



# Evolución de un gas de agujeros negros en un universo con rebote

Tesis para obtener el grado académico de  
Licenciada en Astronomía

Iara Pintos

**Directora**

Dra. Daniela Pérez

**Co-directora**

Dra. Florencia L. Vieyro

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata

Marzo 2025



# Resumen

Las cosmologías de rebote son modelos alternativos al modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM que resuelven por construcción el problema de la singularidad cosmológica inicial. En estos modelos el Universo comienza a contraerse desde un estado diluido para luego atravesar un rebote y continuar hacia una etapa de expansión, tal como está descrita por el modelo  $\Lambda$ CDM. Dentro del contexto de la Relatividad General, la existencia del rebote implica una violación de las condiciones de energía. Durante la contracción, la mayoría de la estructura del Universo desaparece. Sin embargo, los agujeros negros, como son regiones del espacio-tiempo con una curvatura específica, podrían sobrevivir al rebote.

El objetivo principal de este trabajo es investigar la evolución de una población de agujeros negros en interacción con un fluido cosmológico en las fases de contracción, rebote y expansión. A su vez, se analizará de qué manera el fluido cosmológico de fondo es afectado por la presencia de los agujeros negros. Con este propósito, desarrollamos un modelo cosmológico de dos fluidos en interacción. Mostramos que para un amplio rango de masas, podemos considerar que no hay fusión entre los agujeros negros. Determinamos la evolución en la población de agujeros negros y la del fluido cosmológico de fondo, mediante la resolución de un sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales. Estas últimas se derivan de la conservación del tensor de energía-momento total y de las ecuaciones cosmológicas en Relatividad General. Encontramos que la presencia de la población de agujeros negros afecta de manera significativa el comportamiento del fluido cosmológico cerca del rebote.



# Abstract

Bouncing universes are alternative models to the standard cosmological model  $\Lambda$ CDM that solve the problem of the initial cosmological singularity by construction. The bounce is preceded by a contraction phase starting from a practically flat and dilute universe. After the bounce, the universe evolves into the current expansion stage as described by the  $\Lambda$ CDM model. Within the framework of General Relativity, the existence of the bounce implies a violation of the energy conditions. During the contraction, most of the structure of the universe disappears. However, since black holes are regions of spacetime with a specific curvature, they could survive the bounce.

The aim of this work is to analyze the evolution of a black hole gas in the phases of contraction, bounce and expansion. In turn, we determine how the cosmological background fluid is affected by the presence of the black holes. To this end, we have developed a cosmological model of a two-fluid interaction. We determine the evolution of the population of black holes and the cosmological background fluid by solving an integro-differential system of equations, which are derived from the conservation of the energy-momentum tensor and the cosmological equations of General Relativity. We find that the presence of the black hole population substantially affects the behaviour of the cosmological fluid near the bounce.



# Agradecimientos

Al escribir esta tesis, no solo finalizo la carrera de grado, sino también una de las etapas más lindas de mi vida. Agradezco de corazón a todas las personas que me acompañaron, de alguna manera u otra, en este trayecto que se volvió cada vez más empinado, pero en el que siempre estuvieron ahí para extenderme la mano y ayudarme a seguir. Cada una de ellas colaboró con su granito de arena y me ayudó a cumplir mi sueño de ser astrónoma. Por eso, estas palabras no las escribo solamente yo, sino que son el reflejo de todas las personas que me acompañaron en este camino, dándome siempre su aliento y su cariño constante. Esta lista no es exhaustiva, pero me gustaría agradecer a las siguientes personas en particular:

A mis padres, Iris y Gonzalo, por el apoyo incondicional, no solo a lo largo de la carrera, sino durante toda mi vida y en cada delirio que se me ocurriera. Por todo el esfuerzo que hicieron para que estudiar me resultara lo más fácil posible. Por las palabras de aliento antes de cada final y por esa confianza tenaz en que, algún día, yo sería astrónoma. Gracias por enseñarme a ser la persona que soy hoy.

A mis hermanos, Tiago y Martín, por aguantar todas y cada una de mis locuras. Por incontables tardes jugando al truco, a la canasta y cualquier otro juego. Por compartir la misma enfermedad por Colón, el deporte y la música.

A mis abuelos, que si bien hoy no están para leer estas palabras, fueron fundamentales en mi vida. Al abuelo Olivio, la persona más inteligente que conocí alguna vez y de quien aprendí a pensar lógicamente. A la abuela Tere, que me enseñó las recetas más ricas del mundo. A la abuela Leo, que siempre me llamaba antes y después de los finales y negociaba con los Santos para que rindiera bien. A toda mi familia de Berna y de Santa Fe, que siempre la tengo cerquita mía en el corazón.

A mis amigas de toda la vida: Lu, Cande, Seli, Magui y Mato. Por estar siempre ahí cuando lo necesité, en mis mejores y peores épocas, y entender los infinitos “no puedo, tengo que estudiar”. Son un pilar fundamental en mi vida. Gracias por tantos viajes compartidos, por los días jugando a todos los juegos habidos y por haber y por ser mi conexión a tierra. También quiero agradecerles a sus familias, por hacerme sentir parte de ella.

A mis amigos del Obser. A Joaco, por haber hecho prácticamente toda la carrera juntos. Gracias por tu cariño y apoyo durante todos estos años y por estar siempre. A Juampi y Juli, mis compañeros de recitales, por bancarme en cada crisis y por hacerme sentir que siempre puedo contar con ustedes. A Nati, Mili, Rodri y el

Terre, por la cantidad de finales preparados juntos y por los campamentos donde se mezclaban muchísimo estudio y aún más risas. A Tomi, Lu, Bruno, Thiaguito, Vicki B., Vicky A., Santi el Gringo, Vicky G., Lean y Gonza, por recibirme siempre con una sonrisa en el CEGMA. Por tantas horas jugando a las cartas, por los almuerzos llenos de chismes en el Wanschaff, por los debates sobre los tópicos más insólitos que se nos puedan ocurrir. A Jere, por ser mi compañero en las aterradoras tierras de Exactas. A Lía, por alojarme en su casa cuando todavía no vivía en La Plata. Y a toda la gente con la que compartimos al menos un mate en el CEGMA.

A mis directoras, Dani y Flor, por la inquebrantable paciencia y la absoluta dedicación durante todo el proceso, en el que nos aventuramos por varios rincones de la Relatividad General. Este trabajo no habría sido posible sin su compromiso, su apoyo constante y su confianza.

A los miembros del Tribunal Examinador, Ignacio y Leandro, por los aportes constructivos que me ayudaron a crear un trabajo más completo y por su buena predisposición.

A quienes forman, sostienen y participan del Encuentro Nacional de Estudiantes de Astronomía. El ENEA es uno de los espacios más lindos de los que me tocó ser parte. A toda la gente maravillosa que me ayudó a abrir la cabeza de La Plata, Córdoba y San Juan: gracias por ayudarme a repensar constantemente nuestro rol en la ciencia, por mostrarme las múltiples formas de mirar, pensar y hacer Astronomía y por devolverme las ganas de seguir cuando la meta se veía lejísimos.

A la Olimpiada Argentina de Astronomía, por despertarme la chispa de la pasión por la Astronomía cuando era adolescente. Si no hubiera participado, hoy no estaría escribiendo estas palabras.

A la Universidad Nacional de La Plata y, en particular, a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, mi segunda casa. A los docentes, no docentes y compañeros que la integran. Es un privilegio haber sido estudiante de una Universidad pública y de calidad. Gracias por permitirnos crecer y capacitarnos no solo como profesionales, sino también como personas. En especial, quiero destacar al equipo de Extensión y Planetario, lugar que me sigue formando y me permite aprender la ciencia desde otro lugar.

A mi gatita Aryna, mi fiel compañera durante todo el proceso de escritura de esta tesis.

Al Universo, que permite maravillarnos con sus misterios.

Y gracias a quien lea esta tesis. Espero que disfrutes, aunque sea, una pequeña fracción de todo lo que yo disfruté al escribirla.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Relatividad General</b>	<b>15</b>
2.1. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	15
2.1.1. Solución de Schwarzschild . . . . .	19
2.1.2. Geometría de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	23
<b>3. Modelos cosmológicos</b>	<b>30</b>
3.1. Modelo Cosmológico Estándar . . . . .	30
3.1.1. Teoremas de singularidad . . . . .	32
3.1.2. Condiciones de energía . . . . .	33
3.2. Universos con rebote . . . . .	35
3.3. Agujero negro cosmológico en un universo con rebote . . . . .	38
<b>4. Gas de agujeros negros en universos con rebote</b>	<b>43</b>
4.1. Fluidos en interacción . . . . .	43
4.2. Factor de llenado . . . . .	45
4.2.1. Dinámica del espacio-tiempo . . . . .	46
4.2.2. Radiación de Hawking . . . . .	47
4.2.3. Acreción de radiación . . . . .	50
4.2.4. Resultados . . . . .	52
4.3. Radiación gravitacional . . . . .	53
4.4. Evolución de los fluidos . . . . .	56
4.4.1. Función de distribución monoenergética . . . . .	58
4.4.2. Función de distribución extendida . . . . .	60
<b>5. Resultados</b>	<b>63</b>
5.1. Parámetros y condiciones de borde . . . . .	63

5.2. Distribución de masas monoenergética . . . . .	64
5.3. Distribución de masas extendida . . . . .	70
5.4. Evolución del fluido cosmológico en ausencia de agujeros negros . . . . .	74
<b>6. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>A. Apéndice A</b>	<b>80</b>
A.1. Obtención de los parámetros del modelo . . . . .	80
<b>B. Apéndice B</b>	<b>83</b>
B.1. Distancia media entre agujeros negros . . . . .	83
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>



# Capítulo 1

## Introducción

*Another turning point, a fork stuck in the road.  
Time grabs you by the wrist, directs you where to go.*

– Billie Joe Armstrong

La cosmología es el estudio del Universo como un todo. El Universo contiene al espacio-tiempo y todas las formas de energía-momento. En particular, el espacio-tiempo puede ser definido como *el sistema emergente de la suma ontológica de todos los eventos de todas las cosas*. Una *cosa* es un individuo dotado de propiedades físicas. Un *evento* es un cambio de estado en las propiedades de una cosa. Una *suma ontológica* es un agregado de cosas o propiedades físicas (Romero, 2018). El principal objetivo de la cosmología es entender la estructura a gran escala del Universo, investigando su evolución, composición y dinámica.

Los modelos cosmológicos brindan una representación conceptual de los diversos mecanismos implicados en la evolución del Universo. El más exitoso hasta la fecha es el Modelo Cosmológico Estándar. Se basa en las ecuaciones de Einstein con un término de constante cosmológica, denotada  $\Lambda$ , y en la validez de la Teoría Cuántica de Campos (TCC). La materia y energía del Universo se representan mediante un fluido perfecto más una componente de materia oscura que solo interactúa gravitacionalmente. Al inicio de la expansión cósmica se supone la existencia de una fase densa y caliente, y se le suele agregar una fase de expansión exponencial para explicar la existencia de las inhomogeneidades primordiales y otras características observacionales.

Sin embargo, el Modelo Cosmológico Estándar, también llamado  $\Lambda$ CDM, presenta varios problemas. Acaso la deficiencia más severa es la presencia de la singularidad cosmológica inicial, que es inherente a la Relatividad General (RG). Una posible manera para evitar la singularidad inicial es mediante un rebote cosmológico clásico. Las cosmologías de rebote son no singulares por construcción. En esta clase de modelos, el Universo comienza a contraerse a partir de una fase muy diluida, evolucionando suavemente hacia un rebote. Luego, el Universo vuelve a expandirse, tal como describe el modelo  $\Lambda$ CDM. En el marco de la teoría de la RG, el rebote

requiere la violación de las condiciones de energía.

En la etapa de contracción, la densidad y temperatura del fluido cosmológico se incrementan de manera tal que toda la estructura preexistente (planetas, estrellas, galaxias, entre otros) se destruye completamente. No obstante, los agujeros negros podrían sobrevivir a la contracción, pues son regiones del espacio-tiempo con una curvatura particular. [Pérez & Romero \(2022\)](#) demostraron que un agujero negro modelado mediante la solución generalizada de McVittie ([Faraoni & Jacques, 2007](#)) sobrevive a un rebote cosmológico. Esto implica que hay toda una clase de modelos de rebote que permiten la existencia de agujeros negros en todas las épocas cosmológicas. Sin embargo, esta investigación involucra solo un agujero negro; es de interés investigar cómo evoluciona una población de agujeros negros durante un rebote cosmológico y, a su vez, determinar cuáles serían los efectos de la presencia de estos agujeros negros en la dinámica del Universo.

La relevancia de este tipo de investigaciones en el marco de la cosmología actual radica en que los agujeros negros que sobreviven al rebote podrían tener un papel fundamental en la fase de expansión del Universo. Por ejemplo, estos agujeros negros podrían ser una componente de la materia oscura o proveer las semillas a partir de las cuales se formarían las galaxias ([Carr & Silk, 2018](#); [Carr & Kühnel, 2020](#)).

La hipótesis fundamental de esta tesis es la suposición de que los agujeros negros existen en el Universo. Existe abundante evidencia a favor de esto ([Abbott \*et al.\*, 2016](#); [Event Horizon Telescope Collaboration, 2019](#)). Además, se supone un modelo cosmológico con rebote. Toda una rama de la cosmología actual está dedicada a la investigación de esta clase de modelos ([Novello & Bergliaffa, 2008](#); [Peter & Pinto-Neto, 2008](#)).

*El objetivo principal de este trabajo es investigar la evolución de una población de agujeros negros en un universo no singular y cuáles son los efectos sobre el fluido cosmológico.* La comparación de las predicciones teóricas con el conocimiento actual de la evolución del Universo permitirá determinar la viabilidad de esta clase de modelos de rebote.

Para ello, especificamos los siguientes objetivos particulares:

- Caracterizaremos los principales procesos por los cuales la masa de los agujeros negros inmersos en el fluido cosmológico puede variar. Consideraremos la pérdida de masa por radiación de Hawking, ganancia de masa por acreción del fluido cosmológico y, además, tendremos en cuenta el cambio de masa debido a la dinámica del espacio-tiempo.
- Desarrollaremos un modelo cosmológico de dos fluidos en interacción (un gas de agujeros negros tipo polvo y un fluido cosmológico) a partir de la conservación del tensor de energía-momento total y de las ecuaciones cosmológicas en RG.
- Resolveremos el sistema de ecuaciones considerando dos distribuciones de masas diferentes para la población de agujeros negros: una monoenergética, centrada en un valor de masa particular, y otra extendida, tipo ley de potencia.

Esto permitirá determinar la densidad de energía de la población de agujeros negros y el fluido cosmológico. A su vez, se derivarán cuáles son los efectos de la presencia de los agujeros negros en el fluido cosmológico.

La presente tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 introducimos los conceptos básicos sobre la RG que usaremos a lo largo del trabajo. Presentamos las ecuaciones de campo de Einstein junto con la solución de Schwarzschild y la geometría de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). En el Capítulo 3 describimos el Modelo Cosmológico Estándar y analizamos sus problemas; en particular, el problema de la singularidad inicial. Luego detallamos el modelo cosmológico alternativo no singular de universos con rebote. Finalmente, describimos soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros negros embebidos en un universo FLRW. En el Capítulo 4 estudiamos el problema general de dos fluidos en interacción. Analizamos las contribuciones al cambio de masa de los agujeros negros, estudiando si hay fusión de los mismos. Luego, presentamos el conjunto de ecuaciones que describe la evolución de la población de agujeros negros y el fluido cosmológico, tanto como para la distribución monoenergética como para la extendida. En el Capítulo 5 analizamos los resultados obtenidos para ambas distribuciones y verificamos la violación de las condiciones de energía. Además, estudiamos la evolución del fluido cosmológico en ausencia de agujeros negros. Por último, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones de la tesis.



