ G) \circ H$. La otra inclusión se puede probar de manera similar, por lo que hemos probado 3). Finalmente probaremos 4). Supongamos que $F \subseteq G$ y sea $x \in F \circ H$. Luego existen $f \in F$ y $h \in H$ tales que $x \geq f \cdot h$. Dado que $F \subseteq G$ se tiene que $f \in G$, por lo que $x \in G \circ H$. Por lo tanto, $F \circ H \subseteq G \circ H$. $\square$

Sea $(A, \wedge, \cdot, 1)$ un semi-retículo monoidal. Definimos la relación ternaria R_A en $\mathrm{Fil}(A)$ como

$$(F, G, H) \in R_A \text{ si y sólo si } F \circ G \subseteq H.$$

Si no existe ambigüedad notaremos R en lugar de R_A. Definimos

$$R^{-1}(H) = \{(F, G) \in \mathrm{Fil}(A) \times \mathrm{Fil}(A) : (F, G, H) \in R\}.$$

Finalmente, para cada $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$ definimos

$$\mathrm{U} * \mathrm{V} = \{H \in \mathrm{Fil}(A) : R^{-1}(H) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}) \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $\mathrm{U} * \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$. Para probarlo, consideremos $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $F \in \mathrm{U} * \mathrm{V}$ y $F \subseteq G$. Luego, existen $F_1, F_2 \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $F_1 \in \mathrm{U}, F_2 \in \mathrm{V}$ y $(F_1, F_2, F) \in R$. Dado que $F_1 \circ F_2 \subseteq F \subseteq G$ se tiene que $F_1 \circ F_2 \subseteq G$. De este modo, $G \in \mathrm{U} * \mathrm{V}$, que era nuestro objetivo. Por lo tanto, $*$ es una operación binaria en $\mathrm{Fil}(A)^+$. Más aún, esta operación es conmutativa.

Lema 4.2.2. *Sea $(A, \wedge, \cdot, 1)$ un semi-retículo monoidal. Luego $(\mathrm{Fil}(A)^+, \cap, \cup, \mathrm{Fil}(A))$ es un retículo distributivo completo donde $\mathrm{Fil}(A)$ es el último elemento, $(\mathrm{Fil}(A)^+, *, \mathrm{Fil}(A))$ es un monoide conmutativo y se satisface la identidad $(U \cup V) * W = (U * W) \cup (V * W)$. Más aún, para cada $\mathrm{U} \in \mathrm{Fil}(A)^+$ y $\{\mathrm{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Fil}(A)^+$ se cumple que*

$$\mathrm{U} * (\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathrm{U} * \mathrm{U}_i).$$

Demostración. Sea $(A, \wedge, \cdot, 1)$ un semi-retículo monoidal. El álgebra $(\mathrm{Fil}(A)^+, \cap, \cup, \mathrm{Fil}(A))$ es un retículo distributivo completo y donde $\mathrm{Fil}(A)$ es el último elemento. Más aún, $(\mathrm{Fil}(A)^+, *, \mathrm{Fil}(A))$ es un monoide conmutativo.

Sean $\mathrm{U} \in \mathrm{Fil}(A)^+$ y $\{\mathrm{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Fil}(A)^+$. Finalmente veremos que

$$\mathrm{U} * (\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathrm{U} * \mathrm{U}_i).$$

Sea $F \in \mathrm{Fil}(A)$. Luego $F \in \mathrm{U} * (\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i)$ si y sólo si

$$R^{-1}(F) \cap (\mathrm{U} \times \bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i) \neq \emptyset.$$

Sin embargo,

$$\mathrm{U} \times \left(\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\mathrm{U} \times \mathrm{U}_i)$$

y

$$R^{-1}(F) \cap (\bigcup_{i\in I} (\mathrm{U} \times \mathrm{U}_i)) = \bigcup_{i\in I} (R^{-1}(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{U}_i)).$$

Luego, $F \in \mathrm{U} * (\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i)$ si y sólo si $\bigcup_{i\in I} (R^{-1}(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{U}_i)) \neq \emptyset$, que equivale a afirmar que $F \in \bigcup_{i\in I} (\mathrm{U} * \mathrm{U}_i)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathrm{U} * (\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i) = \bigcup_{i\in I} (\mathrm{U} * \mathrm{U}_i).$$

□

Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Definimos $\varphi_A : A \to \mathrm{Fil}(A)^+$ como

$$\varphi_A(a) := \{F \in \mathrm{Fil}(A) : a \in F\}.$$

Si no hay ambigüedad escribiremos φ en lugar de φ_A.

Lema 4.2.3. *Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Luego φ es una función inyectiva. Más aún, para cada $a, b \in A$, $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$ y $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.*

Demostración. La inyectividad de φ resulta inmediata. En efecto, sean $a, b \in A$ tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Dado que $[a) \in \varphi(a)$ y $[b) \in \varphi(b)$ se tiene que $[a) \in \varphi(b)$ y $[b) \in \varphi(a)$, i.e., $a \leq b$ y $b \leq a$, por lo que $a = b$. Por lo tanto, φ es inyectiva.

Sean $a, b \in A$. Resulta inmediato que $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$. Finalmente veremos que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Sea $F \in \varphi(a \cdot b)$, por lo que $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y $a \cdot b \in F$. Notemos que $F \in \varphi(a) * \varphi(b)$ si y sólo si $R^{-1}(F) \cap (\varphi(a) \times \varphi(b)) \neq \emptyset$. En otras palabras, $F \in \varphi(a) * \varphi(b)$ si y sólo si existen $G \in \varphi(a)$ y $H \in \varphi(b)$ tales que $G \circ H \subseteq F$. Definimos $G = [a)$ y $H = [b)$. Resulta inmediato que $G \in \varphi(a)$ y $H \in \varphi(b)$. Además, $G \circ H \subseteq F$. En efecto, sea $x \in G \circ H$. En consecuencia, existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $x \geq g \cdot h$. Dado que $g \geq a$ y $h \geq b$ se tiene que $x \geq g \cdot h \geq a \cdot b$, por lo que $x \geq a \cdot b$. Sin embargo $a \cdot b \in F$, por lo que $x \in F$. Por ende, $G \circ H \subseteq F$. Hemos probado que $F \in \varphi(a) * \varphi(b)$. Recíprocamente, sea $F \in \varphi(a) * \varphi(b)$. De este modo, $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y existen $G, H \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $a \in G$, $b \in H$ y $G \circ H \subseteq F$. Dado que $a \cdot b \geq a \cdot b$ se tiene que $a \cdot b \in G \circ H$, por lo que $a \cdot b \in F$, con lo cual $F \in \varphi(a \cdot b)$. Por lo tanto, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. □

Definición 4.2.4. Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Definimos Q_A como el subretículo completo de $\mathrm{Fil}(A)^+$ generado por $\varphi(\Box(A))$, donde $\Box(A) := \{a \in A : \Box(a) = a\}$ y recordemos que $\Box(a) := 1 \to a$ para $a \in A$.
En particular, $(Q_A, \cap, \cup, \mathrm{Fil}(A))$ es una subálgebra de $\mathrm{Fil}(A)^+$. Además notemos que

$$U \in Q_A \text{ si y sólo si } U = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij}) \text{ para } \{a_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J} \subseteq \varphi(\Box(A)).$$

Nuestro próximo objetivo es mostrar que Q_A es cerrado por $*$. Comenzaremos probando el siguiente lema técnico.

Lema 4.2.5. *Sean $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$, $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq A$ y $\{b_l\}_{l\in L} \subseteq A$. Para cada $n \geq 1$ definimos*

$$C_n = \bigcap_{\{j_1,\dots,j_n\}\times\{l_1,\dots,l_n\}\subseteq J\times L} \varphi((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n})).$$

Luego

$$\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l) = \bigcap_{n\geq 1} C_n.$$

Demostración. Sea $F \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l)$. Luego $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y

$$R^{-1}(F) \cap (\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) \times \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l)) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto existen $G, H \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq G$, $\{b_l\}_{l\in L} \subseteq H$ y $G \circ H \subseteq F$. Sea $n \geq 1$. Consideremos $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq J$ y $\{l_1,\dots,l_n\} \subseteq L$. En particular, $a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n} \in G$ y $b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n} \in H$. Dado que $G \circ H \subseteq F$ se tiene que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n}) \in F$, i.e., $F \in \varphi((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n}))$. De este modo, hemos probado que $F \in C_n$. Por lo tanto,

$$\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} C_n.$$

Recíprocamente, sea $F \in \bigcap_{n\geq 1} C_n$. Luego $F \in C_n$ para cada $n \geq 1$, por lo que $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y para cada $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq J$ y $\{l_1,\dots,l_n\} \subseteq L$ se verifica que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n}) \in F$. Definimos como G al filtro generado por $\{a_j\}_{i\in J}$ y como H al filtro generado por $\{b_l\}_{l\in L}$. Resulta inmediato que $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq G$ y $\{b_l\}_{l\in L} \subseteq H$, i.e., $G \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j)$ y $H \in \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l)$. Ahora veremos que $G \circ H \subseteq F$. Sea $x \in G \circ H$, por lo que existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $x \geq g \cdot h$. De este modo, existen $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq J$ y $\{l_1,\dots,l_m\} \subseteq L$ tales que $g \geq a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}$ y $h \geq b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_m}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n = m$. Luego $x \geq (a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n})$. Sin embargo, se sigue de la hipótesis que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (b_{l_1} \wedge \cdots \wedge b_{l_n}) \in F$, por lo que $x \in F$. Luego, $G \circ H \subseteq F$. De esta manera hemos probado que

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n \subseteq \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l).$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_l) = \bigcap_{n\geq 1} C_n.$$

□

Lema 4.2.6. *Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Luego Q_A es cerrada por $*$.*

Demostración. Sean $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in Q_A$. Luego existen $\{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J} \subseteq \Box(A)$ y $\{b_{kl}\}_{k\in K, l\in L} \subseteq \Box(A)$ tales que

$$\mathrm{U} = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij}),$$

$$\mathrm{V} = \bigcup_{k\in K} \bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl}).$$

Por lo tanto, se sigue del Lema 4.2.2 que

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} * \mathrm{V} &= (\textstyle\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij})) * (\bigcup_{k\in K} \bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl})) \\
&= \textstyle\bigcup_{k\in K}((\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij})) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl})) \\
&= \textstyle\bigcup_{k\in K} \bigcup_{i\in I}((\bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij})) * (\bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl}))) \\
&= \textstyle\bigcup_{i\in I, k\in K}(\bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij}) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl})).
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\mathrm{U} * \mathrm{V} = \bigcup_{i\in I, k\in K} (\bigcap_{j\in J} \varphi(a_{ij}) * \bigcap_{l\in L} \varphi(b_{kl})).$$

Para cada $n \geq 1$, $i \in I$ y $k \in K$ definimos

$$C_n^{ik} = \bigcap_{\{j_1,\ldots,j_n\}\times\{l_1,\ldots,l_n\}\subseteq J\times L} \varphi((a_{ij_1} \wedge \cdots \wedge a_{ij_n}) \cdot (b_{kl_1} \wedge \cdots \wedge b_{kl_n})).$$

De este modo, se sigue del Lema 4.2.5 que

$$\mathrm{U} * \mathrm{V} = \bigcup_{i\in I, k\in K} \bigcap_{n\geq 1} C_n^{ik},$$

Notemos que dado que $\Box(A)$ es cerrada por $\wedge$ y $\cdot$ entonces para cada $n \geq 1$, $i \in I$ y $k \in K$ tenemos que C_n^{ik} es intersección de elementos de la forma $\varphi(a)$ para $a \in \Box(A)$. De este modo, Q_A es unión de intersecciones de elementos de la forma $\varphi(a)$ para $a \in \Box(A)$. Por lo tanto, Q_A es cerrada por $*$. $\Box$

Observación 4.2.7. *Sea* $A \in \mathsf{SR}^\mathsf{s}$. *Para cada* $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$ *existe el máximo del conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{W} \in Q_A : \mathrm{W} * \mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}\}.$$

En efecto, dado que $\mathcal{B} \subseteq Q_A$ *se tiene por la definición de* Q_A *que existe el supremo de* $\mathcal{B}$, *el cual denotaremos por* α, *i.e.,* $\alpha = \bigcup_{\mathrm{W}\in\mathcal{B}} \mathrm{W}$. *De este modo,* $\alpha \in Q_A$ *y es consecuencia del Lema 4.2.2 que* $\alpha * \mathrm{U} = \bigcup_{\mathrm{W}\in\mathcal{B}}(\mathrm{W} * \mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. *Luego,* α *es el máximo de* $\mathcal{B}$. *A dicho máximo lo denotaremos por* $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$. *Es decir,*

$$\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \{\mathrm{W} \in Q_A : \mathrm{W} * \mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}\}.$$

Por lo tanto, $(\mathrm{Fil}(A)^+, \cap, \cup, *, \Rightarrow, \emptyset, \mathrm{Fil}(A))$ *es un srl-monoide integral.*

El siguiente resultado se sigue del Lema 4.2.2, Lema 4.2.6 y Observación 4.2.7.

