



Trabajo de Iniciación a la Investigación

Radio Espectral Conjunto y Radio Espectral Generalizado

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Alumno: Esteban Baragatti
Director: Dr. Mariano Ruiz

24 de febrero de 2011

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Aspectos preliminares	7
1.2. Radio Espectral Conjunto	12
2. Teoremas principales	21
2.1. Fórmula Generalizada de Gelfand	21
2.2. Conjetura de Acotación	31
3. Contractibilidad Simultánea	37
3.1. Introducción	37
3.2. Rango óptimo para contractibilidad simultánea	39
3.3. Conjuntos con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$	48
4. Cálculo exacto y cálculo aproximado del Radio Espectral Conjunto	55
4.1. Matrices palindrómicas de orden 2	55
4.2. Matrices con igual Radio Espectral	62
4.3. Aproximación para el Radio Espectral Conjunto	65
A. Matrices con igual Radio Espectral	71
B. Rutinas en Matlab utilizadas	74
Bibliografía	78

Capítulo 1

Introducción

La noción de Radio Espectral Conjunto fue introducida en el trabajo “*A note on the joint spectral radius*” de Gian-Carlo Rota y Gilbert Strang, publicado en el año 1960 (ver [22]). Como el mismo Strang explica (ver [4]), la motivación era puramente teórica, y de hecho la publicación permaneció prácticamente desapercibida hasta el año 1992, fecha en que Ingrid Daubechies y Jeffrey C. Lagarias publican la serie de artículos [9, 10, 11]. En líneas generales, Daubechies y Lagarias redescubren el Radio Espectral Conjunto y lo relacionan con la convergencia de productos infinitos de matrices, asociados a las ecuaciones en diferencias con dos escalas. Con el correr de los años han ido surgiendo numerosas aplicaciones a diversas áreas como por ejemplo wavelets, teoría de control, teoría de números, codificación, etc. Paralelamente, se fueron desarrollando técnicas para aproximar el Radio Espectral Conjunto, así como el cálculo exacto del mismo en conjuntos particulares de matrices, dado que en general, es extremadamente difícil de obtener.

En [11], además de estudiar el Radio Espectral Conjunto definido por Rota y Strang, Daubechies y Lagarias definen el Radio Espectral Generalizado. Así, dado un conjunto cualquiera Σ de matrices cuadradas con coeficientes complejos y considerando a Σ^k como el conjunto formado por todos los posibles productos de k factores formados por matrices en Σ , y dada una cierta norma $\|\cdot\|$ se define

- Radio Espectral Generalizado:

$$\rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma)^{1/k} \quad \text{con } \rho_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A)$$

- Radio Espectral Conjunto:

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} \quad \text{con } \widehat{\rho}_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|$$

En el trabajo citado los autores demuestran la desigualdad (1.13) y en base a ella proponen:

- **Conjetura para el Radio Espectral Generalizado.** Posteriormente denominada Fórmula Generalizada de Gelfand: para conjuntos finitos Σ se cumple

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma)$$

También proponen una segunda conjetura relacionada con propiedades de acotación para los conjuntos que convergen en producto, ver (1.12) y Definición 2.1.1:

- **Conjetura de Acotación.** Todos los conjuntos finitos que poseen la propiedad de convergencia en producto generan un semigrupo multiplicativo acotado.

Estas dos conjeturas fueron demostradas por primera vez por Mare A. Berger y Yang Wang [2] (1992) utilizando herramientas avanzadas de teoría de anillos. Posteriormente Ludwig Elsner [14] (1995) publica una nueva demostración basada en elementos de conjuntos convexos. También aparecen otras demostraciones: M.-H. Shih, J.-W. Wu y C.-T. Pang [24] (1997); Jairo Bochi [7] (2003).

En el año 1995, J. Lagarias y Y. Wang [18] proponen dos nuevas conjeturas relacionadas con la necesidad de calcular en forma exacta el Radio Espectral Conjunto:

- **Conjetura de Finitud.** Para cada conjunto finito Σ de matrices con coeficientes reales, existe un valor k_0 para el cual

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \left\{ \sup_{A \in \Sigma^{k_0}} \rho(A) \right\}^{1/k_0}.$$

- **Conjetura de Finitud Normada.** Dada una norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}^{n \times n}$ y un conjunto finito Σ de matrices con coeficientes reales tal que para toda $A \in \Sigma$ se cumple $\|A\| \leq 1$ y $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1$, entonces existe un valor k_0 tal que

$$1 = \widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) = \left\{ \sup_{A \in \Sigma^{k_0}} \rho(A) \right\}^{1/k_0}.$$

En el artículo se prueba la equivalencia entre estas dos nuevas conjeturas; y se presentan demostraciones para la Conjetura de Finitud Normada para casos especiales de normas. Sin embargo, posteriormente se publican pruebas/contraejemplos mostrando la invalidez en general de estas conjeturas: Thierry Bousch y Jean Mairesse [2] (2002); Vincent D. Blondel, Jacques Theys y Alexander A. Vladimirov [6] (2003). En el contraejemplo propuesto por Blondel-Theys-Vladimirov se prueba que existen infinitos valores de a para los cuales las siguientes matrices no cumplen la conjetura

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 := a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las conjeturas de finitud están relacionadas con la necesidad de encontrar procedimientos efectivos que permitan calcular el Radio Espectral Conjunto; o decidir si un conjunto finito de matrices tiene Radio Espectral Conjunto menor a 1, dado que así estaban caracterizados los conjuntos que convergen en producto. A pesar de la importancia que tiene el Radio Espectral Conjunto en las distintas áreas de aplicación, su cálculo resulta extremadamente complejo, incluso para matrices de dimensión 2×2 . Es por esto que gran parte de los trabajos recientes en el tema se ocupan tanto de estudiar métodos de aproximación del Radio Espectral Conjunto como de calcularlo en forma exacta en conjuntos específicos de matrices [5, 7, 15, 17, 19].

Descripción del Trabajo de Iniciación a la Investigación

El presente trabajo de iniciación a la investigación consiste en el desarrollo de los resultados más importantes sobre el Radio Espectral Conjunto, utilizando como principales referencias los artículos [1, 2, 5, 11, 12, 14, 18]. En los Aspectos Preliminares se presenta un breve resumen de las definiciones y propiedades del álgebra lineal y el análisis matricial necesarios a lo largo del trabajo; haciendo énfasis en el radio espectral $\rho(A)$ y concluyendo con la Proposición 1.1.4 donde se caracteriza a través de una serie de afirmaciones equivalentes las matrices con $\rho(A) < 1$.

1. $A^k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.
2. $\rho(A) < 1$.
3. Existe una matriz $H > 0$ tal que $A^*HA < H$.
4. Existe una matriz $H > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tal que $A^*HA \leq \gamma^2 H$.
5. Existe una matriz invertible S tal que $\|S^{-1}AS\|_{sp} < 1$.
6. Existe una norma operador $\|\cdot\|_*$ tal que $\|A\|_* < 1$.

Cuadro 1.1: Equivalencias entre proposiciones relacionadas al radio espectral

En la siguiente sección del capítulo se define rigurosamente el Radio Espectral Conjunto y el Radio Espectral Generalizado; dado un conjunto cualquiera Σ de matrices cuadradas con coeficientes complejos y considerando a Σ^k como el conjunto formado por todos los posibles productos de k factores formados por matrices en Σ , y dada una cierta norma $\|\cdot\|$ se define

- Radio Espectral Generalizado:

$$\rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma)^{1/k} \quad \text{con } \rho_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A).$$

- Radio Espectral Conjunto:

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} \quad \text{con } \widehat{\rho}_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|.$$

Notar que la diferencia en ambas definiciones radica en que $\rho_k(\Sigma)$ se define con el radio espectral en el primer caso; y $\widehat{\rho}_k(\Sigma)$ con la norma elegida previamente. En la misma sección se demuestran algunas de sus propiedades, y se incluyen algunos ejemplos demostrativos. En particular se desarrolla la demostración de la desigualdad

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k},$$

válida para todo $k \geq 1$ que es una generalización de la desigualdad tradicional conocida para el radio espectral $\rho(A) \leq \|A\|$. El capítulo siguiente está dedicado a la demostración de la Fórmula Generalizada de Gelfand, conjeturada inicialmente en [11] para conjuntos finitos de matrices:

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) \quad \text{para conjuntos } \Sigma \text{ acotados.}$$

La demostración está basada en [14] porque se considera, en algún sentido, más simple que la publicada por primera vez en [2]. La razón por la que tal resultado generaliza la fórmula clásica de Gelfand es la siguiente:

- Para una única matriz $A \in \mathbb{C}^n$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A^k)^{1/k} = \rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

- Para conjuntos acotados de matrices $\Sigma \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} = \rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\| \right\}^{1/k}.$$

En la sección se incluye una caracterización para conjuntos acotados

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \sup_{A \in \Sigma} v(A),$$

donde $\mathcal{N}$ es el conjunto de todas las normas operador; es decir, aquellas normas sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$ definidas a partir de una norma sobre $\mathbb{C}^n$. Además, en el capítulo mencionado se prueba que para conjuntos de matrices en bloque el cálculo del Radio Espectral Conjunto se reduce al cómputo del mismo en los bloques. Estos dos últimos resultados permiten calcular el Radio Espectral Conjunto en forma sencilla para el caso de conjuntos de matrices con ciertas propiedades:

- Para Σ formado por matrices normales
- Para Σ formado por matrices de forma triangular superior

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma} \rho(A)$$

Si bien para la demostración de la Fórmula generalizada de Gelfand se utilizó como referencia el artículo de Elsner [14], el capítulo culmina con los resultados más importantes del artículo de Berger-Wang [2], incluyendo la demostración de la validez de la Conjetura

de Acotación. Estos últimos resultados pueden interpretarse como una generalización de los items 1, 2 y 6 del Cuadro 1.1

El Capítulo 3 está dedicado completamente al artículo [1], publicado en el año 1998 por Tsuyoshi Ando y Mau-Hsiang Shih, en el cual se estudian los conjuntos de matrices contractibles simultáneamente por alguna matriz invertible S . Según la definición tradicional, una matriz A es contractible si existe una matriz invertible S tal que

$$\|S^{-1}AS\|_{sp} < 1 .$$

Notar que esto es equivalente a que $\rho(A) < 1$. Para conjuntos Σ de matrices se define en forma similar la contractibilidad simultánea si existe una matriz invertible S tal que

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} < 1 .$$

El principal resultado del artículo Ando-Shih relaciona el Radio Espectral Conjunto con la contractibilidad simultánea; estableciendo que la condición $\widehat{\rho}(\Sigma) \in [0, \frac{1}{n})$ garantiza la contractibilidad simultánea de los conjuntos acotados $\Sigma \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$. En la demostración del teorema se utiliza la Fórmula Generalizada de Gelfand y una versión matricial, Teorema 3.2.2, del Teorema Elipsoidal de John, publicado originalmente en el año 1948 [16]. En el Teorema 3.2.2 se incluye, dado $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \gamma < 1$, la construcción de un ejemplo de conjunto finito Σ con $\widehat{\rho}(\Sigma) = \gamma$ pero que no es simultáneamente contractible. Los resultados de la Sección 3.2 permiten generalizar los puntos 2, 4 y 5 del Cuadro 1.1. En la última sección del capítulo se estudia la relación entre $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ y la triangularización simultánea de las matrices de Σ . La condición $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ garantiza que el conjunto Σ puede triangularizarse simultáneamente a través de una matriz unitaria U . La contracción en estos casos puede hacerse tan pequeña como se quiera, en el sentido que dado cualquier $\epsilon > 0$ existe una matriz invertible S tal que

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} < \epsilon .$$

En el Capítulo 4 se aborda el problema del cómputo del Radio Espectral Conjunto. Contrariamente a su importancia en las aplicaciones, el cálculo efectivo del Radio Espectral Conjunto es sumamente difícil; incluso para conjuntos de matrices de tamaño 2×2 . Podría decirse que hay dos líneas diferenciadas relacionadas con este problema. Por un lado se buscan conjuntos de matrices con ciertas características que permitan calcular de forma exacta su Radio Espectral Conjunto. Por otro lado existen numerosos trabajos que tratan sobre algoritmos que permitan aproximar el Radio Espectral Conjunto en casos más generales, buscando estimar la precisión de la estimación y/o las tasas de convergencia de los algoritmos. En las primeras dos secciones del capítulo se desarrolla el artículo de Bernhard Mößner [19] publicado en el año 2009 cuyo principal resultado es el Teorema 4.1.5 para matrices palindrómicas. Un par de matrices L y R se denominan palindrómicas si están relacionadas por

$$L = PRP \quad \text{con } P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

El Teorema 4.1.5 establece que en estos casos se cumple

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \widehat{\rho}(\{L, R\}) = \max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\}.$$

En la última sección se desarrolla el artículo [5] (2004) de Vincent D. Blondel, Yurri Nesterov y Jacques Theys que introduce una aproximación para el Radio Espectral Conjunto mediante normas elipsoidales definidas por

$$\rho_a(\Sigma) = \inf_{P>0} \sup_{A \in \Sigma} \|A\|_P,$$

donde el ínfimo está tomado sobre todas las matrices P definidas positivas; y $\|\cdot\|_P$ es la norma operador asociada a la matriz P a través de la norma definida sobre $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_P &= \sqrt{\langle Px, x \rangle} = \sqrt{x^* P x} \\ \|A\|_P &= \sup \{ \|Ax\|_P : \|x\|_P = 1 \} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^* A^* P A x}}{\sqrt{x^* P x}}. \end{aligned}$$

La exactitud de esta aproximación está dada por la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rho_a(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \rho_a(\Sigma).$$

La demostración original de [5] está planteada sólo para conjunto Σ finitos. Sin embargo, la demostración puede generalizarse para conjuntos Σ acotados a través de los resultados de los artículos de Ando-Shih [1] y de Berger-Wang [2] de las secciones anteriores. El cálculo de la aproximación $\rho_a(\Sigma)$ puede realizarse en forma efectiva mediante los procedimientos de optimización con restricciones. En el Apéndice B se incluyen rutinas elaboradas en Matlab para un ejemplo clásico: un par de matrices dependientes del parámetro a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -2/a & 1 \end{pmatrix}.$$

Con estas rutinas se logró reproducir las gráficas demostrativas presentadas en [5] donde puede observarse la exactitud de la aproximación $\rho_a(\Sigma)$.

1.1. Aspectos preliminares

Se notará con $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ a la $\mathbb{C}$ -álgebra $\mathbb{C}^{n \times n}$ de matrices cuadradas de tamaño n con coeficientes complejos. Se usará $\|A\|$ para representar la norma asociada a la matriz $A \in \mathbb{M}_n$. En la mayoría de los casos, $\|A\|$ será la norma operador asociada a una respectiva norma $\|x\|$ sobre $\mathbb{C}^n$. Siempre se mantendrá esta convención salvo que explícitamente se indique lo contrario. Se usarán las notaciones tradicionales para las distintas normas sobre $\mathbb{C}^n$ o sobre $\mathbb{M}_n$. En particular se usará la notación $\|\cdot\|_{sp}$ para la norma espectral sobre $\mathbb{M}_n$:

$$\begin{aligned} \|A\|_{sp} &= \text{Norma Espectral} = \text{Norma operador asociada a la norma-2} \\ &= \sup \{ \|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1 \}. \end{aligned}$$



Por tratarse de espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas son equivalentes entre sí. En particular se tiene, para todo $x \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2} \|x\|_\infty . \quad (1.1)$$

Todas las normas operador son **normas matriciales** o **normas submultiplicativas**:

$$\|A.B\| \leq \|A\| . \|B\| .$$

Cualquier otra norma, no necesariamente norma operador, que cumpla con esta desigualdad se dirá también **norma matricial**.

La norma $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = x^* x$ proviene del producto interno usual sobre $\mathbb{C}^n$. En forma más general, se definen las **normas elipsoidales**, tomando cualquier matriz P definida positiva

$$\|x\|_P = \sqrt{\langle Px, x \rangle} = \langle x, x \rangle_P^{1/2} = \sqrt{x^* P x} . \quad (1.2)$$

El **Radio Espectral** $\rho(A)$ se define de la siguiente manera, tomando $\sigma(A)$ como el **Espectro** de la matriz A ,

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} . \quad (1.3)$$

Se utilizarán las notaciones habituales:

- $A \geq 0$: La matriz A es semidefinida positiva.
- $A > 0$: La matriz A es definida positiva.
- $A \geq B$: Las matrices A y B son autoadjuntas y $A - B \geq 0$.
- $A > B$: Las matrices A y B son autoadjuntas y $A - B > 0$.

También se utilizará la siguiente notación para la enumeración de los autovalores ordenados de mayor a menor de una matriz $A \geq 0$, y para los valores singulares de cualquier $A \in \mathbb{M}_n$:

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A) \quad (1.4)$$

$$s_1(A) \geq \dots \geq s_n(A) . \quad (1.5)$$

Con esta notación se sabe que

$$\|A\|_{sp} = s_1(A) = \rho(AA^*)^{1/2} .$$

En particular, para matrices normales se cumple

$$\|A\|_{sp} = \rho(A) .$$

A continuación se presentan los resultados preliminares más importantes que se utilizarán a lo largo del trabajo, relacionados con el radio espectral y las normas.

Proposición 1.1.1. Para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{M}_n$ se cumple

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (1.6)$$

y en forma más general, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

Demostración: Dado $\lambda \in \sigma(A)$ y un correspondiente autovector $v \in \mathbb{M}_n$, se construye la matriz $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con todas sus columnas iguales al vector v . De modo que usando la submultiplicatividad de la norma

$$|\lambda| \|V\| = \|\lambda V\| = \|AV\| \leq \|A\| \|V\|.$$

Y por lo tanto $\rho(A) \leq \|A\|$. Considerando que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ se obtiene la generalización $\rho(A)^k \leq \|A^k\|$. ■

La desigualdad (1.6) representa una cota superior para el radio espectral. Una cota inferior, en términos de la norma de la matriz, se obtiene como consecuencia del Teorema de Cayley-Hamilton del álgebra lineal.

Proposición 1.1.2. Para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{M}_n$ se cumple

$$\|A^n\| \leq C \cdot \rho(A) \cdot \|A\|^{n-1} \quad \text{con} \quad C = 2^n - 1. \quad (1.7)$$

Demostración: Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ el polinomio característico de A . De la ecuación $p(A) = 0$ se deduce

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0)$$

$$\|A^n\| \leq \|a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \|A\|^i. \quad (1.8)$$

Los coeficientes a_i pueden expresarse en términos de los autovalores de A como una suma/resta de $\binom{n}{i}$ términos donde en cada término hay un producto de $n-i$ autovalores de A . Por lo tanto se deduce que

$$|a_i| \leq \binom{n}{i} \rho(A)^{n-i} \leq \binom{n}{i} \rho(A) \|A\|^{n-i-1} \quad \text{para} \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (1.9)$$

De (1.8) y (1.9) se tiene

$$\|A^n\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \rho(A) \|A\|^{n-i-1} \|A\|^i = \rho(A) \|A\|^{n-1} (2^n - 1).$$

Las desigualdades (1.6) y (1.7) permiten deducir la fórmula de Gelfand para el Radio Espectral. ■

Teorema 1.1.3 (Fórmula de Gelfand para el Radio Espectral). *Dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ se cumple*

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} . \quad (1.10)$$

Demostración: Considerando que todas las normas son equivalentes se puede suponer que la norma es submultiplicativa. Por lo tanto $\|A^k\|^{1/k} \leq \|A\|$. Esto muestra que el límite superior de la sucesión $\|A^k\|^{1/k}$ existe:

$$r := \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} .$$

Aplicando la cota inferior (1.7) a la matriz A^k y tomando la potencia $1/kn$ se tiene

$$\|(A^k)^n\| \leq C \rho(A^k) \|A^k\|^{n-1}$$

$$\|A^{kn}\|^{1/kn} \leq C^{1/kn} \rho(A)^{1/n} \|A^k\|^{(n-1)/kn} ,$$

tomando límite superior a ambos lados con $k \rightarrow \infty$

$$r \leq \rho(A)^{1/n} r^{(n-1)/n} \implies r \leq \rho(A) .$$

Además se cumple que $\rho(A) \leq \inf_{k \leq i} \|A^i\|^{1/i}$ para todo $k \geq 1$. Y por lo tanto

$$\rho(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} .$$

Con lo cual

$$\rho(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) .$$

■

De la demostración puede observarse que si bien en la Fórmula de Gelfand (1.10) aparece involucrado el límite, se tiene que $\rho(A) = \inf_{k \geq 1} \|A^k\|^{1/k}$. La fórmula permite interpretar al radio espectral como la tasa de crecimiento de las potencias de la matriz,

$$\|A^k\| \sim \rho(A^k) \quad \text{para } k \rightarrow \infty .$$

Además, considerando que $\rho(A) = \rho(A^k)^{1/k}$ para todo $k \geq 1$, se tiene la identidad para calcular el radio espectral de una matriz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A^k)^{1/k} = \rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} . \quad (1.11)$$

La siguiente proposición indica caracterizaciones para las matrices con radio espectral menor a 1.

Proposición 1.1.4. *Dada una matriz cualquiera $A \in \mathbb{M}_n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $A^k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.
2. $\rho(A) < 1$.
3. Existe una matriz $H > 0$ tal que $A^*HA < H$.
4. Existe una matriz $H > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tal que $A^*HA \leq \gamma^2 H$.
5. Existe una matriz invertible S tal que $\|S^{-1}AS\|_{sp} < 1$.
6. Existe una norma operador $\|\cdot\|_*$ tal que $\|A\|_* < 1$.

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$: Dado $\lambda \in \sigma(A)$ y $x \neq 0$ autovector asociado correspondiente. Se tiene que $A^k x = \lambda^k x \rightarrow 0$ y por lo tanto $|\lambda| < 1$.

$2 \Rightarrow 3$: Se toma $\rho(A) < \gamma < 1$. De la fórmula de Gelfand para A y para A^* se deduce que existe $k_0 \geq 1$ tal que para todo $k \geq k_0$ se cumple $\|A^k\|^{1/k} < \gamma$ y $\|(A^*)^k\|^{1/k} < \gamma$. De modo que la siguiente serie converge y puede definirse correctamente la matriz

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k = I_n + A^*A + (A^*)^2 A^2 + \dots$$

Así definida resulta $H > 0$ y también $A^*HA < H$; dado que

$$H - A^*HA = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k - \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^{k+1} A^{k+1} = I_n > 0.$$

$3 \Rightarrow 4$: En general se cumple que si $A < B$ entonces se puede tomar $\gamma \in (0, 1)$ tal que $A \leq \gamma^2 B$.

$4 \Rightarrow 5$: Si $H > 0$ entonces $H^{-1} = SS^*$ para alguna matriz S invertible. Con lo cual

$$\|S^{-1}AS\|_{sp}^2 = \rho((S^{-1}AS)^*(S^{-1}AS)) = \rho(S^*A^*(S^{-1})^*S^{-1}AS) = \rho(S^*A^*HAS).$$

A su vez, la desigualdad $A^*HA \leq \gamma^2 H$ implica conjugando con S

$$\begin{aligned} A^*HA &\leq \gamma^2 H \\ S^*A^*HAS &\leq \gamma^2 S^*HS \\ S^*A^*HAS &\leq \gamma^2 I_n. \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\|S^{-1}AS\|_{sp}^2 = \rho(S^*A^*HAS) < \gamma^2 < 1$.