# Capítulo 2

## Relatividad General

La RG es una teoría acerca de la gravitación y los sistemas que interactúan con ésta. La curvatura del espacio-tiempo es la manifestación de la gravitación. Las ecuaciones de campo de Einstein determinan la geometría del espacio-tiempo para una dada distribución de materia y energía.

En este capítulo introducimos la teoría de la RG junto con las ecuaciones de campo de Einstein. Además, se presentan la solución de Schwarzschild y la geometría de FLRW.

### 2.1. Ecuaciones de campo de Einstein

El Principio de Equivalencia de Einstein enuncia la relación entre el espacio-tiempo y la gravedad de la siguiente manera (formulación de [Weinberg 1972](#)):

En cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional arbitrario es posible elegir un sistema de coordenadas inercial local tal que, dentro de una región suficientemente pequeña del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en sistemas de coordenadas cartesianos desacelerados en ausencia de gravedad.

El espacio-tiempo puede ser descrito matemáticamente mediante una variedad real cuadri-dimensional diferenciable, la cual puede tener una geometría global muy diferente, pero, localmente, se parece al espacio plano. Esto es equivalente a decir que en cada punto  $\mathcal{P}$  de la variedad existe un plano tangente. La variedad está equipada con un tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . A lo largo de este trabajo, usamos la siguiente signatura para la métrica:  $(-, +, +, +)$ .

La métrica es un tensor simétrico covariante en sus dos índices, la cual permite determinar distancias sobre la variedad. Un tensor métrico particular es  $\eta_{\mu\nu}$ , que representa la métrica plana o Minkowskiana, tal que

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (2.1)$$

En un punto  $\mathcal{P}$  cualquiera sobre la variedad siempre es posible encontrar coordenadas localmente inerciales ( $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu}$  y  $\partial_\rho g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = 0$ ). Esto se relaciona estrechamente con el Principio de Equivalencia, ya que enuncia que hay una similitud entre la indetectabilidad de la gravedad en regiones locales y la habilidad para encontrar este tipo de coordenadas.

La intuición fundamental de Albert Einstein fue que existe un vínculo entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de materia en el mismo, que es la fuente de la gravitación<sup>1</sup>. Matemáticamente, esta relación está dada por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $c$ , la velocidad de la luz. El lado izquierdo de la igualdad refiere a la geometría del espacio-tiempo: se encuentra al tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , contracción del tensor de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  según

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (2.4)$$

donde el tensor de Riemann tiene la forma

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (2.5)$$

y siendo  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  la conexión afín, que está constituida por las derivadas de la métrica

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.6)$$

De esta manera, el tensor de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  y el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  involucran las derivadas segundas del tensor métrico. Tanto el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  como el escalar de Ricci (o escalar de curvatura)  $R = R^\mu_{\mu}$ , definido como la traza del tensor de Ricci, contienen información de la curvatura del espacio-tiempo en presencia de campos de materia. El miembro izquierdo de la Ec. (2.3) también puede ser escrito como  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ , siendo éste conocido como el tensor de Einstein.

Del lado derecho de la igualdad de la Ec. (2.3) se encuentra el tensor de energía-momento, que contiene toda la información sobre la distribución de la materia en el espacio-tiempo. Este tensor representa las propiedades físicas de las cosas materiales (Romero & Vila, 2014). Un ejemplo concreto es el tensor de energía-momento para un fluido perfecto (no hay fuerzas entre las partículas que lo componen, conducción del calor ni viscosidad en el sistema de referencia del fluido) que toma la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>La geometría del espacio tiempo determina la trayectoria de las partículas de prueba, denominada *geodésica*. La ecuación de la geodésica es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (2.2)$$

donde  $x^\mu(\lambda)$  es una curva parametrizada sobre la variedad y  $\lambda$ , el parámetro afín.

siendo  $w^\mu = dx^\mu/ds$  la tetra-velocidad del fluido. Las cantidades escalares  $\rho$  y  $P$  son la densidad de energía y la presión, respectivamente, y pueden relacionarse por medio de una ecuación de estado.

Las ecuaciones de campo de Einstein son un sistema de 10 ecuaciones de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$  no lineales acopladas. De aquí podemos destacar dos cuestiones:

- Los 10 grados de libertad de la métrica se deben a la simetría de  $T^{\mu\nu}$  y  $G_{\mu\nu}$ , la cual proviene, a su vez, de la simetría de la conexión afín  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ <sup>2</sup>.
- La no linealidad de las ecuaciones implica que las soluciones no se pueden superponer para encontrar otras.

Las ecuaciones de campo de la RG pueden escribirse en forma alternativa, como se muestra a continuación: tomando la traza de la Ec. (2.3) se obtiene

$$R = -\frac{16\pi G}{c^4} T, \quad (2.8)$$

donde  $T = T^\mu_\mu$ . De esta manera, reemplazando al escalar de curvatura por la Ec.(2.8), las ecuaciones toman la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (2.9)$$

Si  $T_{\mu\nu} = 0$  en una cierta región del espacio-tiempo, las ecuaciones de Einstein simplemente resultan

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

y la solución que se obtiene de la Ec. (2.10) es una solución de vacío. Se puede mostrar que en un espacio-tiempo de 4 dimensiones puede existir gravitación, dado que el tensor de curvatura  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  tiene 20 componentes independientes y son 10 las ecuaciones de campo. Entonces, es posible que un tensor de curvatura no nulo<sup>3</sup> satisfaga las ecuaciones de campo.

Es posible obtener un sistema de ecuaciones consistentes a las ecuaciones de campo de Einstein agregando cualquier múltiplo constante de  $g_{\mu\nu}$ . Típicamente, a esta constante se la denomina  $\Lambda$ , conocida como la *constante cosmológica*, y las ecuaciones quedan de la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

El nombre de *constante cosmológica* tiene una razón histórica. Einstein mismo introdujo el término porque quería construir modelos estáticos del Universo, cosa

<sup>2</sup>La simetría de la conexión afín se deriva de considerar que la variedad que describe al espacio-tiempo no tiene torsión. Se define al tensor de torsión  $T^\mu_{\nu\lambda}$  como  $T^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ , por lo que es claro ver que si el tensor de torsión es nulo, la conexión afín es simétrica en sus índices covariantes.

<sup>3</sup>Un tensor de curvatura no nulo representa un campo gravitacional no nulo.

que sus ecuaciones de campo estándar no le permitían, pues el resultado predecía un Universo en expansión o contracción. Este análisis fue realizado en 1916; todavía se pensaba que la Vía Láctea representaba todo el Universo y no evolucionaba. Sin embargo, unos años después se descubrió la existencia de otras galaxias y, en 1929, Edwin Hubble midió el corrimiento al rojo de las galaxias cercanas, obteniendo datos observacionales de la expansión del Universo (Hubble, 1929b). Respecto a la introducción de la constante cosmológica, Einstein se refirió a ella como su “torpeza más grande” (Hobson *et al.*, 2006).

Para entender el efecto que genera la constante cosmológica, se calcula el límite de campo débil, donde las ecuaciones de campo de Einstein se reducen a las Newtonianas. Para esto, se supone que la métrica  $g_{\mu\nu}$  es la métrica plana más una pequeña perturbación  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Así, la ecuación de campo (análoga a la ecuación de Poisson, donde  $\Phi$  es el potencial Newtoniano) toma la forma

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2, \quad (2.12)$$

y para una masa esférica  $M$ , la fuerza del campo es

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{GM}{r^2}\vec{r} + \frac{c^2\Lambda r}{3}\vec{r}. \quad (2.13)$$

Así, la constante cosmológica se corresponde con una repulsión gravitacional cuya fuerza aumenta linealmente con  $r$ .

La anterior descripción, sin embargo, solo es válida si se considera en el régimen de campo débil. En el marco de la RG, se propone un tensor de energía-momento con la forma

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} = -c^2 \rho g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

donde la densidad  $\rho$  y la presión  $P$  se relacionan por medio de una ecuación de estado para un fluido cosmológico de la forma

$$P = \omega c^2 \rho, \quad (2.15)$$

con  $\omega$  el parámetro de la ecuación de estado. En este caso,  $\omega = -1$ . Se tiene una ecuación de estado cuya presión es negativa, generando la expansión acelerada del Universo.

Tanto en las Ecs. (2.3) como en las Ecs. (2.11) el único campo presente es la gravedad, representado por la métrica  $g_{\mu\nu}$ . La diferencia entre ambas es la ley de la gravitación: bajo ciertas circunstancias, la gravedad puede ser repulsiva.

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica también pueden ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right). \quad (2.16)$$

Comparando el segundo término del miembro derecho de esta ecuación con la Ec. (2.14), se puede igualar

$$T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = -c^2 \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

lo que permite definir a la densidad de energía del vacío como

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.18)$$

Sin embargo, esta es una igualdad matemática, no física. Usando argumentos de la TCC, se encuentra que  $\rho_{\text{vac}} \sim \hbar k_{\text{max}}^4$ , siendo  $k_{\text{max}}$  un cierto valor de corte. Suponiendo que sigue siendo válida la TCC en escalas de Planck reducidas  $\bar{m}_{\text{P}} \sim 10^{18}$  GeV, puede usarse esta magnitud como el valor de corte y la densidad de energía teórica resulta

$$\rho_{\text{vac}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4 \approx 10^{112} \text{ erg cm}^{-3}, \quad (2.19)$$

y es constante en el espacio y en el tiempo. Por otro lado, las observaciones cosmológicas<sup>4</sup> estiman una densidad de energía asociada a la constante cosmológica del orden de (Carroll, 2019)

$$\rho_{\Lambda} \approx 10^{-8} \text{ erg cm}^{-3}. \quad (2.20)$$

Hay una diferencia de 120 órdenes de magnitud entre la densidad de energía obtenida a partir de la TCC y la inferida a partir de observaciones. Esto implica que la densidad de energía del vacío no está acelerando la expansión del Universo. Existe algún mecanismo desconocido que está causando la repulsión gravitacional a ciertas escalas: quizás algún campo de materia exótica es responsable, todavía asumiendo la validez de la RG. Esta entidad, con una ecuación de estado negativa, es conocida como *campo de energía oscura* y no pertenece al modelo estándar de la TCC. Siguiendo este enfoque, las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{\text{TCC}} + T_{\mu\nu}^{\text{EO}}), \quad (2.21)$$

con  $T_{\mu\nu}^{\text{TCC}}$  el tensor de energía-momento de todos los campos de materia y  $T_{\mu\nu}^{\text{EO}}$ , el que representa a la energía oscura.

Entre los modelos propuestos para los campos de energía oscura se encuentran la quintaesencia, *k-essence* y los modelos unificados de energía oscura y materia oscura. Para más detalles, se puede consultar Pérez (2023).

### 2.1.1. Solución de Schwarzschild

La primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de vacío fue encontrada por Karl Schwarzschild en 1916 (Schwarzschild, 1916). La misma representa la geometría del espacio-tiempo fuera de una distribución de materia con simetría esférica. Su elemento de línea es, en coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ ,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.22)$$

<sup>4</sup>Observaciones de explosiones de supernovias tipo Ia estiman que el parámetro de la densidad de la energía de vacío hoy  $\Omega_{\Lambda} = 0.7 \pm 0.1$ . El parámetro de densidad se define como  $\Omega_{\Lambda} = (8\pi G/3c^2 H_0^2) \rho_{\Lambda}$ , siendo  $H_0$  el parámetro de Hubble, y permite derivar la densidad de energía asociada a la constante cosmológica.

donde  $M$  es la masa del objeto central.

Los coeficientes de la métrica  $g_{rr}$  y  $g_{tt}$  divergen en  $r = 0$  y  $r = 2GM/c^2$ , respectivamente. Sin embargo, la naturaleza de ambas singularidades es muy diferente. La singularidad en  $r = 0$  es una singularidad esencial; es decir, no hay forma de eliminarla mediante cambio de coordenada alguno. Esto se puede ver a partir del cálculo del escalar de Kretschmann  $K$ , que no depende de las coordenadas usadas en el sistema de referencia. El escalar se define como la contracción del tensor de curvatura consigo mismo según

$$K = R^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6}. \quad (2.23)$$

La singularidad  $r = 0$  es una singularidad escalar tipo espacio, ya que el escalar de curvatura diverge y no existen geodésicas tipo tiempo que puedan evitar la singularidad.

Por otro lado, el carácter de  $r = 2GM/c^2 = r_{\text{Schw}}$ , conocido como *radio de Schwarzschild*, es diferente. Dado que el escalar de Kretschmann no se anula en este punto, no es una singularidad esencial, sino una singularidad de coordenadas. Sin embargo, es un radio particular de esta geometría. Si la masa del objeto se encuentra bastante dentro de este radio<sup>5</sup>, entonces se pueden definir dos regiones de vacío:  $r > r_{\text{Schw}}$  y  $r < r_{\text{Schw}}$ . En el primer caso, a partir del elemento de línea (2.22), se observa que la coordenada  $t$  es tipo tiempo, mientras que las coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$  son espaciales. Para  $r < r_{\text{Schw}}$  esto se invierte:  $t$  representa una coordenada tipo espacio y  $r$ , tipo tiempo.

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 2.1 a partir del análisis de la estructura de los conos de luz. Sea un fotón que se mueve de forma radial ( $d\theta = d\varphi = 0$ ), luego el elemento de línea (2.22) resulta

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (2.24)$$

por ser una trayectoria nula. Así, es posible definir la trayectoria radial de los fotones como

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad (2.25)$$

donde el signo positivo corresponde a un fotón saliente y el negativo, a uno entrante. La integración resulta

$$ct = r + \frac{2GM}{c^2} \ln \left| \frac{c^2 r}{2GM} - 1 \right| + \text{constante} \quad (\text{fotones salientes}), \quad (2.26)$$

$$ct = -r - \frac{2GM}{c^2} \ln \left| \frac{c^2 r}{2GM} - 1 \right| + \text{constante} \quad (\text{fotones entrantes}). \quad (2.27)$$

<sup>5</sup>Para objetos no compactos, el radio de Schwarzschild asociado se encuentra dentro del radio externo del sistema físico. Por ejemplo, para el Sol,  $r_{\text{Schw}} \sim 3$  km, mucho menor que  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5$  km.

Para  $r$  muy grandes, la pendiente de las líneas de mundo de los fotones tiende a  $\pm 1$ , lo que indica que el espacio-tiempo se vuelve asintóticamente Minkowskiano. A medida que  $r \rightarrow r_{\text{Schw}}$ , las pendientes son cada vez mayores (y los conos de luz más angostos), divergiendo en  $r = r_{\text{Schw}}$ . En este radio, los fotones no pueden escapar y se mueven en la superficie nula  $r = r_{\text{Schw}}$ .

En la región  $r < r_{\text{Schw}}$ , los conos de luz invierten completamente su orientación. Esto sucede porque las coordenadas  $t$  y  $r$  invierten su comportamiento. Todos los fotones (y cualquier partícula masiva que se mueve dentro de los conos de luz) terminan en la singularidad esencial  $r = 0$ . No hay forma de escapar; esto requeriría una violación de la causalidad.