Proposición 4.2.8. *Sea* $A \in \mathsf{SR}^\mathsf{s}$. *Luego* $(\mathrm{Fil}(A)^+, Q_A)$ *es un sr-retículo.*

Sean $A \in \mathsf{SR}^\mathsf{s}, F \in \mathrm{Fil}(A)$ y $a \in A$. Definimos

$$G_F(a) = \{c \in A : c \geq x \cdot a \text{ para algún } x \in F \cap \Box(A)\}.$$

Nuestro próximo objetivo es mostrar que

$$\varphi(a \to b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b).$$

Para probarlo comenzaremos dando algunos lemas preliminares.

Lema 4.2.9. *Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $F \in \mathrm{Fil}(A)$. Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $[F \cap \Box(A))$ es el filtro generado por $F \cap \Box(A)$.
2) Para cada $a \in A$, $G_F(a) = [F \cap \Box(A)) \circ [a)$. En particular, $G_F(a) \in \mathrm{Fil}(A)$.
3) Para cada $a, b \in A$ tales que $a \to b \notin F$ se cumple que $b \notin G_F(a)$.

Demostración. Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $F \in \mathrm{Fil}(A)$.

El item 1) se sigue del hecho de que $F \cap \Box(A)$ es cerrado por ínfimos finitos. Para probar 2), sea $a \in A$. La inclusión $G_F(a) \subseteq [F \cap \Box(A)) \circ [a)$ resulta inmediata. Recíprocamente, sea $c \in [F \cap \Box(A)) \circ [a)$. Luego se sigue de 1) y de la monotonía de $\cdot$ que existe $x \in F \cap \Box(A)$ tal que $c \geq x \cdot a$, por lo que $c \in G_F(a)$. De este modo, $G_F(a) = [F \cap \Box(A)) \circ [a)$. Finalmente probaremos 3). Sean $a, b \in A$ tales que $a \to b \notin F$. Supongamos que $b \in G_F(a)$. Por lo tanto, existe $x \in F \cap \Box(A)$ tal que $b \geq x \cdot a$. De este modo, se sigue de 1) del Lema 4.1.5 y de 6) del Teorema 4.1.3 que

$$
\begin{array}{rcl}
a \to b & \geq & a \to (x \cdot a) \\
& = & a \to ((1 \to x) \cdot a) \\
& \geq & 1 \to x \\
& = & x.
\end{array}
$$

En consecuencia, $x \leq a \to b$. Dado que $x \in F$ se tiene que $a \to b \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $b \notin G_F(a)$. $\Box$

Lema 4.2.10. *Sean $A \in \mathsf{SR^s}$, $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ y $\mathrm{W} \in Q_A$ con $F \in \mathrm{W}$ y $F \cap \Box(A) \subseteq G$. Luego $G \in \mathrm{W}$.*

Demostración. Sean $A \in \mathsf{SR^s}$, $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ y $\mathrm{W} \in Q_A$ con $F \in \mathrm{W}$ y $F \cap \Box(A) \subseteq G$. Dado que $\mathrm{W} \in Q_A$ se tiene que existe $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J} \subseteq \Box(A)$ tal que

$$\mathrm{W} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \varphi(a_{ij}).$$

Teniendo en cuenta que $F \in \mathrm{W}$ y $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J} \subseteq \Box(A)$ tenemos que existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$, $a_{i_0 j} \in F \cap \Box(A)$. Dado que $F \cap \Box(A) \subseteq G$ concluimos que $a_{i_0 j} \in G$ para cada $j \in J$. Por lo tanto, $G \in \mathrm{W}$. $\Box$

Proposición 4.2.11. *Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $a, b \in A$. Luego $\varphi(a \to b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$.*

Demostración. Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $a, b \in A$. Definimos el conjunto

$$E_{ab} = \{\mathrm{W} \in Q_A : W * \varphi(a) \subseteq \varphi(b)\}.$$

Dado que $a \cdot (a \to b) \leq b$ se tiene que $\varphi(a \to b) * \varphi(a) = \varphi(a \cdot (a \to b)) \subseteq \varphi(b)$, i.e., $\varphi(a \to b) * \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, por lo que $\varphi(a \to b) \in E_{ab}$. Ahora veremos que $\varphi(a \to b)$ es el máximo de E_{ab}. Para probarlo, sea $\mathrm{W} \in E_{ab}$, i.e., $\mathrm{W} \in Q_A$ y $\mathrm{W} * \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Mostraremos que $\mathrm{W} \subseteq \varphi(a \to b)$. Consideremos $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y supongamos que $F \in \mathrm{W}$ y $F \notin \varphi(a \to b)$. En particular, $a \to b \notin F$. Luego se sigue del Lema 4.2.9 que $G_F(a) = [F \cap \Box(A)) \circ [a)$ y $b \notin G_F(a)$. Más aún, dado que $F \cap \Box(A) \subseteq [F \cap \Box(A))$ se tiene que por el Lema 4.2.10 que $[F \cap \Box(A)) \in \mathrm{W}$. Por ende, $([F \cap \Box(A)), [a)) \in R^{-1}(G_F) \cap (\mathrm{W} \times \varphi(a))$ lo que implica que $R^{-1}(G_F(a)) \cap (\mathrm{W} \times \varphi(a)) \neq \emptyset$, i.e., $G_F(a) \in \mathrm{W} * \varphi(a)$. Sin embargo $\mathrm{W} * \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, por lo que $b \in G_F(a)$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\mathrm{W} \subseteq \varphi(a \to b)$. Por lo tanto, $\varphi(a \to b)$ es el máximo de E_{ab}. $\Box$

Sea K la clase de los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-reductos de los srl-monoides integrales. Dado que el $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-reducto de cualquier srl-monoide integral es un miembro de $\mathsf{SR^s}$ tenemos que $\mathrm{K} \subseteq \mathsf{SR^s}$, con lo cual $\mathbb{IS}(\mathrm{K}) \subseteq \mathsf{SR^s}$. Recíprocamente, por el Lema 4.2.3, la Observación 4.2.7 y la Proposición 4.2.11 se tiene que $\mathsf{SR^s} \subseteq \mathbb{IS}(\mathrm{K})$.

Por lo tanto, tenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.12. *La variedad* $\mathsf{SR^s}$ *es la clase de los* $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$*-subreductos de los srl-monoides integrales.*

Un cálculo directo basado en pruebas similares a las dadas en el Capítulo 2 para el estudio de congruencias permite mostrar que para cada $A \in \mathsf{SR^s}$ se tiene que $\mathrm{Con}(A)$ y $\Box\mathrm{Fil}(A)$ son retículos isomorfos.

4.3. Consideraciones finales

Dada $A \in \mathsf{SR^s}$, en esta sección estudiaremos la relación existente entre la operación binaria $\Rightarrow$ definida sobre $\mathrm{Fil}(A)^+$ y otra relación binaria sobre $\mathrm{Fil}(A)^+$ cuya definición está inspirada por un teorema de representación para álgebras con implicación y fusión [12].

Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$. Definimos

$$F \to G = \{x \in A : f \leq g \to x \text{ para } f \in F \text{ y } g \in G\}.$$

Lema 4.3.1. *Sean* $A \in \mathsf{SR^s}$ *y* $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$*. Luego* $F \to G \in \mathrm{Fil}(A)$*.*

Demostración. Dado que $1 \to 1 = 1$ se tiene que $1 \in F \to G$. Para probar que $F \to G$ es creciente, sean $x, y \in A$ tales que $x \in F \to G$ y $x \leq y$. Luego existen $f \in F$ y $g \in G$ tales que $f \leq g \to x$. Sin embargo $x \leq y$, por lo que $g \to x \leq g \to y$. De este modo, $f \leq g \to y$. Por ende, $F \to G$ es creciente. Finalmente mostraremos que $F \to G$ es cerrado por ínfimos. Sean $x, y \in F \to G$. Luego existen $f_1, f_2 \in F$ y $g_1, g_2 \in G$ tales que $f_1 \leq g_1 \to x$ y $f_2 \leq g_2 \to y$. Sea $f = f_1 \wedge f_2 \in F$ y $g = g_1 \wedge g_2 \in G$. Luego, $f \leq g \to x$ y $f \leq g \to y$. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} f & \leq & (g \to x) \wedge (g \to y) \\ & = & g \to (x \wedge y). \end{array}$$

Teniendo en cuenta que $f \leq g \to (x \wedge y)$ tenemos que $x \wedge y \in F \to G$. Por lo tanto, $F \to G \in \mathrm{Fil}(A)$. $\Box$

Sean $A \in \mathsf{SR^s}$ y $F, G, H \in \mathrm{Fil}(A)$. Definimos la relación ternaria T_A sobre $\mathrm{Fil}(A)$ dada por

$$(F, G, H) \in T_A \text{ si y sólo si } F \to G \subseteq H.$$

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos T en lugar de T_A. Definimos

$$T(F) = \{(G, H) \in \mathrm{Fil}(A) \times \mathrm{Fil}(A) : (F, G, H) \in T\}.$$

Finalmente, para cada $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$ definimos

$$\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V} = \{F \in \mathrm{Fil}(A) : T(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}^c) = \emptyset\}.$$

Notemos que $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$. Para probarlo, sean $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $F \subseteq G$ y $F \in \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$. En particular, $T(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}^c) = \emptyset$. Supongamos que $G \notin \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$, por lo que existen $G_1, G_2 \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $G \to G_1 \subseteq G_2$, $G_1 \in \mathrm{U}$ y $G_2 \in \mathrm{V}^c$. Dado que $F \subseteq G$ se tiene que $F \to G_1 \subseteq G \to G_1 \subseteq G_2$, por lo cual $F \to G_1 \subseteq G_2$. Esto implica que $F \notin \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$.

El objetivo de esta sección es mostrar que dados $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$ y $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in Q_A$, se tiene que

$$\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}.$$

Lema 4.3.2. *Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Consideremos $F, G \in \mathrm{Fil}(A)$ y $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$. Si $F \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$ y $G \in \mathrm{U}$ entonces $F \to G \in \mathrm{U} * (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})$.*

Demostración. Sean $F \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$ y $G \in \mathrm{U}$. Notemos que $F \to G \in \mathrm{U} * (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})$ si y sólo si $R^{-1}(F \to G) \cap (\mathrm{U} \times (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})) \neq \emptyset$. Sea H el filtro generado por $F \cap \Box(A)$. Es consecuencia del Lema 4.2.9 que $H = [F \cap \Box(A))$. A continuación probaremos que $(G, H) \in R^{-1}(F \to G) \cap (\mathrm{U} \times (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}))$.