$5 \Rightarrow 6$: Tomando $H = (S^{-1})^*S^{-1} > 0$ se define la norma elipsoidal sobre $\mathbb{C}^n$

$$\|x\|_H^2 = \langle Hx, x \rangle = \langle S^{-1}x, S^{-1}x \rangle = \|S^{-1}x\|_2^2.$$

La norma operador $\|\cdot\|_H$ sobre $\mathbb{M}_n$ asociada es una norma matricial y cumple

$$\begin{aligned}\|A\|_H^2 &= \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H^2 = \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}Ax\|_2^2 \\ &= \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}ASS^{-1}x\|_2^2 \\ &\leq \sup_{\|S^{-1}x\|_2=1} \|S^{-1}AS\|_{sp}^2 \|S^{-1}x\|_2^2 \\ &= \|S^{-1}AS\|_{sp}^2 < 1 .\end{aligned}$$

$6 \Rightarrow 1$: Se toma $\|A\|_* < \gamma < 1$; de modo que $0 \leq \|A^k\|_* \leq \|A\|_*^k < \gamma^k < 1$, y por lo tanto $A^k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. ■

En la siguiente sección se define el Radio Espectral Conjunto y el Radio Espectral Generalizado; se mostrarán ejemplos y se demostrarán algunas sus propiedades generales.

1.2. Radio Espectral Conjunto

La definición formal de Radio Espectral Conjunto fue presentada por primera vez por Rota y Strang en el año 1960 en [22]. Posteriormente, en 1992, Daubechies y Lagarias en [11] la recuperaron al trabajar en el estudio de la convergencia de productos infinitos de matrices. Un producto infinito $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ de matrices en $\mathbb{M}_n$ es **convergente a derecha** si existe el límite $\lim_{i \rightarrow \infty} A_1 \dots A_i$, y en ese caso se define

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{i \rightarrow \infty} A_1 \dots A_i .$$

Un conjunto Σ de matrices se dice que es **convergente en producto a derecha** (RCP de 'right-convergent product') o que tiene la propiedad de convergencia en producto a derecha, si todos los productos infinitos formados por elementos de Σ son convergentes a derecha según la definición anterior. En el caso que Σ sea un conjunto finito, $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, cualquier sucesión de elementos de Σ puede caracterizarse por una sucesión $\mathbf{d} = \{d_j\}_{j \geq 1}$ de índices tomados del conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$. Si se denota con S_m al conjunto de las sucesiones de esta forma, y considerando un conjunto Σ finito y con la propiedad RCP se puede definir la **función límite** $M_{\Sigma}(\cdot)$ de la siguiente manera

$$M_{\Sigma}(\mathbf{d}) := \prod_{i=1}^{\infty} A_{d_i} := A_{\mathbf{d}} . \quad (1.12)$$

La notación en la fórmula anterior (1.12) es utilizada muy frecuentemente; se puede usar tanto para considerar productos a derecha como productos a izquierda (LCP 'left-convergent product'). El propósito de Daubechies y Lagarias en [11] es caracterizar a los conjuntos de matrices, finitos o infinitos, que posean la propiedad RCP. Y para ello estudian el Radio Espectral Conjunto y el Radio Espectral Generalizado. En el mismo año 1992, Berger y Wang

abordaron también el estudio de los conjuntos de matrices con propiedades de convergencia; incorporando algunos resultados adicionales en esta dirección.

Definición 1.2.1. Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$, se define Σ^k como el conjunto formado por todos los posibles productos de k factores tomados del conjunto Σ .

Dado $\Sigma = \{A_i\}_{i \in I}$.

$$\Sigma^k = \left\{ \prod_{j=1}^k A_j : A_j \in \Sigma, j = 1 \dots k \right\} \quad \text{para } k \geq 1$$

$$\rho_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \quad y \quad \widehat{\rho}_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|.$$

La diferencia entre $\rho_k(\Sigma)$ y $\widehat{\rho}_k(\Sigma)$ está en el uso del radio espectral tradicional $\rho(A)$ o la norma $\|A\|$ respectivamente. En esta última se toma una norma $\|\cdot\|$ cualquiera. A sabiendas de que el valor de $\widehat{\rho}_k(\Sigma)$ cambiará según la elección. En el caso que sea necesario se utilizará la notación $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)$ para indicar explícitamente la dependencia respecto a la norma elegida. Aunque no es frecuente hacer esta salvedad dado que la definición final para el Radio Espectral Conjunto queda independiente de la norma utilizada. ▲

La siguiente desigualdad se utilizará continuamente, válida para normas matriciales

Proposición 1.2.2. Dados $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$, $\|\cdot\|$ una norma matricial y $k, l \geq 1$ números enteros positivos entonces

$$\widehat{\rho}_{k+l}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma) \cdot \widehat{\rho}_l(\Sigma).$$

Demostración: La demostración es consecuencia de la definición de los conjunto potencias de Σ dado que $\Sigma^{k+l} \subseteq (\Sigma^k) \cdot (\Sigma^l)$, y de la propiedad submultiplicativa de las normas matriciales. ■

No pasa lo mismo para los $\rho_k(\Sigma)$ dado que para el radio espectral no se cumple en general la desigualdad $\rho(A \cdot B) \leq \rho(A) \cdot \rho(B)$.

Definición 1.2.3. Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ se definen

- *Radio Espectral Conjunto:*

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\| \right\}^{1/k}.$$

- *Radio Espectral Generalizado:*

$$\rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma)^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k}.$$

Dado que todas las normas son equivalentes, la definición de Radio Espectral Conjunto es independiente de la norma elegida. Estas definiciones coinciden cuando Σ está formado por una única matriz porque si $\Sigma = \{A\}$ entonces $\Sigma^k = \{A^k\}$ con lo cual,

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(\Sigma) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\| \right\}^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A) . \\ \rho(\Sigma) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(A^k)^{1/k} = \rho(A) .\end{aligned}$$

No se hace distinción en las definiciones de los casos en los que Σ sea un conjunto finito o infinito: o sea acotado o no acotado. En todos los casos, las definiciones están bien establecidas aceptándose las posibilidades de que $\widehat{\rho}(\Sigma) = \infty$ ó $\rho(\Sigma) = \infty$.

Ejemplos 1.2.4. Se presentan los siguientes casos para ejemplificar el cálculo del Radio Espectral Conjunto y del Radio Espectral Generalizado con tres alternativas posibles:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \Sigma_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\} \\ \Sigma_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \dots \right\} .\end{aligned}$$

El primer caso Σ_1 es un conjunto finito de matrices de 2×2 . Los otros dos casos Σ_2 y Σ_3 son conjuntos infinitos también de tamaño 2×2 . Para calcular los valores de $\rho(\Sigma_1)$, $\rho(\Sigma_2)$, $\widehat{\rho}(\Sigma_1)$ y $\widehat{\rho}(\Sigma_2)$ se utiliza la forma general de los productos de matrices con esta forma particular

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, para todo $k \geq 1$ las matrices de los conjuntos Σ_1^k y Σ_2^k son todas de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Los Radios Espectrales Generalizados pueden ser calculados explícitamente

$$\begin{aligned}\rho(\Sigma_1) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma_1^k} \rho(A) \right\}^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \rho \left(\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}^{1/k} = 1 \\ \rho(\Sigma_2) &= \text{de igual manera} = 1 .\end{aligned}$$



Para calcular los Radios Espectrales Conjuntos se elige la norma operador asociada a la norma-1 sobre $\mathbb{C}^n$, para la cual se sabe

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| .$$

Considerando que α es algún número entero positivo se tiene

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 1 + \alpha .$$

Y por lo tanto el supremo de las normas en Σ_1^k se alcanza al multiplicar k -veces la matriz con la entrada $\alpha = N$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_k(\Sigma_1) &= \sup_{A \in \Sigma_1^k} \|A\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & kN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = 1 + kN \\ \hat{\rho}(\Sigma_1) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}_k(\Sigma_1)^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (1 + kN)^{1/k} = 1 . \end{aligned}$$

En este primer caso el Radio Espectral Conjunto y el Radio Espectral Generalizado coinciden y valen 1. En cambio, Σ_2^k no está acotado en norma, por lo que $\hat{\rho}_k(\Sigma_2) = \infty$ para todo $k \geq 1$. Y en consecuencia $\hat{\rho}(\Sigma_2) = \infty$. En forma similar pero más sencilla se puede calcular $\hat{\rho}(\Sigma_3) = \infty$ y $\rho(\Sigma_3) = \infty$ dado que los supremos tanto para $\rho(A)$ o $\|A\|_1$ no están acotados sobre Σ_3^k para ningún valor de k . ▲

Observación 1.2.5. De la propiedad $\rho(AB) = \rho(BA)$ se deduce que $\rho(\Sigma)$ y los $\rho_k(\Sigma)$ resultan invariantes ante transformaciones similares. Lo mismo sucede para $\hat{\rho}(\Sigma)$ dado que puede utilizarse alguna norma matricial que cumple $\|S^{-1}AS\| \leq \|S^{-1}\| \|S\| \|A\|$. Naturalmente los $\hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)$ no son invariantes ante estos cambios con transformaciones similares; salvo que se utilice alguna norma con esas características. Como por ejemplo la norma espectral $\|\cdot\|_{sp}$ que es invariante ante transformaciones con matrices unitarias. En resumen, si S es una matriz invertible y U es una matriz unitaria

$$\begin{aligned} \rho(\Sigma) &= \rho(S^{-1}\Sigma S) \quad , \quad \rho_k(\Sigma) = \rho_k(S^{-1}\Sigma S) \\ \hat{\rho}(\Sigma) &= \hat{\rho}(S^{-1}\Sigma S) \quad , \quad \hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|_{sp}) = \hat{\rho}_k(U^* \Sigma U, \|\cdot\|_{sp}) . \end{aligned}$$

Para el caso que se utilice una norma matricial genérica se cumple

$$(\|S\| \cdot \|S^{-1}\|)^{-1} \cdot \hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) \leq \hat{\rho}_k(S^{-1}\Sigma S, \|\cdot\|) \leq \|S\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) ,$$

Lo cual puede corroborarse dado que para toda $A = A_1, \dots, A_k \in \Sigma^k$ se tiene

$$S^{-1}AS = S^{-1}A_1SS^{-1}A_2S \dots S^{-1}A_kS \in (S^{-1}\Sigma S)^k .$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|A\| &= \|SS^{-1}ASS^{-1}\| \leq \|S\| \|S^{-1}AS\| \|S^{-1}\| \\ \sup\{\|A\| : A \in \Sigma^k\} &\leq \sup\{\|A\| : A \in (S^{-1}\Sigma S)^k\} \|S^{-1}\| \|S\| \\ \hat{\rho}_k(\Sigma) &\leq \hat{\rho}_k(S^{-1}\Sigma S) \|S^{-1}\| \|S\| . \end{aligned}$$

▲

El resultado principal referido al Radio Espectral Conjunto es la Fórmula Generalizada de Gelfand (Teorema 2.1.16) que establece que para conjuntos Σ acotados se verifica siempre la igualdad $\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma)$.

En la siguiente proposición se generaliza la desigualdad (1.6)

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$$

para normas matriciales. La demostración se publicó en [11] corregida posteriormente por los mismos autores en [12]. No se hace diferencia entre conjuntos acotados o no acotados; aunque la tercer desigualdad sólo es válida en general para normas matriciales.

Proposición 1.2.6. *Para cualquier conjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$, y para cualquier norma matricial $\|\cdot\|$ y cualquier $k \geq 1$*

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} = \widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)^{1/k} . \quad (1.13)$$

Demostración:

$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \rho(\Sigma)$: Dados $k, m \geq 1$ se cumple $\rho_k(\Sigma)^m \leq \rho_{km}(\Sigma)$. Esto es porque el conjunto $(\Sigma^k)^m$ está incluido en Σ^{km} y porque $\rho(A^j) = \rho(A)^j$ para cualquier valor de j . Y por lo tanto

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \{\rho_{km}(\Sigma)\}^{1/km} ;$$

tomando límite superior para m

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \{\rho_{km}(\Sigma)\}^{1/km} \leq \rho(\Sigma) .$$

$\rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma)$: Dada $A \in \Sigma^k$ se cumple $\rho(A) \leq \|A\|$. Y por lo tanto

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} = \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} \leq \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\| \right\}^{1/k} = \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}$$

$$\rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) .$$

$\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)^{1/k}$: En este caso la demostración es más extensa porque hay que contemplar los posibles casos en que $\widehat{\rho}(\Sigma)$ sea ∞ pero alguno de los $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)$ no lo sea. Estos casos sólo son posibles cuando Σ es infinito; para Σ finito la demostración puede resumirse considerablemente. Observar que la afirmación $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) = \infty$ significa que el conjunto Σ^k no está acotado en la norma $\|\cdot\|$ con la que se está trabajando. Debido a la equivalencia entre las todas la normas, la condición de acotado de Σ^k es independiente de $\|\cdot\|$.

Paso 1: La desigualdad deseada se cumple si $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) = \infty$ para todo $k \geq 1$. Por lo tanto se supondrá que existe $k \geq 1$ para el cual $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) < \infty$.

Paso 2: Se verá que bajo la hipótesis de que $\widehat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) < \infty$ para algún valor de k entonces existe un $N \geq 1$ tal que para todo $l \geq N$ se cumple también $\widehat{\rho}_l(\Sigma, \|\cdot\|) < \infty$. Si esta afirmación es verdadera para alguna norma en particular entonces es válida para

cualquier otra norma; porque la condición de acotación es independiente de $\|\cdot\|$. Por este motivo se trabajará con la norma espectral $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{sp}$ y se usará la notación implícita $\widehat{\rho}_k(\Sigma)$; recordar que esta norma es la norma operador asociada a la norma-2 sobre $\mathbb{C}^n$. La demostración de la afirmación se hará por inducción sobre n , la dimensión de las matrices.

Paso 2a: El caso $n = 1$ se deduce de que $\|a\|_{sp} = |a|$; y por lo tanto $|ab| = |a||b|$. Sea C una cota para Σ^k . De modo que $|a| \leq C^{1/k}$ para todo $a \in \Sigma$. Y así $C^{l/k}$ es una cota de Σ^l para todo $l \geq 1$.

Paso 2b: Para el paso inductivo se supone entonces que $n > 1$ y que la afirmación es cierta para $n - 1$. Se supone además, sin pérdida de generalidad que k es el menor entero positivo para el cual Σ^k está acotado. O sea, $\widehat{\rho}_1(\Sigma) = \widehat{\rho}_2(\Sigma) = \dots = \widehat{\rho}_{k-1}(\Sigma) = \infty$ y $\widehat{\rho}_k(\Sigma) < \infty$. Primero se verá que las matrices en Σ pueden reducirse a matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } B \in \mathbb{M}_{n-1} \text{ y } v \in \mathbb{C}^{n-1} \quad (1.14)$$

Para ello se define $V = \overline{\{R(A) : A \in \Sigma\}}$; o sea, el subespacio generado por los rangos de las matrices $A \in \Sigma$. Por estar en dimensión finita existe un subconjunto finito $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \Sigma$ tal que $V = \overline{\{R(A_1), \dots, R(A_m)\}}$.

Paso 2c: V es un subespacio propio de $\mathbb{C}^n$ invariante por todas las $A \in \Sigma$.

Chequear que V es invariante es sencillo; al igual que chequear $V \neq \{0\}$ dado que sólo es posible si $\Sigma = \{0\}$ con lo cual todo sería trivial.

Dados $x = \sum_{i=1}^m A_i x_i \in V$ y $A \in \Sigma^{k-1}$ se tiene $AA_i \in \Sigma^k$ y por lo tanto

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^m AA_i x_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^m \|AA_i x_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^m \|AA_i\|_{sp} \|x_i\|_2 \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma) \sum_{i=1}^m \|x_i\|_2 < \infty$$

y por lo tanto:

$$\sup_{A \in \Sigma^{k-1}} \|Ax\|_2 < \infty.$$

Si $V = \mathbb{C}^n$, el Principio de Acotación Uniforme implica que

$$\widehat{\rho}_{k-1}(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^{k-1}} \|A\|_{sp} < \infty.$$

Esto contradice la hipótesis inicial de que k era el menor valor para las distintas potencias de Σ están acotadas. Con lo cual V es un subespacio propio de $\mathbb{C}^n$.

Paso 2d: No necesariamente la dimensión de V es $n - 1$, sólo es necesario que sea estrictamente menor a n . En todo caso se puede completar el subespacio para que coincida con un hiperespacio de codimension igual a 1. A través de una transformación unitaria con una matriz invertible U adecuada se puede suponer que las matrices de Σ son todas de la

forma (1.14) de modo que al multiplicarse entre sí mantienen la forma y se cumple

$$\begin{aligned} A \in \Sigma^l &\iff A = A_1 \dots A_l \quad \text{con } A_i \in \Sigma \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} B_l & v_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1 \dots B_l & B_1 \dots B_{l-1} v_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } B_1 \dots B_l \in \mathbb{M}_{n-1}. \end{aligned}$$

De acuerdo a la Observación 1.2.5 los $\widehat{\rho}_l(\Sigma)$ se mantienen invariantes por la transformación unitaria dado que se está utilizando la norma espectral.

Se define $\Sigma_B = \{ \text{Los bloques } B \in \mathbb{M}_{n-1} \text{ correspondientes a las matrices } A \in \Sigma \}$. Es un conjunto de matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Por la forma triangular de las matrices $A \in \Sigma$, se tienen que

$$\widehat{\rho}_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|_{sp} < \infty \implies \sup_{B \in \Sigma_B^k} \|B\|_{sp} = \widehat{\rho}_k(\Sigma_B) < \infty$$

Esto implica que se puede aplicar la hipótesis inductiva al conjunto Σ_B . Existe $N \geq 1$ tal que para todo $l \geq N$ es $\widehat{\rho}_l(\Sigma_B) < \infty$.

Pero además, la hipótesis $\widehat{\rho}_k(\Sigma) < \infty$ también implica que para cada $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ correspondiente a la forma (1.14)

$$\sup_{B \in \Sigma_B^{k-1}} \|Bv\|_2 < \infty. \quad (1.15)$$

De modo que para todo $l > N + k$ se cumple

$$\sup_{B \in \Sigma_B^l} \|B\|_{sp} < \infty \quad \text{porque } l > N$$

y dado que $l - k + 1 > N$ y usando (1.15)

$$\sup_{B \in \Sigma_B^{l-1}} \|Bv\|_2 < \left(\sup_{B \in \Sigma_B^{l-k}} \|B\|_{sp} \right) \cdot \left(\sup_{B \in \Sigma_B^{k-1}} \|Bv\|_2 \right) < \infty.$$

De donde se deduce que para todo $l > N + k$

$$\widehat{\rho}_l(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^l} \|A\|_{sp} < \infty,$$

terminando el paso inductivo.

Paso 3: Se considera ahora una norma matricial cualquiera $\|\cdot\|$ y números enteros $k, N \geq 1$ tales que $\widehat{\rho}_k(\Sigma) < \infty$ y $\widehat{\rho}_l(\Sigma) < \infty$ para todo $l \geq N$. Sea $r \geq N$ coprimo con k . Para cualquier $m > kr$ existen números enteros p y q tales que $m = pk + qr$ con $p > 0$ y

$0 \leq q < k$. Con estas definiciones iniciales se tiene, usando la Proposición 1.2.2

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \Sigma^m} \|A\| &\leq \left(\sup_{A \in \Sigma^{pk}} \|A\| \right) \left(\sup_{A \in \Sigma^{qr}} \|A\| \right) \\ \widehat{\rho}_m(\Sigma) &\leq \widehat{\rho}_{pk}(\Sigma) \cdot \widehat{\rho}_{qr}(\Sigma) \\ &\leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^p \cdot \widehat{\rho}_r(\Sigma)^q \\ &= \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{\frac{m-qr}{k}} \cdot \widehat{\rho}_r(\Sigma)^q, \end{aligned}$$

tomando raíz m -ésima

$$\widehat{\rho}_m(\Sigma)^{1/m} \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{\frac{1}{k} \frac{m-qr}{m}} \cdot (\widehat{\rho}_r(\Sigma)^q)^{1/m}.$$

Dado que q está acotado por k y que ni k ni r dependen de m , al tomar límite superior queda

$$\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}.$$

■

Observación 1.2.7. Esta última desigualdad permite afirmar que el límite superior en la definición de $\widehat{\rho}(\Sigma)$ es de hecho un límite. Y por lo tanto

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}.$$

▲

Ejemplo 1.2.8. No pasa lo mismo para $\rho(\Sigma)$ dado que no está garantizado que el límite inferior coincida con el límite superior. En el siguiente ejemplo [7, 15] se considera el conjunto $\Sigma = \{A, B\}$ donde A y B se definen de la siguiente forma

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que cumple

$$\begin{aligned} \Sigma^{2k} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para } k \geq 1 \\ \Sigma^{2k+1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para } k \geq 1 \quad ; \end{aligned}$$

lo cual permite calcular

$$\rho_k(\Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \text{ par} \\ 0 & \text{para } k \text{ impar} \end{cases} \quad (1.16)$$

y por lo tanto

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma)^{1/k} = 0 < 1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\Sigma)^{1/k}.$$



Ejemplo 1.2.9. El mismo conjunto anterior sirve para comprobar que las desigualdades en (1.13) no son monótonas, en el sentido que generalmente no hay una relación de orden directa entre $\rho_k(\Sigma)^{1/k}$ y $\rho_{k+1}(\Sigma)^{1/(k+1)}$; ni tampoco entre $\widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}$ y $\widehat{\rho}_{k+1}(\Sigma)^{1/(k+1)}$.

En lo que respecta al radio espectral generalizado se puede ver de (1.16) que los $\rho_k(\Sigma)$ tienen un comportamiento oscilatorio. En el caso del radio espectral conjunto se puede producir un comportamiento similar tomando alguna norma $\|\cdot\|$ de manera que los supremos sobre los conjuntos Σ^{2k} y Σ^{2k+1} sean también oscilatorios. Como alternativa se puede definir la norma $\|\cdot\|_*$ sobre $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_* = |x| + \frac{1}{2}|y|.$$

Así definida la norma operador asociada sobre $\mathbb{M}_n$ cumple

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_* &= 2 & \text{y} & \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_* &= \frac{1}{2} \\ \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_* &= 1 & \text{y} & \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_* &= 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\widehat{\rho}_k(\Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \text{ par} \\ 2 & \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$



Capítulo 2

Teoremas principales

2.1. Fórmula Generalizada de Gelfand

En esta sección se presenta la demostración realizada por Elsner [14] para la Fórmula Generalizada de Gelfand. Esta fórmula afirma que el Radio Espectral Conjunto y el Radio Espectral Generalizado coinciden para los conjuntos Σ acotados:

$$\hat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) \quad \text{para } \Sigma \text{ acotado.}$$

Inicialmente ésto fue conjeturado por Daubechies y Lagarias ([11] 1992) para conjuntos Σ finitos. Berger y Wang ([2] 1992) presentaron una primera demostración. La demostración en esta sección, debida a Elsner, utiliza elementos de conjuntos convexos. Serán necesarios algunos lemas previos; que irán presentando la demostración del Teorema 2.1.16 para casos especiales de conjuntos Σ hasta poder completar la demostración para el caso general de Σ acotado.