En la Fig. 2.1 se observa que las geodésicas de los fotones (y las partículas materiales, que se mueven dentro de los conos de luz) cruzan  $r = r_{\text{Schw}}$  solamente a  $t = \pm\infty$ . Es decir, no son continuas en este punto. Esto puede explicarse del hecho de que las coordenadas son defectuosas en  $r_{\text{Schw}}$ .

A partir de este análisis, resulta de interés estudiar cómo se comporta la métrica bajo otras coordenadas, donde  $r_{\text{Schw}}$  no aparece como singularidad. Un ejemplo son las coordenadas de Eddington-Finkelstein: a partir de la trayectoria de un fotón entrante<sup>6</sup> (Ec. 2.27), y considerando que la nueva coordenada es la constante de integración, denotada como  $v$ , se puede hacer el siguiente cambio de coordenadas

$$v = ct + r + \frac{2GM}{c^2} \ln \left| \frac{c^2 r}{2GM} - 1 \right|, \quad (2.28)$$

siendo  $v$  una coordenada nula. Además, es constante a lo largo de toda la geodésica del fotón entrante, de manera que se comporta de buena manera para todo punto de la misma. Diferenciando la expresión anterior, se encuentra

$$dv = c dt + \frac{r}{r - 2GM/c^2} dr. \quad (2.29)$$

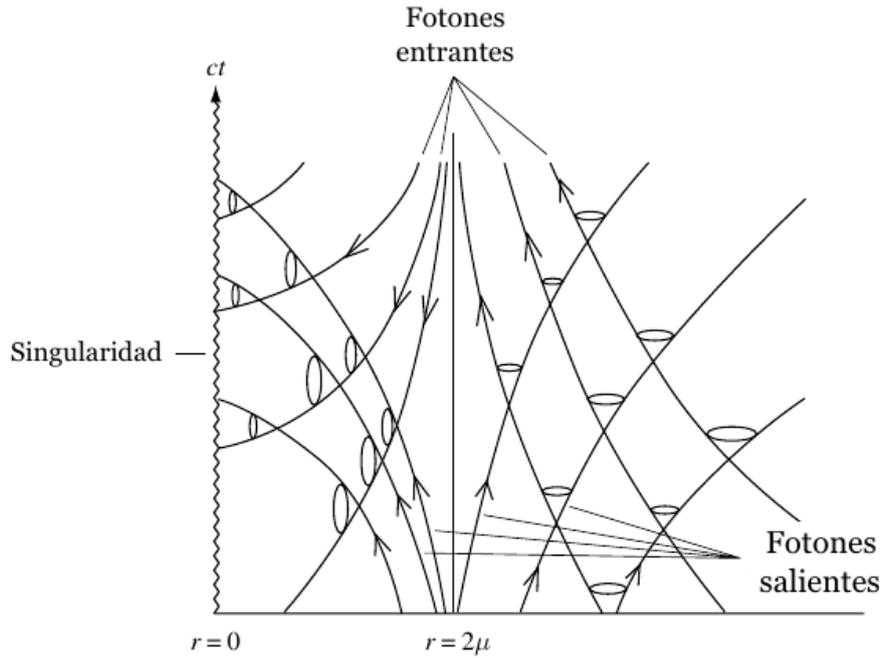
Despejando  $dt$  y sustituyéndolo en el elemento de línea (2.22), encontramos la métrica de Schwarzschild escrita en las coordenadas de Eddington-Finkelstein  $(v, r, \theta, \varphi)$ , dado por

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dv^2 + 2 dr dv + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.30)$$

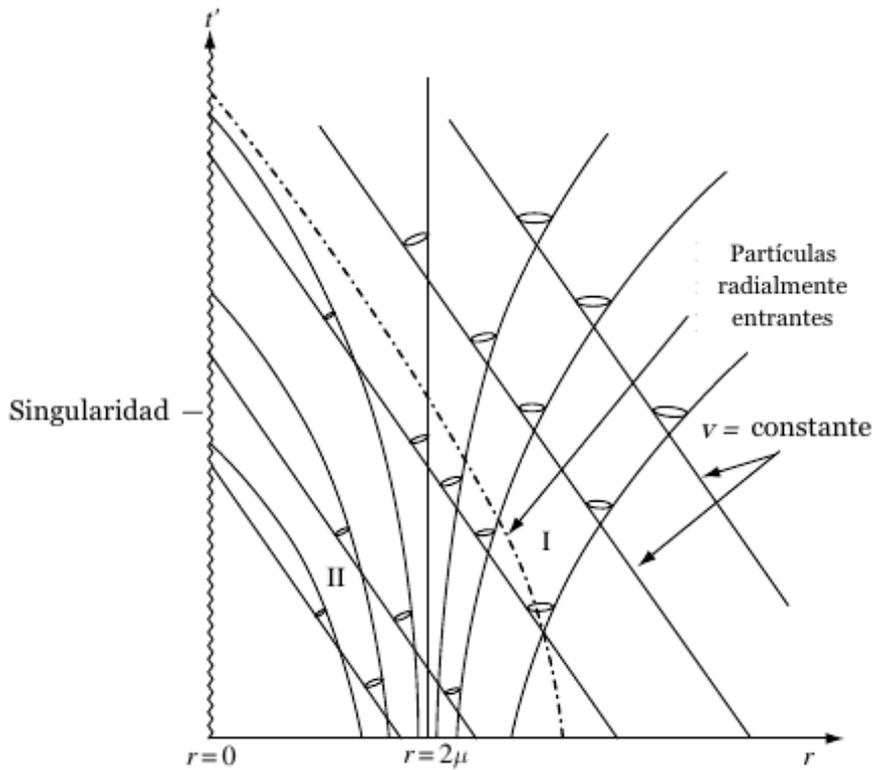
Es evidente que este elemento de línea es regular en  $r = r_{\text{Schw}}$ . Además, este elemento de línea es muy conveniente para calcular geodésicas nulas. Haciendo el mismo tratamiento que para las coordenadas de Schwarzschild, se obtiene que

$$\begin{aligned} v &= \text{constante}, \\ v &= 2r + \frac{4GM}{c^2} \ln \left| \frac{c^2 r}{2GM} - 1 \right| + \text{constante}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

<sup>6</sup>Dado que la coordenada se define a partir de la geodésica de un fotón entrante, estas son conocidas como las *coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein*. Es posible tomar las geodésicas de los fotones salientes para encontrar las *coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein*. Estas nuevas coordenadas representan una extensión analítica a las coordenadas de Schwarzschild.



**Figura 2.1:** Estructura de los conos de luz para una geometría de Schwarzschild, siendo  $\mu = GM/c^2$ . En el diagrama,  $\theta$  y  $\varphi$  están fijos y, gracias a la simetría esférica, cada punto  $(r, ct)$  representa una 2-esfera de área  $4\pi r^2$ . Adaptado de [Hobson \*et al.\* \(2006\)](#).



**Figura 2.2:** Estructura de conos de luz en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Aquí,  $\mu = GM/c^2$ . Adaptado de [Hobson \*et al.\* \(2006\)](#).

que se corresponden con geodésicas radiales nulas entrante y salientes, respectivamente. La estructura de los conos de luz se muestra en la Fig. 2.2. A diferencia de las geodésicas anteriores, la trayectoria de las partículas o fotones entrantes es continua en  $r = r_{\text{Schw}}$ . A medida que  $r \rightarrow r_{\text{Schw}}$  los conos de luz se empiezan a inclinar cada vez más hacia  $r_{\text{Schw}}$ . Esto implica que el futuro causal del observador empieza a tener una porción cada vez mayor en la región  $r < r_{\text{Schw}}$ , hasta que en este punto el cono de luz apunta completamente hacia la singularidad  $r = 0$ . No hay ninguna trayectoria física posible que le permita a algún observador escapar de esta región. Es por esto que la superficie  $r = r_{\text{Schw}}$  es nombrada como *horizonte de eventos*.

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo causalmente desconectada del resto del Universo, es decir, presenta un horizonte de eventos. De hecho, el elemento de línea (2.22) representa un agujero negro de masa  $M$  estático si toda la masa de objeto se encuentra en  $r = 0$ .

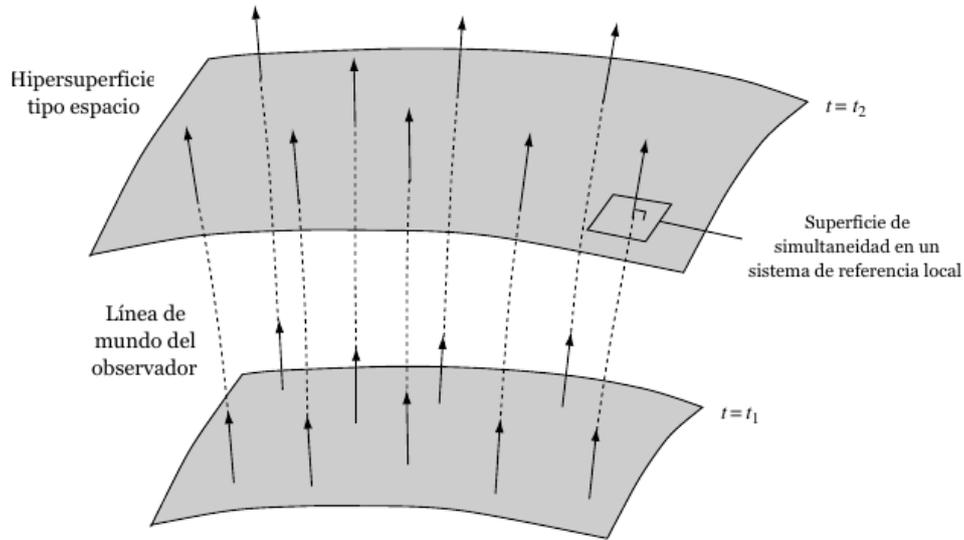
### 2.1.2. Geometría de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En el Sistema Solar, siendo que el Sol contiene el 99.86 % de la masa total del sistema, se observa que en distintas regiones la materia está distribuida de forma muy irregular. Si se quisiera comparar a la Vía Láctea con su vecina Andrómeda, también se verá que la distribución es muy irregular: la materia se centra en las galaxias, pero en el espacio que las separa (770 kpc) no hay cantidad considerable de materia. Este mismo comportamiento se repite en el Grupo Local, el grupo al que pertenecen estas galaxias y en el Supercúmulo de Virgo, que es el supercúmulo de galaxias que contiene al Grupo Local. Para encontrar una distribución homogénea de materia, se deben considerar regiones con radio  $R \sim 6$  Gpc (Schutz, 2022). En estas regiones, la distribución de materia parece uniforme. Aquí es posible aplicar el Principio Cosmológico: en cualquier tiempo particular el Universo se ve igual desde todas las posiciones en el espacio y todas las direcciones en el espacio en cualquier punto son equivalentes. En otras palabras, el Universo es isotrópico y homogéneo.

Observacionalmente, la evidencia de isotropía a grandes distancias se corresponde principalmente con las observaciones del fondo cósmico de radiación (CMB, por sus siglas en inglés), pues la invariabilidad de temperatura del CMB ( $T_{\text{CMB}} \sim 2.75$  K) en diferentes regiones del cielo es sorprendente: presenta desviaciones de la regularidad del orden de  $10^{-5}$  (Carroll, 2019).

Sin embargo, el espacio-tiempo es isotrópico y homogéneo solo espacialmente, puesto que no hay simetría temporal. Gracias a las observaciones de corrimiento al rojo de galaxias lejanas, se observa que el Universo está en expansión. Luego, se puede inferir que la densidad de materia era mucho mayor en el pasado. Entonces, el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico y evoluciona en el tiempo. Esto permite modelar el espacio-tiempo como porciones de hipersuperficies tipo espacio, representadas como una variedad  $\mathbf{R} \times \Sigma$ , donde  $\mathbf{R}$  representa la coordenada tipo tiempo y  $\Sigma$  es la hipersuperficie tipo espacio.

Para definir un parámetro temporal que no sea ambiguo, dado que en la RG no



**Figura 2.3:** Representación de las hipersuperficies tipo espacio, con una dimensión espacial suprimida, donde se encuentran los observadores fundamentales. La línea de mundo de los mismos es ortogonal a cualquier hipersuperficie. Adaptado de [Hobson \*et al.\* \(2006\)](#).

hay sistemas de referencia globales inerciales, se usan justamente las hipersuperficies tipo espacio. El parámetro temporal es un parámetro  $t$  que nombra a las distintas porciones de espacio-tiempo, dadas por las hipersuperficies tipo espacio que nunca se pueden intersectar. De esta manera, referirse a un tiempo particular implica hacer mención a una cierta hipersuperficie. Dado que no existe una coordenada temporal preferencial, no hay un conjunto de porciones preferenciales y se puede construir de muchas maneras las hipersuperficies  $t = \text{constante}$ .

Los observadores que no tienen movimiento relativo al fluido cosmológico son los *observadores fundamentales*. Se toma como válido el Postulado de Weyl, donde suponemos que las líneas de mundo de estos observadores forman una congruencia<sup>7</sup>. La congruencia diverge desde un punto en el pasado finito o infinitamente distante o converge a un punto similar en el futuro. De esta manera se forma el foliado para el espacio-tiempo, construyendo las hipersuperficies  $t = \text{constante}$  tal que la tetra-velocidad de cualquier observador fundamental es ortogonal a la superficie.

Localmente, la superficie de simultaneidad de los sistemas de referencia locales de cada observador coincide con la hipersuperficie. Es natural pensar, luego, que cada hipersuperficie puede ser considerada como un tejido de todos los sistemas de referencia locales. Esto está representado en la Fig. 2.3.

Los observadores fundamentales tienen coordenadas  $(ct, x^1, x^2, x^3)$ , donde las coordenadas espaciales son constantes a lo largo de cada línea de mundo. El parámetro  $t$  puede ser considerado como el tiempo propio a lo largo de cada línea de mundo y se lo nombra como *tiempo cósmico*. Por otro lado, las coordenadas tipo espacio  $(x^1, x^2, x^3)$  son las *coordenadas comóviles*.

<sup>7</sup>Una congruencia es una familia de curvas tal que solo una trayectoria geodésica tipo tiempo pasa a través de cada punto en la variedad.

Con todas estas proposiciones en consideración, se propone la métrica FLRW:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (2.32)$$

en las coordenadas comóviles  $(r, \theta, \varphi)$ . Aquí,  $k$  es una constante y sus valores posibles son  $k = 0, 1, -1$ , dependiendo de si la sección espacial tiene curvatura nula, positiva o negativa, respectivamente.

En el elemento de línea se evidencia la isotropía del espacio. El origen de la coordenada  $r$  es indistinto, pues todos los puntos son equivalentes; se puede poner el origen en cualquier punto y el espacio tendrá siempre la misma forma.

El parámetro  $R(t)$  es el factor de escala y caracteriza la dinámica de la geometría del espacio-tiempo, indicando el tamaño de la porción de hipersuperficie en un cierto tiempo  $t$ . Es usual considerar el factor de escala adimensional  $a(t) = R(t)/R_0$ , donde  $R_0 = R(t_0)$  es el factor de escala hoy.