Primero mostraremos que $(G, H) \in R^{-1}(F \to G)$, i.e., $G \circ H \subseteq F \to G$. Sea $x \in G \circ H$, por lo que existen $g \in G$ y $h \in H$ tales que $x \geq g \cdot h$. Dado que $h \in H$ se tiene que $h \geq f$ para algún $f \in F \cap \Box(A)$. De este modo, $x \geq g \cdot h \geq g \cdot f$, con lo cual $x \geq g \cdot f$. Teniendo en cuenta que $1 \to f = f$ y el Lema 4.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} f &= 1 \to f \\ &\leq g \to (g \cdot f) \\ &\leq g \to x. \end{aligned}$$

La desigualdad $f \leq g \to x$ implica que $x \in F \to G$.
Luego $G \circ F \subseteq F \to G$.

A continuación mostraremos que $(G, H) \in \mathrm{U} \times (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})$. Por hipótesis tenemos que $G \in \mathrm{U}$, por lo que basta mostrar que $H \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$. Dado que $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} \in Q_A$ se tiene que existe una familia $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J} \subseteq \Box(A)$ tal que

$$\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \varphi(a_{ij}).$$

Notemos que por hipótesis $F \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$, con lo cual existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$ se cumple que $a_{i_0 j} \in F$. Luego $\{a_{i_0 j}\}_{j \in J} \subseteq F \cap \Box(A) \subseteq H$, por lo que $\{a_{i_0 j}\}_{j \in J} \subseteq H$, lo que implica que $H \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$.

Por lo tanto, hemos probado que $F \to G \in \mathrm{U} * (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})$. ☐

Proposición 4.3.3. *Sean $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$ y $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$. Luego $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$.*

Demostración. Sea $F \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathit{max}\{\mathrm{W} \in Q_A : \mathrm{W} * \mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}\}$. Supongamos que $F \notin \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$, i.e., $T(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}^c) \neq \emptyset$. De este modo, existen $G, H \in \mathrm{Fil}(A)$ tales que $(G, H) \in T(F)$, $G \in \mathrm{U}$ y $H \in \mathrm{V}^c$. Dado que $F \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$ y $G \in \mathrm{U}$ se tiene por el Lema 4.3.2 que $F \to G \in \mathrm{U} * (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V})$. Sin embargo $\mathrm{U} * (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V}$, por lo que $F \to G \in \mathrm{V}$. Teniendo en cuenta que $F \to G \subseteq H$ tenemos que $H \in \mathrm{V}$, lo cual es una contradicción. Luego, $F \in \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$. Por lo tanto, $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$. ☐

En cada srl-monoide se satisfacen las ecuaciones

$$(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$$

y
$$c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b).$$

El siguiente lema generaliza el resultado recién mencionado en el marco de los srs-monoides de la forma $(\mathrm{Fil}(A)^{+}, \cap, \cup, *, \Rightarrow, \mathrm{Fil}(A))$ para $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$.

Lema 4.3.4. *Sean* $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$, $\mathrm{U} \in \mathrm{Fil}(A)^{+}$ *y* $\{\mathrm{U}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Fil}(A)^{+}$. *Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $(\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i) \Rightarrow \mathrm{U} = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U})$.
2) $\mathrm{U} \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} \mathrm{U}_i) = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_i)$.

Demostración. Veremos que se cumple 1). Notemos que por el Lema 4.2.2 se tiene que

$$\begin{aligned}(\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i) \Rightarrow \mathrm{U} &= \mathit{max}\{W \in Q_A : W * (\bigcup_{i\in I} \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U}\}\\ &= \mathit{max}\{W \in Q_A : \bigcup_{i\in I}(W * \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U}\}.\end{aligned}$$

Definimos
$$E = \{W \in Q_A : \bigcup_{i\in I}(W * \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U}\}$$

y
$$Z = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U}).$$

Dado que $\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U} \in Q_A$ para todo $i \in I$, tenemos que Z es un elemento de Q_A. Ahora probaremos que
$$\bigcup_{i\in I}(Z * \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U}.$$

En efecto, sea $j \in I$. Luego

$$Z = \bigcap_{i\in I}(\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}_j \Rightarrow \mathrm{U}.$$

Usando la monotonía y conmutatividad de $*$, así como también la Observación 4.2.7, se tiene que
$$Z * \mathrm{U}_j \subseteq \mathrm{U}_j * (\mathrm{U}_j \Rightarrow \mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}.$$

De este modo,
$$\bigcup_{i\in I}(Z * \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U},$$

con lo cual $Z \in E$.
Ahora veremos que Z es el máximo de E. Sea $W \in Q_A$ tal que

$$\bigcup_{i\in I}(W * \mathrm{U}_i) \subseteq \mathrm{U}.$$

Consideremos $j \in I$. En particular, vale que

$$W * \mathrm{U}_j \subseteq \mathrm{U}.$$

Luego, por la Observación 4.2.7 y el hecho de que $W \in Q_A$ se tiene que

$$W \subseteq \mathrm{U}_j \Rightarrow \mathrm{U}.$$

De este modo,

$$W \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U}) = Z.$$

Por ende, Z es el máximo de E. En otras palabras,

$$(\bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i) \Rightarrow \mathrm{U} = \bigcap_{i \in I} (\mathrm{U}_i \Rightarrow \mathrm{U}).$$

Ahora veamos que se satisface 2). Por definición de $\Rightarrow$,

$$\mathrm{U} \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i) = \mathit{max}\{W \in Q_A : W * \mathrm{U} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i\}.$$

Definimos

$$\hat{E} = \{W \in Q_A : W * \mathrm{U} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i\}$$

y

$$Z = \bigcap_{i \in I} (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_i).$$

Sea $j \in I$. Dado que $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_j \in Q_A$,

$$\bigcap_{i \in I} (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_i)$$

es un elemento de Q_A. Además, usando la monotonía de $*$ y la Observación 4.2.7 se tiene que

$$Z * \mathrm{U} \subseteq (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_j) * \mathrm{U} \subseteq \mathrm{U}_j.$$

Luego,

$$Z * \mathrm{U} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i.$$

Por ende, $Z \in \hat{E}$.
Finalmente probaremos que Z es el máximo de $\hat{E}$. Sea $W \in Q_A$ tal que $W * \mathrm{U} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i$. Consideremos $j \in I$. En particular,

$$W * \mathrm{U} \subseteq \mathrm{U}_j.$$

Usando que $W \in Q_A$ y la Observación 4.2.7,

$$W \subseteq \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_j.$$

Luego,

$$W \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_i) = Z.$$

Por lo tanto, Z es el máximo de $\hat{E}$, i.e.,

$$\mathrm{U} \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}_i)$$

$\square$

Lema 4.3.5. *Sea $A \in \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. Consideremos $\{a_j\}_{j\in J}$ y $\{b_l\}_{l\in L}$ subconjuntos de $\Box(A)$. Luego*

$$\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) \Rightarrow \bigcup_{l\in L} \varphi(b_l) = \bigcup_{\{j_1,\ldots,j_n\}\times\{l_1\}\subseteq J\times L} \varphi((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1}).$$

Demostración. Sean

$$C = \{\mathrm{W} \in Q_A : \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * W \subseteq \bigcup_{l_1\in L} \varphi(b_{l_1})\}.$$

y

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\{j_1,\ldots,j_n\}\times\{l_1\}\subseteq J\times L} \varphi((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1}).$$

Es consecuencia de la definición de $\Rightarrow$ que $\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) \Rightarrow \bigcup_{l\in L} \varphi(b_l)$ es el máximo de C. Primero probaremos que $\mathrm{M} \in C$. Dado que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1} \in \Box(A)$ se tiene que $\mathrm{M} \in Q_A$. Ahora veremos que $\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * M \subseteq \bigcup_{l\in L} \varphi(b_l)$. Sea $F \in \mathrm{Fil}(A)$ tal que $F \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \mathrm{M}$. De este modo, existen filtros de retículos G y H tales que $G \circ H \subseteq F$, $G \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j)$ y $H \in \mathrm{M}$. Luego, $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq G$ y existen $j_1,\ldots,j_n \in J$ y $l_1 \in L$ tales que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1} \in H$. Teniendo en cuenta que $\{a_j\}_{j\in J} \subseteq G$ tenemos que $a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n} \in G$. Además, dado que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1} \in H$ se tiene que

$$(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot ((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1}) \in G \circ H.$$

Sin embargo $G \circ H \subseteq F$, por lo que $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot ((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1}) \in F$. Más aún, $(a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot ((a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \to b_{l_1}) \leq b_{l_1}$. Luego, $b_{l_1} \in F$. En consecuencia, $F \in \bigcup_{l\in L} \varphi(b_l)$. De esta manera hemos probado que $\mathrm{M} \in C$.

Finalmente veremos que M es el máximo de C. Sea $\mathrm{W} \in C$, i.e., $\mathrm{W} \in Q_A$ y $\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \mathrm{W} \subseteq \bigcup_{l_1\in L} \varphi(b_{l_1})$. Dado que $\mathrm{W} \in Q_A$ existe $\{c_{pq}\}_{p\in P, q\in Q} \subseteq \Box(A)$ tal que

$$\mathrm{W} = \bigcup_{p\in P} \bigcap_{q\in Q} \varphi(c_{pq}).$$

Para probar que $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{M}$, sea $F \in \mathrm{Fil}(A)$ tal que $F \in \mathrm{W}$. De este modo, existe $p_0 \in P$ tal que $c_{p_0q} \in F$ para cada $q \in Q$. Definimos F_2 como el filtro generado por $\{a_j\}_{j\in J}$ y F_3 como el filtro generado por $\{c_{p_0q}\}_{q\in Q}$. Resulta inmediato que $F_2 \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j)$ y $F_3 \in W$. También definimos $F_1 = F_2 \circ F_3$. En particular hemos probado que $F_1 \in \bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \mathrm{W}$ ya que $(F_2, F_3) \in R^{-1}(F_1) \cap ((\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j)) \times \mathrm{W})$ lo que implica que $R^{-1}(F_1) \cap ((\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j)) \times \mathrm{W}) \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta que

$$\bigcap_{j\in J} \varphi(a_j) * \mathrm{W} \subseteq \bigcup_{l_1\in L} \varphi(b_{l_1})$$

tenemos que existe $l_1 \in L$ tal que $b_{l_1} \in F_1$. De este modo, existen $f_2 \in F_2$ y $f_3 \in F_3$ tales que $b_{l_1} \geq f_1 \cdot f_2$. Dado que $f_2 \in F_2$ se tiene que existen $j_1,\ldots,j_n \in J$ tales que $f_2 \geq a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}$ y como $f_3 \in F_3$ existen $q_1,\ldots,q_m \in Q$ tales que $f_3 \geq c_{p_0q_1} \wedge \cdots \wedge c_{p_0q_m}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n = m$. Luego,

$$b_{l_1} \geq (a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}) \cdot (c_{p_0q_1} \wedge \cdots \wedge c_{p_0q_n}).$$

Sean $a = a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}$ y $c = c_{p_0 q_1} \wedge \cdots \wedge c_{p_0 q_n}$. Notemos que dado que $c \in \Box(A)$ se tiene que $1 \to c = c$. De este modo, teniendo en cuenta que $b_{l_1} \geq a \cdot c$ y el Lema 4.1.5 tenemos que

$$\begin{array}{rcl} c & = & 1 \to c \\ & \leq & a \to (a \cdot c) \\ & \leq & a \to b_{l_1}. \end{array}$$

Usando que $c_{p_0 q} \in F$ para cada $q \in Q$ deducimos que $c \in F$, por lo que $a \to b_{l_1} \in F$, lo que implica que $F \in \mathrm{M}$. Por lo tanto, $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{M}$. □

Proposición 4.3.6. *Sean* $A \in \mathsf{SR^s}$ *y* $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in Q_A$. *Luego* $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$.