Algunas definiciones preliminares, dado que hay diferencia entre conjuntos acotados y conjuntos acotados en producto,

Definición 2.1.1. Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$. Con la notación $\Sigma^0 = \{I_n\}$ se define $\mathcal{S}(\Sigma)$ como el semigrupo generado por Σ ; y $\mathcal{S}_I(\Sigma)$ como el semigrupo generado por Σ aumentado con la identidad I_n

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma^k \quad y \quad \mathcal{S}_I(\Sigma) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$

Por otro lado se denotará con $\mathcal{A}(\Sigma)$ al álgebra sobre $\mathbb{C}$ generada por Σ . O sea, $\mathcal{A}(\Sigma)$ es el espacio vectorial generado por $\mathcal{S}(\Sigma)$.

El conjunto Σ se dice que es **acotado en producto** si el semigrupo $\mathcal{S}(\Sigma)$ es acotado en norma. O sea, existe una constante $M > 0$ tal que para toda $A \in \mathcal{S}(\Sigma)$ se cumple $\|A\| < M$

▲

Observación 2.1.2. Un resultado que se utilizará muchas veces referente a los conjuntos de matrices **acotados en producto** es que para cada uno ellos existe una norma $\|\cdot\|$ sobre

$\mathbb{C}^n$ tal que $\|Ax\| \leq \|x\|$ para toda $A \in \Sigma$ y para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Y por lo tanto, para la norma operador asociada en $\mathbb{M}_n$ se cumple $\|A\| \leq 1$. Una manera de definir esta norma deseada es tomar

$$\|x\| := \sup\{\|Ax\|_2 : A \in \mathcal{S}_I(\Sigma)\} < \infty \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n$$

Dado que Σ es acotado en producto y que $I_n \in \mathcal{S}_I(\Sigma)$ se cumplen las condiciones para que la definición anterior sea una norma. Además, se cumple la propiedad requerida $\|Ax\| \leq \|x\|$ para toda $A \in \Sigma$ y para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Lo cual implica que

$$\widehat{\rho}_1(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma} \|A\| \leq 1 \quad \text{y por ende } \widehat{\rho}(\Sigma) \leq 1.$$

▲

La siguiente proposición permite caracterizar el Radio Espectral Conjunto de conjunto Σ acotados; la demostración puede verse en [14] (Lema 1), aunque fue publicada por primera vez directamente por Rota y Strang en el artículo inicial de la definición de Radio Espectral Conjunto [22]. Para simplificar la notación se nombrará como $\mathcal{N}$ al conjunto de las normas operadores sobre $\mathbb{C}^{n \times n}$. Y utilizando la observación anterior se puede calcular el Radio Espectral Conjunto de la siguiente forma,

Proposición 2.1.3. *Dado un conjunto acotado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ se cumple*

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \sup_{A \in \Sigma} v(A). \quad (2.1)$$

Demostración: Sea α la expresión de la derecha en la igualdad anterior. Como Σ es acotado se cumple $\widehat{\rho}(\Sigma) < \infty$; y por lo tanto se puede tomar $\tau > \widehat{\rho}(\Sigma)$ y $k_0 \geq 1$ de modo tal que $\tau^{-k} \widehat{\rho}_k(\Sigma) < 1$ para cualquier valor de $k \geq k_0$. Para los valores $1 \leq k \leq k_0$ se puede acotar $\tau^{-k} \widehat{\rho}_k(\Sigma) \leq M^{k_0}$; donde $M > 1$ es alguna cota para Σ . Todo esto muestra que $(1/\tau)\Sigma$ es acotado en producto y por lo tanto, de acuerdo a la Observación 2.1.2 existe una norma operador v tal que

$$\sup\{v(A) : A \in (1/\tau)\Sigma\} \leq 1.$$

Con lo cual $\alpha \leq \tau$ y $\alpha \leq \widehat{\rho}(\Sigma)$.

Lo anterior implica también que $\alpha < \infty$. Dado $\tau > \alpha$ existe una norma operador v tal que $v(A) \leq \tau$ para toda $A \in \Sigma$. Por lo tanto $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \tau$ y por ende $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \alpha$. ■

Ejemplo 2.1.4. Conjuntos de matrices nilpotentes sirven como contraejemplo para mostrar que la condición de conjunto acotado es necesaria para la validez de la igualdad (2.1). Consideremos

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : n \geq 1 \right\}.$$

Claramente Σ es un conjunto no acotado y por lo tanto

$$\inf_{v \in \mathcal{N}} \sup_{A \in \Sigma} v(A) = \infty.$$

Sin embargo $\Sigma^2 = \{0\}$, con lo cual $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$.

Corolario 2.1.5. *Dado un conjunto acotado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ formado únicamente por **matrices normales** entonces*

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma} \rho(A) .$$

Demostración: Usando la Proposición 2.1.3. que $\|\cdot\|_{sp}$ es un elemento particular perteneciente a $\mathcal{N}$, y que para matrices normales A se cumple $\|A\|_{sp} = \rho(A)$ se tiene

$$\sup_{A \in \Sigma} \rho(A) = \rho_1(\Sigma) \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \sup_{A \in \Sigma} v(A) \leq \sup_{A \in \Sigma} \|A\|_{sp} = \sup_{A \in \Sigma} \rho(A)$$

■

Otra propiedad general referida a $\widehat{\rho}(\Sigma)$ y $\rho(\Sigma)$ es la relacionada con los conjuntos Σ formados por matrices triangulares por bloque (ver Lema II en [2]). Más específicamente

Proposición 2.1.6. *(Conjunto de Matrices en Bloque) Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ conjunto acotado de matrices de la forma triangular superior en bloque*

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(l)} \end{pmatrix} \quad \text{con } A^{(j)} \text{ matrices cuadradas de } n_j \times n_j \quad (2.2)$$

con $n_j \geq 1$, $n_1 + \dots + n_l = n$; y tomando $\Sigma^{(j)} = \{A^{(j)} : A \in \Sigma\}$ entonces

$$\rho(\Sigma) = \max_{1 \leq j \leq l} \rho(\Sigma^{(j)}) \quad (2.3)$$

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \max_{1 \leq j \leq l} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) . \quad (2.4)$$

Demostración: Las matrices triangulares de la forma (2.2) se multiplican manteniendo la estructura triangular

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(l)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)}B^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(l)}B^{(l)} \end{pmatrix} .$$

Teniendo en cuenta esta forma de multiplicación, se puede chequear la igualdad (2.3) para los $\rho_k(\Sigma)$ dado que los espectros de las matrices de esta forma es la unión de los espectros de las matrices $A^{(1)}, \dots, A^{(l)}$; de modo que queda

$$\rho_k(\Sigma) = \max_{1 \leq j \leq l} \rho_k(\Sigma^{(j)}) .$$

La igualdad deseada (2.3) se obtiene luego tomando límite superior a ambos lados.

Para la igualdad (2.4) se considerará la descomposición $A = D_A + N_A$ donde D_A es la matriz diagonal en bloque, y N_A es la parte nilpotente correspondiente $N_A = A - D_A$.

$$D_A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^{(l)} \end{pmatrix}.$$

También se considerará la norma $\|\cdot\|_1$ sobre $\mathbb{M}_n$. Que cumple las siguientes propiedades

$$\|D_A\|_1 \leq \|A\|_1 \quad (2.5)$$

$$\|D_A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq l} \|A^{(j)}\|_1. \quad (2.6)$$

Si se toma $\Sigma_D = \{D_A : \text{para cada } A \in \Sigma\}$ entonces (2.5) implica

$$\sup_{D \in \Sigma_D^k} \|D\|_1 \leq \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|_1;$$

y por lo tanto $\widehat{\rho}(\Sigma_D) \leq \widehat{\rho}(\Sigma)$. Por otro lado se tiene que para cada $j = 1, \dots, l$, los bloques (j) de las matrices en Σ_D^k son exactamente los mismos que las matrices de $(\Sigma^{(j)})^k$, con lo cual de (2.6) se deduce

$$\begin{aligned} \sup_{D \in \Sigma_D^k} \|D\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq l} \sup_{A \in (\Sigma^{(j)})^k} \|A\|_1 \\ \widehat{\rho}(\Sigma_D) &= \max_{1 \leq j \leq l} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}). \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye

$$\max_{1 \leq j \leq l} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) \leq \widehat{\rho}(\Sigma). \quad (2.7)$$

Para comprobar la otra desigualdad se considera como primer caso que alguno de los $\widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) = +\infty$. Por lo que la igualdad deseada (2.4) se deduce de la desigualdad (2.7). En el segundo se considera cualquier valor $\delta > 0$ tal que

$$\widehat{\rho}(\Sigma_D) = \max_{1 \leq j \leq l} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) < \delta. \quad (2.8)$$

De acuerdo con la Proposición 2.1.3 existe una norma operador $v = v_\delta$ sobre $\mathbb{M}_n$ tal que

$$\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \leq \delta.$$

Para cada $A \in \Sigma^k$ se tiene: $A = A_1 \dots A_k = (D_1 + N_1) \dots (D_k + N_k)$. Al expandirse esta expresión, muchos términos se anulan debido a que los N_i son nilpotentes. En particular, para k suficientemente grande, y dado $0 \leq i \leq n-1$, existirán a lo sumo $\binom{k}{i}$ términos con i factores de los $(N_j)_{j=1}^k$ sin repeticiones. Considerando que v es una norma matricial

$$\begin{aligned}
v(A) = v(A_1 \dots A_k) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot \left(\sup_{N \in \Sigma_N} v(N) \right)^i \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot \left(\sup_{N \in \Sigma_N} v(N) \right)^i \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^k \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^{-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot \left(\frac{\sup_{N \in \Sigma_N} v(N)}{\sup_{D \in \Sigma_D} v(D)} \right)^i \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^k \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \cdot C_1^i \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^k \\
&\leq C_2 \cdot \left(\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \right)^k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \leq C_2 \cdot \delta^k \cdot k^{n-1} ,
\end{aligned}$$

donde C_2 es una constante que no depende de k . Se ha supuesto que $\sup_{D \in \Sigma_D} v(D) \neq 0$; porque en caso contrario todas las matrices de Σ serían nilpotentes y por ende $\Sigma^n = \{0\}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in \Sigma^k} v(A) &\leq C_2 \cdot \delta^k \cdot k^{n-1} \\
\widehat{\rho}(\Sigma) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} v(A) \right\}^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C_2^{1/k} \cdot k^{\frac{n-1}{k}} \cdot \delta = \delta .
\end{aligned}$$

Recordando de (2.8) que δ es cualquier valor mayor que $\widehat{\rho}(\Sigma_D)$, la desigualdad anterior implica que $\widehat{\rho}(\Sigma)$ es menor o igual que $\widehat{\rho}(\Sigma_D)$.

$$\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \max_{1 \leq j \leq l} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) .$$

■

Corolario 2.1.7. *Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ acotado y formado por matrices todas de la forma triangular superior entonces*

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma} \rho(A) .$$

Demostración: Para conjuntos de matrices de tamaño 1×1 se cumple directamente que $\rho = \widehat{\rho}$ porque el radio espectral $\rho(a) = |a|$ es una norma sobre $\mathbb{C}$. Por lo tanto, utilizando la proposición anterior donde los conjuntos $\Sigma^{(j)}$ corresponden a matrices de tamaño 1×1 , se deduce

$$\rho(\Sigma) = \max_{1 \leq j \leq n} \rho(\Sigma^{(j)}) = \max_{1 \leq j \leq n} \widehat{\rho}(\Sigma^{(j)}) = \widehat{\rho}(\Sigma) . \quad (2.9)$$

Los próximos lemas serán necesarios para la demostración de la Fórmula Generalizada de Gelfand en el Teorema 2.1.16. ■

Lema 2.1.8. *Para toda norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$ existe una constante C tal que para cualquier $z \in \mathbb{C}^n$, $\|z\| = 1$ y cualquier $A \in \mathbb{M}_n$ con $\|A\| \leq 1$ se cumple*

$$\min_i |1 - \lambda_i(A)| \leq C \|Az - z\|^{1/n}.$$

Demostración: Como todas las normas son equivalentes alcanza demostrar la desigualdad para alguna norma. En particular se utilizará la norma-2 sobre $\mathbb{C}^n$. Sea μ un autovalor de alguna matriz B , y sean $s_1 \geq \dots \geq s_n$ los valores singulares de $A - \mu I_n$. Dado que $B - \mu I_n$ es singular existe un vector $\hat{x}$ con $\|\hat{x}\|_2 = 1$ tal que $(B - \mu I_n)\hat{x} = 0$. De modo que

$$\begin{aligned} s_n &= \min_{\|x\|_2=1} \|(\mu I_n - A)x\|_2 \leq \|(\mu I_n - A)\hat{x}\|_2 = \|(\mu I_n - A)\hat{x}\|_2 - \|(B - \mu I_n)\hat{x}\|_2 \\ &\leq \|(\mu I_n - A)\hat{x} + (B - \mu I_n)\hat{x}\|_2 \leq \|(B - A)\hat{x}\|_2 \leq \|B - A\|_{sp}. \end{aligned}$$

Además, $s_i \leq s_1 = \|A - \mu I_n\|_{sp} \leq \|A\|_{sp} + \|B\|_{sp}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} \min_i |\lambda_i(A) - \mu|^n &\leq \prod_{i=1}^n |\lambda_i(A) - \mu| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i(A - \mu I_n)| \\ &= \prod_{i=1}^n s_i \leq \|B - A\|_{sp} (\|A\|_{sp} + \|B\|_{sp})^{n-1}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\min_i |\lambda_i(A) - \mu| \leq \|B - A\|_{sp}^{1/n} (\|A\|_{sp} + \|B\|_{sp})^{1-1/n}. \quad (2.10)$$

Sea $z \in \mathbb{C}^n$, $\|z\|_2 = 1$ y $B = A + (z - Az)z^*$. Dado que $Bz = z$ se tiene que $\mu = 1$ es un autovalor de B . Por lo tanto aplicando (2.10) queda

$$\begin{aligned} \min_i |1 - \lambda_i(A)| &\leq \|B - A\|_{sp}^{1/n} (\|A\|_{sp} + \|B\|_{sp})^{1-1/n} \\ &\leq \|z - Az\|_2^{1/n} (\|A\|_{sp} + \|A + (z - Az)z^*\|_{sp})^{1-1/n} \\ &\leq \|z - Az\|_2^{1/n} (3\|A\|_{sp} + \|zz^*\|_{sp})^{1-1/n} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la hipótesis $\|A\|_{sp} \leq 1$

$$\begin{aligned} &\leq 4^{1-1/n} \|z - Az\|_2^{1/n} \\ &= C \|z - Az\|_2^{1/n} \quad \text{con } C = 4^{1-1/n}. \end{aligned}$$

A continuación se presenta una primera demostración de la fórmula de Gelfand para un caso particular. En la demostración se utilizará un resultado conocido como Lema de König, cuya demostración puede encontrarse en libros sobre teoría de grafos [20]. ■

Lema 2.1.9. (*Lema de König*) *Un árbol de ramificación finita con un número infinito de vértices tiene caminos de longitud infinita.*

Lema 2.1.10. *Dado $\Sigma = \{A_1, \dots, A_m\}$ conjunto finito de matrices, acotado en producto y tal que $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1$. Entonces $\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = 1$.*

Demostración: Dado que por hipótesis Σ es acotado en producto entonces se puede tomar una norma operador para la cual $\|A_i\| \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, m$ (Observación 2.1.2). Por la propiedad submultiplicativa de las normas operador también se cumple que $\|A\| \leq 1$ para toda $A \in \Sigma^k$ para cualquier valor de $k \geq 1$.

Se define $W = \{\mathbf{d} : |\mathbf{d}| = w < \infty \text{ y } \|A_{\mathbf{d}}\| = 1\}$; donde se está utilizando la notación de la fórmula (1.12) pero considerando productos a izquierda y además $|\mathbf{d}|$ denota la longitud de la sucesión $\mathbf{d}$:

$$A_{\mathbf{d}} = A_{d_w} \dots A_{d_1} \quad \text{donde } \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_w).$$

Para cada valor de k existe alguna sucesión $\mathbf{d}$ de tamaño $|\mathbf{d}| = k$ tal que $\|A_{\mathbf{d}}\| = 1$. Porque de lo contrario sería $\widehat{\rho}_k(\Sigma) < 1$; y por lo tanto $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} < 1$ contradiciendo una de las hipótesis. En particular W resulta ser un conjunto infinito. Aplicando el Lema de König a este conjunto W se puede afirmar que existe una sucesión infinita $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n, \dots)$ tal que los productos de los primeros n factores $T_n := A_{d_1} \dots A_{d_n}$ cumplen $\|T_n\| = 1$.

Para cada T_n existe un $x_n \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|x_n\| = \|T_n x_n\| = 1$. La sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $x_{n_i} \rightarrow \xi$ con $\|\xi\| = 1$. La sucesión $\{T_{n_i} \xi\}_{i \geq 1}$ también es acotada y por lo tanto se puede tomar una nueva subsucesión convergente de modo que se cumplan las dos condiciones juntas

$$x_{n_i} \rightarrow \xi \quad \text{y} \quad T_{n_i} \xi \rightarrow \eta.$$

De la igualdad $T_{n_i} \xi = T_n x_{n_i} + T_{n_i}(\xi - x_{n_i})$ se deduce que $\|\eta\| = 1$. Con lo cual para cualquier $\epsilon > 0$ existen $r = n_i$ y $s = n_{i+1}$ tales que

$$\|T_s \xi - T_r \xi\| < \epsilon \quad \text{y} \quad \|T_r \xi\| \geq \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

Además $T_s = AT_r$ para alguna $A \in \Sigma^{s-r}$. Se sabe que $\|A\| \leq 1$, de modo que por el Lema 2.1.8

$$\min_i |1 - \lambda_i(A)| \leq C \|Az - z\|^{1/n} \quad \text{para todo } \|z\| = 1.$$

En particular para $z = T_r \xi / \|T_r \xi\|$ y usando (2.11)

$$\min_i |1 - \lambda_i(A)| \leq C \|Az - z\|^{1/n} < C(2\epsilon)^{1/n}.$$

O sea, puede elegirse $k \geq 1$ y $A \in \Sigma^k$ tales que $\min_i |1 - \lambda_i(A)|$ sea tan pequeño como sea necesario. Lo cual implica que $\rho(\Sigma) \geq 1$ y por lo tanto $\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) = 1$. ■

El próximo paso es generalizar el lema anterior para conjunto finitos eliminando la hipótesis de acotación en producto.

Lema 2.1.11. Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ acotado con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1$. Si Σ no es acotado en producto entonces existe una matriz invertible S tal que para toda $A \in \Sigma$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} A_2 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{con } A_1 \in \mathbb{M}_{n_1} \text{ para } 1 \leq n_1 < n. \quad (2.12)$$

Demostración: Usando la Proposición 2.1.3 para cada $k \geq 1$ existe una norma $\|\cdot\|_k$ sobre $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \|Ax\|_k &\leq (\widehat{\rho}(\Sigma) + \frac{1}{k})\|x\|_k \quad \text{para } A \in \Sigma \text{ y } x \in \mathbb{C}^n \\ \|Ax\|_k &\leq (1 + \frac{1}{k})\|x\|_k. \end{aligned}$$

Por equivalencia entre normas se puede tomar $\|x\|_k \leq C_k\|x\|_2$ y por ende

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_k}{\|x\|_2} = C_k < \infty.$$

Esto permite normalizar las normas redefiniendo $v_k(\cdot) = \frac{1}{C_k}\|\cdot\|_k$ de modo que se cumplan simultáneamente

$$v_k(Ax) \leq (1 + \frac{1}{k})v_k(x) \quad \text{y} \quad \sup_{x \neq 0} \frac{v_k(x)}{\|x\|_2} = 1. \quad (2.13)$$

De la ecuación (2.13) se deduce que $\{v_k\}_{k \geq 1}$ es un conjunto acotado de funciones equicontinuas sobre el conjunto compacto $\{x : \|x\|_2 \leq 1\}$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli existe una subsucesión $\{v_{k_i}\}_{i \geq 1}$ convergente

$$v_{k_i}(x) \rightarrow v(x) \quad \text{para } i \rightarrow \infty, x \in \mathbb{C}^n.$$

La función límite $v(x)$ resulta una seminorma; a la vez que cumple $0 \leq v(Ax) \leq v(x)$ para toda $A \in \Sigma$ y $x \in \mathbb{C}^n$. Y la normalización de (2.13) muestra también que $v(x) \not\equiv 0$. El subespacio nulo $V = Nu(v) = \{x : v(x) = 0\}$ cumple con las siguientes propiedades:

- V es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ invariante por toda $A \in \Sigma$. Dado que la desigualdad $0 \leq v(Ax) \leq v(x)$ implica que $Ax \in V$ para todo $x \in V$.
- $V \neq \mathbb{C}^n$ dado que v no es idénticamente nula.
- La condición de que Σ no sea acotado en producto es independiente de la norma. De modo que si $V = \{0\}$ entonces v es una norma y por lo tanto $\mathcal{S}(\Sigma)$ no está acotado para v . Pero esto contradice $v(Ax) \leq v(x)$. Con lo cual $V \neq \{0\}$.

Lo anterior implica que V es un subespacio propio de $\mathbb{C}^n$ invariante por las $A \in \Sigma$. De modo que bajo una base adecuada de $\mathbb{C}^n$ todas las matrices A tendrán la forma (2.12). ■

El próximo paso es probar la fórmula de Gelfand para el caso que Σ sea un conjunto finito.

Teorema 2.1.12. *Para cualquier conjunto finito Σ se cumple $\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma)$*

Demostración: Si $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ entonces se cumple la igualdad deseada dado que $0 \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma)$ según (1.13). Para conjuntos finitos no puede suceder que $\widehat{\rho}(\Sigma) = \infty$, de modo que se puede suponer $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1$. Se procederá por inducción sobre n la dimensión de las matrices. El caso inicial $n = 1$ se cumple dado que $\rho(A)$ es una norma. Para el paso inductivo si Σ es acotado en producto entonces la igualdad se cumple por estar en la situación del Lema 2.1.10. Si por el contrario Σ no es acotado en producto, se puede suponer que las matrices son todas de la forma (2.12) utilizando alguna transformación similar S^{-1} de acuerdo al lema anterior y considerando que $\widehat{\rho}(\Sigma)$ y $\rho(\Sigma)$ son invariantes ante este tipo de transformaciones. Las matrices correspondientes a cada bloque forman los conjuntos $\Sigma_1 = \{A_1 : A \in \Sigma\}$ y $\Sigma_2 = \{A_2 : A \in \Sigma\}$; que son de dimensión menor a n . Aplicando la hipótesis inductiva en ambos casos se cumple que $\rho(\Sigma_i) = \widehat{\rho}(\Sigma_i)$ para $i = 1, 2$. Y utilizando la Proposición 2.1.6 para matrices triangulares en bloque se concluye que $\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma)$. ■

Observación 2.1.13. En todos los lemas anteriores se consideró el caso general de matrices con coeficientes complejos. Para el próximo lema es necesario considerar matrices con coeficientes reales. Sin embargo esto no es una pérdida de generalidad dado que las matrices de $\mathbb{M}_n$ pueden verse como matrices actuando sobre vectores reales de dimensión $2n$. Tomando

$$\text{Real}(A) = \frac{A + \overline{A}}{2} \quad \text{y} \quad \text{Imag}(A) = \frac{A - \overline{A}}{2i}$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \iff \begin{pmatrix} \text{Real}(A) & -\text{Imag}(A) \\ \text{Imag}(A) & \text{Real}(A) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Observación 2.1.14. (Conjuntos convexos) Para la demostración del próximo lema se utilizan resultados de la teoría de conjuntos convexos. Por tal motivo se presenta una breve descripción general de ellos [13].