Para determinar  $R(t)$  se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica no nula (Ecs. 2.11) escritas en la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Para esto, se considera un tensor de energía-momento de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

pues se modela la materia como un fluido simple macroscópico, considerando que la densidad de energía  $\rho = \rho(t)$  y la presión  $P = P(t)$  solo dependen del tiempo cósmico<sup>8</sup> y la tetra-velocidad en el sistema de referencia comóvil es  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . De esta manera, al reemplazar por el valor de  $u^\mu$  se encuentra la expresión para el tensor de energía-momento. Además, la traza resulta  $T^\mu_\mu = c^2 \rho - 3P$ .

Para el miembro izquierdo de la Ec. (2.33), se toma la métrica (2.32). Al ser diagonal, las componentes contravariantes  $g^{\mu\nu}$  son simplemente las recíprocas. Esto permite el cálculo de la conexión afín (2.6) y las componentes del tensor de Ricci (2.4). Las únicas componentes no nulas son las de la diagonal.

Así, igualando ambos desarrollos se encuentran 4 ecuaciones. Sin embargo, aquellas asociadas a las coordenadas espaciales son equivalentes, gracias a la homogeneidad e isotropía de la métrica FLRW. Solo dos ecuaciones derivadas de las ecuaciones de campo gravitatorio son independientes. Estas son las ecuaciones de Friedmann-Lemaître y describen la evolución de la curvatura del espacio-tiempo:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) R + \frac{1}{3} \Lambda c^2 R, \quad (2.35)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{1}{3} \Lambda c^2 R - c^2 k, \quad (2.36)$$

<sup>8</sup>Pues se buscan soluciones para un Universo homogéneo e isotrópico en el espacio.

donde el punto se corresponde con la derivada temporal.

Si  $\Lambda = 0$ , estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Friedmann. Tomando la Ec. (2.35) con  $\Lambda = 0$  y reescribiendo, se encuentra una ecuación para la aceleración del Universo:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (2.37)$$

Si el fluido dominante es el de energía de vacío, con una ecuación de estado  $P = -c^2\rho$ , se obtiene

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{3} \rho > 0, \quad (2.38)$$

luego, el Universo se expande de forma acelerada.

Finalmente, se define el parámetro de Hubble como

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (2.39)$$

que caracteriza la tasa de expansión del Universo. El valor hoy del parámetro de Hubble se escribe como  $H_0 = H(t_0)$  y su recíproco  $1/H_0$  permite estimar la edad del Universo, es decir, el intervalo de tiempo cósmico entre el punto donde  $R(t) = 0$  y la época presente  $t = t_0$ . El parámetro de Hubble se calculó en  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (Abbott *et al.*, 2016) y, consecuentemente, la edad del Universo resulta en  $\sim 13.97 \times 10^9$  años.

### Ecuaciones de conservación del fluido cosmológico

A partir de la conservación del tensor de energía-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.40)$$

y suponiendo un tensor de energía-momento de un fluido perfecto es posible encontrar las siguientes ecuaciones

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) + \frac{P}{c^2} \nabla_\mu u^\mu = 0, \quad (2.41)$$

$$\left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \left( -g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \nabla_\mu P. \quad (2.42)$$

La Ec. (2.42) se satisface automáticamente pues ambos miembros se anulan: en el miembro izquierdo, dado que  $u^\mu = (1, 0, 0, 0) = \delta_0^\mu$ , se obtiene

$$\left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \nabla_0 u^\nu = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \nabla_0 u^0 = 0, \quad (2.43)$$

mientras que, para el miembro derecho,

$$\left( -g^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \nabla_\mu P = \left( -g^{0\nu} - \frac{u^0 u^\nu}{c^2} \right) \nabla_0 P, \quad (2.44)$$

porque  $P = P(t)$  únicamente. Resulta

$$\left(-g^{0\nu} - \frac{u^0 u^\nu}{c^2}\right) \nabla_0 P = \left(-g^{00} - \frac{u^0 u^0}{c^2}\right) \nabla_0 P = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2}\right) \nabla_0 P = 0. \quad (2.45)$$

Por otro lado, la Ec. (2.41) puede ser reescrita de otra manera. Se define la derivada covariante  $\nabla_\mu$  actuando sobre un vector cualquiera  $V^\mu$  como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V^\alpha \quad (2.46)$$

y en caso de que los índices estén contraídos, se obtiene

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu V^\alpha \quad (2.47)$$

donde  $\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha$  es la conexión afín. Dado que la conexión afín es simétrica en sus índices covariantes,  $\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$ . Si se reemplaza esta definición en la Ec. (2.41), esta toma la forma

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha(\rho u^\mu) + \frac{P}{c^2}(\partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha u^\mu) = 0. \quad (2.48)$$

Como  $u^\mu = \delta_0^\mu$ , el sistema se reduce a

$$\partial_0 \rho + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \Gamma_{0\alpha}^\alpha = 0. \quad (2.49)$$

Aquí se calculan las conexiones afines para cada  $\alpha$ , sabiendo que

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_0 g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{0\alpha}), \quad (2.50)$$

luego

$$\bullet \Gamma_{00}^0 = 0, \quad (2.51)$$

$$\bullet \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{R^2(t)} \partial_0 \left( \frac{R^2(t)}{1 - kr^2} \right) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (2.52)$$

$$\bullet \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2(t) r^2} \partial_0 (R^2(t) r^2) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (2.53)$$

$$\bullet \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2(t) r^2 \sin^2 \theta} \partial_0 (R^2(t) r^2 \sin^2 \theta) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}. \quad (2.54)$$

Reemplazando en la Ec. (2.49), se encuentra

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = 0. \quad (2.55)$$

Esta ecuación refiere a la conservación de la energía. Aún más, suponiendo una ecuación de estado para un fluido cosmológico de la forma  $P = \omega c^2 \rho$  e integrando

en el tiempo cósmico  $t$ , se obtiene la evolución de la densidad de energía del fluido cosmológico, que es proporcional al factor de escala

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)}. \quad (2.56)$$

Entre los ejemplos más conocidos de fluidos cosmológicos se puede encontrar la materia (o polvo), radiación y el vacío. El parámetro de la ecuación de estado  $\omega$  toma diferentes valores:  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1/3$  y  $\omega = -1$  respectivamente.

La materia es un conjunto de partículas no relativistas que no interactúa entre sí, tal que su presión es nula:  $P_M = 0$ . Las estrellas y galaxias pueden ser modeladas como polvo, pues la presión es despreciable frente a la densidad de energía. Así, la evolución de la densidad cae como

$$\rho_M \propto R^{-3}, \quad (2.57)$$

pues la densidad numérica de partículas disminuye a medida que el Universo se expande.

Respecto a la radiación, que también incluye partículas materiales relativistas, su ecuación de estado es de la forma  $P_r = 1/3 c^2 \rho_r$ ; luego, la evolución de la densidad de energía es

$$\rho_r \propto R^{-4}. \quad (2.58)$$

Esta densidad de energía cae más rápido que la de la materia.

Dado que la ecuación de estado para el vacío tiene la forma  $P_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda$ , la densidad de energía del vacío es constante en el tiempo

$$\rho_\Lambda \propto R^0. \quad (2.59)$$

Como las otras densidades de energía,  $\rho_M$  y  $\rho_r$ , decrecen con la expansión del Universo, si existe una densidad de energía del vacío no nula, a largo plazo será la energía que domine. Esto será posible siempre y cuando el Universo no empiece a contraerse.



# Capítulo 3

## Modelos cosmológicos

En este capítulo se describe al modelo estándar en cosmología y se analizan algunas de sus problemáticas, particularmente la singularidad cosmológica inicial. Se presenta un modelo cosmológico alternativo, las llamadas cosmologías con rebote, que resuelven por construcción el problema de la singularidad. Se cierra el capítulo introduciendo soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representan agujeros negros embebidos en un Universo FLRW.

### 3.1. Modelo Cosmológico Estándar

A partir de sus ecuaciones de campo con constante cosmológica (2.11), Einstein modeló al Universo como un todo, representando a la materia mediante un conjunto de fluidos perfectos. Su motivación era encontrar soluciones de universos estáticos, pues era la visión que había en esa época. De esta manera nacía la cosmología moderna.

Alexander Friedmann predijo la expansión del Universo en 1922, mediante las ecuaciones de la RG (Friedmann, 1922). Años más tarde, en 1929, Hubble mediría el corrimiento al rojo de galaxias lejanas (Hubble, 1929a), confirmando las predicciones teóricas de Friedmann. Por su parte y de manera independiente, George Lemaître obtuvo modelos cosmológicos dinámicos, cuyos resultados predecían un tiempo inicial donde el Universo presentaba un tamaño nulo (Lemaître, 1927). A este fenómeno lo llamó *átomo primordial*. El nombre de *Big Bang* sería dado más adelante.

Si el Universo se encuentra en un estado de expansión, luego en el pasado debió haber sido mucho más caliente y denso. La formación de átomos o núcleos no es posible en esta etapa, ya que cualquier fotón energético los destruye inmediatamente. A medida que el Universo se expande, la temperatura disminuye, permitiendo la ligadura de núcleos. Así se formaron los elementos más livianos, como el hidrógeno y el helio. Sus abundancias y la existencia de radiación reliquia de la fase inicial caliente (hoy conocida como CMB) fue estimada correctamente por el modelo de Nucleosíntesis de Big Bang (Alpher *et al.*, 1948).

El modelo cosmológico estándar del Big Bang caliente (HBB, por sus siglas en inglés) está basado en la RG y la TCC. Las predicciones del modelo HBB han sido corroboradas por las observaciones de la expansión del Universo, las abundancias de los elementos livianos y la existencia de la radiación cósmica de cuerpo negro. Sin embargo, en las últimas décadas las observaciones astronómicas mostraron discrepancias entre las dinámicas observadas y las predicciones cinemáticas de la RG. Además, el modelo HBB no predice correctamente la formación de estructura en el Universo (Longair, 2008).

La estrategia que se adoptó para remediar algunos de los problemas del modelo HBB fue postular nuevas formas de materia más allá del modelo estándar de partículas: materia oscura y energía oscura. Al agregarle al modelo HBB materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés), una constante cosmológica no nula, denotada  $\Lambda$ , y un período de expansión exponencial en el Universo temprano, conocido como período de inflación, se obtiene el modelo  $\Lambda$ -Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM). Si bien es el modelo cosmológico más exitoso hasta la fecha, explicando de buena manera los datos observacionales (Planck Collaboration, 2020), es deficiente en muchos aspectos.

En principio, una de las tensiones más importantes del modelo  $\Lambda$ CDM es la incompatibilidad del modelo estándar de partículas con la existencia de materia oscura, que interactúa solo de manera gravitacional con la materia ordinaria, pues deben realizarse extensiones al modelo para predecir candidatos a materia oscura. Sin embargo, estas extensiones no son únicas. Además, los experimentos que tratan de detectar partículas de materia oscura han fallado hasta la fecha (Aprile *et al.*, 2012; Agnese *et al.*, 2014; Akerib *et al.*, 2014).

Asimismo, hay un desacuerdo de  $4\sigma$  a  $6\sigma$  entre las mediciones locales de la tasa de expansión del Universo, cuantificada por el parámetro de Hubble  $H_0$ , y del valor inferido por las mediciones del CMB tomadas por el satélite Planck en el contexto del modelo  $\Lambda$ CDM (Di Valentino *et al.*, 2021). Este problema es conocido como *la tensión de Hubble* y puede ser un indicador fuerte de la insuficiencia del modelo  $\Lambda$ CDM.

En esta misma línea se pueden presentar tres problemas adicionales:

- **El problema de la chatura.** Se quiere explicar por qué el parámetro de densidad  $\Omega$  tiene un valor muy cercano a 1. El parámetro  $\Omega$  es la suma de las densidades normalizadas de materia fría  $\Omega_M$ , materia relativista  $\Omega_R$  y energía de vacío  $\Omega_\Lambda$  y cada una de ellas se calcula a partir de  $\Omega_i = \rho_i(R_0)/\rho_c$ , siendo la densidad crítica  $\rho_c = 3c^2 H_0/8\pi G$ , calculada a partir de la ecuación de Friedmann (2.36) con  $k = 0$  y evaluada hoy.
- **El problema del horizonte.** Se quiere justificar por qué el CMB es suave e isotrópico a grandes escalas, dado que regiones distantes están causalmente desconectadas entre sí.
- **El problema del monopolio.** Casi todas las grandes teorías unificadoras predicen la producción de abundantes monopolos magnéticos en el Universo

temprano, pero hoy no se observan. La masa de cada monopolo se estiman en  $10^{16} m_p$ , siendo  $m_p$  la masa del protón y, como la aniquilación es lo suficientemente lenta, la densidad del monopolo hoy debería ser comparable a la densidad de materia. Tal es así que su densidad de energía es de 15 órdenes de magnitud mayor que la densidad crítica  $\rho_c$ . Con estos valores, el Universo debería haber colapsado (Linde, 2005).

Para solucionar estos problemas, se propuso una fase corta de una expansión acelerada, conocida como *inflación*. Los modelos inflacionarios se obtienen al introducir un campo escalar  $\varphi$  con un Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - V(\varphi), \quad (3.1)$$

conocido como *inflatón*. En Linde (2005) se describe el modelo inflacionario.

Dado que el Universo sufre una rápida expansión, aproximadamente  $10^{-36}$  s luego del Big Bang, el crecimiento acelerado suprime cualquier curvatura, es decir,  $|k| \rightarrow 0$ . Luego, la inflación resolvería el problema de la chatura, pues

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{R^2 H^2}, \quad (3.2)$$

siendo  $H$  el parámetro de Hubble y  $R$  el factor de escala.

Asimismo, la inflación resolvería el problema del horizonte, dado que partes del Universo que hoy están causalmente desconectadas alguna vez estuvieron en equilibrio térmico. También resolvería el problema del monopolo, ya que la inflación diluye cualquier partícula reliquia al punto de no poder ser observada hoy.

Sin embargo, el origen y la naturaleza del inflatón no es del todo clara. Si bien resolvería los problemas mencionados, no se conoce qué es lo que genera el crecimiento exponencial. Además, el modelo es dependiente de condiciones iniciales muy específicas.

A pesar de los problemas anteriormente mencionados, una de las deficiencias más severas del modelo es la presencia de la singularidad cosmológica inicial. La singularidad no es una manifestación de una característica del mundo sino de la incompletitud de la teoría física subyacente, en este caso, la Relatividad General (Romero, 2013).

### 3.1.1. Teoremas de singularidad

Para poder comprender el problema de la singularidad inicial, se desarrollaron teoremas con condiciones globales bajo las cuales geodésicas nulas y tipo tiempo no se pueden extender más allá de un punto singular. Esto trata de resolver la pregunta de si la singularidad inicial de la solución FLRW era una característica inherente a la RG o una consecuencia de la alta simetría del modelo.

Un ejemplo de estos teoremas está dado por Hawking (1967):

**Teorema:** los siguientes requisitos en un espacio-tiempo  $\mathcal{M}$  son mutuamente inconsistentes:

1. Existe una hipersuperficie tipo espacio compacta sin frontera  $\Sigma$ .
2. La divergencia  $\theta$  de los unitarios normales a  $\Sigma$  es positiva en cada punto de  $\Sigma$ .
3. Para cualquier vector  $v^\mu$  que no sea tipo espacio,  $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \leq 0$ .
4. La variedad  $\mathcal{M}$  es geodésicamente completa en las direcciones tipo tiempo pasadas.