Demostración. Sean $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in Q_A$. Luego existen conjuntos $\{a_{ij}\}_{i\in I, j \in J} \subseteq \Box(A)$ y $\{b_{kl}\}_{k \in K, l \in L} \subseteq \Box(A)$ tales que

$$\mathrm{U} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \varphi(a_{ij}),$$

$$\mathrm{V} = \bigcap_{k \in K} \bigcup_{l \in L} \varphi(b_{kl}).$$

Es consecuencia del Lema 4.3.4 que

$$\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \bigcap_{i \in I, k \in K} ((\bigcap_{j \in J} \varphi(a_{ij})) \Rightarrow (\bigcup_{l \in L} \varphi(b_{kl}))). \tag{4.1}$$

Para probar que $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$, sea $F \in \mathrm{Fil}(A)$ y supongamos que $F \notin \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V}$. Se sigue de (4.1) que existen $i_0 \in I$ y $k_0 \in K$ tales que $F \notin (\bigcap_{j \in J} \varphi(a_{i_0 j})) \Rightarrow (\bigcup_{l \in L} \varphi(b_{k_0 l}))$. Luego, por el Lema 4.3.5 se tiene que para cada $j_1, \ldots, j_n \in J$ y $l \in L$ se cumple que $(a_{i_0 j_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_0 j_n}) \to b_{k_0 l} \notin F$.

Definimos G como el filtro generado por $\{a_{i_0 j}\}_{j \in J}$ y $H = F \to G$. En particular, $G \in \mathrm{U}$ y $F \to G \subseteq H$. Ahora veremos que $H \notin \mathrm{V}$. Para probarlo notemos que basta mostrar que para cada $l \in L$, $b_{k_0 l} \notin H$. Sea $l \in L$ y supongamos que $b_{k_0 l} \in H$. De este modo, existen $f \in F$ y $g \in G$ tales que $f \leq g \to b_{k_0 l}$. Más aún, existen $j_1, \ldots, j_n \in J$ tales que $g \geq a_{i_0 j_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_0 j_n}$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} f & \leq & g \to b_{k_0 l} \\ & \leq & (a_{i_0 j_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_0 j_n}) \to b_{k_0 l}. \end{array}$$

De este modo, $f \leq (a_{i_0 j_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_0 j_n}) \to b_{k_0 l}$. Dado que $f \in F$, se tiene que $(a_{i_0 j_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_0 j_n}) \to b_{k_0 l} \in F$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $b_{k_0 l} \notin H$ para cada $l \in L$. Luego $H \notin \mathrm{V}$. De esta manera hemos probado que $(G, H) \in T(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}^c)$, por lo que $T(F) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}^c) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F \notin \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$. □

El siguiente teorema se sigue de la Proposición 4.3.3 y de la Proposición 4.3.6.

Teorema 4.3.7. *Sea* $A \in \mathsf{SR^s}$ *y* $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in Q_A$. *Luego* $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$.

Sería interesante tener una respuesta a la siguiente pregunta:

¿Para cada $A \in \mathsf{SR^s}$ y $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Fil}(A)^+$, se cumple que $\mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{V}$?

Capítulo 5

Algunos aspectos lógicos

El objetivo de este capítulo es presentar una lógica proposicional algebrizable cuya semántica algebraica coincida con la variedad de los srs-monoides. También estudiaremos una expansión de dicha lógica cuya semántica algebraica coincide con la variedad de los srl-monoides integrales. Las ideas que usaremos en este capítulo están motivadas por algunos de los resultados dados en [9], en donde se presenta una lógica proposicional algebrizable cuya semántica algebraica es la variedad de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}-$subreductos de los retículos subresiduados y una lógica proposicional algebrizable cuyas semántica algebraica es la variedad de los retículos subresiduados.

5.1. Preliminares

En esta tesis consideraremos sólo lógicas proposicionales estilo Hilbert. Indicaremos con las letras x, y, z a las variables, con las letras griegas $\alpha, \beta, \delta, \eta, \gamma$ a las fórmulas y Γ al conjunto de fórmulas. Lo mencionado en esta sección se encuentra desarrollado en detalle en el Capítulo 2 de [26].

Dados un lenguaje L y un conjunto infinito numerable V tal que $V \cap \mathrm{L} = \emptyset$ y ninguno de los objetos en $V \cup \mathrm{L}$ es una secuencia finita de otros objetos en el mismo conjunto, llamamos a los miembros de V variables proposicionales. Considerando el conjunto de secuencias finitas de elementos de $V \cup \mathrm{L}$, damos la siguiente definición recursiva:

Definición 5.1.1. Definimos el conjunto de fórmulas, al que indicamos con Fm, como el conjunto que verifica las siguientes condiciones:

(a) $V \subseteq Fm$,

(b) $L_0 \subseteq Fm$, con $L_0 = \{\lambda \in \mathrm{L} : aridad(\lambda) = 0\}$,

(c) $\lambda\alpha_1...\alpha_n \in Fm$, para cada $\lambda \in \mathrm{L}$ y $\alpha_i \in Fm$, con $aridad(\lambda) = n \geq 1$.

(d) Fm está totalmente determinada por (a), (b) y (c).

A continuación daremos la definición de consecuencia sintáctica.

Definición 5.1.2. Sean $\mathcal{L}$ una lógica en el lenguaje L y Γ un subconjunto de fórmulas. Una sucesión de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es una *deducción* de Γ si para cada i se cumple que α_i es un axioma, $\alpha_i \in \Gamma$ o α_i se deduce de miembros anteriores de la sucesión aplicando las reglas de deducción. El último miembro α de una sucesión que es una deducción de Γ se llama *consecuencia sintáctica* de Γ. La notación que usaremos para indicar que α es consecuencia sintáctica de Γ es $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ (si no hay ambigüedad escribiremos $\Gamma \vdash \alpha$). Si $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ entonces escribiremos $\vdash \beta_1, \ldots, \beta_k$ en lugar de $\Gamma \vdash \alpha$. Una sucesión de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es una *demostración* si es una deducción de $\emptyset$. El último miembro α de una sucesión que es una demostración se llama *teorema*. La notación que usaremos para indicar que α es un teorema es $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ (si no hay ambigüedad escribiremos $\vdash \alpha$).

Sea $\mathcal{L}$ una lógica en el lenguaje L y Γ un subconjunto de fórmulas. La notación utilizada para realizar una deducción a partir de Γ será la misma que se utiliza en [28].

Las lógicas que presentamos en este capítulo son llamadas implicativas. Estas lógicas fueron presentadas y estudiadas por Rasiowa [34].

Definición 5.1.3. Sea L un lenguaje algebraico que tiene a $\to$ como operación binaria. Una lógica $\mathcal{L}$ en el lenguaje L es *implicativa* si satisface las siguientes condiciones:

(IL1) $\vdash_{\mathcal{L}} x \to x$,

(IL2) $x \to y, y \to z \vdash_{\mathcal{L}} x \to z$,

(IL3) $\left\{ \begin{array}{c} x_1 \to y_1, ..., x_n \to y_n \\ y_1 \to x_1, ..., y_n \to x_n \end{array} \right\} \vdash_{\mathcal{L}} \lambda x_1...x_n \to \lambda y_1...y_n$, para cada $\lambda \in$ L de $aridad(\lambda) = n$ con $n \geq 1$,

(IL4) $x, x \to y \vdash_{\mathcal{L}} y$,

(IL5) $x \vdash_{\mathcal{L}} y \to x$.

Si A y B son dos álgebras del mismo tipo, denotaremos por $Hom(A, B)$ al conjunto de homomorfismos de A en B.

La siguiente definición es la Definición 2.5 del Capítulo 2 de [26].

Definición 5.1.4. Sea $\mathcal{L}$ una lógica implicativa en el lenguaje L. Una $\mathcal{L}$-álgebra es un álgebra $\mathbf{A}$ del tipo de similaridad L que admite un elemento 1 que satisface las siguientes propiedades:

(i) Para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$ y cada $h \in Hom(Fm, \mathbf{A})$, si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$ entonces $h(\varphi) = 1$.

(ii) Para todo $x, y \in A$, si $x \to y = 1$ y $y \to x = 1$ entonces $x = y$.

Indicaremos con $Alg^*_{\mathcal{L}}$ a la clase de las $\mathcal{L}$-álgebras.

Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Si p y q son términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre un conjunto dado, escribiremos K $\models p \approx q$ para indicar que la clase K satisface la identidad $p \approx q$.

El siguiente resultado es el Lema 2.6 de [26].

Lema 5.1.5. *Sea $\mathcal{L}$ una lógica implicativa. Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\boldsymbol{A} \in Alg^*_{\mathcal{L}}$, entonces $h(\varphi) = 1$ para cada $h \in Hom(Fm, \boldsymbol{A})$.*

2. *Si $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\vdash_{\mathcal{L}} \psi$, entonces $Alg^*_{\mathcal{L}} \vDash \varphi \approx \psi$.*

3. *$Alg^*_{\mathcal{L}} \vDash \varphi \approx x \to x$ para cada $\varphi \in Fm$ tal que $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

4. *$Alg^*_{\mathcal{L}} \vDash x \to x \approx y \to y$ para cada $x, y \in V$.*

El siguiente resultado es consecuencia de la Proposición 2.7 de [26].

Proposición 5.1.6. *Para cada lógica implicativa $\mathcal{L}$ que es finitaria, la clase $Alg^*_{\mathcal{L}}$ es una cuasivariedad, y puede ser presentada por las ecuaciones y cuasi-ecuaciones que resultan de aplicar la transformación $\varphi \mapsto \varphi \approx \top$ a los axiomas y reglas de cada presentación de $\mathcal{L}$ estilo Hilbert.*

A continuación enunciamos un resultado importante para este capítulo, que es el Teorema de Completitud. Este resultado es el Teorema 2.9 de [26].

Teorema 5.1.7. *Si $\mathcal{L}$ una lógica implicativa entonces $\mathcal{L}$ es completa con respecto a la clase $Alg^*_{\mathcal{L}}$ en el siguiente sentido: Para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$,*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ si y sólo si } h(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ implica que } h(\varphi) = 1$$
$$\text{para todo } h \in Hom(Fm, \boldsymbol{A}) \text{ y } \boldsymbol{A} \in Alg^*_{\mathcal{L}}.$$

A continuación definimos una clase de álgebras que comparte propiedades con las $\mathcal{L}$-álgebras.

La siguiente definición es la Definición 2.13 de [26].

Definición 5.1.8. Un *álgebra implicativa* es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \to, 1)$ de tipo (2,0) que satisface las siguientes cuasi-ecuaciones:

(IA1) $y \to y = 1$,

(IA2) $x \to y = y \to z = 1$ implica que $x \to z = 1$,

(IA3) $x \to 1 = 1$,

(IA4) $x \to y = y \to x = 1$ implica que $x = y$.

La siguiente proposición contiene una propiedad básica de las álgebras implicativas. Este resultado es la Proposición 2.14 de [26].

Proposición 5.1.9. *Un álgebra $\boldsymbol{A} = (A, \to)$ de tipo (2) es un álgebra implicativa si y sólo si admite último elemento 1 tal que la relación definida como*

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1$$

para cada $a, b \in A$ es una relación de orden en A y 1 es el máximo.