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Un conjunto P se dice **politopo convexo** si es la cápsula convexa generada por algún conjunto finito de puntos. El Teorema 33 en [13] dice que dado $K \subseteq V$ un subconjunto compacto y convexo, y $\epsilon > 0$ existen politopos P_1 y P_2 tales que $P_1 \subseteq K \subseteq P_2$. Estos dos politopos se construyen de tal manera que P_1 es una contracción de P_2 de factor $(1 + k\epsilon)^{-1}$ respecto a un punto x_0 cualquiera elegido previamente en el interior de K y donde k es una constante que depende de K .

Por otro lado, según la caracterización de Caratheodory, todo punto perteneciente a la cápsula convexa generada por un conjunto es una combinación convexa de una cantidad finita de puntos pertenecientes al conjunto. ▲

Lema 2.1.15. *Dado Σ conjunto acotado de matrices con coeficientes reales, entonces*

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \sup\{\widehat{\rho}(\widetilde{\Sigma}) : \widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma, \text{ con } \widetilde{\Sigma} \text{ finito}\}.$$

Demostración: Se toma Σ^C la cápsula convexa generada por $\Sigma \cup (-\Sigma)$. Considerando que $\|A\| = \|-A\|$ y que $(\Sigma^C)^k = (\Sigma^k)^C$ se cumple

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma \cup (-\Sigma)) = \widehat{\rho}(\Sigma^C) . \quad (2.14)$$

También se cumple que $(\overline{\Sigma})^C = \overline{\Sigma^C}$, donde $\overline{\Sigma}$ indica la clausura de Σ . Dado que $0 \in \Sigma^C$ se tiene que para todo $\delta > 0$ se cumple $(1 - \delta)\overline{\Sigma^C} \subseteq \Sigma^C$ y por lo tanto

$$(1 - \delta)\widehat{\rho}(\overline{\Sigma^C}) \leq \widehat{\rho}(\Sigma^C) \leq \widehat{\rho}(\overline{\Sigma^C}) ,$$

y usando (2.14)

$$(1 - \delta)\widehat{\rho}(\overline{\Sigma}) = (1 - \delta)\widehat{\rho}(\overline{\Sigma^C}) = (1 - \delta)\widehat{\rho}(\overline{\Sigma^C}) \leq \widehat{\rho}(\Sigma^C) = \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\overline{\Sigma}) .$$

Se concluye entonces que $\widehat{\rho}(\overline{\Sigma}) = \widehat{\rho}(\Sigma)$ y es posible suponer que Σ y por lo tanto Σ^C son conjuntos cerrados.

Sea $\langle \Sigma^C \rangle$ el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial generado por Σ^C ; y sea $\{e_i\} \subseteq \Sigma^C$ una base finita para él. Para la norma-1 $\|\cdot\|_1$ asociada a esta base se cumple que $B(0, 1) = \{x \in \langle \Sigma^C \rangle : \|x\|_1 = \sum_i |\lambda_i| < 1\}$ es una bola abierta centrada en el origen contenida en Σ^C ; y por lo tanto 0 es un punto interior a Σ^C .

Dado $\epsilon > 0$ es posible aplicar la Observación 2.1.14 al conjunto Σ^C . De modo que existen politopos P_1 y P_2 tales que $P_1 \subseteq \Sigma^C \subseteq P_2$. Construidos de tal manera que $P = P_1$ es una contracción de P_2 respecto al 0 (que es interior a Σ^C). Tomando $k\epsilon = \epsilon$ queda

$$P \subseteq \Sigma^C \subseteq (1 + \epsilon)P . \quad (2.15)$$

El politopo P es la cápsula convexa generada por una cantidad finita de puntos $B_1, \dots, B_s$ de Σ^C . De acuerdo con la caracterización de Caratheodory cada uno de estos puntos B_i es también combinación convexa de una cantidad finita de puntos $\{C_j^i, \dots, C_{m_i}^i\}$ de $\Sigma \cup (-\Sigma)$; que en total se pueden enumerar todos estos puntos como $\{C_1, \dots, C_m\}$ en $\Sigma \cup (-\Sigma)$. Si se toma P' como la cápsula convexa generada por $\{C_1, \dots, C_m\}$ entonces cada B_i pertenece a P' y por lo tanto

$$P \subseteq P' \subseteq \Sigma^C , \quad (2.16)$$

con lo cual

$$\widehat{\rho}(P) \leq \widehat{\rho}(P') = \widehat{\rho}(\{C_1, \dots, C_m\}) \leq \widehat{\rho}(\Sigma^C) = \widehat{\rho}(\Sigma) . \quad (2.17)$$

Tomando $A_i = \pm C_i$ de tal manera que $A_i \in \Sigma$ y llamando $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \Sigma$ se tiene, a partir de (2.15) y (2.17)

$$\frac{1}{1 + \epsilon} \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(P) \leq \widehat{\rho}(P') = \widehat{\rho}(\Sigma') \leq \widehat{\rho}(\Sigma) .$$

■

Teorema 2.1.16. (*Fórmula Generalizada de Gelfand*) Para cualquier conjunto acotado Σ de matrices en $\mathbb{M}_n$ se cumple

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) .$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)\widehat{\rho}(\Sigma) &\leq \widehat{\rho}(\Sigma') && \text{por Lema 2.1.15 para algún conjunto finito } \Sigma' \subseteq \Sigma \\ &= \rho(\Sigma') && \text{por Lema 2.1.12 para conjuntos finitos} \\ &\leq \rho(\Sigma) && \text{por inclusión.} \end{aligned}$$

■

Observación 2.1.17. La condición de conjunto acotado es necesaria, como lo muestra el conjunto Σ_2 definido en el Ejemplo 1.2.4

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

que sirve como contraejemplo para los casos de conjuntos no-acotados. Dado que

$$\rho(\Sigma_2) = 1 < \widehat{\rho}(\Sigma_2) = \infty .$$

▲

2.2. Conjetura de Acotación

Para concluir el capítulo se desarrollarán a continuación los resultados más importantes del artículo de Berger-Wang [2]; incluyendo la demostración de la validez de la Conjetura de Acotación propuesta inicialmente por Daubechies-Lagarias [11]. Se utilizarán las definiciones iniciales del capítulo para conjuntos Σ convergentes en producto; con la salvedad de usar la notación de Berger-Wang que trabajan con productos a izquierda (LCP) a diferencia de Daubechies-Lagarias que trabajan con la notación de productos a derecha (RCP):

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \dots A_1 . \quad (2.18)$$

Se define también el conjunto Σ^∞ formado por todos los posibles límites formados por productos de la forma (2.18).

Teorema 2.2.1. (*Conjetura de Acotación*) Si Σ es un conjunto acotado con la propiedad LCP entonces es acotado en producto. O sea, el semigrupo $\mathcal{S}(\Sigma)$ generado por Σ es acotado en norma. Además $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq 1$.

Demostración: Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre $\mathbb{C}^n$ y X el subespacio definido por

$$X = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \sup_{A \in \mathcal{S}(\Sigma)} \|Ax\| < \infty \right\}$$

Así definido resulta que X es invariante por cada $A \in \Sigma$. De modo que puede considerarse el conjunto $\mathcal{S}(\Sigma)|_X$ formado por las mismas matrices $A \in \mathcal{S}(\Sigma)$ pero como operadores de $X \rightarrow X$. Por la definición de X y por el Principio de Acotación Uniforme existe una constante $M > 1$ tal que

$$\sup_{A \in \mathcal{S}(\Sigma)|_X} \|A\| < M < \infty \quad (2.19)$$

Suponiendo, por el absurdo, que $X \neq \mathbb{C}^n$ se encontrará una sucesión de matrices en Σ que no converge en producto; contradiciendo la hipótesis de que Σ es LCP.

Afirmación 1: Para todo $x \notin X$ existe $A \in \Sigma$ tal que $Ax \notin X$.

Dado $x \notin X$ se tiene

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \hat{\rho}_1(\Sigma) \cdot \|x\| \quad \text{para toda } A \in \Sigma. \quad (2.20)$$

Suponiendo que para toda $A \in \Sigma$ se cumple $Ax \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} \|A_m \dots A_1 x\| &\leq \|(A_m \dots A_2) \overbrace{A_1 x}^{\in X}\| \\ &\leq M \cdot \|A_1\| \cdot \|x\| \\ &\leq M \cdot \hat{\rho}_1(\Sigma) \cdot \|x\| \quad \text{para } A_i \in \Sigma \text{ con } m \geq 2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De (2.20) y (2.21) se deduce que $x \in X$; por lo tanto debe existir una $A \in \Sigma$ tal que $Ax \notin X$.

Afirmación 2: Para todo $x \notin X$ y todo $C > 0$ existe $A = A_m \dots A_1 \in \mathcal{S}(\Sigma)$ con $A_i \in \Sigma$ tal que

$$Ax \notin X \quad \text{y} \quad \|Ax\| > C \quad (2.22)$$

Aplicando la afirmación 1 se tiene que existe $A_1 \in \Sigma$ tal que

$$A_1 x \notin X.$$

Por definición de X aplicada a $A_1 x$ se tiene que existe $A' = A_m \dots A_2 \in \Sigma^m$ con $A_j \in \Sigma$ y $m \geq 2$ tal que

$$\|A' A_1 x\| > \max\{1, M \cdot \hat{\rho}_1(\Sigma)\} \cdot C \geq C. \quad (2.23)$$

En lo anterior se tiene en cuenta que $\hat{\rho}_1(\Sigma) < \infty$ dado que por hipótesis Σ es acotado. Puede suceder que $A' A_1 x \in X$ o $A' A_1 x \notin X$. Si $A' A_1 x \notin X$ entonces se toma simplemente $A = A' A_1 \in \mathcal{S}(\Sigma)$ para comprobar que la afirmación 2 es verdadera. Si $A' A_1 x \in X$ se tiene

$$\begin{cases} A_m \dots A_1 x \in X \\ A_1 x \notin X \end{cases}$$

Puede elegirse entonces $1 \leq i < m$ tal que

$$A_i \dots A_1 x \notin X \quad \text{pero} \quad A_{i+1} \dots A_1 x \in X$$

Si $i + 1 = m$ se tiene, dado que $M \geq 1$

$$\begin{aligned} \|A_m \dots A_1 x\| &\leq \|A_m\| \cdot \|A_i \dots A_1 x\| \\ &\leq \widehat{\rho}_1(\Sigma) \|A_i \dots A_1 x\| \\ &\leq M \cdot \widehat{\rho}_1(\Sigma) \|A_i \dots A_1 x\| \end{aligned} \tag{2.24a}$$

Si $i + 1 < m$ se tiene, recordando la definición de M

$$\begin{aligned} \|A_m \dots A_1 x\| &\leq \|(A_m \dots A_{i+2}) A_{i+1} \dots A_1 x\| \\ &\leq M \cdot \|A_{i+1} \dots A_1 x\| \\ &\leq M \cdot \|A_{i+1}\| \cdot \|A_i \dots A_1 x\| \\ &\leq M \cdot \widehat{\rho}_1(\Sigma) \cdot \|A_i \dots A_1 x\| . \end{aligned} \tag{2.24b}$$

De (2.23) y (2.24) se tiene que $\|A_i \dots A_1 x\| \geq C$. En este caso se toma $A = A_i \dots A_1$ para comprobar que la afirmación 2 es verdadera.

Lo anterior muestra dado un $x_1 \notin X$ existe una $B_1 \in \mathcal{S}(\Sigma)$ tal que $B_1 x_1 \notin X$ y $\|B_1 x_1\| > 1$. Para $x_2 = B_1 x_1 \notin X$ existe $B_2 \in \mathcal{S}(\Sigma)$ tal que $B_2 B_1 x_1 \notin X$ y $\|B_2 B_1 x_1\| > 2$. Así puede ir generándose una sucesión $\{B_i\}_i \subseteq \mathcal{S}(\Sigma)$ tal que

$$\begin{aligned} \|B_1 x_1\| &> 1 \\ \|B_2 \cdot B_1 x_1\| &> 2 \\ \|B_3 \cdot B_2 \cdot B_1 x_1\| &> 3 \\ &\vdots \\ \|B_k \dots B_1 x_1\| &> k \end{aligned}$$

que muestra que la sucesión $\{B_i\}_i$ no converge en producto a izquierda. Esta sucesión en $\mathcal{S}(\Sigma)$ define otra sucesión en Σ formada por los respectivos A_i que factorizan cada B_k , con lo cual Σ no es LCP.

Se verá a continuación que necesariamente debe ser $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq 1$. Si por el contrario $\widehat{\rho}(\Sigma) > 1$ se toma $1 < \alpha < \widehat{\rho}(\Sigma)$ de modo que para todo $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} 1 < \alpha < \widehat{\rho}(\Sigma) &\leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k} \\ 1 < \alpha^k &< \widehat{\rho}_k(\Sigma) \end{aligned}$$

donde $\widehat{\rho}_k(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|$. Por lo tanto para cada $k \geq 1$ existe $A_k \in \Sigma^k$ tal que $\|A_k\| > \alpha^k$ con $\alpha > 1$. La sucesión $\{A_i\}_i \subseteq \mathcal{S}(\Sigma)$ no está acotada; lo cual es una contradicción dado que Σ es acotado en producto. ■

Ejemplo 2.2.2. La condición de acotación sobre Σ es necesaria para la validez del teorema como lo muestra el conjunto Σ correspondiente al Ejemplo (2.1.4)

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : n \geq 1 \right\} .$$

Es un conjunto LCP (dado que es nilpotente) y sin embargo no es acotado en producto.

Corolario 2.2.3. Dado Σ conjunto acotado entonces, Σ es LCP con $\Sigma^\infty = \{0\}$ si y sólo si $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$.

Demostración: Supongamos primero que Σ un conjunto acotado con $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$. Por definición de límite superior se tiene que existe algún $k_0 \geq 1$ tal que

$$\widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_{k_0}(\Sigma)^{1/k_0} < 1 .$$

Dada una sucesión cualquiera $\{A_i\}_i$ de matrices de Σ , cada producto finito de m factores puede descomponerse de la forma $m = k_0 \cdot q + r$ donde $0 \leq r < k_0$ quedando

$$\|A_m \dots A_1\| \leq \widehat{\rho}_{k_0}(\Sigma)^q \cdot \widehat{\rho}_1(\Sigma)^r \leq \widehat{\rho}_{k_0}(\Sigma)^q \cdot \max\{1, \widehat{\rho}_1(\Sigma)^{k_0}\} = \widehat{\rho}_{k_0}(\Sigma)^q \cdot C ;$$

donde C es una constante. De modo que si $\widehat{\rho}_{k_0}(\Sigma) < 1$ y $m \rightarrow \infty$ entonces $\|A_m \dots A_1\| \rightarrow 0$. Lo cual muestra que todos los productos convergen a 0 y que $\Sigma^\infty = \{0\}$.

Se considera ahora la otra implicación. Para ello se toma un conjunto acotado Σ que es LCP y con $\Sigma^\infty = \{0\}$; y se mostrará que $\widehat{\rho}(\Sigma) \geq 1$ implica una contradicción.

Por el Teorema 2.2.1, el conjunto Σ es acotado en producto, de modo que puede tomarse

$$\Delta \geq 1 \quad \text{una cota para } \mathcal{S}(\Sigma). \quad (2.25)$$

También puede tomarse para cada $k \geq 1$ un producto de k factores $C_k = A_k^{(k)} \dots A_k^{(1)}$ con $A_k^{(j)} \in \Sigma$ tal que $\|C_k\| \geq 1$. El supra-índice (j) indica la posición de los factores en el producto $1 \leq (j) \leq k$. Se construirá un producto infinito a izquierda

$$A = \prod_{j=1}^{\infty} A_j ,$$

de modo que los productos finitos cumplan

$$\left\| \prod_{j=1}^m A_j \right\| \geq \frac{1}{2\Delta} \quad \text{para todo } m \geq 1; \quad (2.26)$$

lo cual mostrará que la matriz límite A no es la matriz nula, en contradicción con la hipótesis $\Sigma^\infty = \{0\}$.

Para empezar la construcción, dado que la sucesión $A_k^{(1)}$ para $k \geq 1$ está acotada, consideremos un punto de acumulación P_1 para tal sucesión. Existe una subsucesión $A_{k(1,i)}^{(1)}$ tal que para todo $i \geq 1$

$$\|A_{k(1,i)}^{(1)} - P_1\| \leq 2^{-3} \Delta^{-3} .$$

Para el segundo paso de la construcción se considera que la sucesión $A_{k(1,i)}^{(2)}$ para $i \geq 1$, por los mismos argumentos anteriores, tiene un punto de acumulación P_2 y una subsucesión $A_{k(2,i)}^{(2)}$ tales que

$$\|A_{k(2,i)}^{(2)} - P_2\| \leq 2^{-4} \Delta^{-3} ,$$

pero $k(2,i)$ es una subsucesión de $k(1,i)$ de modo que también se cumple

$$\|A_{k(2,i)}^{(1)} - P_1\| \leq 2^{-3} \Delta^{-3} .$$

Siguiendo este modo de construcción repetidamente se encuentran sucesiones anidadas $k(m,i)$ que son subsucesiones de $k(j,i)$ para todo $1 \leq j \leq m$; que cumplen

$$\|A_{k(m,i)}^{(j)} - P_j\| \leq 2^{-j-2} \Delta^{-3} \quad \text{para } 1 \leq j \leq m \text{ y para todo } i \geq 1. \quad (2.27)$$

Entonces se define ahora $A_j = A_{k(j,1)}^{(j)}$. Para cada m se puede tomar $k = k(m,m) \geq m$ de modo que se cumple para $1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} \|A_j - A_k^{(j)}\| &= \|A_{k(j,1)}^{(j)} - A_{k(m,m)}^{(j)}\| \\ &= \|A_{k(j,1)}^{(j)} - P_j + P_j - A_{k(m,m)}^{(j)}\| \\ &\leq \|A_{k(j,1)}^{(j)} - P_j\| + \|P_j - A_{k(m,m)}^{(j)}\| \quad \text{usando (2.27) dado que } j \leq m \\ &\leq 2^{-j-2} \Delta^{-3} + 2^{-j-2} \Delta^{-3} \\ &= 2^{-j-1} \Delta^{-3} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por otro lado dado que $\|\cdot\|$ es una norma matricial y Δ es una cota superior para la norma de los elementos del conjunto $\mathcal{S}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} 1 \leq \|C_k\| &= \|A_k^{(k)} \dots A_k^{(1)}\| \leq \|A_k^{(k)} \dots A_k^{(m+1)}\| \cdot \|A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)}\| \\ &\leq \Delta \|A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)}\| . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_m \dots A_1 - A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)} &= A_m \dots A_2 \left(A_1 - A_k^{(1)} \right) + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m-1} \left[A_m \dots A_{j+1} \left(A_j - A_k^{(j)} \right) A_k^{(j-1)} \dots A_k^{(1)} \right] + \\ &\quad + \left(A_m - A_k^{(m)} \right) A_k^{(m-1)} \dots A_k^{(1)} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando (2.28) y usando la acotación de $\mathcal{S}(\Sigma)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|A_m \dots A_1 - A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)}\| &\leq \|A_m \dots A_2\| \cdot \|A_1 - A_k^{(1)}\| + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m-1} \|A_m \dots A_{j+1}\| \cdot \|A_j - A_k^{(j)}\| \cdot \|A_k^{(j-1)} \dots A_k^{(1)}\| + \\
&\quad + \|A_m - A_k^{(m)}\| \cdot \|A_k^{(m-1)} \dots A_k^{(1)}\| \\
&\leq \Delta \cdot 2^{-2} \cdot \Delta^{-3} + \sum_{j=2}^{m-1} \Delta \cdot 2^{-j-1} \cdot \Delta^{-3} \cdot \Delta + \Delta \cdot 2^{-m-1} \cdot \Delta^{-3} \\
\text{porque } \Delta \geq 1 \text{ (2.25)} \rightarrow &\leq 2^{-2} \Delta^{-1} + \sum_{j=2}^{m-1} 2^{-j-1} \cdot \Delta^{-1} + 2^{-m-1} \cdot \Delta^{-1} \\
&= \sum_{j=1}^m 2^{-j-1} \cdot \Delta^{-1} \\
&\leq \Delta^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-1} = \frac{1}{2} \Delta^{-1} .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Combinando (2.30) y (2.29) se puede demostrar lo pretendido (2.26)

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{i=1}^m A_i \right\| &\geq \|A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)}\| - \|A_m \dots A_1 - A_k^{(m)} \dots A_k^{(1)}\| \\
&\geq \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{2\Delta} .
\end{aligned}$$

■

Por último, el siguiente teorema resume en forma explícita la relación existente entre la Proposición 2.1.3, el Corolario 2.2.3 y los puntos 1, 2 y 6 de la Proposición 1.1.4; en el sentido que las afirmaciones propuestas son equivalentes entre sí para conjuntos Σ acotados.

Teorema 2.2.4. *Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ conjunto acotado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1*: Σ es LCP y $\Sigma^\infty = \{0\}$.

2*: $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$.

6*: Existe una norma operador v tal que: $\sup_{A \in \Sigma} v(A) < 1$.

Capítulo 3

Contractibilidad Simultánea

En el presente capítulo se desarrollarán los resultados del artículo publicado [1] por Ando y Shih en el año 1998. Se desarrolla la relación entre la contractibilidad simultánea de un conjunto de matrices y su Radio Espectral Conjunto. Recordemos que, según la Proposición 1.1.4. para una única matriz A , $\rho(A) < 1$ equivale a la existencia de una matriz invertible S tal que $\|SAS^{-1}\|_{sp} < 1$, i.e. SAS^{-1} es contractible. El resultado principal de este capítulo, Teorema 3.2.3, prueba que para conjuntos acotados de matrices $\Sigma \subset \mathbb{M}_n$, $\rho(\Sigma) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ implica la existencia de un invertible S tal que SAS^{-1} es contractible para todo $A \in \Sigma$. Más aún, tal intervalo es óptimo, en el sentido que existen conjuntos acotados no contractibles cuyo Radio Espectral Conjunto es α , para todo $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.1. Introducción

Definición 3.1.1. Un conjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ se dice simultáneamente contractible si existe una matriz S invertible tal que

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} < 1 .$$

▲

Lema 3.1.2. Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Σ es simultáneamente contractible.
2. Existe una matriz $H > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tales que $A^*HA \leq \gamma^2 H$ para toda $A \in \Sigma$.

Demostración:

1 $\Rightarrow$ 2: Se toma S la matriz que permite la contractibilidad simultánea del conjunto Σ , y definimos

$$\gamma := \sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} \in [0, 1)$$

$$H := (SS^*)^{-1} > 0 .$$

En el caso $\gamma = 0$ se tiene que $\Sigma = \{0\}$ y por lo que se puede tomar $\gamma = 1/2$ para cumplir 2.

Queda entonces el caso $0 < \gamma < 1$. Hay que chequear que para toda $A \in \Sigma$ se cumpla

$$A^* H A \leq \gamma^2 H .$$

Sabiendo que $\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S$ es una contracción se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S \right)^* \left(\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S \right) &\leq I_n \\ S^* A^* (S^{-1})^* S^{-1} A S &\leq \gamma^2 I_n \\ A^* (S S^*)^{-1} A &\leq \gamma^2 (S S^*)^{-1} \\ A^* H A &\leq \gamma^2 H . \end{aligned}$$

2 $\Rightarrow$ 1: Dada $H > 0$ se toma $S = H^{-1/2}$ matriz invertible. De la desigualdad $A^* H A \leq \gamma^2 H$ se deduce en forma similar a lo anterior que

$$\left(\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S \right)^* \left(\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S \right) \leq I_n ,$$

y por lo tanto $\frac{1}{\gamma} S^{-1} A S$ es una contracción.