Aquí,  $R_{\mu\nu}$  representa el tensor de Ricci y  $\theta = \nabla_\mu v^\mu$  es la expansión, donde  $v^\mu$  es la tetra-velocidad del fluido que genera la geometría.

Usando las ecuaciones de Einstein, puede darse un sentido físico al teorema, donde el requisito 3 sentencia una condición sobre el tensor de energía-momento:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu - \frac{T}{2} \geq 0. \quad (3.3)$$

Como se verá a continuación, esta condición se denomina *condición de energía fuerte*.

### 3.1.2. Condiciones de energía

Se toman las siguientes definiciones:

- Un vector  $k^\mu$  es *nulo* si  $k_\mu k^\mu = 0$ .
- Un vector  $v^\mu$  es *tipo tiempo* si  $v_\mu v^\mu < 0$ .

Un tensor de energía-momento con la forma

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-c^2\rho, P, P, P), \quad (3.4)$$

permite expresar las condiciones de energía relacionándolas con la densidad  $\rho$  y la presión  $P$ .

#### Condición de energía nula

Para todo vector nulo  $k^\mu$ , la condición de energía nula (CEN) expresa que

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (3.5)$$

o en términos del tensor de energía-momento (3.4)

$$\rho + \frac{P}{c^2} \geq 0. \quad (3.6)$$

### Condición de energía débil

Para todo vector tipo tiempo  $v^\mu$ , la condición de energía débil (CED) expresa que

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0, \quad (3.7)$$

o en términos del tensor de energía-momento (3.4)

$$\rho + \frac{P}{c^2} \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho \geq 0. \quad (3.8)$$

### Condición de energía fuerte

Para todo vector tipo tiempo  $v^\mu$ , la condición de energía fuerte (CEF) expresa que

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) v^\mu v^\nu \geq 0, \quad (3.9)$$

donde  $T = T^\mu{}_\mu$ . En términos del tensor de energía momento (3.4)

$$\rho + \frac{P}{c^2} \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho + \frac{3P}{c^2} \geq 0. \quad (3.10)$$

Esta condición es la que se relaciona con el teorema enunciado anteriormente. En caso de que no se cumpliera, la variedad  $\mathcal{M}$  es geodésicamente completa en las direcciones de tiempo pasadas. Los teoremas de singularidad en el contexto de teorías clásicas como la RG implican que bajo ciertas hipótesis las soluciones de las ecuaciones de la teoría son irreparablemente defectuosas. En otras palabras, estos teoremas están señalando la incompletitud de la teoría (Romero, 2013).

Una forma de evitar el problema de la singularidad es construir una teoría cuántica de la gravedad, que presuntamente no arrastraría las características indeseables y funcionaría a la escala de Planck. Esta escala se puede encontrar combinando de manera inteligente las constantes fundamentales  $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$ ,  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  y  $c = 2.99 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ . Así, se define

- la masa de Planck

$$m_{\text{P}} = \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ g}, \quad (3.11)$$

- la longitud de Planck

$$\ell_{\text{P}} = \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad (3.12)$$

- el tiempo de Planck

$$t_{\text{P}} = \left( \frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ s} \quad (3.13)$$

- y la energía de Planck

$$E_P = \left( \frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (3.14)$$

La escala de Planck se vuelve importante cuando la masa de las partículas es mayor a  $m_P$ , los tiempos menores a  $t_P$ , las distancias más cortas a  $\ell_P$  y las energías superiores a  $E_P$ . Actualmente, no hay procesos observables que se generen a esta escala.

Por otro lado, si bien hay toda una variedad de enfoques para desarrollar una teoría de la gravedad cuántica (entre los más populares están la teoría M y *loop quantum gravity*) todavía no se ha logrado una formulación definitiva.

Otra forma de evitar la singularidad es a través de un rebote cosmológico clásico, que viene de una fase de contracción previa. En la siguiente sección se ahondará en el tema.

## 3.2. Universos con rebote

Las cosmologías de rebote, por construcción, son no singulares. El Universo comienza a contraerse luego de una fase muy diluida. En esta etapa, la densidad y la temperatura del fluido cosmológico aumentan de manera tal que se espera que toda la estructura previa se elimine. La contracción evoluciona suavemente a un rebote que, posteriormente, lleva a la fase actual de expansión descrita por el modelo  $\Lambda$ CDM. Existen varios mecanismos, clásicos o cuánticos, que dan origen a los rebotes cosmológicos. Para más detalles, se puede consultar el artículo de revisión de [Novello & Bergliaffa \(2008\)](#).

El factor de escala  $R(t)$  debe presentar ciertas características en el caso de un Universo FLRW (Ec. 2.32) para que se pueda definir un rebote localmente. Es necesario que, en el momento del rebote,  $\dot{R}_b = 0$  y  $\ddot{R}_b > 0$ . Es convencional que el rebote suceda a  $t = 0$ . Luego, para que  $t = 0$  sea un mínimo verdadero del factor de escala, debe existir un tiempo  $\tilde{t}$  tal que  $\ddot{R} > 0$  para todo  $t \in (-\tilde{t}, 0) \cup (0, \tilde{t})$ .

Al analizar las ecuaciones de campo de Einstein en FLRW se encuentra un resultado llamativo. Sean la densidad y presión obtenidas de las ecuaciones de Friedmann

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3}{8\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\ P &= -\frac{c^2}{8\pi G} \left[ 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se pueden combinar estas cantidades para analizar las condiciones de energía.

La suma se relaciona con todas las condiciones, CEN, CED y CEF:

$$\begin{aligned}
\rho + \frac{P}{c^2} &= \frac{3}{8\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right] - \frac{c^2}{8\pi G c^2} \left[ 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\
&= \frac{1}{4\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\
&= \frac{1}{4\pi G} \left[ -\frac{d^2 \ln(R)}{dt^2} + \frac{c^2 k}{R^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

También se considera la resta

$$\begin{aligned}
\rho - \frac{P}{c^2} &= \frac{3}{8\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right] + \frac{c^2}{8\pi G c^2} \left[ 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\
&= \frac{1}{4\pi G} \left[ \frac{1}{3R^3} (3R^2 \ddot{R} + 6R \dot{R}^2) + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\
&= \frac{1}{4\pi G} \left[ \frac{1}{3R^3} \frac{d^2(R^3)}{dt^2} + \frac{c^2 k}{R^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Además se calcula la traza del tensor de energía momento  $T_\mu^\mu$  para relacionarla con la condición CEF (Ec. 3.10)

$$\begin{aligned}
\rho + \frac{3P}{c^2} &= \frac{3}{8\pi G} \left[ \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right] - \frac{3c^2}{8\pi G c^2} \left[ 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{c^2 k}{R^2} \right], \\
&= -\frac{6}{8\pi G R} \frac{\ddot{R}}{R}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Se puede ver que, siendo  $\dot{R}_b = 0$  y  $\ddot{R}_b \geq 0$ ,

- Si existe un rebote y  $k = -1$ , se viola la condición CEN.
- Si existe un rebote,  $k = 0$  y  $\ddot{R}_b > 0$ , se viola la condición CEN.
- Si existe un rebote,  $k = 1$  y  $\ddot{R}_b > c^2 R_b^{-1}$ , se viola la condición CEN.

De las definiciones de la presión, densidad y el hecho de que  $\ddot{R} > 0$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\rho + \frac{P}{c^2} &< \frac{2c^2 k}{R^2}, \\
\rho - \frac{P}{c^2} &> \frac{2c^2 k}{R^2}, \\
\rho + \frac{3P}{c^2} &< 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Esto implica que, al existir un rebote y siendo  $k \neq 1$ , se viola la condición CEN. La violación de la CEN implica necesariamente la violación de la condición CEF, independientemente de la geometría del sistema. Estos resultados se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Einstein y las condiciones de energía, sin suponer alguna ecuación de estado particular.

En resumen, es posible evitar la singularidad cosmológica inicial en los modelos de FLRW a nivel clásico tomado una o una combinación de las siguientes suposiciones (Novello & Bergliaffa, 2008):

1. Violando la condición CEF en el marco de la RG.
2. Trabajando en una nueva teoría gravitacional, por ejemplo adoptando una acción con invariantes de órdenes mayores o agregando grados de libertad escalares a la gravedad.

En el presente trabajo tomamos la primera suposición. El factor de escala normalizado elegido, dado en términos del tiempo conforme  $\eta$ , describe un modelo cosmológico realista en la época de radiación y presenta una forma analítica sencilla (Celani *et al.*, 2017):

$$a(\eta) = a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.20)$$

Este factor de escala fue obtenido considerando correcciones cuánticas a las ecuaciones clásicas de Friedmann; en otras palabras, el rebote ocurre debido a efectos cuánticos cuando la curvatura del espacio-tiempo se vuelve muy grande. Los efectos cuánticos fueron calculados a partir de la cuantización de Wheeler-DeWitt del fondo e interpretando la solución usando la teoría cuántica de de Borglie-Bohm. Este resultado es válido considerando que la componente de materia que domina la evolución para un  $a(\eta)$  pequeño es la radiación.

Aquí,  $a_b = 7.41 \times 10^{-9}$  es la constante de normalización tal que  $a(\eta_i) = 1$ , siendo  $\eta_i = 2.96 \times 10^{12}$  s el tiempo donde termina la época de radiación y empieza la de la materia. Por otro lado,  $\eta_b = 2.19 \times 10^4$  s es la escala donde domina el rebote. En el Apéndice A se encuentra el detalle del cálculo de los parámetros.

El tiempo de la escala del rebote  $\eta_b$  puede ser calculado a partir de

$$\eta_b = \frac{R_H}{x_b \sqrt{\Omega_{r,0}}}, \quad R_H = \frac{1}{a_0 H_0},$$

donde los valores son  $a_0 = 1$ , el factor de escala hoy;  $10^{11} \ll x_b < 2 \times 10^{31}$  el factor de escala cuando ocurre el rebote;  $\Omega_{r,0} = 8 \times 10^{-5}$  el parámetro de densidad adimensional para la radiación hoy (Celani *et al.*, 2017) y  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2.268 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  el parámetro de Hubble hoy (Abbott *et al.*, 2017).

Calculando los valores límites de  $x_b$  encontramos los valores extremos que puede tener  $\eta_b$

$$\begin{aligned} \eta_{b,x_{\min}} &= 4.93 \times 10^8 \text{ s}, \\ \eta_{b,x_{\max}} &= 2.465 \times 10^{-15} \text{ s}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De esta manera, nos aseguramos que el valor que encontramos  $\eta_b = 2.19 \times 10^4$  s está dentro de los límites permitidos.

Es importante remarcar que el factor de escala (3.20) es no singular. En  $\eta = 0$  su valor es de  $a(0) = a_b = 7.41 \times 10^{-9}$ . De hecho, este punto temporal no es cualquiera: representa al tiempo donde sucede el rebote. A partir de la definición de tiempo conforme,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a(\eta)}, \quad (3.22)$$

e integrando miembro a miembro, encontramos que la relación entre tiempo conforme  $\eta$  y tiempo cósmico  $t$  es

$$t = \frac{a_b}{2} \left[ \eta_b \operatorname{arcsenh} \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right) + \eta \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta_b^2} + 1} \right], \quad (3.23)$$

que es una función monótonamente creciente. En particular, si  $\eta = 0$ ,  $t = 0$ .

Además, el factor de escala (3.20) presenta las características necesarias para que el rebote pueda ser definido localmente:

$$\begin{aligned} a'(\eta) &= \frac{a_b}{\eta_b^2} \eta \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{-1/2} \implies a'(0) = 0, \\ a''(\eta) &= \frac{a_b}{\eta_b^2 + \eta^2} \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{-1/2} \implies a''(0) > 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde el primado representa la derivada respecto del tiempo conforme  $\eta$ .

Por último, verificamos que el factor de escala viole la CEF (3.18). Tomando que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\eta_b^2}{(\eta^2 + \eta_b^2)^2} > 0 \implies \rho + \frac{3P}{c^2} = -\frac{6}{8\pi G} \frac{\eta_b^2}{(\eta^2 + \eta_b^2)^2} < 0, \quad (3.25)$$

de manera que no se verifica la condición CEF.

### 3.3. Agujero negro cosmológico en un universo con rebote

El objetivo principal de este trabajo es analizar cómo una población de agujeros negros evoluciona en un universo con rebote y, asimismo, cómo la presencia de los agujeros negros modifica la evolución del fluido cosmológico. [Pérez & Romero \(2022\)](#) demostraron que un agujero negro sobrevive a un rebote cosmológico. Pasaremos a describir algunos de los resultados principales obtenidos por los autores mencionados.

El elemento de línea del espacio-tiempo generalizado de McVittie en coordenadas isotrópicas  $(T, r, \theta, \varphi)$  es (Faraoni & Jacques, 2007):

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{Gm(T)}{2c^2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{Gm(T)}{2c^2r}\right)^2} c^2 dT^2 + a^2(T) \left(1 + \frac{Gm(T)}{2c^2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.26)$$

donde  $a(T)$  es el factor de escala y  $m(T)$  es una función que depende del tiempo cósmico  $T$ . A partir del elemento de línea se calcula el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ . Las únicas componentes no nulas son (Faraoni & Jacques, 2007)

$$G^T_T = -3 \frac{A(T, r)^2}{B(T, r)^2} C(T, r)^2, \quad (3.27)$$

$$G^r_r = \frac{2Gm(T)}{c^2 r^2 a^2(T) B(T, r) A(T, r)^3} \left( \frac{\dot{a}(T)}{a(T)} + \frac{\dot{m}(T)}{m(T)} \right), \quad (3.28)$$

$$G^r_r = G^\theta_\theta = G^\varphi_\varphi = \frac{A(T, r)^2}{B(T, r)^2} D(T, r), \quad (3.29)$$

donde

$$A(T, r) = 1 + \frac{Gm(T)}{2c^2r}, \quad (3.30)$$

$$B(T, r) = 1 - \frac{Gm(T)}{2c^2r}, \quad (3.31)$$

$$C(T, r) = \frac{\dot{a}(T)}{a(T)} + \frac{G}{c^2 r} \frac{\dot{m}(T)}{A(T, r)}, \quad (3.32)$$

$$D(T, r) = 2\dot{C}(T, r) + C(T, r) \left( 3C(T, r) + \frac{2G\dot{m}(T)}{c^2 r A(T, r) B(T, r)} \right). \quad (3.33)$$

Si se considera un fluido imperfecto, el tensor  $T_{\mu\nu}$  toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu. \quad (3.34)$$

Aquí, los dos primeros términos (que contienen a la densidad de energía  $\rho$ , presión  $P$  y la tetra-velocidad  $u^\mu$ ) corresponden a un tensor de energía-momento de un fluido perfecto. Los términos adicionales corresponden a un campo vectorial espacial, denotado por  $q^\mu$ , que representa la densidad de corriente de calor.