El resultado que se muestra a continuación corresponde a la Proposición 2.15 de [26].

Proposición 5.1.10. *Si $\mathcal{L}$ es una lógica implicativa, entonces toda álgebra de $Alg^*_{\mathcal{L}}$ es un álgebra implicativa.*

El objetivo de este capítulo es proponer una lógica proposicional algebrizable cuya semántica algebraica es la variedad de los srs-monoides. Además presentaremos una expansión de esta lógica que admite como semántica algebraica a la variedad de los srl-monoides integrales.

5.2. La lógica $\mathcal{L}$

Comenzaremos introduciendo un sistema estilo Hilbert $\mathcal{L}$ en el lenguaje L $= \{\wedge, \cdot, \to\}$.

Axiomas:

(A_1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \delta) \to (\alpha \to \delta))$,

(A_2) $(\beta \to \delta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \delta))$,

(I_1) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,

(I_2) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(I_3) $(\delta \to \alpha) \to ((\delta \to \beta) \to (\delta \to (\alpha \wedge \beta))$,

(I_4) $((\delta \to \alpha) \wedge (\delta \to \beta)) \to (\delta \to (\alpha \wedge \beta))$,

(P_1) $(\alpha \cdot \beta) \to (\beta \cdot \alpha)$,

(P_2) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \delta))$,

(P_3) $((\alpha \cdot \beta) \cdot \delta) \to (\alpha \cdot (\beta \cdot \delta))$,

(P_4) $(\alpha \cdot \beta) \to \alpha$,

(P_5) $(\alpha \cdot (\alpha \to \beta)) \to \beta$,

(P_6) $\Box\beta \to (\alpha \to (\alpha \cdot \Box\beta))$,

(P_7) $(\Box\alpha \cdot \Box\beta) \to \Box(\Box\alpha \cdot \Box\beta))$.

donde $\Box\alpha := (\alpha \to \alpha) \to \alpha$.

Reglas:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}\ (\mathbf{MP}) \qquad\qquad \frac{\alpha}{\beta \to \alpha}\ (\mathbf{T})$$

Ahora veremos para que cada fórmula α en el lenguaje L, $\alpha \to \alpha$ es un teorema de $\mathcal{L}$.

Lema 5.2.1. *Sea α una fórmula en el lenguaje* L. *Luego* $\vdash \alpha \to \alpha$.

Demostración. Consideremos la fórmula $F(\alpha)$, la cual se define como

$$F(\alpha) := (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)).$$

A continuación veremos que $\alpha \to \alpha$.

1.	$F(\alpha)$	por (A_1)
2.	$\Box F(\alpha)$	por 1. y $(\mathbf{T})$
3.	$\Box F(\alpha) \to (\alpha \to (\alpha \cdot \Box F(\alpha)))$	por (P_6)
4.	$\alpha \to (\alpha \cdot \Box F(\alpha))$	por 2., 3. y $(\mathbf{MP})$
5.	$(\alpha \cdot \Box F(\alpha)) \to \alpha$	por (P_4)
6.	$(\alpha \to (\alpha \cdot \Box F(\alpha))) \to (((\alpha \cdot \Box F(\alpha)) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))$	por (A_1)
7.	$((\alpha \cdot \Box F(\alpha)) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	por 4., 6. y $(\mathbf{MP})$
8.	$\alpha \to \alpha$	por 5., 7. y $(\mathbf{MP})$.

$\Box$

La siguiente regla es consecuencia de (A_1) y (**MP**):

$$\frac{\alpha \to \beta,\ \beta \to \delta}{\alpha \to \delta} \quad (\mathbf{SH})$$

Proposición 5.2.2. *Sean α, β, γ y η fórmulas en el lenguaje* L. *Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $\beta \to \alpha \vdash (\alpha \to \delta) \to (\beta \to \delta)$,

2) $\alpha \to \beta \vdash (\delta \to \alpha) \to (\delta \to \beta)$,

3) $\{\beta \to \alpha, \delta \to \eta\} \vdash (\alpha \to \delta) \to (\beta \to \eta)$,

4) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha,\ \delta \to \eta,\ \eta \to \delta\} \vdash (\alpha \to \delta) \to (\beta \to \eta)$.

Demostración. La condición 1) se sigue de (A_1) y (**MP**), y la condición 2) es consecuencia de (A_2) y (**MP**).

A continuación veremos que se satisface la condición 3):

1.	$\beta \to \alpha$	por hipótesis
2.	$\delta \to \eta$	por hipótesis
3.	$(\alpha \to \delta) \to (\beta \to \delta)$	por 1. aplicando 1) de esta proposición.
4.	$(\beta \to \delta) \to (\beta \to \eta)$	por 2. aplicando 2) de esta proposición.
5.	$(\alpha \to \delta) \to (\beta \to \eta)$	por 3., 4. y (**SH**).

La condición 4) es consecuencia de la condición 3). □

Nuestro próximo objetivo es mostrar que se satisface la siguiente condición:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \delta \to \eta, \eta \to \delta\} \vdash (\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \eta).$$

Comenzaremos probando el siguiente lema.

Lema 5.2.3. *Sean α y β fórmulas en* L. *Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$,

2) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$.

Demostración.

1) Consideremos α y β. A continuación se muestra una prueba de $\alpha \wedge \beta$ a partir de $\{\alpha, \beta\}$.

1.	$\alpha \to \alpha$	por Lema 5.2.1
2.	$(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta)))$	por (I_3)
3.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \wedge \beta))$	por 1., 2. y (**MP**)
4.	β	por hipótesis
5.	$\alpha \to \beta$	por 4. y (**T**)
6.	$\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$	por 3., 5. y (**MP**)
7.	α	por hipótesis
8.	$\alpha \wedge \beta$	por 6., 7. y (**MP**).

2) A continuación se muestra una prueba de $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$:

1.	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	por (I_1)
2.	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	por (I_2)
3.	$((\alpha \wedge \beta) \to \beta) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$	por 1., 2. y 1) de este lema
4.	$(((\alpha \wedge \beta) \to \beta)) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha))) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha))$	por (I_4)
5.	$(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$	por 3., 4. y (**MP**).

□

Denotaremos como (**Inf**) a la regla probada en el ítem 1) del Lema 5.2.3. Es decir,

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad (\textbf{Inf})$$

Proposición 5.2.4. *Sean α, β, δ y η fórmulas en* L. *Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $\alpha \to \beta \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma)$,

2) $\{\alpha \to \beta, \delta \to \eta\} \vdash (\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \eta)$,

3) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \delta \to \eta, \eta \to \delta\} \vdash (\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \eta)$.

Demostración. Comenzaremos probando la condición 1):

1.	$\alpha \to \beta$	por hipótesis
2.	$(\alpha \wedge \delta) \to \alpha$	por (I_1)
3.	$(\alpha \wedge \delta) \to \beta$	por 1., 2. y (**SH**)
4.	$(\alpha \wedge \delta) \to \delta$	por (I_2)
5.	$((\alpha \wedge \delta) \to \beta) \wedge ((\alpha \wedge \delta) \to \delta)$	por 3., 4. y (**Inf**)
6.	$(((\alpha \wedge \delta) \to \beta) \wedge ((\alpha \wedge \delta) \to \delta)) \to ((\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \delta))$	por (I_4)
8.	$(\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \delta)$	por 5., 6. y (**MP**).

Ahora mostraremos la condición 2) como sigue:

1.	$\alpha \to \beta$	por hipótesis
2.	$\delta \to \eta$	por hipótesis
3.	$(\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \delta)$	por 1. y 1) de esta proposición
4.	$(\beta \wedge \delta) \to (\delta \wedge \beta)$	por 2) del Lema 5.2.3
5.	$(\delta \wedge \beta) \to (\eta \wedge \beta)$	por 2. y 1) de esta proposición
6.	$(\eta \wedge \beta) \to (\beta \wedge \eta)$	por 2) del Lema 5.2.3
7.	$(\alpha \wedge \delta) \to (\delta \wedge \beta)$	por 3., 4. y (**SH**)
8.	$(\delta \wedge \beta) \to (\beta \wedge \eta)$	por 5., 6. y (**SH**)
9.	$(\alpha \wedge \delta) \to (\beta \wedge \eta)$	por 7., 8. y (**SH**).

Finalmente, la condición 3) se sigue de la condición 2). □

Ahora veremos que se satisface la siguiente condición:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \delta \to \eta, \eta \to \delta\} \vdash (\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \eta).$$

Proposición 5.2.5. *Sean α, β, δ y η fórmulas en* L. *Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $\alpha \to \beta \vdash (\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \delta)$,

2) $\{\alpha \to \beta, \delta \to \eta\} \vdash (\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \eta)$,

3) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \alpha,\ \delta \to \eta,\ \eta \to \delta\} \vdash (\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \eta)$.

Demostración. La condición 1) es consecuencia de (P_2) y (**SH**).

Ahora probaremos la condición 2) como sigue:

1.	$\alpha \to \beta$	por hipótesis
2.	$\delta \to \eta$	por hipótesis
3.	$(\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \delta)$	por 1. y 1) de esta proposición
4.	$(\beta \cdot \delta) \to (\delta \cdot \beta)$	por (P_1)
5.	$(\delta \cdot \beta) \to (\eta \cdot \beta)$	por 2. y 1) de esta proposición
6.	$(\eta \cdot \beta) \to (\beta \cdot \eta)$	por (P_1)
7.	$(\alpha \cdot \delta) \to (\delta \cdot \beta)$	por 3., 4. y (**SH**)
8.	$(\delta \cdot \beta) \to (\beta \cdot \eta)$	por 5., 6. y (**SH**)
9.	$(\alpha \cdot \delta) \to (\beta \cdot \eta)$	por 7., 8. y (**SH**).

La condición 3) se sigue de la condición 2). □

El siguiente resultado se sigue de la definición de lógica implicativa, Lema 5.2.1, el hecho de que en la lógica $\mathcal{L}$ se satisface la regla (**SH**), y las proposiciones 5.2.2, 5.2.4 y 5.2.5 respectivamente.

Proposición 5.2.6. *La lógica $\mathcal{L}$ es implicativa.*

Recordemos que $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ es la clase de las $\mathcal{L}$-álgebras. Es consecuencia del Lema 5.1.5 que el término $x \to x$ es una constante en la clase $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$, y la misma coincide con el valor de las valuaciones instanciadas en cualquier teorema de $\mathcal{L}$. Definiremos $\top$ como una abreviación de $x \to x$ para una variable arbitraria x. Más aún, se sigue de la Proposición 5.2.6 y la Proposición 5.1.6 que $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$, es una cuasivariedad en el lenguaje de L, y puede ser presentada por las ecuaciones y cuasi-ecuaciones que resultan de aplicar la transformación $\varphi \mapsto \varphi \approx \top$ a los axiomas y reglas de la lógica $\mathcal{L}$.

Teorema 5.2.7 (Teorema de Completitud)**.** *La lógica $\mathcal{L}$ es completa con respecto a $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$. Es decir: para cada $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathrm{Fm}$, $\Gamma \vdash \alpha$ si y sólo si para cada $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ y cada $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Fm}, A)$, $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$ implica $h(\alpha) = 1$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.2.6 y el Teorema 5.1.7. □

Notemos que es consecuencia de la Proposición 5.1.10 que el $\{\to\}$-reducto de toda álgebra A de $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ es un álgebra implicativa, por lo que se sigue de la Proposición 5.1.9 que para cada $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ existe $1 \in A$ tal que la relación binaria $\leq$ dada por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1, \tag{5.1}$$

es una relación de orden y 1 es el elemento máximo (notemos que este elemento coincide con el elemento también denotado 1, dado por la definición de $\mathcal{L}$-álgebra). Dado que $a \to a = 1$ se verifica en cada álgebra de $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ luego la clase $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ y la clase cuyos miembros son álgebras $(A, 1)$ con $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ son equivalentes por términos. A continuación incluiremos el elemento 1 en la signatura de las álgebas de $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$.