Luego

$$\|S^{-1} A S\|_{sp} \leq \gamma < 1 \quad \text{para toda } A \in \Sigma .$$

■

Observación 3.1.3. Algunas consideraciones generales:

1. Si Σ es contractible simultáneamente entonces es acotado.

$$\|A\|_{sp} = \|S S^{-1} A S S^{-1}\|_{sp} \leq \|S\|_{sp} \|S^{-1} A S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp} \leq \|S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp} .$$

2. Si Σ es contractible simultáneamente a través de una matriz invertible S , entonces el semigrupo multiplicativo $\mathcal{S}(\Sigma)$ y la cápsula convexa generada por Σ son también contractibles simultáneamente con la misma matriz S .
3. Si Σ es contractible simultáneamente entonces $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$. De hecho, dada S matriz invertible tal que

$$\sup\{\|S^{-1} A S\|_{sp} : A \in \Sigma\} = \gamma < 1 ;$$

entonces, dado $k \geq 1$ y $A \in \Sigma^k$ se tiene: $A = A_1 \dots A_k$ con $A_i \in \Sigma$ y

$$\begin{aligned} \|A\|_{sp} &= \|S S^{-1} A_1 S \dots S^{-1} A_k S S^{-1}\|_{sp} \\ &\leq \|S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp} \|S^{-1} A_1 S\|_{sp} \dots \|S^{-1} A_k S\|_{sp} \\ &\leq \|S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp}^k \gamma^k . \end{aligned}$$



Y por lo tanto

$$\left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|_{sp} \right\}^{1/k} \leq (\|S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp})^{1/k} \gamma$$

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|_{sp} \right\}^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\|S\|_{sp} \|S^{-1}\|_{sp})^{1/k} \gamma < 1 .$$

Observación 3.1.4. El Lema 3.1.2 y el punto 3 de la Observación 3.1.3 generalizan, en algún sentido, los puntos 2, 3 y 5 del Cuadro 1.1. Existe equivalencia entre los siguientes puntos.

3*: Existe una matriz $H > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tales que $A^* H A \leq \gamma^2 H$ para toda $A \in \Sigma$.

5*: Existe una matriz S invertible tal que

$$\sup \{ \|S^{-1} A S\|_{sp} : A \in \Sigma \} < 1 .$$

Sin embargo, la condición $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$ es una condición necesaria para los puntos 3 y 5. No es una condición suficiente. Como se verá en el Teorema 3.2.3 para cada $n \geq 1$ existen conjuntos Σ finitos con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1/\sqrt{n}$ que no son contractibles simultáneamente. Sólo la condición $\widehat{\rho}(\Sigma) \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ garantiza la contractibilidad simultánea. ▲

3.2. Rango óptimo para contractibilidad simultánea

El principal resultado del artículo, Teorema 3.2.3, establece que el intervalo $0 \leq \widehat{\rho}(\Sigma) < \frac{1}{\sqrt{n}}$ garantiza la contractibilidad simultánea de conjuntos acotados de matrices de tamaño $n \times n$. Y por el contrario, si $\widehat{\rho}(\Sigma) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ se puede construir un conjunto de matrices de $n \times n$ que no es contractible simultáneamente. Para la demostración del teorema se utiliza una versión matricial para el Teorema Elipsoidal de John, publicado originalmente en el año 1948 [16]. La versión que presenta el artículo de Ando-Shih es el Teorema 3.2.2. Previamente hace falta demostrar el siguiente lema: cuyo mayor propósito es mostrar que puede construirse una matriz T con ciertas propiedades respecto a otra matriz A pero que en cuya construcción no interviene directamente esta matriz A .

Lema 3.2.1. Dada $A \in \mathbb{M}_n$, con $n > 1$, tal que $I_n \geq A \geq 0$ y sea $0 \leq \alpha < \frac{1}{n}$. Si para algún vector unitario e_1 se cumple que

$$\langle A e_1, e_1 \rangle \leq \alpha ;$$

entonces tomando el proyector de rango 1, $P_1 = e_1 e_1^*$ se define

$$T = n\alpha P_1 + \frac{n(1-\alpha)}{n-1} (I_n - P_1) . \quad (3.1)$$

Esta matriz T satisface

$$T \geq A \quad y \quad \det(T) < 1 .$$

Demostración: Los proyectores P_1 y $I_n - P_1$ son ortogonales, a la vez que $I_n = P_1 + (I_n - P_1)$. De modo que existe una matriz unitaria U tal que

$$U^* P_1 U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \quad y \quad U^* (I_n - P_1) U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Con lo cual,

$$U^* T U = \begin{pmatrix} n\alpha & 0 \\ 0 & \frac{n(1-\alpha)}{n-1} I_{n-1} \end{pmatrix} .$$

De esta manera se puede calcular el determinante de T

$$\det(T)^{1/n} = \det(U^* T U)^{1/n} = \left(n\alpha \times \left(\frac{n(1-\alpha)}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{1/n} .$$

Usando la desigualdad de las medias aritméticas y geométricas

$$\det(T)^{1/n} < \frac{n\alpha + n(1-\alpha)}{n} = 1 .$$

La desigualdad es estricta, porque para que se cumpla la igualdad debe ser $n\alpha = \frac{n(1-\alpha)}{n-1}$ y por lo tanto $n\alpha = 1$.

Ahora hace falta probar que

$$\langle T x, x \rangle \geq \langle A x, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n .$$

Sea $x_0 \in \mathbb{C}^n$ un vector fijo. Y sea e_2 vector unitario ortogonal a e_1 tal que $x_0 \in \overline{\{e_1, e_2\}}$. Sea $P_2 = e_2 e_2^*$ y $P = P_1 + P_2$.

Para chequear $\langle A x_0, x_0 \rangle \leq \langle T x_0, x_0 \rangle$ es suficiente ver que

$$PTP \geq PAP \quad \text{dado que } P x_0 = x_0 . \quad (3.2)$$

Las matrices PAP y PTP pueden considerarse como matrices de 2×2 con una representación

$$PAP = \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{pmatrix} \quad y \quad PTP = \begin{pmatrix} n\alpha & 0 \\ 0 & \frac{n(1-\alpha)}{n-1} \end{pmatrix} .$$

Donde se cumple, según las hipótesis

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad ab - |c|^2 \geq 0 \quad \text{porque } A \geq 0 \quad (3.3a)$$

$$1 - a \geq 0, \quad 1 - b \geq 0, \quad (1 - a)(1 - b) - |c|^2 \geq 0 \quad \text{porque } A \leq I_n \quad (3.3b)$$

$$a \leq \alpha \quad \text{porque } \langle A e_1, e_1 \rangle = a \leq \alpha \quad (3.3c)$$

$$1 - n\alpha \geq 0 \quad \text{porque } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{n} . \quad (3.3d)$$

Para demostrar (3.2) es suficiente ver que

$$n\alpha - a \geq 0, \quad \frac{n(1-\alpha)}{n-1} - b \geq 0 \quad (3.4a)$$

$$(n\alpha - a) \left(\frac{n(1-\alpha)}{n-1} - b \right) - |c|^2 \geq 0. \quad (3.4b)$$

Dado que $n \geq 1$ y de (3.3c) se tiene

$$n\alpha - a \geq \alpha - a \geq 0.$$

Por (3.3b) y (3.3d)

$$\frac{n(1-\alpha)}{n-1} - b = 1 + \frac{1-n\alpha}{n-1} - b > 1 - b \geq 0.$$

Con lo cual queda probado (3.4a). Para ver (3.4b) se separan dos casos:

Caso 1: $b \leq 1 - \alpha$.

$$\begin{aligned} (n\alpha - a) \left[\frac{n(1-\alpha)}{n-1} - b \right] - |c|^2 &= (n\alpha - a) \left[1 - b + \frac{1-n\alpha}{n-1} \right] - |c|^2 \\ \text{por (3.3a)} \rightarrow &\geq (n\alpha - a) \left[1 - b + \frac{1-n\alpha}{n-1} \right] - ab \\ \text{por (3.3c)} \rightarrow &\geq (n\alpha - \alpha) \left[1 - b + \frac{1-n\alpha}{n-1} \right] - \alpha b \\ \text{por Caso 1} \rightarrow &\geq \alpha(n-1) \left[\alpha + \frac{1-n\alpha}{n-1} \right] - \alpha(1-\alpha) \\ &= \alpha(n-1)\alpha + \alpha(1-n\alpha) - \alpha(1-\alpha) \\ &= \alpha^2 n - \alpha^2 + \alpha - n\alpha^2 - \alpha + \alpha^2 = 0. \end{aligned}$$

Caso 2: $b > 1 - \alpha$.

$$\begin{aligned} (n\alpha - a) \left[\frac{n(1-\alpha)}{n-1} - b \right] - |c|^2 &= (n\alpha - a) \left[1 - b + \frac{1-n\alpha}{n-1} \right] - |c|^2 \\ &= (n\alpha - a)(1-b) + (n\alpha - a) \frac{1-n\alpha}{n-1} - |c|^2 \\ \text{por (3.3c)} \rightarrow &\geq (n\alpha - a)(1-b) + \alpha(1-n\alpha) - |c|^2 \\ \text{por (3.3b)} \rightarrow &\geq (n\alpha - a)(1-b) + \alpha(1-n\alpha) - (1-a)(1-b) \\ &= [(n\alpha - a) - (1-a)](1-b) + \alpha(1-n\alpha) \\ &= (n\alpha - 1)(1-b) + \alpha(1-n\alpha) \\ \text{por Caso 2} \rightarrow &= (1-n\alpha)(b-1+\alpha) \geq 0. \end{aligned}$$

Con esto mostramos que $PAP \leq PTP$ y por lo tanto $\langle Ax_0, x_0 \rangle \leq \langle Tx_0, x_0 \rangle$. ■

Teorema 3.2.2 (Versión matricial del Teorema elipsoidal de John). Sea $\{A_\lambda : \lambda \in I\}$ un conjunto acotado de matrices definidas positivas de tamaño $n \times n$ tal que

$$\sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle > 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Entonces existe una matriz $H_0 \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{n} \langle H_0 x, x \rangle \leq \sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle \leq \langle H_0 x, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.5)$$

Demostración: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A_\lambda \leq I_n$, para todo $\lambda \in I$, dado que el conjunto es acotado. Por hipótesis, la aplicación $x \rightarrow \left(\sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle \right)^{1/2}$ es una norma sobre $\mathbb{C}^n$. Dado que todas las normas son equivalentes, existen $0 < \delta < \beta \leq 1$ tales que

$$\delta \langle x, x \rangle \leq \sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle \leq \beta \langle x, x \rangle. \quad (3.6)$$

Sea $M = \{H \geq 0 : \det(H) \leq 1 \text{ y } H \geq A_\lambda \ \forall \lambda \in I\}$. Se verá que M es un conjunto no vacío y compacto.

- $M \neq \emptyset$: Simplemente porque $\beta I_n \in M$
- M compacto : Para ver que es un conjunto cerrado se puede proceder usando sucesiones, teniendo en cuenta que son todas desigualdades inclusivas. Para comprobar que es acotado consideramos los autovalores de una matriz $H \in M$ ordenados según la convención habitual $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \dots \geq \lambda_n(H)$ y e un autovector unitario correspondiente al autovalor $\lambda_n(H)$.

$$\lambda_n(H) = \lambda_n(H) \langle e, e \rangle = \langle \lambda_n(H) e, e \rangle = \langle H e, e \rangle \geq \langle A_\lambda e, e \rangle.$$

Por lo tanto

$$\lambda_n(H) \geq \sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda e, e \rangle \geq \delta \langle e, e \rangle = \delta > 0. \quad (3.7)$$

Esto muestra que todas las matrices $H \in M$ son invertibles ($H > 0$). Con lo cual se puede hacer

$$\|H\|_{sp} = \lambda_1(H) \leq \lambda_1(H) \frac{\lambda_2(H)}{\lambda_n(H)} \dots \frac{\lambda_n(H)}{\lambda_n(H)} = \frac{\det(H)}{\lambda_n(H)^{n-1}} \leq \frac{\beta^n}{\delta^{n-1}}.$$

Se tiene entonces demostrado que M es un conjunto compacto y no vacío. La aplicación $\det$ es continua y por lo tanto alcanza un valor mínimo para algún $H_0 \in M$. O sea, existe $H_0 \in M$ para el cual $\det(H_0) \leq \det(H)$ para toda $H \in M$. Se verá que esta matriz H_0 cumple con lo necesario del teorema.

- Por (3.7) se tiene que $H_0 > 0$.

- La segunda desigualdad de (3.5) se cumple por la definición del conjunto M .
- Para corroborar la primera desigualdad de (3.5) se puede considerar lo siguiente: para cada $\lambda \in I$ se define $B_\lambda = H_0^{-1/2} A_\lambda H_0^{-1/2}$. Con lo cual se tiene

$$0 \leq B_\lambda \leq I_n .$$

La desigualdad deseada de (3.5) escrita en términos de las A_λ es equivalente a la siguiente desigualdad escrita en términos de las B_λ

$$\frac{1}{n} \langle x, x \rangle \leq \sup_{\lambda \in I} \langle B_\lambda x, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.8)$$

Supongamos, por el absurdo, que existe un vector unitario e_1 que no cumple la desigualdad (3.8)

$$\sup_{\lambda \in I} \langle B_\lambda e_1, e_1 \rangle = \alpha < \frac{1}{n} \langle e_1, e_1 \rangle = \frac{1}{n} . \quad (3.9)$$

O sea, el vector e_1 cumple para cada $\lambda \in I$,

$$\langle B_\lambda e_1, e_1 \rangle \leq \alpha \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{n} .$$

De acuerdo al Lema 3.2.1, se puede construir la matriz T definida por (3.1) sólo dependiente de α y de e_1 y en forma independiente de los B_λ que cumple

$$T \geq B_\lambda \quad (3.10a)$$

$$0 < \det(T) < 1 . \quad (3.10b)$$

Se verá que la matriz $H_1 = H_0^{1/2} T H_0^{1/2} \in M$ y $\det(H_1) < \det(H_0)$; lo que contradice la definición de H_0 . De modo que la desigualdad (3.8) debe ser cierta para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Por un lado se tiene, usando (3.10b)

$$\det(H_1) = \det(H_0^{1/2} T H_0^{1/2}) = \det(H_0 T) = \det(H_0) \det(T) < \det(H_0) .$$

Y usando (3.10a)

$$\begin{aligned} T &\geq B_\lambda \\ H_0^{1/2} T H_0^{1/2} &\geq H_0^{1/2} B_\lambda H_0^{1/2} \\ H_1 &\geq A_\lambda . \end{aligned}$$

■

A continuación se desarrolla la demostración del Teorema 3.2.3

Teorema 3.2.3. *El rango óptimo del Radio Espectral Conjunto para garantizar la contractibilidad simultánea de un conjunto acotado de matrices de tamaño $n \times n$ es el intervalo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.*

Observación 3.2.4. Recordar del punto 3 en la Observación 3.1.3 que si $\widehat{\rho}(\Sigma) \geq 1$ entonces Σ no es contractible simultáneamente.

Demostración:

Primer caso: Sea Σ un conjunto acotado de matrices de $n \times n$ con $\widehat{\rho}(\Sigma) < \frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces Σ es contractible simultáneamente.

Se toma $\widehat{\rho}(\Sigma) < \gamma < \frac{1}{\sqrt{n}}$, y en pos de la definición de $\widehat{\rho}(\Sigma)$, un $k > 1$ para el cual

$$\sup_{A \in \Sigma^k} \|A\|_{sp} \leq \gamma^k. \quad (3.11)$$

Usando que Σ es acotado, se puede definir una norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera. Para los fines de la demostración no es necesario considerar sus propiedades como norma. Sólo que está bien definida y las propiedades (3.12) y (3.13) que se chequearán a continuación.

$$\|x\|^2 := \sup \left\{ \|x\|_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|B_1 x\|_2^2 + \cdots + \frac{1}{\gamma^{2(k-1)}} \|B_{k-1} x\|_2^2 : B_i \in \Sigma^i, i = 1, \dots, k-1 \right\}.$$

Dado un $A \in \Sigma$ se tiene

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \|Ax\|_2^2 + \sup_{B_1 \in \Sigma} \frac{\|B_1 Ax\|_2^2}{\gamma^2} + \cdots + \sup_{B_{k-1} \in \Sigma^{k-1}} \frac{\|B_{k-1} Ax\|_2^2}{\gamma^{2(k-1)}} \\ &= \gamma^2 \left[\frac{\|Ax\|_2^2}{\gamma^2} + \sup_{B_1 \in \Sigma} \frac{\|B_1 Ax\|_2^2}{\gamma^4} + \cdots + \sup_{B_{k-2} \in \Sigma^{k-2}} \frac{\|B_{k-2} Ax\|_2^2}{\gamma^{2(k-2)+2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{B_{k-1} \in \Sigma^{k-1}} \frac{\|B_{k-1} Ax\|_2^2}{\gamma^{2(k-1)+2}} \right]; \end{aligned}$$

en cada caso se puede considerar $B_i A \in \Sigma^{i+1}$ y por lo tanto los supremos aumentan

$$\leq \gamma^2 \left[\sup_{B_1 \in \Sigma} \frac{\|B_1 x\|_2^2}{\gamma^2} + \cdots + \sup_{B_{k-1} \in \Sigma^{k-1}} \frac{\|B_{k-1} x\|_2^2}{\gamma^{2(k-1)}} + \sup_{B_k \in \Sigma^k} \frac{\|B_k x\|_2^2}{\gamma^{2k}} \right]$$

usando la definición de k en (3.11) al último término

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma^2 \left[\sup_{B_1 \in \Sigma} \frac{\|B_1 x\|_2^2}{\gamma^2} + \cdots + \sup_{B_{k-1} \in \Sigma^{k-1}} \frac{\|B_{k-1} x\|_2^2}{\gamma^{2(k-1)}} + \sup_{B_k \in \Sigma^k} \frac{\|B_k x\|_2^2}{\gamma^{2k}} \right] \\
&\leq \gamma^2 \left[\sup_{B_1 \in \Sigma} \frac{\|B_1 x\|_2^2}{\gamma^2} + \cdots + \sup_{B_{k-1} \in \Sigma^{k-1}} \frac{\|B_{k-1} x\|_2^2}{\gamma^{2(k-1)}} + \|x\|_2^2 \right] \\
&= \gamma^2 \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|Ax\| \leq \gamma \|x\| . \quad (3.12)$$

Si se considera el conjunto

$$\left\{ I_n + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} B_i^* B_i : B_i \in \Sigma^i \right\} = \{A_\lambda : \lambda \in I\}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda x, x \rangle &= \left\langle \left(I_n + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} B_i^* B_i \right) x, x \right\rangle = \left\langle x + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} B_i^* B_i x, x \right\rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} \langle B_i^* B_i x, x \rangle = \langle x, x \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} \langle B_i x, B_i x \rangle \\
&= \|x\|_2^2 + \frac{1}{\gamma^{2k}} \sum_{i=1}^{k-1} \|B_i x\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\|x\|^2 = \sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle . \quad (3.13)$$

Se verá a continuación que la familia $\{A_\lambda : \lambda \in I\}$ cumple con las hipótesis del Teorema 3.2.2

- A_λ son semidefinidas positivas
- Si se toma a K como cota para Σ respecto de la norma $\|\cdot\|_{sp}$ entonces se puede ver que el conjunto de las A_λ también es acotado

$$\|A_\lambda\|_{sp} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} \|B_i^* B_i\|_{sp} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} \|B_i\|_{sp}^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\gamma^{2i}} K^2 .$$

■ Y por último

$$\sup_{\lambda \in I} \langle A_\lambda x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0 \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

Por lo tanto, existe $H > 0$ tal que

$$\frac{1}{n} \langle Hx, x \rangle \leq \|x\|^2 \leq \langle Hx, x \rangle.$$

Tomando $H_0 = \frac{1}{n}H$

$$\langle H_0 x, x \rangle \leq \|x\|^2 \leq n \langle H_0 x, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.14)$$

Considerando $Ax \in \mathbb{C}^n$, y las desigualdades (3.12) y (3.14)

$$\langle H_0 Ax, Ax \rangle \leq \|Ax\|^2 \leq \gamma^2 \|x\|^2 \leq \gamma^2 n \langle H_0 x, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n.$$

En consecuencia, por el Lema 3.1.2, Σ es contractible simultáneamente

$$A^* H_0 A \leq \gamma^2 n H_0 \quad \text{para toda } A \in \Sigma \quad \text{con } \gamma^2 n < \frac{1}{n} n = 1.$$

Segundo caso: Para todo $\alpha \in [\frac{1}{\sqrt{n}}, 1)$ existe un conjunto $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$ de matrices de tamaño $n \times n$ tal que $\tilde{\rho}(\Sigma) = \alpha$ y Σ no es contractible simultáneamente.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y sea $e = e_1 + \dots + e_n$.

Sea

$$E_j = e \cdot e_j^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, raíz n -ésima de la unidad y $W = \text{diag}(\omega, \omega^2, \dots, \omega^n)$.

Con estas definiciones se cumplen las siguientes propiedades:

$$E_j W^m = \omega^{jm} E_j \quad (3.15)$$

$$E_j E_m = E_m \quad (3.16)$$

$$\rho(W^m E_j) = \rho(E_j W^m) = \rho(\omega^{jm} E_j) = \rho(E_j) = 1. \quad (3.17)$$

Se define entonces

$$A_j = \alpha W^j E_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad \Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}. \quad (3.18)$$

■ $\tilde{\rho}(\Sigma) = \alpha$

Dado $A \in \Sigma^k$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k} \\ &= \alpha^k W^{j_1} E_{j_1} W^{j_2} E_{j_2} \dots W^{j_k} E_{j_k} \\ &= \alpha^k W^{j_1} \omega^{j_1 j_2} \omega^{j_2 j_3} \dots \omega^{j_{k-1} j_k} E_{j_k} \quad \text{por (3.15) aplicado varias veces} \\ &= \alpha^k \omega^{j_1 j_2 + \dots + j_{k-1} j_k} W^{j_1} E_{j_k}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \alpha^k \rho(W^{j_1} E_{j_k}) = \alpha^k \\ \rho(\Sigma) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} = \alpha .\end{aligned}$$

Y de acuerdo a la Fórmula Generalizada de Gelfand: $\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) = \alpha$.

- Σ no es contractible simultáneamente.