Tomando

$$u^\mu = \left( \frac{A(T, r)}{B(T, r)}, 0, 0, 0 \right), \quad q^\mu = (0, q, 0, 0) \quad \text{y} \quad u^\mu q_\mu = 0, \quad (3.35)$$

las ecuaciones de Einstein resultan en

$$\frac{\dot{a}(T)}{a(T)} + \frac{\dot{m}(T)}{m(T)} = -\frac{4\pi r^2 a^2(T)}{m(T)} B(T, r)^2 A(T, r)^4 q, \quad (3.36)$$

$$\rho(T, r) = \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{A(T, r)}{B(T, r)^2} C(T, r)^2, \quad (3.37)$$

$$P(T, r) = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{A(T, r)^2}{B(T, r)^2} D(T, r). \quad (3.38)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas:  $a(T)$ ,  $m(T)$ ,  $\rho(T, r)$ ,  $P(T, r)$  y  $q$ . Para su resolución se supuso conocido el factor de escala  $a(T)$  (Frion *et al.*, 2020; Peter *et al.*, 2007), dado por

$$a(T) = a_b \left( 1 + \left( \frac{T}{T_b} \right)^2 \right)^{1/3}. \quad (3.39)$$

El parámetro  $T_b$  está acotado para que el rebote ocurra antes de la nucleosíntesis del Big Bang (Frion *et al.*, 2020). De esta manera,  $10^{-41} \text{ s} < T_b < 10^{-4} \text{ s}$ . Además, para  $T \gg T_b$  el factor de escala se reduce al del polvo. Finalmente, no se verifican las condiciones de energía alrededor de  $T_b$ , por lo que no aplican los teoremas de singularidad.

Además, se supone  $m(T)$ . Para encontrar su forma, se iguala  $q = 0$  para recuperar a  $T_{\mu\nu}$  como fluido perfecto. Las soluciones, en este caso, se corresponden a las soluciones de Schwarzschild- de Sitter o de McVittie (Carrera & Giulini, 2010). Así, la Ec. (3.36) toma la forma

$$\frac{\dot{a}(T)}{a(T)} + \frac{\dot{m}(T)}{m(T)} = 0 \implies m(T) = \frac{m_0}{a(T)}, \quad (3.40)$$

siendo  $m_0$  una constante no negativa. Reemplazando el valor de  $m(T)$  en el elemento de línea del espacio-tiempo generalizado de McVittie (3.26), encontramos el elemento de línea del espacio-tiempo de McVittie. Esto permite interpretar a  $m_0$  como la masa del objeto central en el límite Newtoniano.

Otra posibilidad es elegir

$$m(T) = m_0, \quad (3.41)$$

la cual es una clase particular de las soluciones de McVittie generalizadas. La parte correspondiente del tensor de Weyl de la energía Misner-Sharp-Hernandez (MSH), que se identifica con la energía gravitacional del objeto central (Misner & Sharp, 1964), resulta

$$E_W = m_0 c^2 a(T), \quad (3.42)$$

pues  $E_W$  para la métrica generalizada de McVittie (Carrera & Giulini, 2010) es

$$E_W = m(T) c^2 a(T). \quad (3.43)$$

La Ec. (3.42) muestra que el objeto central está acoplado a la evolución cosmológica.

El elemento de línea (3.26), siendo  $m(T) = m_0$ , toma la forma

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{G m_0}{2c^2 r}\right)^2}{\left(1 + \frac{G m_0}{2c^2 r}\right)^2} c^2 dT^2 + a^2(T) \left(1 + \frac{G m_0}{2c^2 r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.44)$$

Si  $a(T) \rightarrow 1$ , el elemento de línea (3.44) tiende al elemento de línea de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. Por otro lado, si  $m_0 \rightarrow 0$ , se recupera el espacio-tiempo cosmológico de FLRW. En otras palabras, la métrica (3.44) representa un agujero negro de Schwarzschild embebido en un Universo FLRW y permite estudiar la evolución del agujero negro junto con la del Universo.

Uno de los resultados más importantes que usaremos en este trabajo es que la parte correspondiente al tensor de Weyl de la energía MSH es

$$m(T) = m_0 a(T), \quad (3.45)$$

es decir, el tamaño del agujero negro aumenta o disminuye según la evolución cosmológica del Universo.



# Capítulo 4

## Gas de agujeros negros en universos con rebote

El objetivo principal de este trabajo es analizar cómo evoluciona una población de agujeros negros en un modelo de universo con rebote y, a su vez, cómo el fluido cosmológico de fondo es afectado por la presencia de los agujeros negros.

Iniciaremos este capítulo estudiando el problema general de dos fluidos en interacción. Luego, analizaremos las contribuciones al cambio de masa de los agujeros negros y estudiaremos si hay fusión de los mismos durante la evolución cósmica. Finalmente, presentaremos el conjunto de ecuaciones que describe la evolución de la población de agujeros negros y el fluido cosmológico.

### 4.1. Fluidos en interacción

Para caracterizar la evolución de una población de agujeros negros en un universo con rebote, suponemos que la materia puede ser modelada mediante un tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto (Ec. 2.7) con una ecuación de estado de la forma

$$P = \omega c^2 \rho, \quad (4.1)$$

siendo  $\omega$  el parámetro de la ecuación de estado, que depende de las propiedades del fluido.

El tensor de energía-momento total tiene dos componentes:  $T_{\text{AN}}^{\mu\nu}$ , asociada a la población de agujeros negros y  $T_{\text{FC}}^{\mu\nu}$ , al fluido cosmológico. Ambas componentes intercambian energía y momento entre sí. Luego, solo se conserva el tensor de energía-momento total

$$\nabla_{\mu} T_{\text{total}}^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (T_{\text{AN}}^{\mu\nu} + T_{\text{FC}}^{\mu\nu}) = 0 \implies \nabla_{\mu} T_{\text{AN}}^{\mu\nu} = -\nabla_{\mu} T_{\text{FC}}^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

El intercambio puede ser representado por un parámetro  $Q$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} T_{\text{AN}}^{\mu\nu} &= Q, \\ \nabla_{\mu} T_{\text{FC}}^{\mu\nu} &= -Q, \end{aligned} \quad (4.3)$$

tal que se conserve la suma. El parámetro  $Q$  puede ser positivo o negativo, dependiendo de si el sistema recibe o entrega energía, respectivamente.

Entonces, a partir de las Ecs. (4.3) y la Ec. (2.41) obtenemos

$$\nabla_{\mu}(\rho_i u_i^{\mu}) + \frac{P_i}{c^2} \nabla_{\mu} u_i^{\mu} = \pm Q, \quad (4.4)$$

donde agregamos el término de intercambio de energía  $Q$  con el signo adecuado dependiendo de si elegimos  $i = \text{AN}$  o  $\text{FC}$ . Esta ecuación se puede expresar como

$$\partial_{\mu}(\rho_i u_i^{\mu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}(\rho_i u_i^{\mu}) + \frac{P_i}{c^2}(\partial_{\mu} u_i^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} u_i^{\mu}) = \pm Q, \quad (4.5)$$

que puede ser reescrita como

$$\partial_0 \rho_i + \left( \rho_i + \frac{P_i}{c^2} \right) \Gamma_{0\alpha}^{\alpha} = \pm Q. \quad (4.6)$$

Recordando la definición de la conexión afín (2.6) debemos calcular las derivadas de las componentes del tensor métrico. En nuestro caso, con el factor de escala dado por la Ec. (3.20), el elemento de línea de FLRW (2.32) en términos del tiempo conforme (con  $k = 0$ , pues el espacio-tiempo es plano<sup>1</sup>) toma la forma

$$ds^2 = a^2(\eta) \left( -c^2 d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (4.7)$$

Las componentes de la conexión afín para el elemento de línea anterior, donde la derivada  $\partial_0$  denota la coordenada temporal  $\eta$ , resultan

$$\bullet \Gamma_{00}^0 = 0, \quad (4.8)$$

$$\bullet \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(\eta)} \partial_0 (a^2(\eta)) = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}, \quad (4.9)$$

$$\bullet \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(\eta) r^2} \partial_0 (a^2(\eta) r^2) = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}, \quad (4.10)$$

$$\bullet \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(\eta) r^2 \sin^2 \theta} \partial_0 (a^2(\eta) r^2 \sin^2 \theta) = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}. \quad (4.11)$$

Aquí, el primado representa la derivada respecto de  $\eta$ . Entonces, reemplazando estos resultados en la Ec. (4.6) obtenemos

$$\rho_i'(\eta) + 3 \left( \rho_i + \frac{P_i}{c^2} \right) \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} = \pm Q. \quad (4.12)$$

Sustituyendo la ecuación de estado  $P_i = c^2 \omega_i \rho_i$  se obtiene

$$\rho_i'(\eta) + 3 \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} (1 + \omega_i) \rho_i(\eta) = \pm Q. \quad (4.13)$$

<sup>1</sup>Los resultados obtenidos por [Planck Collaboration \(2020\)](#) son consistentes con un Universo plano, pues  $\Omega_k = 0.001 \pm 0.002$ , siendo  $\Omega_k$  el parámetro de densidad de curvatura.

En particular,

$$\rho'_{\text{AN}}(\eta) + 3\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}(1 + \omega_{\text{AN}})\rho_{\text{AN}}(\eta) = Q, \quad (4.14)$$

$$\rho'_{\text{FC}}(\eta) + 3\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}(1 + \omega_{\text{FC}})\rho_{\text{FC}}(\eta) = -Q. \quad (4.15)$$

El parámetro  $\omega_{\text{AN}}$  depende de las propiedades de la población de agujeros negros. En caso de que no exista interacción entre los mismos (en particular, que no se produzcan fusiones), se los puede modelar como un fluido tipo polvo, de manera que  $\omega_{\text{AN}} = 0$ .

En lo que resta de este capítulo mostraremos que, bajo las hipótesis y condiciones adoptadas en este trabajo, se puede considerar que los agujeros negros embebidos en un universo que atraviesa un rebote no se fusionan.

## 4.2. Factor de llenado

Una posible forma de determinar si se produce fusión de agujeros negros en un universo con rebote es estudiando la razón entre el área del horizonte de eventos  $A_{\text{AN}}$  y el área de una hipersuperficie esférica tipo espacio en la geometría de FLRW  $\Sigma_{\text{hip}}$ :

$$\mathcal{F}(\eta) = \frac{A_{\text{AN}}(\eta)}{\Sigma_{\text{hip}}(\eta)}. \quad (4.16)$$

La función  $\mathcal{F}(\eta)$  se denomina factor de llenado. Si cada una de estas áreas crece (o decrece) de la misma forma, consideramos que no se produce fusión de agujeros negros. Aún más: si el factor de llenado disminuye en el tiempo, entonces inferimos que tampoco se produce fusión; caso contrario, suponiendo que hay un agujero negro por unidad de hipersuperficie, habrá fusión, pues el área de los agujeros negros crece más rápido que la de la hipersuperficie.

Suponemos que la población se compone de agujeros negros de Schwarzschild. El área del horizonte de eventos es

$$A_{\text{AN}}(\eta) = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2(\eta), \quad (4.17)$$

y depende de la masa del agujero negro. Sin embargo, distintos procesos astrofísicos pueden modificar la masa del mismo. Consideramos tres procesos diferentes: acreción de radiación de fondo y evaporación por radiación de Hawking. Además, tal como se discutió al final del Capítulo 3, el agujero negro está acoplado a la evolución cosmológica, por lo que su masa varía por la dinámica del espacio-tiempo. Matemáticamente, lo podemos expresar como

$$\frac{dM}{d\eta} = \frac{dM_{\text{ac}}}{d\eta} + \frac{dM_{\text{RH}}}{d\eta} + \frac{dM_{\text{b}}}{d\eta}. \quad (4.18)$$

En las secciones que siguen describiremos cada uno de los procesos e indicaremos de qué manera se modifica la masa de los agujeros negros.

### 4.2.1. Dinámica del espacio-tiempo

Como se discutió en la Sección 3.3, la dinámica del espacio-tiempo modifica la masa del agujero negro según

$$\frac{dM_b(\eta)}{d\eta} = m_0 \frac{da(\eta)}{d\eta}, \quad (4.19)$$

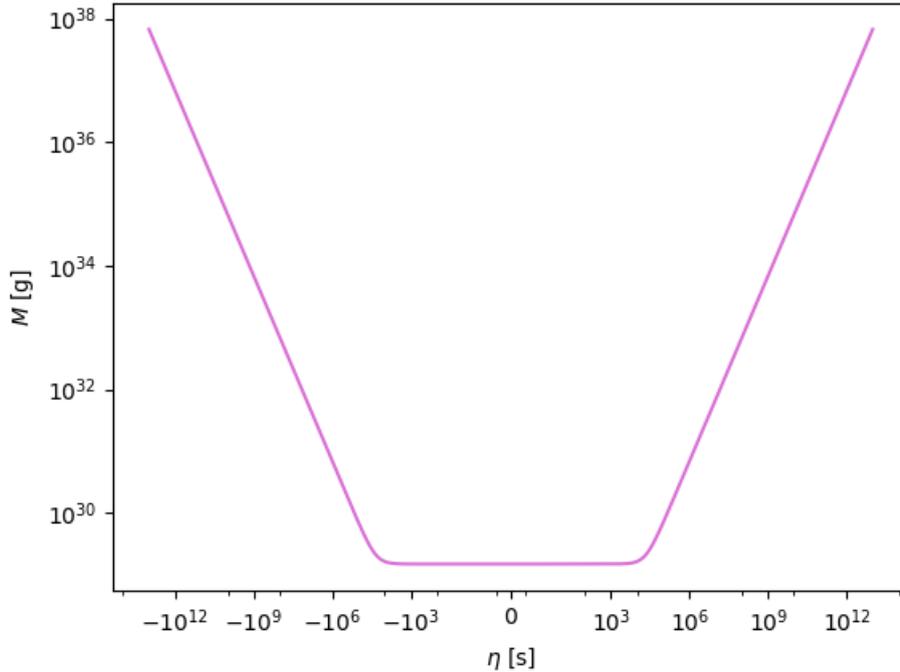
donde ahora expresamos la Ec. (3.45) en función del tiempo conforme. La constante  $m_0$  es la masa del agujero negro en  $\eta = \pm \eta_i$ , siendo  $\eta_i = 2.96 \times 10^{12}$  s el tiempo de transición entre la época de radiación y la época de materia.

Si integramos la Ec. (4.19) encontraremos el comportamiento de la masa para todo tiempo  $\eta$ ,

$$M_b(\eta) = \int dM_b(\eta') = m_0 \int da(\eta'), \quad (4.20)$$

que resulta

$$M_b(\eta) = m_0 a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.21)$$



**Figura 4.1:** Variación de la masa  $M$  de un agujero negro con masa inicial  $10^4 M_\odot$  debido a la dinámica del espacio-tiempo.

Para estudiar la variación de masa, tomamos la función normalizada

$$\frac{M_b(\eta)}{m_0} = a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2} = a(\eta). \quad (4.22)$$

Cuando  $\eta = \pm \eta_i$ ,  $a(\pm \eta_i) = 1$ , mientras que si  $\eta = 0$ ,  $a(\eta = 0) = a_b = 7.41 \times 10^{-9}$ . Esto nos dice que la masa del agujero negro se modifica en nueve órdenes de magnitud, independientemente del valor de la masa en consideración. Por ejemplo, si la masa inicial es  $M(-\eta_i) = 10^4 M_\odot$ , en el momento del rebote  $M(0) = 10^{-5} M_\odot$  para luego volver a crecer  $M(\eta_i) = 10^4 M_\odot$ , como se muestra en la Fig. 4.1.

### 4.2.2. Radiación de Hawking

En 1974, Stephen Hawking propuso, usando argumentos de la TCC, que los agujeros negros de Schwarzschild emiten radiación con un espectro térmico en las regiones cercanas al horizonte de eventos (Hawking, 1974). Si bien clásicamente la creación de pares de partículas está prohibida, pues no conserva la energía, en la mecánica cuántica el vacío presenta fluctuaciones cuánticas de partículas virtuales. Se puede enunciar el principio de incerteza de Heinsenberg como  $\Delta t \Delta E \geq \hbar$ , donde  $\Delta E$  es la incerteza mínima en la energía de una partícula en un estado cuántico por un tiempo  $\Delta t$ . Si el par partícula-antipartícula se aniquila en un tiempo menor a  $t = \hbar/\Delta E$ , no se viola ninguna ley física.