La cuasivariedad $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ está caracterizada por las álgebras $(A, \wedge, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ que satisfacen las siguientes cuasi-ecuaciones:

(A_1) $a \to b \leq (b \to c) \to (a \to c)$,

(A_2) $b \to c \leq (a \to b) \to (a \to c)$,

(I_1) $a \wedge b \leq a$,

(I_2) $a \wedge b \leq b$,

(I_3) $c \to a \leq (c \to b) \to (c \to (a \wedge b))$,

(I_4) $(c \to a) \wedge (c \to b) \leq c \to (a \wedge b)$,

(P_1) $a \cdot b \leq b \cdot a$,

(P_2) $a \to b \leq (a \cdot c) \to (b \cdot c)$,

(P_3) $(a \cdot b) \cdot c \leq a \cdot (b \cdot c)$,

(P_4) $a \cdot b \leq a$,

(P_5) $a \cdot (a \to b) \leq b$,

(P_6) $\Box(b) \leq a \to (a \cdot \Box(b))$,

(P_7) $\Box(a) \cdot \Box(b) \leq \Box(\Box(a) \cdot \Box(b))$,

(MP) si $1 \to a = 1$ entonces $a = 1$,

(T) $a \to 1 = 1$.

donde para cada $a \in A$ el elemento $\Box(a)$ se define como $\Box(a) := 1 \to a$ y $\leq$ es la relación de orden considerada en (5.1).

Sea $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$. Dado que $1 \to 1 = 1$, se tiene de (I_3) que $1 \leq 1 \to (1 \to (1 \wedge 1))$, donde $\leq$ es la relación de orden definida en (5.1). Sin embargo 1 es el último elemento con respecto a $\leq$, por lo que $1 = 1 \to (1 \to (1 \wedge 1))$. Por ende, aplicando (MP) tenemos que

$$1 \wedge 1 = 1.$$

De este modo, se sigue de (I_1), (I_2) e (I_4) que la operación binaria $\wedge$ es el ínfimo con respecto a la relación de orden definida en (5.1). En efecto, sean $a, b \in A$. Por (I_1) e (I_2) se tiene $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$. Luego $a \wedge b$ es cota inferior del conjunto $\{a, b\}$. Sea $c \in A$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$, i.e., $c \to a = 1$ y $c \to b = 1$. Por (I_4) y la igualdad $1 \wedge 1 = 1$ tenemos que $1 \leq c \to (a \wedge b)$, con lo cual $1 = c \to (a \wedge b)$. Es decir, $c \leq a \wedge b$. Por lo tanto, existe el ínfimo de $\{a, b\}$ y el mismo coincide con $a \wedge b$.

Proposición 5.2.8. $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L} = \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$.

Demostración. Un cálculo directo muestra que SR^{s} es una subvariedad de $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$. Recíprocamente, sea $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$. En particular, $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado. La conmutatividad de $\cdot$ se sigue de (P_1). La asociatividad de $\cdot$ se sigue de un cálculo directo basado en (P_3) y la conmutatividad de $\cdot$. En efecto, sean

$a, b, c \in A$. Se sigue de (P_3) que $(a \cdot b) \cdot c \leq a \cdot (b \cdot c)$. Por otro lado, usando (P_3) y la conmutatividad de $\cdot$ tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (b \cdot c) \cdot a \\ &\leq b \cdot (c \cdot a) \\ &= (c \cdot a) \cdot b \\ &\leq c \cdot (a \cdot b) \\ &= (a \cdot b) \cdot c, \end{aligned}$$

con lo cual

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Ahora veremos que 1 es el elemento neutro con respecto a $\cdot$. Sea $a \in A$. Se sigue de (P_4) que $a \cdot 1 \leq a$ y es consecuencia de (P_6) que $\Box(1) \leq a \to (a \cdot \Box(1))$. Dado que $\Box(1) = 1$ se tiene que $1 = a \to (a \cdot 1)$, i.e., $a \leq a \cdot 1$. Por lo tanto, $a \cdot 1 = a$. De esta manera hemos probado que $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo. La monotonía de $\cdot$ es consecuencia directa de (P_2). Resulta inmediato que A satisface 1) del Teorema 4.1.3. Además, 3) y 6) del Teorema 4.1.3 son (P_5) y (P_6) respectivamente. Más aún, (P_5) implica que $\Box(\Box(a) \cdot \Box(b)) \leq \Box(a) \cdot \Box(b)$, por lo que se sigue de (P_7) que $\Box(\Box(a) \cdot \Box(b)) = \Box(a) \cdot \Box(b)$, que es 5) del Teorema 4.1.3.

Ahora probaremos que A satisface 4) del Teorema 4.1.3. Se sigue de (I_4) que basta mostrar que

$$c \to (a \wedge b) \leq (c \to a) \wedge (c \to b).$$

La desigualdad previa se satisface si y sólo si $c \to (a \wedge b) \leq c \to a$ y $c \to (a \wedge b) \leq c \to b$. Para probar que $c \to (a \wedge b) \leq c \to b$, notemos que es consecuencia de (A_1) que

$$c \to (a \wedge b) \leq ((a \wedge b) \to b) \to (c \to b).$$

Sin embargo $(a \wedge b) \to b = 1$ y por (P_5) tenemos que $1 \to (c \to b) \leq c \to b$. Luego,

$$c \to (a \wedge b) \leq c \to b.$$

Similarmente, se puede probar que $c \to (a \wedge b) \leq c \to a$. Luego, se satisface la condición 4) del Teorema 4.1.3.

Finalmente, mostraremos que se satisface la condición 2) del Teorema 4.1.3, i.e., que se cumple que $a \to b \leq c \to (a \to b)$. Notemos que la siguiente condición que será denotada por (C) es consecuencia inmediata de (A_2) y (P_5):

Para cada $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ entonces $b \to c \leq a \to c$.

En efecto, supongamos que $a \leq b$. Luego $a \to b = 1$ y

$$\begin{aligned} b \to c &\leq (a \to b) \to (a \to c) \\ &= 1 \to (a \to c) \\ &= 1 \cdot (1 \to (a \to c)) \\ &\leq a \to c, \end{aligned}$$

con lo cual $b \to c \leq a \to c$.

Consideremos $a, b, c \in A$. Para probar la desigualdad $a \to b \leq c \to (a \to b)$, notemos que es consecuencia de (C) que

$$1 \to (a \to b) \leq c \to (a \to b). \tag{5.2}$$

Además, se sigue de la igualdad $b \to b = 1$ y de (A_1) que

$$a \to b \leq (b \to b) \to (a \to b) = 1 \to (a \to b). \tag{5.3}$$

De este modo, es consecuencia de (5.2) y (5.3) que $a \to b \leq c \to (a \to b)$, que era nuestro objetivo. Por lo tanto, $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L} \subseteq \mathsf{SR}^{\mathsf{s}}$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 5.2.7 y de la Proposición 5.2.8.

Corolario 5.2.9. *La lógica $\mathcal{L}$ es completa con respecto a SR^{s}.*

5.3. La lógica $\mathcal{L}^{\vee}$

Sea $\mathcal{L}^{\vee}$ la lógica en el lenguaje $\mathrm{L}^{\vee} = \mathrm{L} \cup \{\vee\}$ que satisface los axiomas y reglas de $\mathcal{L}$, con los siguientes axiomas adicionales:

(S_1) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(S_2) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(S_3) $((\alpha \to \delta) \wedge (\beta \to \delta)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \delta)$,

(S_4) $(\gamma \cdot (\alpha \vee \beta)) \to ((\gamma \cdot \alpha) \vee (\gamma \cdot \beta))$.

En esta sección final probaremos que $\mathcal{L}^{\vee}$ es completa con respecto a iSR.

Nuestro próximo objetivo es mostrar que se satisface la siguiente condición para cada fórmula α, β, γ y η en el lenguaje $\mathrm{L}^{\vee}$:

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \gamma \to \eta, \eta \to \gamma\} \vdash (\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \eta).$$

Lema 5.3.1. *Sean α y β fórmulas en el lenguaje $\mathrm{L}^{\vee}$. Luego $\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$.*

Demostración. Sean α y β fórmulas en el lenguaje $\mathrm{L}^{\vee}$. A continuación se muestra una prueba de $(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$:

1.	$\alpha \to (\beta \vee \alpha)$	por (S_2)
2.	$\beta \to (\beta \vee \alpha)$	por (S_1)
3.	$(\alpha \to (\beta \vee \alpha)) \wedge (\beta \to (\beta \vee \alpha))$	por 1., 2. y (**Inf**)
4.	$((\alpha \to (\beta \vee \alpha)) \wedge (\beta \to (\beta \vee \alpha))) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha))$	por (S_3)
5.	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	por 3., 4. y (**MP**).

$\square$

Proposición 5.3.2. *Sean α, β, δ, γ y η fórmulas de $\mathrm{L}^{\vee}$. Luego se satifacen las siguientes condiciones:*

1) $\alpha \to \beta \vdash (\alpha \vee \delta) \to (\beta \vee \delta)$,

2) $\{\alpha \to \beta, \gamma \to \eta\} \vdash (\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \eta)$,

3) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha, \gamma \to \eta, \eta \to \gamma\} \vdash (\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \eta)$.

Demostración. Primero mostraremos que se satisface 1) como sigue:

1.	$\alpha \to \beta$	por hipótesis
2.	$\beta \to (\beta \vee \delta)$	por (S_1)
3.	$\alpha \to (\beta \vee \delta)$	de 1., 2. y (**SH**)
4.	$\delta \to (\beta \vee \delta)$	por (S_2)
5.	$(\alpha \to (\beta \vee \delta)) \wedge (\delta \to (\beta \vee \delta))$	de 3., 4. y (**Inf**)
6.	$((\alpha \to (\beta \vee \delta)) \wedge (\delta \to (\beta \vee \delta))) \to ((\alpha \vee \delta) \to (\beta \vee \delta))$	por (S_3)
7.	$(\alpha \vee \delta) \to (\beta \vee \delta)$	por 5., 6. y (**MP**).

Ahora probaremos la condición 2).

1.	$\alpha \to \beta$	por hipótesis
2.	$\gamma \to \eta$	por hipótesis
3.	$(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma)$	de 1. y 1) de esta proposición
4.	$(\beta \vee \gamma) \to (\gamma \vee \beta)$	por el Lema 5.3.1
5.	$(\gamma \vee \beta) \to (\eta \vee \beta)$	de 2. y 1) de esta proposición
6.	$(\eta \vee \beta) \to (\beta \vee \eta)$	por el Lema 5.3.1
7.	$(\alpha \vee \gamma) \to (\gamma \vee \beta)$	por 3., 4. y (**SH**)
8.	$(\gamma \vee \beta) \to (\beta \vee \eta)$	por 5., 6. y (**SH**)
9.	$(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \eta)$	por 7., 8. y (**SH**).

La condición 3) es consecuencia de la condición 2). □

El siguiente resultado es consecuencia de la Proposición 5.2.6 y de la Proposición 5.3.2.

Proposición 5.3.3. *La lógica* $\mathcal{L}^{\vee}$ *es implicativa.*

Sea $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}^{\vee}$ la clase de $\mathcal{L}^{\vee}$-álgebras asociadas a la lógica implicativa $\mathcal{L}^{\vee}$, donde se incluye la constante 1 en el lenguaje de las álgebras. Notemos que un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ está en $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}^{\vee}$ si y sólo si $(A, \wedge, \cdot, \to, 1) \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}$ y se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:

(S_1) $a \leq a \vee b$,

(S_2) $b \leq a \vee b$,

(S_3) $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c$,

(S_4) $c \cdot (a \vee b) \leq (c \cdot a) \vee (c \cdot b)$.