Por el contrario, supongamos que existe $H > 0$ tal que

$$A_j^* H A_j < H \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n .$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}0 < \langle (H - A_j^* H A_j) e_j, e_j \rangle &= \langle H e_j, e_j \rangle - \langle H A_j e_j, A_j e_j \rangle \\ &= h_{jj} - \alpha^2 \langle H W^j e, W^j e \rangle \\ &= h_{jj} - \alpha^2 \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n h_{rs} \omega^{(s-r)j} .\end{aligned}$$

Sumando para $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}0 < \sum_{j=1}^n h_{jj} - \alpha^2 \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n h_{rs} \omega^{(s-r)j} \\ = \text{tr}(H) - \alpha^2 \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n h_{rs} \left[\sum_{j=1}^n \omega^{(s-r)j} \right] = (*) .\end{aligned}$$

La suma en j es una suma geométrica

$$\sum_{j=1}^n \omega^{(s-r)j} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n 1 & = n \quad \text{si } \omega^{(s-r)} = 1 \\ \frac{\omega^{(s-r)}(\omega^{(s-r)n} - 1)}{\omega^{(s-r)} - 1} & = 0 \quad \text{si } \omega^{(s-r)} \neq 1 . \end{cases}$$

Dado que ω es una raíz n -ésima de la unidad, el caso $\omega^{(s-r)} = 1$ se cumple si y sólo si $s - r$ es múltiplo de n . Para cada $r = 1, \dots, n$ existe un y sólo un $s = 1, \dots, n$ tal que $s - r$ es múltiplo de n . De modo que

$$\begin{aligned}0 < (*) &= \text{tr}(H) - \alpha^2 n \sum_{r=1}^n h_{rr} \\ &= \text{tr}(H) - \alpha^2 . n . \text{tr}(H) \leq 0 \quad \text{dado que } \alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, 1 \right) \quad \text{y } H > 0 .\end{aligned}$$

■

Observación 3.2.5. En el ejemplo anterior, son iguales la dimensión de las matrices y el cardinal del conjunto Σ . De modo que sirve para mostrar también que para cualquier $m \geq 1$ y para $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$, existe un conjunto Σ de m matrices con $\widehat{\rho}(\Sigma) = \alpha$ que no es contractible simultáneamente. Recíprocamente, si Σ es un conjunto cualquiera de m matrices con $\widehat{\rho}(\Sigma) < \frac{1}{\sqrt{m}}$ entonces Σ es contractible simultáneamente. Para corroborar esta observación se toma

$$H = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{A \in \Sigma^k} A^* A .$$

Observación 3.2.6. El Teorema 3.2.3 y la observación anterior permiten cerrar, de alguna manera, el ciclo de las generalizaciones para el Cuadro 1.1 en el sentido que establecen las condiciones suficientes para que un conjunto acotado de matrices sea contractible simultáneamente.

3.3. Conjuntos con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$

En los conjuntos Σ donde $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$, todos los radios espectrales individuales de las matrices $A \in \Sigma$ son nulos también.

$$0 \leq \rho(A) \leq \rho_1(\Sigma) \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) = 0 .$$

Más generalmente se puede obtener el siguiente resultado: recordar de la Definición 2.1.1 que $\mathcal{A}(\Sigma)$ es el álgebra sobre $\mathbb{C}$ generada por Σ .

Proposición 3.3.1. *Dado un conjunto cualquiera $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$. Si $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ entonces $\rho(A) = 0$ para toda $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$.*

Demostración: Como $\mathcal{A}(\Sigma)$ es de dimensión finita, existen $B_i \in \Sigma^{k_i}$ ($i = 1, \dots, N$) linealmente independientes que generan $\mathcal{A}(\Sigma)$.

Sean

$$p := \min_{1 \leq i \leq N} k_i \quad \text{y} \quad q := \max_{1 \leq i \leq N} k_i . \quad (3.19)$$

Cada $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$ tiene una única representación $A = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} A^m &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right)^m \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right) \dots \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right) \\ &= (\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_N B_N) \cdot (\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_N B_N) \dots (\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_N B_N) \\ &= \text{en total } N^m \text{ términos de la forma } \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m} B_{j_1} \dots B_{j_m} \text{ con } j_i = 1, \dots, N . \end{aligned}$$

Cada término es de la forma $\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m} B_{j_1} \dots B_{j_m}$. Cada $B_{j_1} \dots B_{j_m}$ es un producto de m factores. Cada factor es un B_i , donde el $B_i \in \Sigma^{k_i}$. De acuerdo con (3.19), en cada producto hay un mínimo de $m.p$ factores y un máximo de $m.q$ factores. O sea,

$$\|B_{j_1} \dots B_{j_m}\| \leq \max_{mp \leq k \leq mq} \left\{ \sup_{B \in \Sigma^k} \|B\| \right\} .$$

Si se toma $\alpha = \max_{i=1, \dots, N} |\alpha_i|$, queda finalmente

$$\begin{aligned} \|A^m\| &\leq N^m \cdot \alpha^m \cdot \max_{mp \leq k \leq mq} \left\{ \sup_{B \in \Sigma^k} \|B\| \right\} \\ \|A^m\|^{1/m} &\leq N \cdot \alpha \cdot \max_{mp \leq k \leq mq} \left\{ \sup_{B \in \Sigma^k} \|B\|^{1/m} \right\} . \end{aligned} \quad (3.20)$$

La hipótesis de $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ implica que para cada $0 < \epsilon < 1$ existe $m_0 \geq 1$ tal que

$$\sup_{B \in \Sigma^k} \|B\|^{1/k} \leq \epsilon \quad \text{si} \quad k \geq m_0 .$$

Entonces para $k \geq m.p$ y $m \geq m_0$

$$\sup_{B \in \Sigma^k} \|B\|^{1/m} \leq \epsilon^{k/m} \leq \epsilon^p .$$

Y por lo tanto, usando (3.20), para $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} \|A^m\|^{1/m} &\leq N \cdot \alpha \cdot \max_{mp \leq k \leq mq} \left\{ \sup_{B \in \Sigma^k} \|B\|^{1/m} \right\} \\ &\leq N \cdot \alpha \cdot \max_{mp \leq k} \left\{ \sup_{B \in \Sigma^k} \|B\|^{1/m} \right\} \\ &\leq N \cdot \alpha \cdot \epsilon^p . \end{aligned}$$

Esto es para cualquier $0 < \epsilon < 1$. Con lo cual

$$\rho(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|A^m\|^{1/m} = 0 .$$

■

Lema 3.3.2. *Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ (no necesariamente acotado). Si $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$ entonces Σ es triangulizable simultáneamente a matrices triangulares superior por una misma matriz unitaria.*

*O sea, existe $U \in \mathbb{M}_n$, matriz unitaria, tal que U^*AU es triangular superior para toda matriz $A \in \Sigma$.*

Demostración: La demostración se hace por inducción sobre n , la dimensión de las matrices.

Para $n = 1$ son matrices de 1×1 . Todo conjunto de matrices es triangulizable simultáneamente por $U = (1)$ según lo requerido.

Se supone entonces que $n > 1$ y que el lema es cierto para los casos de matrices con dimensión menor que n .

Según la Proposición 3.3.1, el radio espectral $\rho(A) = 0$ para toda $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$. Se considerará el caso no trivial de $\mathcal{A}(\Sigma) \neq \{0\}$. De modo que existen

$$A \neq 0, A \in \mathcal{A}(\Sigma) \quad \text{y} \quad x_0 \neq 0 \in \mathbb{C}^n \quad \text{tales que} \quad Ax_0 \neq 0. \quad (3.21)$$

Definimos

$$\mathcal{N} = \mathcal{A}(\Sigma)x_0 = \{Ax_0 : A \in \mathcal{A}(\Sigma)\}.$$

Este conjunto $\mathcal{N}$ resulta ser un subespacio no trivial de $\mathbb{C}^n$ invariante por toda $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$.

- Que $\mathcal{N}$ es un subespacio es inmediato.
- Que $\mathcal{N}$ es invariante por toda $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$ se debe a que $\mathcal{A}(\Sigma)$ es un álgebra.
- De (3.21) se deduce que $\mathcal{N} \neq \{0\}$.
- Es necesario chequear que $\mathcal{N} \neq \mathbb{C}^n$ (o sea, no coincide con todo el espacio).

Supongamos que $\mathcal{N} = \mathbb{C}^n$, y por lo tanto

$$x_0 \in \mathcal{N} \implies x_0 = Ax_0 \quad \text{para alguna} \quad A \in \mathcal{A}(\Sigma).$$

Con lo cual x_0 es un autovector de A , $1 \in \sigma(A)$, y $\rho(A) \geq 1$. Que contradice $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$.

Sea entonces $k = \dim(\mathcal{N})$. Se tiene que $1 \leq k \leq n - 1$. Existe una matriz unitaria V tal que para toda $A \in \mathcal{A}(\Sigma)$ se tiene

$$V^*AV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

La matriz V es independiente de cada A dado que se define en función de $\mathcal{N}$. Llamamos

$$\Sigma_1 = \{A_{11} \in \mathbb{M}_k : A \in \Sigma\} \quad \text{y} \quad \Sigma_2 = \{A_{22} \in \mathbb{M}_{n-k} : A \in \Sigma\}.$$

Son conjuntos de matrices de tamaño $k \times k$ y $(n-k) \times (n-k)$ respectivamente. Y además, por la Proposición 2.1.6. queda

$$0 \leq \widehat{\rho}(\Sigma_i) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Tomando la hipótesis inductiva, existen matrices unitarias $V_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $V_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ tales que

$$V_1^*A_{11}V_1 \quad \text{y} \quad V_2^*A_{22}V_2,$$

son matrices triangulares superiores para todas las $A_{11} \in \Sigma_1$ y $A_{22} \in \Sigma_2$.

Si tomamos $U = V_1(V_1 \oplus V_2)$ entonces resulta que U^*AU es una matriz triangular superior para toda $A \in \Sigma$. ■

Lema 3.3.3. *Sea Σ un conjunto acotado de matrices complejas de $n \times n$. Si Σ es triangulizable simultáneamente a matrices triangulares superior por una matriz invertible, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una matriz invertible S tal que*

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} + \epsilon$$

Demostración: Siendo Q , matriz invertible, que trianguliza simultáneamente a Σ se tiene

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es triangular superior con a_{ii} los autovalores de A .

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $0 < \delta < \epsilon$ y definimos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} D^{-1}Q^{-1}AQD &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{-(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \delta^{-1}a_{22} & \cdots & \delta^{-1}a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{-(n-1)}a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \delta a_{12} & \cdots & \delta^{n-1}a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \delta^{n-2}a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = (t_{ij}). \end{aligned}$$

$$\text{Con } \begin{cases} t_{ii} = a_{ii} & \text{autovalores de } A \\ t_{ij} = \delta^{j-1} a_{ij} & 1 \leq i < j \leq n \\ t_{ij} = 0 & 1 < j < i < n \end{cases}$$

En general, para toda matriz $T = (t_{ij})$ y para cualquier norma $\|\cdot\|$ se tiene

$$\|T\| \leq \|\text{diag}(t_{ii})\| + \|T - \text{diag}(t_{ii})\| \leq C_1 \|\text{diag}(t_{ii})\|_{sp} + C_2 \|T - \text{diag}(t_{ii})\|_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas correspondientes a la equivalencia de la norma $\|\cdot\|$ con las normas $\|\cdot\|_{sp}$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente.

Por lo tanto, tomando $S = QD$, matriz invertible, y el caso particular de la norma espectral

$$\|S^{-1}AS\|_{sp} = \|T\|_{sp} \leq \|\text{diag}(t_{ii})\|_{sp} + C_2 \|T - \text{diag}(t_{ii})\|_2 ; \quad (3.22)$$

dado que los t_{ii} son los autovalores de A ,

$$= \rho(A) + C_2 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\delta^{j-i} a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

considerando que todos los términos tienen un δ como factor,

$$= \rho(A) + \delta C_2 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\delta^{j-i-1} a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

y en el caso que $\delta < 1$

$$\begin{aligned} &\leq \rho(A) + \delta C_2 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \rho(A) + \delta C_2 \|A\|_2 . \end{aligned}$$

Considerando que Σ es acotado con $\|A\|_2 \leq M$ y $\delta < \frac{\epsilon}{MC_2}$

$$\|S^{-1}AS\|_{sp} \leq \rho(A) + \epsilon \quad \text{para toda } A \in \Sigma$$

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} + \epsilon .$$

■

Observación 3.3.4. Si en (3.22) se considera una norma cualquiera $\|\cdot\|$ el resultado puede generalizarse a

$$\sup \{ \|P^{-1}AP\| : A \in \Sigma \} \leq C_1 \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} + \epsilon$$

donde C_1 es la constante correspondiente para la equivalencia de las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{sp}$.

Combinando los dos lemas anteriores 3.3.2 y 3.3.3 y la Observación 3.3.4, se tiene el siguiente teorema. ▲

Teorema 3.3.5. *Dado Σ conjunto acotado de matrices complejas de $n \times n$ y con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 0$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una matriz invertible S tal que $S^{-1}AS$ es triangular superior para toda $A \in \Sigma$ y*

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\| : A \in \Sigma \} < \epsilon .$$

Corolario 3.3.6. *Si Σ es un semigrupo multiplicativo acotado de matrices nilpotentes de $n \times n$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una matriz invertible S talque*

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\| : A \in \Sigma \} < \epsilon .$$

Demostración: Para cada $A \in \Sigma$ se tiene $\rho(A) = 0$ porque las matrices son nilpotentes. Además, considerando que Σ es multiplicativo se tiene $\Sigma^k \subseteq \Sigma$ y por lo tanto

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{A \in \Sigma} \rho(A) \right\}^{1/k} = 0 .$$

Y por lo tanto se puede aplicar el Teorema 3.3.5. ■

Otro ejemplo de conjunto de matrices que pueden triangulizarse en forma simultánea son los conjuntos de matrices que conmutan. La demostración se hace por inducción; considerando que si $AB = BA$ entonces A y B comparten los autovectores.

En particular se tiene,

Proposición 3.3.7. *Si Σ es un conjunto acotado y conmutativo de matrices entonces*

$$\rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) = \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} .$$

Demostración: En general, se cumple siempre que

$$\sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} \leq \sup_{k \geq 1} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} .$$

Y por lo tanto,

$$\sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \geq m} \left\{ \sup_{A \in \Sigma^k} \rho(A) \right\}^{1/k} = \rho(\Sigma) = \widehat{\rho}(\Sigma) .$$

En el caso que Σ sea conmutativo se tiene que $\sigma(A) \subseteq \sigma(A_1) \cdot \sigma(A_2) \dots \sigma(A_k)$ para toda $A = A_1 \cdot A_2 \dots A_k \in \Sigma^k$. Y por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \leq \sup \{ |\lambda_1| : \lambda_1 \in \sigma(A_1) \} \dots \sup \{ |\lambda_k| : \lambda_k \in \sigma(A_k) \} \\ &= \rho(A_1) \dots \rho(A_k) \\ &\leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \}^k . \end{aligned}$$

Con lo cual, para todo $k \geq 1$

$$\sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma^k \}^{1/k} \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \}$$

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma) \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} .$$

Quedan así demostradas las dos desigualdades necesarias. ■

Observación 3.3.8. Los conjuntos acotados y conmutativos son el tercer y último tipo de conjuntos acotados de matrices para los cuales el radio espectral conjunto puede calcularse como el supremo de los radios espectrales tradicionales de las matrices involucradas. Según resultados de la sección anterior, los corolarios 2.1.5 y 2.1.7 muestran que lo mismo puede afirmarse para conjuntos acotados formados por matrices normales o conjuntos acotados formados por matrices de la forma triangular superior.

Teorema 3.3.9. *El rango óptimo para el Radio Espectral Conjunto para garantizar la contractibilidad simultánea en el caso de conjuntos acotados y conmutativos es el intervalo $[0, 1)$.*

Demostración: Según la definición, la contractibilidad simultánea se caracteriza por la existencia de una matriz invertible S tal que

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} < 1 .$$

De modo que si Σ es un conjunto acotado y conmutativo con $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$ se tiene lo siguiente,

- Σ es triangulizable simultáneamente (por ser conmutativo Prop. 3.3.7).
- Dado que Σ es acotado, por Lema 3.3.3, para todo $\epsilon > 0$ existe P invertible tal que

$$\sup \{ \|P^{-1}AP\|_{sp} : A \in \Sigma \} \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} + \epsilon .$$

Si por hipótesis $\widehat{\rho}(\Sigma) < 1$, tomando $\epsilon > 0$ tal que $\widehat{\rho}(\Sigma) + \epsilon < 1$, por Prop. 3.3.3 y Prop. 3.3.7

$$\sup \{ \|S^{-1}AS\|_{sp} : A \in \Sigma \} \leq \sup \{ \rho(A) : A \in \Sigma \} + \epsilon = \widehat{\rho}(\Sigma) + \epsilon < 1 .$$

■

Capítulo 4

Cálculo exacto y cálculo aproximado del Radio Espectral Conjunto

Contrariamente a su importancia en las aplicaciones, el cálculo efectivo del radio espectral conjunto es sumamente difícil; incluso para conjuntos simples, del menor tamaño posible 2×2 . Existe dos caminos principales para tratar con este problema. Uno es la búsqueda de clases especiales de matrices, para las cuales el radio espectral conjunto puede calcularse a través de una fórmula explícita. El otro camino es la aproximación mediante algoritmos que permitan una tasa de convergencia adecuada. En el presente capítulo se abordarán ambos enfoques siguiendo los artículos siguientes: Bernhard Mößner [19] (2009) para el primer caso; y Vincent D. Blondel, Yurri Nesterov y Jacques Theys [5] (2004) para el segundo caso.

En este capítulo se utilizarán únicamente matrices con coeficientes reales.

4.1. Matrices palindrómicas de orden 2

En esta primer sección se estudiarán conjuntos formados por dos matrices palindrómicas de orden 2×2 con coeficientes reales. Un par de matrices R y L se dicen **palindrómicas** si están relacionadas por

$$L = PRP \quad \text{con } P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo, la operación PLP es una doble transposición de la matriz L a lo largo de la diagonal principal y de la diagonal principal invertida.

$$L := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \implies \quad PLP = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = R.$$

El principal resultado de la sección es el Teorema 4.1.5 que establece que para conjuntos $\Sigma = \{L, R\}$ de matrices palindrómicas de orden 2×2 con coeficientes reales el radio espectral conjunto está dado por

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \widehat{\rho}(\{L, R\}) = \max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\}.$$

Para la demostración se utilizarán los siguientes lemas. Los 2 primeros lemas forman parte de la idea principal de la demostración del teorema porque muestran que bajo ciertas condiciones puede construirse una norma tal que $\|A\| \leq 1$ para las matrices $A \in \Sigma$. Y por lo tanto resulta que $\widehat{\rho}(\Sigma) \leq 1$. El tercer lema calcula $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$ para un par muy particular de matrices A y B imponiendo condiciones sobre sus autovalores y autoespacios. En la siguiente sección del capítulo se generaliza la técnica utilizada en el Lema 4.1.4 utilizando menos restricciones sobre las matrices.

Lema 4.1.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, convexo y simétrico respecto al origen que cumple $B_r(0) \subseteq K \subseteq B_R(0)$ para $0 < r < R < \infty$. Entonces*

$$\|x\|_K = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in K\} \quad \text{es una norma sobre } \mathbb{R}^n.$$

La norma $\|\cdot\|_K$ se conoce como funcional de Minkowski [23] para conjuntos convexos balanceados y absorbentes; que generalmente es una semi-norma pero para el caso de conjuntos acotados, $K \subseteq B_R(0)$, se garantiza que es una norma.

Lema 4.1.2. *Dado un par de matrices A_1 y A_2 y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ como en el Lema 4.1.1 tal que $A_i K \subseteq K$ para $i = 1, 2$. Entonces $\widehat{\rho}(\{A_1, A_2\}) \leq 1$.*

Demostración: Dado que K es cerrado se tiene que: $\|x\|_K \leq 1 \Leftrightarrow x \in K$. Por lo tanto, la condición $A_i K \subseteq K$ implica que $\|A_i\|_K \leq 1$ para la norma operador asociada a la norma $\|\cdot\|_K$ sobre $\mathbb{R}^n$. Con lo cual

$$\widehat{\rho}(\{A_1, A_2\}) \leq \widehat{\rho}_1(\{A_1, A_2\}, \|\cdot\|_K) \leq 1.$$

■

Observación 4.1.3. En particular se utilizará K como la región encerrada por una elipse. Que se define como los puntos que cumplen

$$\begin{aligned} p(x, y) &:= x^2 + txy + sy^2 - 1 \leq 0 \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R} \\ K &:= \{(x, y) : p(x, y) \leq 0\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Según la caracterización de las ecuaciones cartesianas de segundo orden el conjunto K está limitado por una elipse si y sólo si su discriminante es negativo:

$$\begin{aligned} t^2 - 4s &< 0 \\ t^2 &< 4s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

El siguiente lema involucra un caso particular de matrices palindrómicas de orden 2, con un 0 fuera de la diagonal y con igual radio espectral igual a 1.

Lema 4.1.4. *Sean*

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \alpha \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

dos matrices reales con $\rho(A) = \rho(B) = |\alpha| = 1$ y $\rho(AB) \leq 1$. Entonces $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$.

Demostración: Primero se comienza evaluando las condiciones sobre los autovalores según las hipótesis del lema. De $\rho(A) = 1$ y $|\alpha| = 1$ se tiene $|\lambda| \leq 1$. Por otro lado

$$\begin{aligned} AB &= |\alpha|^2 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + a^2 & a \\ a\lambda & \lambda \end{pmatrix} \\ \det(xI_n - AB) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} x - \lambda - a^2 & -a \\ -a\lambda & x - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (x - \lambda - a^2)(x - \lambda) - a^2\lambda &= 0 \\ x^2 - (2\lambda + a^2)x + \lambda^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si los autovalores de AB son reales entonces $(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2 \geq 0$ y los autovalores son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\lambda + a^2 + \sqrt{(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2}}{2} \\ x_2 &= \frac{2\lambda + a^2 - \sqrt{(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2}}{2}. \end{aligned}$$

La condición $\rho(AB) = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$ implica

$$\begin{aligned} \frac{|2\lambda + a^2| + \sqrt{(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2}}{2} &\leq 1 \\ \sqrt{(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2} &\leq 2 - |2\lambda + a^2| \\ (2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2 &\leq (2 - |2\lambda + a^2|)^2 \\ (2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2 &\leq 4 - 4|2\lambda + a^2| + (2\lambda + a^2)^2 \\ 4|2\lambda + a^2| &\leq 4 + 4\lambda^2 \\ |2\lambda + a^2| &\leq 1 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Si los autovalores de AB no son reales entonces $(2\lambda + a^2)^2 - 4\lambda^2 < 0$. Y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2 - |2\lambda + a^2|)^2 \\ 0 &\leq 4 - 4|2\lambda + a^2| + (2\lambda + a^2)^2 \\ 4|2\lambda + a^2| &\leq 4 + (2\lambda + a^2)^2 \\ 4|2\lambda + a^2| &\leq 4 + 4\lambda^2 \\ |2\lambda + a^2| &\leq 1 + \lambda^2. \end{aligned}$$

En ambos caso se concluye que $|2\lambda + a^2| \leq 1 + \lambda^2$ lo cual implica

$$a^2 \leq (1 - \lambda)^2. \quad (4.3)$$

Algunos casos particulares. Si $a = 0$ entonces A y B son diagonales y queda en forma sencilla que $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$. Si $\lambda = 1$ entonces (4.3) implica $a = 0$ que es el caso anterior. Si $a^2 = (1 - \lambda)^2$ entonces los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ a \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Pero estos vectores son autovectores de A y B respectivamente correspondientes al autovalor λ . Y por lo tanto las matrices tienen un subespacio propio invariante que permite realizar un cambio de base para que queden en forma triangular superior simultáneamente. lo cual implica nuevamente que $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$.