De esta manera, si el par se crea en una región cercana al horizonte de eventos y una de las partículas cae al agujero negro, la otra, siempre y cuando la dirección de su momento sea hacia afuera, puede escapar. La partícula virtual se transforma en una partícula real a expensas de la energía del agujero negro, que pierde energía y disminuye su masa.

Un observador distante observa un flujo constante<sup>2</sup> de partículas y antipartículas. De hecho, la radiación emitida es térmica y tiene una temperatura  $T$  dada por

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c}, \quad (4.23)$$

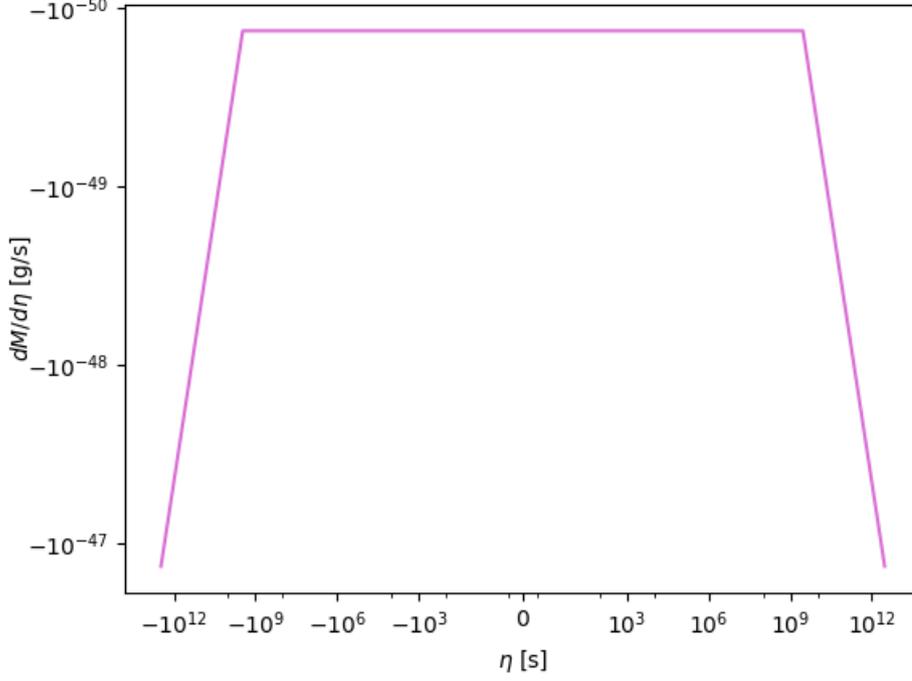
donde  $\kappa$  es la gravedad superficial del agujero negro y  $k_B$ , la constante de Boltzmann. Al introducir la gravedad superficial, se encuentra una relación con la masa del agujero negro  $M$ , pues para un agujero negro de Schwarzschild

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}, \quad (4.24)$$

de manera que

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}. \quad (4.25)$$

<sup>2</sup>El flujo es constante porque la geometría es independiente del tiempo, de manera que la emisión de partículas también debe ser independiente.



**Figura 4.2:** Tasa de variación de masa  $dM_{\text{RH}}/d\eta$  para la radiación de Hawking con masa inicial del agujero negro  $10^4 M_{\odot}$  respecto al tiempo conforme.

Los agujeros negros menos masivos tendrán mayor temperatura que los menos masivos, por lo cual su masa disminuirá aún más. La tasa de variación de masa, en términos del tiempo conforme, está dada por (MacGibbon & Carr, 1991)

$$\frac{dM_{\text{RH}}(\eta)}{d\eta} = -a(\eta) \frac{A(M)}{M^2(\eta)}. \quad (4.26)$$

donde  $A(M)$  es una constante que depende de la masa del agujero negro

$$A(M) = \begin{cases} 5.3 \times 10^{25} \text{ g}^3 \text{ s}^{-1} & \text{si } M > 10^{17} \text{ g,} \\ 7.8 \times 10^{27} \text{ g}^3 \text{ s}^{-1} & \text{si } M \leq 10^{15} \text{ g.} \end{cases} \quad (4.27)$$

Notemos que la tasa de variación de masa (4.26) es proporcional a  $M^{-2}$ . Esto significa que para agujeros negros masivos podemos despreciar este efecto. En la Fig. 4.2 se muestra la tasa de variación para un agujero negro de masa inicial  $M_{\text{inic}} = 10^4 M_{\odot}$  en  $\eta_{\text{inic}} = -\eta_i$  y puede verse que la variación es despreciable en este caso. Por otro lado, agujeros negros muy poco masivos ( $M < 10^{15} \text{ g}$ ) se evaporan antes de llegar al rebote. Esto puede verse al resolver la Ec. (4.26), cuyo resultado es

$$\frac{M^3}{3} - \frac{M_{\text{inic}}^3}{3} = A(M)(-w(\eta) + w(-\eta_i)), \quad (4.28)$$

tal que

$$M(\eta) = \sqrt[3]{3(-w(\eta) + w(-\eta_i))A(M) + M_{\text{inic}}^3}, \quad (4.29)$$

donde la función  $w(\eta)$  está dada por

$$w(\eta) = \frac{a_b}{2} \left[ \eta_b \log \left( \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\eta_b^2}} - \frac{\eta}{\eta_b} \right) + \eta \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta_b^2} + 1} \right]. \quad (4.30)$$

Un agujero negro se evapora si  $M = 0$ . Podemos encontrar la masa inicial que debe tener un agujero negro para que se evapore en un cierto tiempo determinado al despegar  $M_{\text{inic}}$  de la Ec. (4.29), resultando

$$M_{\text{inic}} = \sqrt[3]{3(w(\eta) - w(-\eta_i))A(M)}. \quad (4.31)$$

De esta manera, la masa inicial que debe tener un agujero negro que se evapora en el rebote ( $\eta = 0$ ) es

$$M_{\text{inic}} = 3.25 \times 10^{13} \text{ g}, \quad (4.32)$$

y un agujero negro que se evapora en el tiempo de transición entre la época de radiación y la época de materia ( $\eta = \eta_i$ ) tiene una masa inicial en  $\eta = -\eta_i$

$$M_{\text{inic}} = 4 \times 10^{13} \text{ g}. \quad (4.33)$$

Por otro lado, podemos considerar que el agujero negro varía su masa por la dinámica del espacio-tiempo, como vimos en la sección anterior. De esta manera, la tasa de variación de masa (4.26) toma la forma

$$\frac{dM_{\text{RH}}(\eta)}{d\eta} = -a(\eta) \frac{A(M)}{m_0^2 a^2(\eta)} = -\frac{A(M)}{m_0^2 a(\eta)}, \quad (4.34)$$

y la masa varía según

$$M(\eta) = \frac{A(M)}{m_0} \left[ -y(\eta) + y(\eta_i) \right] + M_{\text{inic}}, \quad (4.35)$$

con

$$y(\eta) = -\frac{\eta_b}{a_b} \log \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2} - \frac{\eta}{\eta_b} \right) \quad (4.36)$$

Nuevamente, la masa inicial en  $\eta = -\eta_i$  que debe tener un agujero negro para que se evapore en el rebote ( $\eta = 0$ ) es

$$M_{\text{inic}} = 1.81 \times 10^{14} \text{ g}. \quad (4.37)$$

y para que suceda en el tiempo de transición  $\eta = \eta_i$

$$M_{\text{inic}} = 3.45 \times 10^{14} \text{ g}. \quad (4.38)$$

Como queremos estudiar agujeros negros en las tres etapas del Universo, consideraremos agujeros negros con masas mayores a  $10^{16}$  g, lo que nos asegura que la radiación de Hawking no es un mecanismo relevante para la variación de masa.

### 4.2.3. Acreción de radiación

También consideramos que la masa del agujero negro puede aumentar por acreción de un gas de radiación. El cambio en la masa debido a este efecto está dado por (Zel'dovich & Novikov, 1967)

$$\frac{dM}{d\eta} = \frac{27\pi G^2}{c^3} a(\eta) \rho_{\text{rad}} M^2, \quad (4.39)$$

donde  $\rho_{\text{rad}}$  es la densidad de radiación. Determinamos su expresión a partir de la ecuación de Friedmann escrita en términos del tiempo conforme

$$\left( \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{rad}}(\eta). \quad (4.40)$$

De esta manera encontramos

$$\rho(\eta) = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{\eta_b^4 a_b^2} \eta^2 \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{-3}. \quad (4.41)$$

Para  $\eta \gg 1$ , se verifica que

$$\rho(\eta) \sim \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^{-4} \sim a^{-4}(\eta), \quad (4.42)$$

pues  $a(\eta) \sim \eta/\eta_b$  en este límite. A partir del análisis de la evolución de la densidad de radiación en función del factor de escala (Ec. 2.58), verificamos que esta densidad se comporta efectivamente como radiación.

De forma explícita, podemos escribir la Ec. (4.39) como

$$\frac{dM}{d\eta} = \frac{81 G}{8 c^3} \frac{1}{\eta_b^2 a_b \eta_b^2} \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{-5/2} M^2(\eta). \quad (4.43)$$

Haciendo el cambio a la variable adimensional  $x = \eta/\eta_b$  y agrupando a las constantes restantes en la constante  $\sigma$  tal que

$$\sigma = \frac{81 G}{8 c^3} \frac{1}{\eta_b a_b}, \quad (4.44)$$

hallamos

$$\frac{dM}{dx} = \sigma x^2 [1 + x^2]^{-5/2} M^2(\eta), \quad (4.45)$$

y haciendo separación de variables obtenemos

$$\frac{dM}{M^2} = \sigma x^2 [1 + x^2]^{-5/2} dx. \quad (4.46)$$

e integramos utilizando la condición de borde  $M_{\text{cb}} = M_{\text{cb}}(x_{\text{cb}})$ , donde  $x_{\text{cb}} = \eta_i/\eta_b$ .

Resolviendo las integrales hallamos

$$-\frac{1}{M} + \frac{1}{M_{\text{cb}}} = \frac{\sigma x^3}{3(x^2 + 1)^{3/2}} - \frac{\sigma x_{\text{cb}}^3}{3(x_{\text{cb}}^2 + 1)^{3/2}}, \quad (4.47)$$

tal que la masa varía según

$$M(x) = \left( -\frac{\sigma x^3}{3(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{\sigma x_{\text{cb}}^3}{3(x_{\text{cb}}^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{M_{\text{cb}}} \right)^{-1} \quad (4.48)$$

$$= \left( -\frac{\sigma x^3}{3(x^2 + 1)^{3/2}} + g_{\text{cb}} \right)^{-1}, \quad (4.49)$$

donde

$$g_{\text{cb}} = \frac{\sigma x_{\text{cb}}^3}{3(x_{\text{cb}}^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{M_{\text{cb}}} \quad (4.50)$$

Trabajaremos con la función de masa normalizada  $M(x)/M_{\text{cb}}$  de manera que  $M(x_{\text{cb}})/M_{\text{cb}} = 1$ :

$$\frac{M(x)}{M_{\text{cb}}} = \left( -\frac{\sigma M_{\text{cb}} x^3}{3(x^2 + 1)^{3/2}} + g'_{\text{cb}} \right)^{-1}, \quad (4.51)$$

siendo

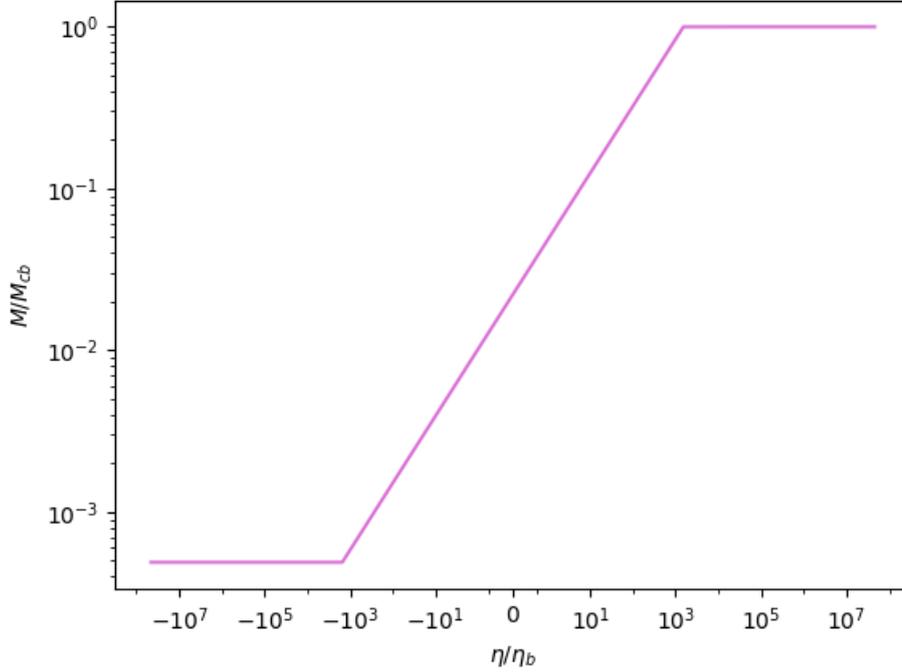
$$g'_{\text{cb}} = g_{\text{cb}} M_{\text{cb}}. \quad (4.52)$$

En la Fig. 4.3 presentamos la función de masa normalizada considerando que el agujero negro finaliza con una masa  $M_{\text{cb}} = 10^4 M_{\odot}$ . Podemos notar que la masa empieza a aumentar por acreción de forma notable para  $x = -10^3$ , lo que equivale a  $\eta = -2.9 \times 10^7$  s.

Al igual que con la variación de masa debido a la dinámica del espacio-tiempo, podemos estudiar los órdenes de magnitud de variación de la masa, representado por el miembro derecho de la Ec. (4.51). Este término depende de la masa final del agujero negro, por lo que consideraremos varios casos:

- Si  $M_{\text{cb}} = 10^4 M_{\odot}$ ,  $M(-x_{\text{cb}})/M_{\text{cb}} \sim 10^{-4}$ .
- Si  $M_{\text{cb}} = 10^6 M_{\odot}$ ,  $M(-x_{\text{cb}})/M_{\text{cb}} \sim 10^{-6}$ .
- Si  $M_{\text{cb}} = 10^8 M_{\odot}$ ,  $M(-x_{\text{cb}})/M_{\text{cb}} \sim 10^{-8}$ .

Esto nos dice que la importancia del proceso depende de la masa del agujero negro considerada.



**Figura 4.3:** Variación de masa para un agujero negro de masa final  $M_{cb} = 10^4 M_\odot$  para toda la época de radiación en función del tiempo conforme normalizado  $\eta/\eta_b$  debido a la acreción de un gas de radiación.