Sea $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}^{\vee}$. Notemos que es consecuencia de (S_1), (S_2) y (S_3) que la operación binaria $\vee$ es el supremo con respecto al orden $\leq$.

Lema 5.3.4. *Sea* $A \in \mathrm{Alg}^*\mathcal{L}^{\vee}$. *Luego para cada* $a, b, c \in A$ *se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

2) $c \cdot (a \vee b) = (c \cdot a) \vee (c \cdot b)$.

Demostración. Para probar 1), notemos que como consecuencia de (S_3) basta probar que $(a \vee b) \to c \leq (a \to c) \wedge (b \to c)$, i.e., $(a \vee b) \to c \leq a \to c$ y $(a \vee b) \to c \leq b \to c$. Dado que $1 = a \to (a \vee b)$, por (A_1) $1 = a \to (a \vee b) \leq ((a \vee b) \to c) \to (a \to c)$, por lo que $(a \vee b) \to c \leq a \to c$. Análogamente se puede probar que $(a \vee b) \to c \leq b \to c$. Finalmente mostraremos 2). Notemos que por (S_4) es suficiente probar que $(c \cdot a) \vee (c \cdot b) \leq c \cdot (a \vee b)$, que se sigue de la monotonía de la operación $\cdot$. $\square$

Un cálculo directo basado en el Lema 5.3.4 y en la Proposición 5.2.8 muestra que $\mathrm{Alg}^*\mathcal{L}^\vee = \mathsf{iSR}$. Por lo tanto, el siguiente resultado es consecuencia de la Proposición 5.3.3 y del Teorema 5.1.7.

Corolario 5.3.5 (Teorema de Completitud)**.** *La lógica $\mathcal{L}^\vee$ es completa con respecto a* iSR*.*

Capítulo 6

Trabajo futuro y conclusiones

Este capítulo final se divide en dos partes. En primer lugar introduciremos la clase de los monoides subresiduados, la cual será denotada por MS. Luego mostraremos que MS es una cuasivariedad y daremos una descripción de las congruencias relativas de cada miembro de la misma. Dejaremos como problema abierto la siguiente pregunta, la cual constituye la motivación para haber definido a los monoides subresiduados:

¿Resulta ser MS la cuasivariedad de los $\{\rightarrow, \cdot, 1\}-$subreductos de la variedad de los srl-monoides integrales?

La respuesta a esta pregunta se pretende abordar en el futuro[1]. En segundo lugar, presentaremos las conclusiones obtenidas en la presente tesis.

6.1. Sobre los monoides subresiduados

Vamos a comenzar esta sección con la siguiente definición.

Definición 6.1.1. Un *monoide implicativo* es un álgebra $(A, \cdot, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ tal que satisface las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:

1) $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo.

2) $a \rightarrow a = 1$.

3) Si $a \rightarrow b = 1$ y $b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$.

4) $((a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$.

5) $a \rightarrow 1 = 1$.

Notar que la relación $\leq$ dada por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \rightarrow b = 1 \tag{6.1}$$

es una relación de orden con último elemento 1.

[1]Otro problema que también se pretende estudiar en el futuro es tratar de caracterizar a los subreductos implicativos de los srl-monoides integrales.

Si $(A, \cdot, \rightarrow, 1)$ es un monoide implicativo, entonces cuando escribamos $\leq$ nos vamos a referir al orden dado en (6.1).

La siguiente definición está inspirada en la definición de srl-monoide integral.

Definición 6.1.2. Un *monoide subresiduado* (s-monoide para abreviar) es un par $(\mathbf{A}, Q)$ donde $\mathbf{A} = (A, \leq, \cdot, 1)$ es una estructura tal que satisface las siguientes condiciones:

1) $(A, \leq, 1)$ es un poset con último elemento 1.

2) $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo.

3) La operación $\cdot$ es monótona con respecto a $\leq$.

4) Q es un subconjunto de A cerrado por $\cdot$ y 1.

5) Para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$.

Sean $(\mathbf{A}, Q)$ un s-monoide y $a, b \in A$. Vamos a denotar como $a \rightarrow b$ al máximo del conjunto $\{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$. Los s-monoides pueden ser considerados como álgebras $(A, \cdot, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$. Más aún, si $(\mathbf{A}, Q)$ es un s-monoide entonces

$$Q = \{a \in A : 1 \rightarrow a = a\} = \{1 \rightarrow a : a \in A\}.$$

Si no existe ambigüedad vamos a escribir (A, Q) en lugar de $(\mathbf{A}, Q)$.

La prueba del siguiente lema es análoga a la prueba de 3) correspondiente al Teorema 2.1.7, y como las pruebas de 3) y 4) correspondientes al Lema 2.1.9.

Lema 6.1.3. *Sean A un s-monoide y $a, b \in A$. Luego se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $a \rightarrow a = 1$,

b) $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$,

c) $a \leq b$ si y sólo si $a \rightarrow b = 1$.

En la siguiente proposición vamos caracterizar a los s-monoides.

Proposición 6.1.4. *Sea $(A, \cdot, \rightarrow, 1)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 0)$. Luego (A, Q) es un s-monoide si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:*

a) $(A, \cdot, \rightarrow, 1)$ es un monoide implicativo.

b) La operación $\cdot$ es monótona.

c) $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$.

d) $a \rightarrow b \leq c \rightarrow (a \rightarrow b)$.

e) $1 \rightarrow b \leq a \rightarrow (a \cdot (1 \rightarrow b))$.

f) Si $a \leq b$ entonces $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$.

g) $(1 \rightarrow a) \cdot (1 \rightarrow b) = 1 \rightarrow ((1 \rightarrow a) \cdot (1 \rightarrow b))$.

Demostración. Supongamos que A es un s-monoide. Las condiciones 1),2),3) y 5) de la Definición 6.1.1 son consecuencia directa del Lema 6.1.3, y la condición 4) se prueba de forma análoga a la demostración de 2) del Lema 2.1.9. Luego, $(A, \cdot, \to, 1)$ es un monoide implicativo. El inciso b) es consecuencia de la definición de s-monoide, c) es consecuencia del Lema 6.1.3 y el inciso d) se prueba de forma similar a la demostración de 2) del Teorema 2.1.7. El inciso e) se demuestra de forma análoga a la dada para probar 7) del Lema 2.1.9 y el inciso g) es inmediato. Para probar el inciso f), sean $a, b, c \in A$ y $a \le b$. Como $c \cdot (c \to a) \le a \le b$ y $c \to a \in Q$ concluimos que $c \to a \le c \to b$. Luego se satisface la condición f).

Recíprocamente, supongamos que se satisfacen a)...g). Sea $Q = \{a \in A : a = 1 \to a\}$. El hecho de que (A, Q) es un s-monoide se prueba de manera similar a como se probó la recíproca del Teorema 2.1.7. $\square$

Sean (A, Q) un s-monoide y $a \in A$. Definimos como $\Box(a) := 1 \to a$ y $\Box(A) := \{\Box(a) : a \in A\}$. Notar que $\Box(A) = Q$.

Corolario 6.1.5. *La clase* MS *forma una cuasivariedad.*

Como hemos mencionado al inicio de este capítulo, sería interesante saber si la cuasivariedad MS es una variedad.

Sea $A \in \mathsf{MS}$. Una congruencia θ de A se dice *congruencia relativa de A* si $A/\theta \in \mathsf{MS}$. Denotaremos como $\mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$ al conjunto de congruencias relativas de A. La definición de $\Box$-filtro y la notación $\Box\mathrm{Fil}(A)$ son las mismas que se dieron en la Definición 2.2.7 pero cambiando iSR por MS. Nuestro siguiente objetivo es probar que existe un isomorfismo de orden entre $\mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$ y $\Box\mathrm{Fil}(A)$.

Sean $A \in \mathsf{MS}$ y $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. Definimos θ_F como en el Capítulo 2. En este nuevo contexto siguen valiendo las igualdades obtenidas en el Lema 2.2.4.

Lema 6.1.6. *Sea* $A \in \mathsf{MS}$. *Si* $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$, *entonces* $1/\theta \in \Box\mathrm{Fil}(A)$.

Demostración. Sea $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$. Por la reflexividad de θ se tiene que $1 \in 1/\theta$. El hecho de que $1/\theta$ es cerrado por $\cdot$ y por $\Box$ es consecuencia de que θ es una congruencia, y el hecho de que $1 \cdot 1 = 1$ y $1 \to 1 = 1$. Veamos que $1/\theta$ es creciente. Sean $a, b \in A$ tales que $a \le b$ y $a \in 1/\theta$. Luego, $a \to b = 1$ y $(a, 1) \in \theta$. Luego $a/\theta = 1/\theta$ y $a/\theta \to b/\theta = 1/\theta$. Más aún,

$$1/\theta = (1/\theta).(1/\theta) = (a/\theta).(a/\theta \to b/\theta) \le b/\theta,$$

donde $\le$ es la relación de orden asociada al s-monoide A/θ. Dado que θ es una congruencia relativa, A/θ es un s-monoide, por lo que $1/\theta = b/\theta$ y de esta manera $b \in 1/\theta$. De esta manera tenemos que $1/\theta$ es creciente. Por lo tanto, $1/\theta \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. $\square$

Lema 6.1.7. *Sean* $A \in \mathsf{MS}$ *y* $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. *Luego* $\theta_F \in \mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$ *y* $1/\theta_F = F$.

Demostración. Sea $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$. El hecho de que θ_F es una relación de equivalencia se prueba como se hizo en la demostración del Lema 2.2.5. A continuación veremos que θ_F es una congruencia. Sean $(a, b), (c, d) \in \theta_F$, es decir, $a \to b, b \to a, c \to d, d \to c \in F$. Notemos que $c \cdot a \cdot (a \to b) \cdot (c \to d) \le b \cdot d$, con lo cual

$$(a \to b) \cdot (c \to d) \le (a \cdot c) \to (b \cdot d).$$

Usando que F es creciente tenemos que $(a \cdot c) \to (b \cdot d) \in F$. De una forma similar se puede probar que $(b \cdot d) \to (a \cdot c) \in F$. Por lo tanto, $(a \cdot c, b \cdot d) \in F$ y θ_F preserva $\cdot$.

Ahora veamos que θ_F preserva $\to$. Dado que

$$(a \to b) \cdot (b \to d) \cdot (d \to c) \leq a \to c$$

tenemos que

$$(a \to b) \cdot (d \to c) \leq (b \to d) \to (a \to c).$$

Teniendo en cuenta que F es creciente concluimos que $(b \to d) \to (a \to c) \in F$. De una forma similar se puede probar que $(a \to c) \to (b \to d) \in F$. Por lo tanto, $(a \to c, b \to d) \in F$. Es decir, θ_F preserva $\to$. De esta manera hemos probado que θ_F es una congruencia.

Resulta inmediato que $1/\theta_F = F$. En efecto, $a \in 1/\theta_F$ si y sólo si $\Box(a) \in F$ si y sólo si $a \in F$ (dado que $F \in \Box\mathrm{Fil}(A)$ y $\Box(a) \leq a$).

Finalmente, veamos que $A/\theta_F \in \mathsf{MS}$. Sean $a, b \in A$.