Se considera ahora el caso general con

$$-1 \leq \lambda < 1 \quad (4.4)$$

$$0 < a^2 < (1 - \lambda)^2 . \quad (4.5)$$

Para lo cual se definirá un polinomio cuadrático de modo que el conjunto K definido por (4.1) permita definir una norma $\| \cdot \|_K$ y utilizar así el Lema 4.1.2. Con las condiciones mencionadas se define

$$p(x, y) = x^2 + txy + y^2 - 1 \quad \text{con } t := \frac{2a}{1 - \lambda}. \quad (4.6)$$

La condición (4.3) garantiza que el conjunto K definido por los puntos $p(x, y) \leq 0$ están encerrados por una elipse porque se cumple (4.2). Se verá ahora que $AK \subseteq K$.

Para $\lambda \neq 0$, el conjunto imagen AK son los puntos tales que

$$p_A(x, y) = x^2 + \frac{1}{\lambda}(-2a + t)xy + \frac{1}{\lambda^2}(a^2 - at + 1)y^2 - 1 \leq 0 . \quad (4.7)$$

Lo cual puede corroborarse directamente con la sustitución correspondiente $x = \alpha(x + ay)$, $y = \alpha\lambda y$. También en este caso se cumple (4.2) de modo que AK está delimitada por otra elipse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2}(-2a + t)^2 - 4 \cdot \frac{1}{\lambda^2}(a^2 - at + 1) &= \frac{1}{\lambda^2} [4a^2 - 4at + t^2 - 4a^2 + 4at - 4] \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [t^2 - 4] < 0 . \end{aligned}$$

Para comprobar que $AK \subseteq K$ se toma (x, y) tal que $p_A(x, y) = 0$ y se evalúa el signo que tiene $p(x, y)$ reemplazando $x^2 - 1$

$$\begin{aligned} x^2 + txy + y^2 - 1 &= txy + y^2 - \frac{1}{\lambda}(-2a + t)xy - \frac{1}{\lambda^2}(a^2 - at + 1)y^2 - 1 \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda t - t + 2a)xy + \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 - a^2 + at - 1)y^2 ; \end{aligned}$$

de (4.6) se tiene que $\lambda t - t + 2a = 0$

$$= \frac{y^2}{\lambda^2}(\lambda^2 - a^2 + at - 1) .$$

El signo de $p(x, y)$ está dado por el factor $(\lambda^2 - a^2 + at - 1)$. Reemplazando t queda

$$\begin{aligned}
 (\lambda^2 - a^2 + at - 1) &= \lambda^2 - a^2 + \frac{2a^2}{1 - \lambda} - 1 \\
 &= \lambda^2 - 1 + \frac{2a^2 - a^2(1 - \lambda)}{1 - \lambda} \\
 &= \lambda^2 - 1 + \frac{a^2(1 + \lambda)}{1 - \lambda} \quad \text{por (4.4) y (4.5)} \\
 &\leq \lambda^2 - 1 + \frac{(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)}{1 - \lambda} = 0 .
 \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ queda $a^2 \leq 1$ y la matriz A es una proyección sobre el eje x con

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x + ay) \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que la imagen por A de los puntos tales que $x^2 + 2axy + y^2 - 1 \leq 0$ quedan sobre el eje x con

$$(\alpha(x + ay))^2 = x^2 + 2axy + a^2y^2 \leq 1 - y^2 + a^2y^2 \leq 1$$

de modo que $|\alpha(x + ay)| \leq 1$.

El segmento $[-1, 1]$ del eje x está incluido en K . Un desarrollo similar permite comprobar que también $BK \subseteq K$ y por lo tanto $\widehat{\rho}(\{A, B\}) \leq 1$. Por otro lado, las condiciones $\rho(A) = \rho(B) = 1$ implican $1 \leq \rho_1(\{A, B\}) \leq \rho(\{A, B\}) = \widehat{\rho}(\{A, B\})$. ■

En el siguiente teorema se contempla el caso general de matrices palindrómicas de orden 2 reduciendo el problema al caso especial del Lema 4.1.4.

Teorema 4.1.5. *Dadas*

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad R = \begin{pmatrix} l_{22} & l_{21} \\ l_{12} & l_{11} \end{pmatrix}$$

un par de matrices reales palindrómicas. Entonces

$$\widehat{\rho}(\{L, R\}) = \max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\} .$$

Demostración: Al intercambiar entre sí las filas de L o intercambiar entre sí las columnas de R se obtiene la misma matriz. O sea, si se define

$$M = \begin{pmatrix} l_{12} & l_{11} \\ l_{22} & l_{21} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

entonces $L = MP$ y $R = PM$. Además se cumple $\rho(LR) = \rho(MPPM) = \rho(M^2) = \rho(M)^2$. Por lo tanto

$$\max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\} = \max\{\rho(MP), \rho(M)\} . \quad (4.8)$$

Por otro lado usando la identidad $P^2 = I_n$ se tiene

$$\begin{aligned} LL &= MP \cdot MP = M \cdot PMP \\ LR &= MP \cdot PM = M \cdot M \\ RL &= PM \cdot MP = PMP \cdot PMP \\ RR &= PM \cdot PM = PMP \cdot M . \end{aligned}$$

De lo que se deduce que todos los productos con una cantidad par de factores de elementos de $\{L, R\}$ puede reescribirse como un producto con la misma cantidad de factores de elementos de $\{M, PMP\}$; y recíprocamente.

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\{L, R\}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\{L, R\})^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_{2k}(\{L, R\})^{1/2k} \\ \widehat{\rho}(\{M, PMP\}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_k(\{M, PMP\})^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\rho}_{2k}(\{M, PMP\})^{1/2k} \end{aligned}$$

$$\widehat{\rho}(\{L, R\}) = \widehat{\rho}(\{M, PMP\}) . \quad (4.9)$$

Esta última igualdad (4.9) permite hacer intercambios entre M y MP sin pérdida de generalidad. En el sentido que si se define $\widetilde{M} := MP$ se cumple $\widetilde{M}P = M$ y $P\widetilde{M} = PMP$

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\{MP, PM\}) &= \widehat{\rho}(\{M, PMP\}) = \widehat{\rho}(\{\widetilde{M}P, P\widetilde{M}\}) = \widehat{\rho}(\{\widetilde{M}, P\widetilde{M}P\}) \\ \max\{\rho(MP), \rho(M)\} &= \max\{\rho(\widetilde{M}), \rho(\widetilde{M}P)\} . \end{aligned}$$

A continuación se mostrará que

$$\max\{\rho(M), \rho(MP)\} = 1 \implies \widehat{\rho}(\{M, PMP\}) = 1 . \quad (4.10)$$

Sea entonces $\max\{\rho(M), \rho(MP)\} = 1$. De acuerdo a lo dicho anteriormente no se pierde generalidad si se supone que $1 = \rho(M) \geq \rho(MP)$. Si los autovalores de M son reales entonces alguno de ellos vale 1 ó -1. Si por el contrario, los autovalores de M no son reales cumplen $x_1 = \overline{x}_2$ y $1 = \rho(M) = |x_1| = |x_2|$. Entonces $\det(MP) = -\det(M) = -x_1x_2 = -|x_1| = -1$. Para calcular los autovalores de MP se toma

$$\begin{aligned} \det(MP - xI_n) &= x^2 - \text{tr}(L)x + \det(L) = x^2 - (l_{11} + l_{22})x - 1 \\ x_{1,2} &= -\frac{l_{11} + l_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l_{11} + l_{22}}{2}\right)^2 + 1} . \end{aligned}$$

La única manera para que $|x_{1,2}| \leq 1$ es que $l_{11} + l_{22} = 0$ y por lo tanto $x_{1,2} = \pm 1$. De modo que alguna de las dos matrices M o MP tiene como autovalor a 1 ó -1. Haciendo un intercambio entre ellas se puede suponer que M tiene un autovalor +1 ó -1. Se toma el autovector correspondiente

$$v := \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{y la matriz} \quad T := \begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix} . \quad (4.11)$$

Si T no es invertible entonces $e = f$ o $e = -f$ y por lo tanto $Pv = v$ o $Pv = -v$. Lo cual implica que v es un autovector común entre L y R , y pueden llevarse a la forma triangular superior en forma simultánea de modo que por la Proposición 2.1.6 se concluye que $\widehat{\rho}(\{L, R\}) = 1$ y por (4.9) se obtiene lo deseado en (4.10).

Si T es invertible se definen las matrices A y B de la siguiente manera utilizando el hecho de que tanto T como T^{-1} conmutan con P

$$A := T^{-1}MT = \alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B := T^{-1}PMPT = PT^{-1}MTP = PAP = \alpha \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha = \pm 1.$$

Dado que $|\alpha| = 1$ se tiene $\rho(A) = \rho(B) = |\alpha| = 1$; a la vez que

$$\rho(AB) = \rho(T^{-1}MPMPT) = \rho(MP)^2 \leq 1.$$

Por Lema 4.1.4 se tiene $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$ y dado que el cambio de base por matrices similares no modifica el Radio Espectral Conjunto se tiene también que $\widehat{\rho}(\{M, PMP\}) = 1$. Lo que se proponía demostrar en (4.10).

Comenzando desde el principio del teorema se toman L y R según las hipótesis. Para el caso especial $\max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\} = 0$ se tiene que L tiene al 0 como único autovalor. Si v es un autovector de L y si se define T como en (4.11) se puede tomar

$$A := T^{-1}LT = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde $b = 0$ es consecuencia de que L tiene al 0 como único autovalor. Tomando la matriz palindrónica $B := PAP = T^{-1}RT$ queda

$$0 = \rho(LR) = \rho(AB) = \rho\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\right) = \rho\left(\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a^2.$$

Y por lo tanto $a = 0$, $L = R = 0$ y $\widehat{\rho}(\{L, R\}) = 0$.

Para el caso general $\max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\} = v > 0$ se define $\tilde{L} := L/v$, $\tilde{R} := R/v$. Y con estas definiciones queda $\max\{\rho(\tilde{L}), \sqrt{\rho(\tilde{L}\tilde{R})}\} = 1$. Lo cual implica $\widehat{\rho}(\{\tilde{L}, \tilde{R}\}) = 1$ por (4.10). Finalmente también se cumple $\widehat{\rho}(\{L/v, R/v\}) = \widehat{\rho}(\{L, R\})/v$. Y con esto se termina la demostración de la igualdad deseada

$$\widehat{\rho}(\{L, R\}) = \max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\}.$$

■

Ejemplo 4.1.6. Para el par de matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dependientes de un parámetro $\omega \in \mathbb{R}$ se tiene

$$LR = \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ \omega^2 & \omega^2 + \omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega + 1 \end{pmatrix} ;$$

de modo que los autovalores de LR son

$$x_{1,2} = \omega \frac{\omega + 2 \pm \sqrt{4\omega + \omega^2}}{2} = \frac{1}{4}(\omega \pm \sqrt{\omega^2 + 4\omega})^2$$

$$\rho(LR) = \frac{1}{4}(\omega + \sqrt{\omega^2 + 4\omega})^2 .$$

Por otro lado es $\rho(L) = \max\{1, |\omega|\}$. Por el Teorema 4.1.5 queda

$$\widehat{\rho}(\{L, R\}) = \max\{\rho(L), \sqrt{\rho(LR)}\} = \begin{cases} |\omega| & \text{para } \omega \leq -1 \\ 1 & \text{para } -1 \leq \omega \leq 1/2 \\ \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + 4\omega}}{2} & \text{para } 1/2 \leq \omega. \end{cases}$$

4.2. Matrices con igual Radio Espectral

La técnica utilizada en la demostración del Lema 4.1.4 puede generalizarse para casos especiales de matrices con igual radio espectral.

Teorema 4.2.1. Sean

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} , \quad B = \beta \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

dos matrices reales con $\rho(A) = |\alpha| = \rho(B) = |\beta|$, $ab \geq 0$ y $\rho(AB) \leq \rho(A)^2$. Entonces $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = \rho(A)$.

Demostración: El caso particular $\rho(A) = \rho(B) = 0$ implica $A = B = 0$. Tomando $\rho(A) > 0$ y escalando con $1/\alpha$ se puede asumir que $\rho(A) = \rho(B) = 1$, con lo cual $|\alpha| = |\beta| = 1$. Las condiciones en las hipótesis sobre los autovalores de A y B implican que

$$|\lambda|, |\mu| \leq 1 \tag{4.12}$$

Calculando los autovalores de AB al igual que en la demostración del Lema 4.1.4 se puede suponer en primer lugar que son autovalores reales de la forma

$$x_{1,2} = \frac{\pm(\mu + \lambda + ab) \pm \sqrt{(\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu}}{2} .$$

Con lo cual $\rho(AB) \leq \rho(A)^2 = 1$ implica

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pm(\mu + \lambda + ab) \pm \sqrt{(\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu}}{2} \right| &\leq 1 \\ |\mu + \lambda + ab| + \sqrt{(\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu} &\leq 2 \\ \sqrt{(\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu} &\leq 2 - |\mu + \lambda + ab| \\ (\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu &\leq 4 - 4|\mu + \lambda + ab| + (\mu + \lambda + ab)^2 \\ 4|\mu + \lambda + ab| &\leq 4 + 4\lambda\mu \\ |\mu + \lambda + ab| &\leq 1 + \lambda\mu . \end{aligned}$$

Si los autovalores de AB no son reales entonces $(\mu + \lambda + ab)^2 - 4\lambda\mu < 0$ se toma

$$\begin{aligned} 0 &\leq (2 - |\mu + \lambda + ab|)^2 \\ 0 &\leq 4 - 4|\mu + \lambda + ab| + (\mu + \lambda + ab)^2 \\ 4|\mu + \lambda + ab| &\leq 4 + 4\lambda\mu \\ |\mu + \lambda + ab| &\leq 1 + \lambda\mu . \end{aligned}$$

En ambos casos se concluye que $|\mu + \lambda + ab| \leq 1 + \lambda\mu$, que junto con (4.12) implica

$$ab \leq (1 - \lambda)(1 - \mu) . \quad (4.13)$$

Si $\lambda = 1$ o $\mu = 1$ entonces $ab = 0$ y por lo tanto alguna de las dos matrices A o B es diagonal. Cualquiera de las dos que lo sea respeta la forma triangular superior/inferior de la otra y por ende $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$ como se desea. Otra opción especial es que $ab = (1 - \lambda)(1 - \mu)$; en este caso los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ b \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Cada uno de los cuales es un autovector de A y B correspondientes a los autovalores λ y μ respectivamente. O sea, A y B tienen al menos un autovector en común y por lo tanto se puede concluir nuevamente que $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = 1$.

En el caso general se asume $\lambda, \mu \neq 1$ y $0 < ab < (1 - \lambda)(1 - \mu)$. Y se define el conjunto K como los puntos que verifican $p(x, y) \leq 0$ con

$$p(x, y) = x^2 + txy + sy^2 - 1 \quad \text{con } s := \frac{a(1 - \mu)}{b(1 - \lambda)}, \quad t := \frac{2a}{1 - \lambda}. \quad (4.14)$$

Para $\lambda \neq 0$ la imagen por A del conjunto K queda encerrada por los puntos $p_A(x, y) \leq 0$ con

$$p_A(x, y) = x^2 + \frac{1}{\lambda}(t - 2a)xy + \frac{1}{\lambda^2}(a^2 - ta + s)y^2 - 1 . \quad (4.15)$$

Para chequear que $AK \subseteq K$ se toma (x, y) tales que $p_A(x, y) = 0$ y analiza el signo de $p(x, y)$ sustituyendo $x^2 - 1$

$$\begin{aligned} x^2 + txy + sy^2 - 1 &= txy + sy^2 - \frac{1}{\lambda}(t - 2a)xy - \frac{1}{\lambda^2}(a^2 - ta + s)y^2 \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda t - t + 2a)xy + \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 s - a^2 + ta - s)y^2 ; \end{aligned}$$

de (4.14) se tiene que $\lambda t - t + 2a = 0$

$$= \frac{y^2}{\lambda^2}(\lambda^2 s - a^2 + ta - s) .$$

El signo de $p(x, y)$ está dado por el factor $(\lambda^2 s - a^2 + ta - s)$. Reemplazando t queda

$$\begin{aligned} (\lambda^2 s - a^2 + ta - s) &= \lambda^2 s + \frac{2a^2}{1 - \lambda} - a^2 - s \\ &= s(\lambda^2 - 1) + \frac{2a^2 - a^2(1 - \lambda)}{1 - \lambda} \\ &= s(\lambda^2 - 1) + \frac{a^2(1 + \lambda)}{1 - \lambda} \\ &= s(\lambda^2 - 1) + s \frac{a^2(1 + \lambda)}{s(1 - \lambda)} \\ &= s(\lambda^2 - 1) + s \frac{ab(1 - \lambda)(1 + \lambda)}{(1 - \mu)(1 - \lambda)} \quad \text{por (4.12) y (4.13)} \\ &\leq s(\lambda^2 - 1) + s(1 - \lambda^2) = 0 . \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ queda $ab \leq (1 - \mu)$ y la matriz A es una proyección sobre el eje x con

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x + ay) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que la imagen por A de los puntos tales que $x^2 + 2axy + \frac{a(1-\mu)}{b}y^2 \leq 1$ quedan sobre el eje x con

$$(\alpha(x + ay))^2 = x^2 + 2axy + a^2y^2 \leq 1 - \frac{a(1-\mu)}{b}y^2 + a^2y^2 \leq 1$$

de modo que $|\alpha(x + ay)| \leq 1$.

El segmento $[-1, 1]$ del eje x está incluido en K . Para comprobar que $BK \subseteq K$ se procede de la misma manera. Y por lo tanto $\widehat{\rho}(\{A, B\}) \leq 1$. ■

A continuación se presentan dos ejemplos para mostrar que las condiciones sobre los autovalores de las A , B y AB son necesarias y no pueden obviarse. Porque de lo contrario no se cumple la igualdad deseada $\widehat{\rho}(\{A, B\}) = \rho(A)$.

Ejemplo 4.2.2. Para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no se cumple la condición $ab \geq 0$. Todas las demás condiciones se cumplen dado que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma(AB) = \{1/2 \pm i\sqrt{3}/2\}$$

y por lo tanto $\rho(AB) = 1$. Calculando todos los autovalores de $T \in \{A, B\}^k$ se puede ver que $\rho(T) = 1$ para $k = 1, \dots, 4$. Sin embargo para $A^3B^2 \in \{A, B\}^5$ resulta $\rho(A^3B^2) = 2 + \sqrt{3} > 1$. En el Apéndice A están calculadas todas las matrices $T \in \{A, B\}^k$ mencionadas. ▲

Ejemplo 4.2.3. Un segundo ejemplo se puede tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } 0 < \beta < 1.$$

Son matrices con diferente radio espectral $\rho(A) = 1$ y $\rho(B) = \beta < 1$. Y se cumple

$$A^k B = \beta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1+k & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma(A^k B) = \left\{ \frac{\beta}{2}(k+2 \pm \sqrt{k^2+4k}) \right\}.$$

Esto muestra que para $0 < \beta < 2/(3 + \sqrt{5})$ se tiene $\rho(AB) = \rho(A^1 B) \leq 1$. Además de cumplirse la condición $ab \geq 0$. Sin embargo tomando k suficientemente grande se puede hacer

$$\rho(A^k B) = \frac{\beta}{2}(k+2 + \sqrt{k^2+4k}) > 1$$

de modo que

$$\widehat{\rho}(\{A, B\}) = \rho(\{A, B\}) \geq \rho_{k+1}(\{A, B\})^{1/k+1} \geq \rho(A^k B)^{1/k+1} > 1. \quad \blacktriangle$$

4.3. Aproximación para el Radio Espectral Conjunto

El cálculo exacto del Radio Espectral Conjunto puede ser complicado incluso para casos sencillos de matrices de 2×2 con características especiales como se desarrolló en secciones anteriores. Para el cálculo aproximado del Radio Espectral Conjunto se puede usar la desigualdad (1.13)

$$\rho_k(\Sigma)^{1/k} \leq \rho(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}.$$

Si $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ es un conjunto acotado entonces $\rho(\Sigma)$ y $\widehat{\rho}(\Sigma)$ coinciden y por lo tanto para valores de k suficientemente grande los valores de $\rho_k(\Sigma)^{1/k}$ y $\widehat{\rho}_k(\Sigma)^{1/k}$ dan una aproximación tan precisa de $\widehat{\rho}(\Sigma)$ como se quiera. Sin embargo, los cálculos de los $\rho_k(\Sigma)$ y $\widehat{\rho}_k(\Sigma)$ pueden ser demasiado costosos y largos. Implican calcular todos los autovalores de las matrices productos involucradas en Σ^k .

Ejemplo 4.3.1. La siguiente gráfica muestra el cálculo de $\hat{\rho}_k(\Sigma)$ y $\rho_k(\Sigma)$ para $k = 8$ en el caso de una matriz A fija y otra matriz B dependiente del parámetro a

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -2/a & 1 \end{pmatrix} .$$

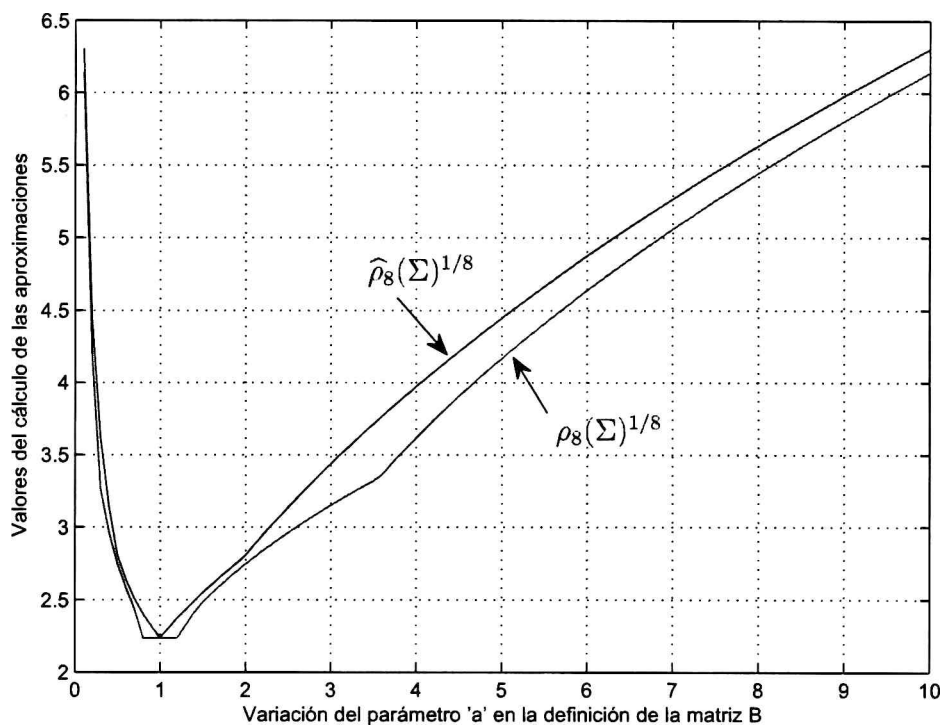


Figura 4.1: Gráfica de $\rho_k(\Sigma)$ y $\hat{\rho}_k(\Sigma)$ para $k = 8$.

Para realizar la gráfica se utilizó un programa en Matlab para computar los 2^8 productos pertenecientes a Σ^8 , junto con sus autovalores, radios espectrales $\rho(T)$ y normas espectrales $\|T\|_{sp}$. Las rutinas de Matlab utilizadas están transcritas en el Apéndice B.