En primer lugar supongamos que

$$(a/\theta_F) \to (b/\theta_F) = 1/\theta_F = F$$

y

$$(b/\theta_F) \to (a/\theta_F) = 1/\theta_F = F.$$

Luego $a \to b \in F$ y $b \to a \in F$, con lo cual

$$a/\theta_F = b/\theta_F.$$

En segundo lugar, supongamos que

$$a/\theta_F \leq b/\theta_F,$$

es decir, $a \to b \in F$. Como $a \cdot c \cdot (a \to b) \leq b \cdot c$, tenemos que

$$a \to b \leq (a \cdot c) \to (b \cdot c).$$

Dado que $a \to b \in F$, concluimos que $(a \cdot c) \to (b \cdot c) \in F$, es decir

$$(a/\theta_F) \cdot (c/\theta_F) \leq (b/\theta_F) \cdot (c/\theta_F).$$

En tercer lugar, supongamos que

$$a/\theta_F \leq b/\theta_F,$$

es decir, $a \to b \in F$. Como

$$a \to b \leq (c \to a) \to (c \to b)$$

y $a \to b \in F$ se tiene que $(c \to a) \to (c \to b) \in F$ con lo cual

$$(c/\theta_F) \to (a/\theta_F) \leq (c/\theta_F) \to (b/\theta_F).$$

Por lo tanto, $A/\theta_F \in \mathsf{MS}$. $\Box$

Lema 6.1.8. *Sean $A \in \mathsf{MS}$ y $\theta, \psi \in \mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$. Luego $\theta \subseteq \psi$ si y sólo si $1/\theta \subseteq 1/\psi$.*

Demostración. Supongamos que $\theta \subseteq \psi$ y sea $a \in 1/\theta$. Luego $(a, 1) \in \theta \subseteq \psi$, por lo que $(a, 1) \in \psi$, i.e., $a \in 1/\psi$. Por lo tanto, $1/\theta \subseteq 1/\psi$. Recíprocamente, supongamos que $(a, b) \in \theta$. Usando que θ es una congruencia, $(a \to b, 1) \in \theta$ y $(b \to a, 1) \in \theta$. Más aún, $a \to b, b \to a \in 1/\theta \subseteq 1/\psi$. Por lo tanto $(a \to b, 1) \in \psi$ y $(b \to a, 1) \in \psi$. Dado que A/ψ es un s-monoide, se tiene que $(a/\psi) \to (b/\psi) = 1/\psi$ y $(b/\psi) \to (a/\psi) = 1/\psi$, por lo cual $a/\psi = b/\psi$. De este modo, $(a, b) \in \psi$. Por lo tanto, $\theta \subseteq \psi$. $\square$

La siguiente proposición es consecuencia de los resultados presentados anteriormente en esta sección.

Proposición 6.1.9. *Sea $A \in \mathsf{MS}$. Las asignaciones $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta_F$ definen un isomorfismo de orden entre $\mathrm{Con}_{\mathsf{MS}}(A)$ y $\Box\mathrm{Fil}(A)$.*

6.2. Conclusiones

La clase de los srl-monoides surge como una generalización natural de las variedades de los retículos subresiduados y de los retículos residuados conmutativos respectivamente. A continuación expondremos una síntesis de los resultados obtenidos en esta tesis.

- En el Capítulo 2 introducimos y estudiamos la clase de los srl-monoides. En particular, probamos que dicha clase es una variedad. Motivados por la descripción de las congruencias dada para el caso de retículos residuados conmutativos, en el presente capítulo presentamos una caracterización para las congruencias de los srl-monoides en términos de lo que denominamos subálgebras fuertemente convexas. La caracterización mencionada fue una herramienta de gran utilidad para estudiar congruencias generadas por conjuntos arbitrarios, describir álgebras simples y subdirectamente irreducibles respectivamente, y probar que la variedad de los srl-monoides tiene la propiedad de extensión de congruencias.

- En el Capítulo 3 caracterizamos a las funciones compatibles en el marco de los srl-monoides y usamos dicha descripción para probar que la variedad de los srl-monoides es localmente afín completa. Motivados por el estudio de operadores modales monótonos sobre retículos residuados conmutativos con primer elemento [31], en el presente capítulo introducimos y estudiamos operadores modales monótonos en el marco de los srl-monoides, los cuales resultan ser ejemplos de funciones compatibles. En particular, probamos un teorema similar al teorema del filtro primo pero en el contexto de srl-monoides integrales con un operador modal monótono que satisface ciertas condiciones. Cuando el operador modal monótono mencionado previamente es la identidad, la condición que exigimos que satisfaga nos permite definir una subvariedad de la variedad de los srl-monoides integrales, cuyos miembros son llamados srl-monoides fuertes. La definición de srl-monoide fuerte también está motivada por la definición de sr-retículo fuerte introducida y estudiada [18]. En particular estudiamos la variedad de los srl-monoides fuertes y dos de sus subvariedades. Para finalizar este capítulo probamos algunos lemas técnicos con la finalidad de dar descripciones ecuacionales de la variedad de los srl-monoides integrales generada por la clase de los srl-monoides totalmente ordenados.

- En el Capítulo 4 introducimos la clase de los monoides conmutativos semi-reticulados acotados subresiduados (srs-monoides para abreviar) y probamos que dicha clase es una variedad. Esta variedad contiene propiamente a la variedad de los semi-retículos subresiduados (los cuales constituyen los $\{\wedge, \cdot, 1\}$-subreductos de los sr-retículos, ver [9]) y a la variedad de los semi-retículos residuados (los cuales constituyen los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los retículos residuados conmutativos integrales). Utilizando ideas de [9] (en donde se prueba que los semi-retículos residuados coinciden con los $\{\wedge, \cdot, 1\}$-subreductos de los sr-retículos) y también ideas de [12] (en donde se estudian álgebras con implicación y fusión así como también representaciones para las mismas), el objetivo principal de este capítulo fue probar que la variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}-$subreductos de los srl-monoides integrales.

- Motivados por ideas de [9], en donde se estudian lógicas proposicionales algebrizables cuyas semánticas algebraicas coinciden con las variedades de los sr-retículos y de los semi-retículos subresiduados respectivamente, en el Capítulo 4 presentamos lógicas proposicionales algebrizables cuyas semánticas algebraicas coinciden con las variedades de los srl-monoides integrales y de los srs-monoides respectivamente.

Bibliografía

[1] Balbes R. y Dwinger P., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Miss, (1974).

[2] Blok W.J. y Pigozzi D. *Algebraizable Logics*. Memoirs of the A.M.S. 77 No. 396 (1989).

[3] Bull R.A., *Some results for implicational calculi*. Journal of Symbolic Logic 29, 33–34 (1964).

[4] Burris H. y Sankappanavar H.P, *A Course in Universal Algebra*. Springer Verlag, New York, (1981).

[5] Caicedo X., *Implicit connectives of algebraizable logics*. Studia Logica 78, No. 3, 155–170 (2004).

[6] Caicedo X. *Implicit operations in MV-algebras and the connectives of Lukasiewicz logic*. Lecture Notes in Computer Science 4460, 50-68, (2007).

[7] Caicedo X. y Cignoli R., *An algebraic approach to intuitionistic connectives*. Journal of Symbolic Logic 66, No. 4, 1620–1636 (2001).

[8] Castiglioni J.L., Celani S. y San Martín H.J., *On Hilbert algebras generated by the order*. Archive for Mathematical Logic, vol. 61, 155–172 (2022).

[9] Castiglioni J.L., Fernández V., Mallea H.F. y San Martín H.J., *On subreducts of subresiduated lattices and some related logic*. Journal of Logic and Computation, Journal of Logic and Computation, vol. 34, no. 5, 856-886, (2024).

[10] Castiglioni J.L., Menni M. y Sagastume M., *Compatible operations on commutative residuated lattices*. Journal of Applied Non-Classical Logics 18, 413–425 (2008).

[11] Castiglioni J.L. y San Martín H.J., *l-Hemi-Implicative-Semilattices*. Studia Logica 106, 675–690 (2018).

[12] Celani S.A., *Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 28, 999-1010 (2004).

[13] Celani S.A., *n-linear weakly Heyting algebras*. Mathematical Logic Quarterly 52, no. 4, 404–416 (2006).

[14] Celani S.A,, *Remarks on Intuitionistic Modal Logics*. Divulgaciones Matemáticas 9 (2): 137–147, (2001).

[15] Celani S.A. y Jansana R., *A Closer Look at Some Subintuitionistic Logics.* Notre Dame Journal of Formal Logic 42(4), (2001).

[16] Celani S.A. y Jansana R., *Bounded distributive lattices with strict implication.* Mathematical Logic Quarterly 51, no. 3, 219–246 (2005).

[17] Celani S.A., Nagy A.L. y San Martín H.J., *Dualities for subresiduated lattices.* Algebra Universalis, vol. 82, no. 59 (2021). https://doi.org/10.1007/s00012-021-00752-3.

[18] Celani S. y San Martín H.J., *On the variety of strong subresiduated lattices.* Mathematical Logic Quarterly, https://doi.org/10.1002/malq.202200067 (2023).

[19] Chajda I., Halaš R. y Kühr J., *Semilattice Structures.* Heldermann, (2007).

[20] Cignoli R., D′Ottaviano I. y Mundici D., *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning.* Trends in Logic-Studia Logica library (2000).

[21] Cornejo J.M., San Martín H.J. y Sígal V.A., *Subresiduated lattice ordered commutative monoids.* Fuzzy Sets and Systems (2022).

[22] Cornejo J.M., San Martín H.J. y Sígal V.A., *On a Class of Subreducts of the Variety of Integral srl-Monoids and Related Logics.* Studia Logica, vol 112, pages 861–891, (2024)

[23] Cornejo J.M., San Martín H.J. y Sígal V.A., *On subresiduated lattice ordered commutative monoids and some of its subvarieties.* Enviado a Soft Computing en 2024 (en proceso de referato).

[24] Davey B.A., *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge University Press (2002).

[25] Epstein G. y Horn A., *Logics which are characterized by subresiduated lattices.* Mathematical Logic Quarterly, vol. 22, no. 1, 199–210 (1976).

[26] Font J.M., *Abstract Algebraic Logic. An introductory Textbook.* Studies in Logic 60, College Publ. (2016).

[27] Galatos N., Jipsen P., Kowalski T. y Ono H., *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics.* Elsevier B. V., Amsterdam ISBN:9780444521415 (2007).

[28] Hamilton A. G., *Logic for Mathematicians.* Cambridge University Press, (1988).

[29] Hart J., Raftery L. y Tsinakis C., *The structure of commutative residuated lattices.* Internat. J. Algebra Comput. 12, 509–524 (2002).

[30] Kaarli K. y Pixley A.F. *Polynomial completeness in algebraic systems.* Chapman and Hall/CRC, Boca Ratón, FL, (2001).

[31] Kondo M., *Modal operators on commutative residuated lattices.* Mathematica Slovaca 61, 1–14 (2011).

[32] Macnab D.S., *Modal operators on Heyting algebras.* Algebra Universalis 12, 5–29 (1981).

[33] Ono H., *Substructural Logics and Residuated Lattices-an introduction.* In Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica, V.F. Hendricks and J. Mlinowski (eds.). Trends in Logic 20, (2003).

[34] Rasiowa H., *On a fragment of the implicative propositional calculus.* Studia Logica (1955).

[35] Sagastume M.S. y San Martín H.J., *Álgebra del cálculo proposicional.* Notas de Lógica Matemática; no. 42 (2019).

[36] San Martín H.J., *Compatible operations in some subvarieties of the variety of weak Heyting algebras.* In: Proceedings of the 8th Conference of the Eur. Soc. for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2013). Advances in Inteligent Systems Research, pp. 475–480. Atlantis Press (2013).

[37] San Martín H.J., *Principal congruences in weak Heyting algebras.* Algebra Universalis, vol. 75, no. 4, 405–418 (2016).