En [5] se desarrollan aproximaciones fácilmente calculables para conjuntos finitos de matrices con coeficientes reales. Una de ellas utiliza normas elipsoidales y satisface

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rho_a(\Sigma) \leq \hat{\rho}(\Sigma) \leq \rho_a(\Sigma) , \quad (4.16)$$

donde $\rho_a(\Sigma)$ es la aproximación que utiliza normas elipsoidales y n es la dimensión de las matrices.

Definición 4.3.2. Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$ un conjunto de matrices con coeficientes complejos, se define la **aproximación por normas elipsoidales** para el Radio Espectral Conjunto por

$$\rho_a(\Sigma) = \inf_{P>0} \sup_{A \in \Sigma} \|A\|_P .$$

▲

O sea, para cada matriz P definida positiva se considera la norma elipsoidal asociada $\|\cdot\|_P$ sobre $\mathbb{C}^n$ según la Definición 1.2 y la norma operador correspondiente $\|\cdot\|_P$ sobre $\mathbb{M}_n$

$$\|x\|_P = \sqrt{\langle Px, x \rangle} = \sqrt{x^* P x}$$

$$\|A\|_P = \sup \{ \|Ax\|_P : \|x\|_P = 1 \} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^* A^* P A x}}{\sqrt{x^* P x}} .$$

Usando la Proposición 2.1.3 se tiene que para conjuntos acotados la aproximación $\rho_a(\Sigma)$ es mayor o igual que $\widehat{\rho}(\Sigma)$, dado que el ínfimo sobre todas las normas matriciales es siempre menor o igual al ínfimo sobre las normas matriciales elipsoidales. La definición anterior implica

$$\begin{aligned} \sqrt{x^* A^* P A x} &\leq \|A\|_P \sqrt{x^* P x} && \text{para todo } x \\ x^* A^* P A x &\leq \|A\|_P^2 x^* P x \\ x^* (A^* P A - \|A\|_P^2 P) x &\leq 0 ; \end{aligned}$$

y por lo tanto $A^* P A - \|A\|_P^2 P \leq 0$. El número $\|A\|_P$ puede pensarse como el menor escalar $\gamma \geq 0$ para el cual $A^* P A - \gamma^2 P \leq 0$. Y la aproximación $\rho_a(\Sigma)$ como el menor escalar $\gamma \geq 0$ tal que $A^* P A - \gamma^2 P \leq 0$ para toda $A \in \Sigma$ para alguna $P > 0$:

$$\rho_a(\Sigma) = \inf \{ \gamma \geq 0 : \exists P > 0 \text{ tal que } A^* P A - \gamma^2 P \leq 0 \text{ para toda } A \in \Sigma \} .$$

Así planteado, el cálculo de $\rho_a(\Sigma)$ puede resolverse en forma eficiente como un problema de optimización convexa con restricciones generales.

Ejemplo 4.3.3. Retomando el Ejemplo 4.3.1 se considera el conjunto $\Sigma = \{A, B\}$ para A y B matrices con coeficientes reales de tamaño 2×2 . El problema de optimización convexa con restricciones generales en este caso se plantea de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \gamma \\ &\text{sujeto a las} \\ &\text{restricciones} \quad \begin{cases} P > 0 \\ \gamma^2 P - A^T P A \geq 0 \\ \gamma^2 P - B^T P B \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La condición $\gamma^2 P - A^T P A \geq 0$ equivale a 3 restricciones de desigualdad

$$\begin{aligned} \det(\gamma^2 P - A^T P A) &\geq 0 \longrightarrow r_1 \leq 0 \\ (\gamma^2 P - A^T P A)_{11} &\geq 0 \longrightarrow r_2 \leq 0 \\ (\gamma^2 P - A^T P A)_{22} &\geq 0 \longrightarrow r_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Y en forma similar para $\gamma^2 P - B^T P B \geq 0$ equivale a otras 3 restricciones de desigualdad $r_4 \leq 0$, $r_5 \leq 0$ y $r_6 \leq 0$. A estas 6 restricciones hay que agregarles las correspondiente que derivan de $P > 0$

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} > 0 \iff \begin{cases} y^2 - xz < 0 & \longrightarrow r_7 \leq 0 \\ x < 0 & \longrightarrow r_8 \leq 0 \\ z < 0 & \longrightarrow r_9 \leq 0 \end{cases}$$

Estas últimas 3 restricciones debería ser desigualdades estrictas; sin embargo pueden escribirse de la forma $r_i + \epsilon \leq 0$ para valores de $\epsilon > 0$ tan pequeños como sea necesario. Algunas de las restricciones son de la forma denominadas restricciones de caja; aunque la mayoría son no-lineales. El planteo del problema queda entonces

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \gamma \\ &s.a. \{ r_i \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

El Matlab ofrece una rutina para la resolución numérica de este tipo de problemas con restricciones genéricas: la rutina `fmincon`. En el Apéndice B están desarrolladas las definiciones para poder utilizar esa rutina que permite revolver el problema de optimización considerando el caso del conjunto de matrices $\Sigma = \{A, B\}$ del Ejemplo 4.3.1. En la siguiente gráfica se muestra el cálculo de $\hat{\rho}_k(\Sigma)$ y $\rho_k(\Sigma)$ para $k = 8$ como en el ejemplo mencionado, junto con el resultado obtenido del problema de optimización. Esta gráfica es similar a la presentada en la página 107 del artículo de Blondel-Nesterov-Theys [5].



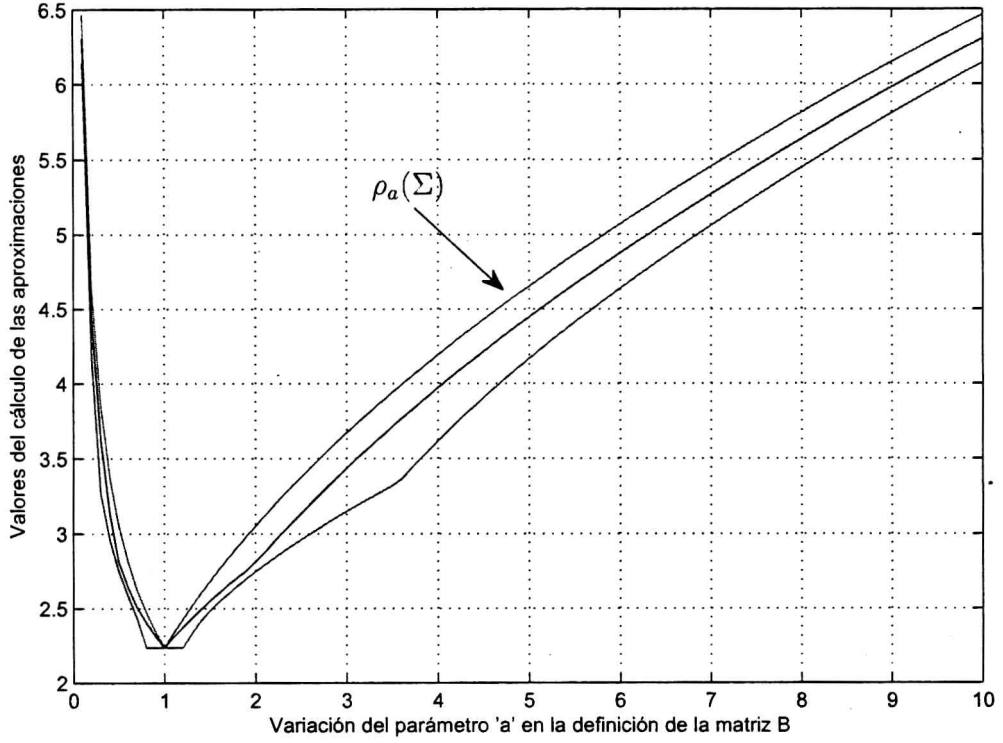


Figura 4.2: Comparación de la aproximación con normas elipsoidales.

Retomando la definición de la aproximación por normas elipsoidales, la precisión mencionada en (4.16) es resultado del siguiente teorema. En el artículo original [5] de Blondel-Nesterov-Theys se propone la acotación válida para conjuntos finitos con coeficientes reales; y utiliza para la demostración una adaptación del Teorema Elipsoidal de John en su versión para $\mathbb{R}^n$. Aprovechando la versión matricial de este teorema, Teorema 3.2.2, publicada por Ando-Shih en [1], y todo lo desarrollado en la Sección 3 se puede establecer la misma acotación como válida para conjuntos acotados con coeficiente complejos.

Teorema 4.3.4. *Dado $\Sigma \subseteq \mathbb{M}_n$, conjunto acotado de matrices con coeficientes complejos; y dada $\rho_a(\Sigma)$ la aproximación elipsoidal para el Radio Espectral Conjunto según la Definición 4.3.2, entonces*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rho_a(\Sigma) \leq \widehat{\rho}(\Sigma) \leq \rho_a(\Sigma) .$$

Demostración: La segunda desigualdad es consecuencia de la caracterización para el cálculo del Radio Espectral Conjunto dada por la Proposición 2.1.3, dado que en para $\widehat{\rho}(\Sigma)$ se toma el ínfimo sobre el conjunto $\mathcal{N}$ de todas las normas operadores; conjunto más grande que el correspondiente a sólo las normas operador generadas por normas elipsoidales.

Para la primera desigualdad se toma $\widehat{\rho}(\Sigma) < \tau$, de modo que $\widetilde{\Sigma} = \frac{1}{\tau\sqrt{n}}\Sigma$ es un conjunto acotado con Radio Espectral Conjunto pertenece al intervalo $[0, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Por el Teorema 3.2.3, $\widetilde{\Sigma}$ es simultáneamente contractible. De modo que existen $H > 0$ y $0 < \gamma < 1$ tales que

$$A^*HA \leq \gamma^2 H \quad \text{para toda } A \in \widetilde{\Sigma}.$$

Y por ende

$$\begin{aligned} \rho_a(\widetilde{\Sigma}) &\leq \gamma < 1 \\ \frac{1}{\tau\sqrt{n}}\rho_a(\Sigma) &< 1 \\ \frac{\rho_a(\Sigma)}{\sqrt{n}} &< \tau \quad \text{para todo } \tau > \widehat{\rho}(\Sigma). \end{aligned}$$

Lo cual muestra la desigualdad deseada. ■

Ejemplo 4.3.5. La precisión estipulada en el teorema anterior es exacta en el sentido que no puede mejorarse más; dado que existen conjuntos Σ para los cuales se cumplen una u otra de las igualdades en (4.16). Por un lado se tiene que para conjuntos Σ formados únicamente por matrices normales se cumple la igualdad en el lado derecho, ver Corolario 2.1.5

$$\widehat{\rho}(\Sigma) = \rho_a(\Sigma) = \sup_{A \in \Sigma} \rho(A) .$$

Por otro lado, tomando Σ como (3.18) para el caso particular de $\alpha = 1/\sqrt{n}$ correspondiente al segundo paso de la demostración del Teorema 3.2.3. En la demostración se comprueba que Σ es un conjunto acotado de n matrices con coeficiente complejos, **no** simultáneamente contractible, con $\widehat{\rho}(\Sigma) = 1/\sqrt{n}$.

Dado que Σ no es simultáneamente contractible se deduce que para cualquier $0 < \gamma < 1$ no existe $P > 0$ que cumpla $A^*PA \leq \gamma^2 P$ para toda $A \in \Sigma$. De modo que $\rho_a(\Sigma) \geq 1$. Y por ende

$$\frac{\rho_a(\Sigma)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} = \widehat{\rho}(\Sigma) .$$
▲

Apéndice A

Matrices con igual Radio Espectral

En el Ejemplo 4.2.2 se hace referencia al cálculo de los autovalores para todas las matrices en $\{A, B\}$, $\{A, B\}^2$, $\{A, B\}^3$ y $\{A, B\}^4$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

En todos los casos resulta ser que $\rho(T) = 1$ para cualquier T .

Para $k = 1$

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
A	$\sigma(A) = \{1\}$	$\rho(A) = 1$
B	$\sigma(B) = \{1\}$	$\rho(B) = 1$

Para $k = 2$

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^2) = \{1\}$	$\rho(A^2) = 1$
$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(AB) = \{1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(AB) = 1$
$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(BA) = \{1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(BA) = 1$
$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^2) = \{1\}$	$\rho(B^2) = 1$

Para $k = 3$

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^3) = \{1\}$	$\rho(A^3) = 1$
$A^2B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^2B) = \{\pm i\}$	$\rho(A^2B) = 1$
$ABA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(ABA) = \{\pm i\}$	$\rho(ABA) = 1$
$AB^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(AB^2) = \{\pm i\}$	$\rho(AB^2) = 1$

Para $k = 3$ (continuación)

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$BA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(BA^2) = \{\pm i\}$	$\rho(BA^2) = 1$
$BAB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(BAB) = \{\pm i\}$	$\rho(BAB) = 1$
$B^2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^2A) = \{\pm i\}$	$\rho(B^2A) = 1$
$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^3) = \{1\}$	$\rho(B^3) = 1$

Para $k = 4$

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^4) = \{1\}$	$\rho(A^4) = 1$
$A^3B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^3B) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(A^3B) = 1$
$A^2BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^2BA) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(A^2BA) = 1$
$A^2B^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^2B^2) = \{-1\}$	$\rho(A^2B^2) = 1$
$ABA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(ABA^2) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(ABA^2) = 1$
$ABAB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(ABAB) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(ABAB) = 1$
$AB^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(AB^2A) = \{-1\}$	$\rho(AB^2A) = 1$
$AB^3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(AB^3) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(AB^3) = 1$
$BA^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\sigma(BA^3) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(BA^3) = 1$
$BA^2B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(BA^2B) = \{-1\}$	$\rho(BA^2B) = 1$
$BABA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(BABA) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(BABA) = 1$
$BAB^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(BAB^2) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(BAB^2) = 1$
$B^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^2A^2) = \{-1\}$	$\rho(B^2A^2) = 1$
$B^2AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^2AB) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(B^2AB) = 1$

Para $k = 4$ (continuación)

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$B^3A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^3A) = \{-1/2 \pm 1/2\sqrt{3}i\}$	$\rho(B^3A) = 1$
$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(B^4) = \{1\}$	$\rho(B^4) = 1$

Al continuar con el procedimiento para $k = 5$ se observa que $\rho(A^3B^2) = \sqrt{7}$.
Para $k = 5$

$\{A, B\}^k$	$\sigma(T)$	$\rho(T)$
$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^5) = \{1\}$	$\rho(A^5) = 1$
$A^4B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^4B) = \{-1\}$	$\rho(A^4B) = 1$
$A^3BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^3BA) = \{-1\}$	$\rho(A^3BA) = 1$
$A^3B^2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma(A^3B^2) = \{-2 \pm \sqrt{3}i\}$	$\rho(A^3B^2) = \sqrt{7}$

Apéndice B

Rutinas en Matlab utilizadas

Para la elaboración de la gráfica 4.1 en la Sección 4.3 se utiliza la siguiente rutina general, que incluye la subrutina `Skpara2matrices` descripta luego a continuación.

Algorithm B.1: Rutina General para Gráfica 4.1

```
1 A=[1. 2.;-2. 1.];
2 k=8 ;                                     // cantidad de productos
3 a=1:1:10 ;                               // variación del parámetro en la matriz B
4 for jj = 1:length(a) do
5     B=[1 2*a(jj);-2/a(jj) 1];             // Generación de la matriz B
6     S =Skpara2matrices(k,A,B) ;           // genera el conjunto  $S^k$ 
7     for jjj = 1 : 2k do
8         vnorma(jjj)=norm(S(:,k,jjj)) ;     // las normas en  $S^k$ 
9         [x,auto]=eig(S(:,k,jjj)); auto=diag(auto);
10        vradio(jjj)=max(abs(auto)) ;       // radios espectrales en  $S^k$ 
11    end
12    rck(jj)=(max(vnorma ))1/k ;           // rck = para Radio Espectral Conjunto
13    rgk(jj)=(max(vradio ))1/k ;         // rgk = para Radio Espectral Generalizado
14 end
15 plot(a,rck,a,rgk), grid ;
16 h = legend('rck','rgk'); set(h,'Interpreter','none')
```

Algorithm B.2: Subrutina Skpara2matrices

```
1 Function [S ]=Skpara2matrices(k,L,R):
; // k = cantidad de productos
; // S(:, :, 1, :) = conjunto de R y L = [R L]
; // S(:, :, 2, :) = S2 = [RR RL LR LL]
; // Los productos se construyen usando la numeración binaria:
; // el j-ésimo elemento de S(:, :, k, :)=Sk se construye multiplicando
; // L y R según la notación binaria de 'j-1'. Donde L=1 R=0
; // Ejemplo: Para k=4 se tiene que j va de 0 a 15
; // j = 14 = 8+4+2 = 1110 = 1110 ==>S(:, :, 4, 14) = LLLR
; // j = 3 = 2+1 = 11 = 0011 ==>S(:, :, 4, 3) = RRLL
2 for j=1 : 2k do
3   S(:, :, k, j)=[1 0;0 1] ;           // Inicializando S(:, :, k, j)
4   n=j-1;
;                                     // rem(n,2)= resto de dividir n por 2
5   for jj=1 : k do
6     if rem(n,2)==1 then
7       | S(:, :, k, j)=L*S(:, :, k, j)
8     else
9       | S(:, :, k, j)=R*S(:, :, k, j)
10    end
11    n=(n-rem(n,2))/2;
12  end
13 end
```

Para la elaboración de la gráfica 4.2 se utilizaron las siguientes rutinas y subrutinas. La rutina general es muy similar a la primera presenta en estos apéndices. Utiliza también la subrutina `Skpara2matrices`; además utiliza las subrutinas `mingenerico`, `resgen`

Algorithm B.3: Rutina General para Gráfica 4.2

```
1 A=[1. 2;-2. 1];
2 k=8;                                     // cantidad de productos
3 a=1:1:10;                               // variación del parámetro en la matriz B
4 for jj = 1:length(a) do
5     B=[1 2*a(jj);-2/a(jj) 1];           // Generación de la matriz B
6     S=Skpara2matrices(k,A,B);           // genera el conjunto  $S^k$ 
7     for jjj = 1:2k do
8         vnorma(jjj)=norm(S(:,k,jjj));    // las normas en  $S^k$ 
9         [x,auto]=eig(S(:,k,jjj)); auto=diag(auto);
10        vradio(jjj)=max(abs(auto));       // radios espectrales en  $S^k$ 
11    end
12    rck(jj)=(max(vnorma ))1/k;           // rck = para Radio Espectral Conjunto
13    rgk(jj)=(max(vradio ))1/k;          // rgk = para Radio Espectral Generalizado
14    [elnorma1(jj) x y z]=mingenerico(A,B);
        ; // norma elipsoidal de S minimizando el gamma
15 end
16 plot(a,rck,a,rgk,a,elnorma1), grid;
17 h = legend('rck','rgk','elnorma1'); set(h,'Interpreter','none')
```

Algorithm B.4: Subrutina mingenerico

```
1 Function [m,x,y,z]=mingenerico(A,B);
2 x0=[10 10 10 10];
3 ff = @(xx) resgen(xx,A,B);
4 AA=[]; bb=[];
5 options=optimset('Display','off');
6 [r,rval]=fmincon(@fobjetivo,x0,AA,bb,[],[],[],[],ff,options);
7 m=rval;
8 x=r(2); y=r(3); z=r(4);
9 end
```

Algorithm B.5: Función resgen

```
1 Function [cc,ceq]=resgen(xx,A,B) ; // a,b,c,d,e,f,g,h
2 r=xx(1);
3 x=xx(2);
4 y=xx(3);
5 z=xx(4);
6 P=[xx(2) xx(3);xx(3) xx(4)];
7 EC1 = $r^2 * P - A' * P * A$ ;
8 EC2 = $r^2 * P - B' * P * B$ ;
9 r1=-det(EC1);
10 r2=-EC1(1,1);
11 r3=-EC1(2,2);
12 r4=-det(EC2);
13 r5=-EC2(1,1);
14 r6=-EC2(2,2);
15 r7=-det(P);
16 r8=-x;
17 r9=-z;
18 r10=-r;
19 cc=[r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 r8 r9 r10];
20 ceq=[];
21 end
```

Algorithm B.6: Función fobjetivo

```
1 Function f=fobjetivo(x) ;
2 f=x(1);
3 end
```

Bibliografía

- [1] T. Ando, M.-H. Shih. *Simultaneous contractibility*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 19 (2) (1998), pp. 487-498
- [2] M. A. Berger, Y. Wang, *Bounded semigroups of matrices*, Linear Algebra Appl. 166 (1992), pp. 21-27
- [3] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag New York Inc. (1997)
- [4] V. Blondel, *The birth of the joint spectral radius: An interview with Gilbert Strang*, Linear Algebra and Its Applications 428 (2008) pp. 2261-2264
- [5] V. Blondel, Y. Nesterov, J. Theys. *On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius*, Linear Algebra and Its Applications 394 (2005) pp. 91-107
- [6] V. Blondel, J. Theys. A. Vladimirov, *An elementary counterexample to the finiteness conjecture*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24 (4) (2003). pp. 963-970
- [7] J. Bochi. *Inequalities for numerical invariants of sets of matrices*, Linear Algebra Appl. 368 (2003) pp. 71-81
- [8] T. Bousch, J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topological IFS, tetris heaps and the finiteness conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), pp. 77-111
- [9] I. Daubechies, J. C. Lagarias, *Two scale difference equation I. Existence and global regularity of solutions*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), pp. 1388-1410
- [10] I. Daubechies, J. C. Lagarias, *Two scale difference equation II. Local regularity. infinite products of matrices and fractals*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), pp. 1031-1079
- [11] I. Daubechies, J. C. Lagarias, *Sets of matrices all infinite products of which converge*, Linear Algebra Appl. 161 (1992), pp. 227-263
- [12] I. Daubechies, J. C. Lagarias *Corrigendum/addendum to: Sets of matrices all infinite products of which converge*, Linear Algebra Appl. 327 (2001), pp. 69-83
- [13] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge U.P. 1958

- [14] L. Elsner *The generalized spectral radius theorem: An analytic-geometric proof*, Linear Algebra Appl. 220 (1995), pp. 151-159
- [15] G. Gripenberg, *Computing the joint spectral radius*, Linear Algebra Appl. 234 (1996), pp. 43-60
- [16] F. John, *Studies and essays*, Interscience, New York (1948), pp. 184-204. Reimpreso en *Collected papers* Vol. 2 J. Moser ed. Birkäuser, Boston, MA (1985), pp. 543-560
- [17] V. Kozyakin, *On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula*, Linear Algebra Appl. 431 (2009) pp. 2134-2141
- [18] J. C. Lagarias, Y. Wang, *The finiteness conjectures for the generalized spectral radius of a set of matrices*, Linear Algebra and Its Applications 214 (1995), pp. 17-42
- [19] B. Mößner, *On the joint spectral radius of matrices of order 2 with equal spectral radius*, Advances in Computational Mathematics 33 (2009) pp. 243-254
- [20] C. J. A. Nash-Williams, *Infinite graphs - a survey*, J. Combin Theory 3 (1967), pp. 286-301
- [21] G.-C. Rota, *On models for linear operators*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), pp. 469-472
- [22] G.-C. Rota, W.-G. Strang, *A note on the joint spectral radius*, Proc. Netherlands Academy 22 (1960), pp. 379-381
- [23] W. Rudin, *Functional analysis*. McGraw-Hill
- [24] M.-H. Shih, J.-W. Wu, C.-T. Pang, *Asymptotic stability and generalized Gelfand spectral radius formula*, Linear Algebra Appl. 252 (1997), pp. 61-70