#### 4.2.4. Resultados

Analizadas todas las contribuciones posibles a la variación de masa, encontramos que la variación debido a la dinámica del espacio-tiempo será de nueve órdenes de magnitud siempre, sin importar la masa del agujero negro, a diferencia de la variación debido a la acreción, que depende fuertemente de la masa. En el resto del trabajo, consideraremos agujeros negros con masas finales en el rango  $10^{16} \text{ g} < M < 10^6 M_\odot$ . De esta manera, el único término relevante para la variación de masas de los agujeros negros será aquel debido a la dinámica del universo:

$$\frac{dM(\eta)}{d\eta} = \frac{dM_b(\eta)}{d\eta} = m_0 \frac{da(\eta)}{d\eta}. \quad (4.53)$$

La evolución de la masa del agujero negro por la dinámica está dada por la Ec. (4.21)

$$M_b(\eta) = m_0 a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.54)$$

Reemplazando en la Ec. (4.17) encontramos el área del horizonte de eventos:

$$A_{AN}(\eta) = \frac{16\pi G^2 m_0}{c^4} a^2(\eta). \quad (4.55)$$

Por otro lado, debemos calcular el área de la hipersuperficie  $\Sigma_{\text{hip}}$ . El área de una esfera tridimensional se calcula según

$$\Sigma = \iint \sqrt{g_{\theta\theta} \cdot g_{\varphi\varphi}} \, d\theta \, d\varphi, \quad (4.56)$$

cuyo resultado, tomando los elementos de la métrica de la Ec. (4.7), es

$$\Sigma_{\text{hip}}(\eta) = 4\pi r^2 a^2(\eta). \quad (4.57)$$

Esta expresión nos dice que la hipersuperficie  $\Sigma_{\text{hip}}(\eta)$  es la superficie de una esfera cuyo tamaño se modifica con el factor de escala.

Reemplazando las Ecs. (4.55) y (4.57), el factor de llenado toma la forma

$$\mathcal{F}(\eta) = \frac{A_{\text{AN}}(\eta)}{\Sigma_{\text{hip}}(\eta)} = \frac{16\pi m_0 G^2 a^2(\eta)}{4\pi c^4 r^2 a^2(\eta)} = \frac{4m_0 G^2}{c^4 r^2}.$$

Como el factor de llenado es constante en el tiempo, el área del agujero negro se modifica de la misma manera que el área de la geometría de fondo. Otra forma de entender el resultado es suponiendo que hay un agujero negro por unidad de área de hipersuperficie  $\Sigma_{\text{hip}}(\eta)$ . Dado que el área del horizonte de eventos y el área de la hipersuperficie cambian en la misma tasa, no encontraremos el caso en que más de un agujero negro ocupe la misma hipersuperficie. Bajo estas suposiciones, no hay fusión de agujeros negros.

### 4.3. Radiación gravitacional

Si bien en la sección anterior determinamos que, bajo las suposiciones mencionadas, no hay fusión de agujeros negros, otro mecanismo podría, en principio, causar fusión entre estos objetos. En un espacio-tiempo que presenta una fase de contracción, podría suceder que agujeros negros cercanos formen un sistema binario y comiencen a orbitar el centro de masa. Al perder energía por radiación gravitacional, su distancia disminuye hasta el punto en que podrían llegar a fusionarse.

Pasaremos a describir el desarrollo del problema, tomando la aproximación de masas puntuales de [Shapiro & Teukolsky \(1983\)](#). Sean dos masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$  en una órbita circular de radio  $\zeta$ , con  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  sus respectivas distancias al centro de masas, entonces

$$M_1 \zeta_1 = M_2 \zeta_2 = \mu \zeta, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad (4.58)$$

con  $\mu$  la masa reducida. La energía del sistema puede ser descrita como la energía cinética de rotación más la energía potencial gravitatoria

$$E = \frac{1}{2} M_1 \zeta_1^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} M_2 \zeta_2^2 \Omega^2 - \frac{G M_1 M_2}{\zeta}, \quad (4.59)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular orbital. Definiendo  $M = M_1 + M_2$ , la energía se reduce a

$$E = -\frac{G\mu M}{2\zeta}. \quad (4.60)$$

La pérdida de energía implica una disminución en la separación  $\zeta$  y, por lo tanto, en el período orbital  $P = 2\pi/\Omega$ , por lo que

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Omega} \right) = 2\pi \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{\zeta^3}{GM}} \right), \quad (4.61)$$

donde se usó la Tercera Ley de Kepler,  $\Omega^2 = GM/\zeta^3$ . Desarrollando esta expresión se llega a

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt}, \quad (4.62)$$

y como

$$\frac{1}{\zeta} = -\frac{2}{G\mu M} E, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{dE} \frac{dE}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\zeta}{dE} = \frac{G\mu M}{2E^2}, \quad (4.63)$$

se obtiene

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{dE}{dt}. \quad (4.64)$$

La potencia de las ondas gravitacionales se puede calcular a partir de

$$L_{\text{GW}} = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \ddot{\mathcal{I}}_{jk} \rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{\zeta^5}, \quad (4.65)$$

donde  $\mathcal{I}_{jk}$  es el momento cuadrupolar reducido y fue promediado sobre varios períodos característicos de la fuente. Este momento tiene la forma

$$\mathcal{I}_{jk} = \sum_s m_s \left( x_{sj} x_{sk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r_s^2 \right). \quad (4.66)$$

De esta manera, se puede reemplazar por la Ec. (4.65), que indica el valor de la pérdida de energía, para encontrar

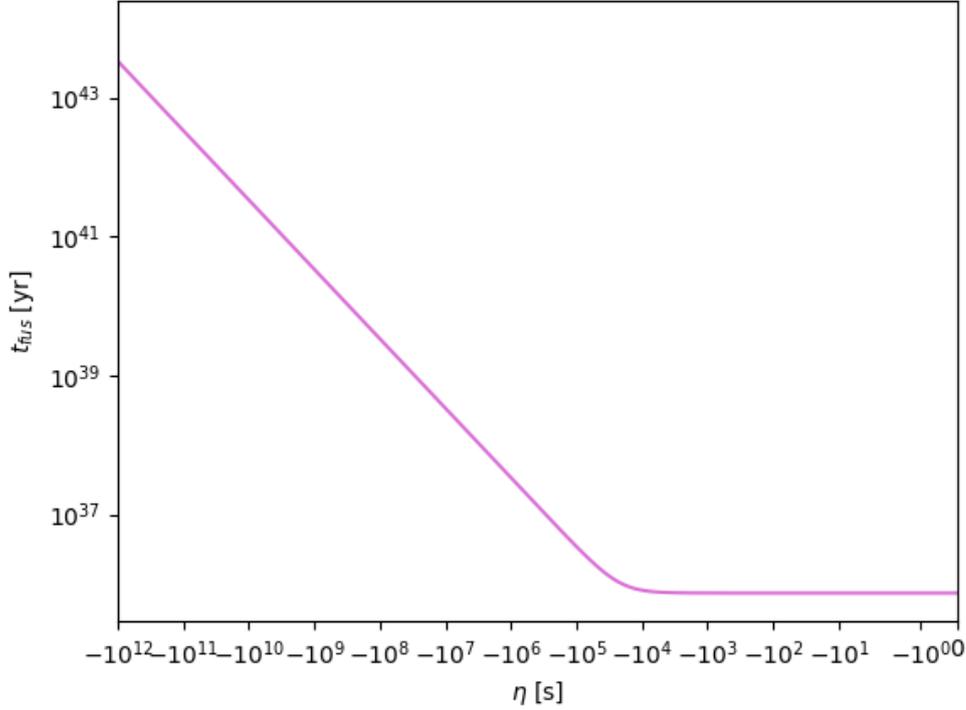
$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M^2 \mu}{\zeta^4}. \quad (4.67)$$

Por otro lado, se calcula la derivada temporal de la distancia  $\zeta$  entre los agujeros negros

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{dE} \frac{dE}{dt}. \quad (4.68)$$

Usando las Ecs. (4.63) y (4.65) se obtiene

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 \zeta^3}, \quad (4.69)$$



**Figura 4.4:** Tiempo de fusión, en años, dependiendo del tiempo conforme  $\eta$  en la etapa de contracción, para dos agujeros negros de masa inicial  $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot$  y una distancia inicial de  $\zeta_0 = 2.36 \times 10^{24}$  cm.

donde se puede integrar, resultando

$$\zeta^4 = \frac{256 G^3 \mu M^2}{5 c^5} t, \quad (4.70)$$

y despejando el tiempo

$$t_{\text{fus}} = \frac{5}{256 G^3 \mu M^2} \zeta^4. \quad (4.71)$$

De esta manera se halla el tiempo que tarda el sistema binario en fusionarse. Este tiempo es proporcional a  $\zeta^4$ , es decir, a medida que las distancias sean más grandes, más tardarán en fusionarse los agujeros negros. Por otro lado, el tiempo depende de  $\mu^{-1} M^{-2} = (M_1 M_2 M)^{-1}$ , por lo que agujeros negros más masivos tendrán un menor tiempo de fusión.

Sin embargo, en nuestro trabajo la distancia se modifica con el factor de escala. Si  $\zeta_0$  es la distancia en el tiempo conforme  $\eta_i = -2.96 \times 10^{12}$  s, la evolución de la distancia estará dada por

$$\zeta(\eta) = \zeta_0 a(\eta). \quad (4.72)$$

Consideramos dos agujeros negros supermasivos de masa inicial  $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot$ , cuya masa varía por la dinámica del espacio-tiempo según la Ec. (4.21). Además, suponemos una distancia promedio entre dos agujeros negros como la distancia

entre los agujeros negros supermasivos de Vía Láctea y la galaxia de Andrómeda hoy,  $\zeta_0 = 2.36 \times 10^{24}$  cm. En el [Apéndice B](#) se muestra el tiempo de fusión considerando la distancia media entre los agujeros negros que componen el gas, donde se encuentra que la distancia media inicial  $d_0 = 4.53 \times 10^{22}$  cm, de manera que nuestra suposición inicial es una aproximación razonable dentro del modelo.

En la [Fig. 4.4](#) se muestra el tiempo de fusión en años. Encontramos que es mucho mayor que el tiempo que dura la época de radiación, que es de 47.000 años ([Ryden, 2016](#)). Mediante la estimación anterior, concluimos que no habrá fusión de agujeros negros por pérdida de energía gravitacional.

## 4.4. Evolución de los fluidos

Dados los resultados de la sección anterior, y teniendo en cuenta el rango de masas elegido para el estudio, consideraremos que la población de agujeros negros se puede modelar como polvo, es decir, un gas sin presión. De esta manera, recordando que la ecuación de estado es  $P_{\text{AN}} = \omega_{\text{AN}} c^2 \rho_{\text{AN}}$ , encontramos que  $\omega_{\text{AN}} = 0$ .

Así, las Ecs. [\(4.14\)](#) toman la forma

$$\rho'_{\text{AN}}(\eta) + 3 \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \rho_{\text{AN}}(\eta) = Q, \quad (4.73)$$

$$\rho'_{\text{FC}}(\eta) + 3 \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} (1 + \omega_{\text{FC}}) \rho_{\text{FC}}(\eta) = -Q. \quad (4.74)$$

Sin embargo, tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas:  $\rho_{\text{AN}}$ ,  $\rho_{\text{FC}}$  y  $\omega_{\text{FC}}$  y queremos encontrar una solución única. Para completar el sistema, agregamos la ecuación de Friedmann [\(2.36\)](#), considerando  $k = \Lambda = 0$ , ya que son los supuestos del modelo cosmológico que estamos tomando. En términos del factor de escala normalizado, tendremos

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^2(t). \quad (4.75)$$

Escribimos la ecuación anterior en términos del tiempo conforme, usando la [Ec. \(3.22\)](#) tal que

$$\dot{a}(t) = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = a'(\eta) \frac{1}{a(\eta)}, \quad (4.76)$$

por lo que al reemplazar en la ecuación de Friedmann hallamos

$$\left( a'(\eta) \frac{1}{a(\eta)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(\eta) a^2(\eta), \quad (4.77)$$

que resulta en

$$\left( \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(\eta). \quad (4.78)$$

La densidad de energía  $\rho$  debe ser la densidad de energía total de la población de agujeros negros más la del fluido cosmológico, por lo que

$$\left(\frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_{\text{AN}}(\eta) + \rho_{\text{FC}}(\eta)). \quad (4.79)$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned} \rho'_{\text{AN}}(\eta) + 3\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\rho_{\text{AN}}(\eta) &= Q, \\ \rho'_{\text{FC}}(\eta) + 3\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}(1 + \omega_{\text{FC}})\rho_{\text{FC}}(\eta) &= -Q, \\ \left(\frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_{\text{AN}}(\eta) + \rho_{\text{FC}}(\eta)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Para resolver este sistema, consideramos que la densidad del gas de agujeros negros puede describirse como (Borunda & Masip, 2010; Barrow *et al.*, 1991)

$$\rho_{\text{AN}}(\eta) = \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} N(\eta; m)E(m) dm, \quad (4.81)$$

donde  $N(\eta; m)$  es la función de distribución,  $E(m) = mc^2$  la energía de un agujero negro de Schwarzschild y la integral se realiza a tiempo constante. En otras palabras, proponemos que la evolución de la densidad de energía de la población de agujeros negros depende de la distribución de masas a tiempo  $\eta$ .

El término de interacción  $Q$  representa el intercambio de energía entre el gas de agujeros negros y el fluido cosmológico y puede ser calculado a partir de la variación temporal de la densidad de energía del gas de agujeros negros. La función de distribución (también llamada densidad numérica) será igual en un tiempo  $\eta$  a un tiempo  $\eta + d\eta$  pues no hay evaporación o fusión de agujeros negros. Además, la masa de los mismos varía: pasará de tener una masa  $m$  en un tiempo  $\eta$  a tener una masa  $m + dm$  en un tiempo  $\eta + d\eta$ . Esto se puede expresar como

$$N(\eta; m) = N(\eta + d\eta, m + dm), \quad (4.82)$$

lo que implica que

$$\frac{\partial N(\eta; m)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\eta; m)}{\partial m} \frac{dm}{d\eta}. \quad (4.83)$$

De esta manera, el término de interacción resulta

$$Q = \frac{\partial \rho_{\text{AN}}}{\partial \eta} = \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial N(\eta; m)}{\partial m} \frac{dm}{d\eta} mc^2 dm. \quad (4.84)$$

Notemos que  $Q$  depende explícitamente de la variación de masa de los agujeros negros. Considerando el análisis anterior, la variación de masa únicamente está dada por la dinámica del espacio-tiempo, de manera que

$$\frac{dm}{d\eta} = M_{\text{ci}} \frac{da(\eta)}{d\eta} = \frac{M_{\text{ci}} a_b}{\eta_b^2} \eta \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad (4.85)$$

siendo  $M_{ci}$  la masa en  $\eta = \eta_i$ .

También podemos calcular explícitamente los términos asociados al factor de escala

$$\frac{a'(\eta)}{a(\eta)} = \frac{a_b \eta / \eta_b^2 (1 + (\eta/\eta_b)^2)^{-1/2}}{a_b (1 + (\eta/\eta_b)^2)^{1/2}} = \frac{\eta}{\eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (4.86)$$

y

$$\left( \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} \right)^2 = \frac{1}{a_b^2 \eta_b^2} \frac{\eta^2}{\eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-3}. \quad (4.87)$$

El sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{aligned} \rho'_{AN}(\eta) + 3 \frac{\eta}{\eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-1} \rho_{AN}(\eta) &= \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \frac{\partial N(\eta; m)}{\partial m} \frac{dm}{d\eta} m c^2 dm \\ \rho'_{FC}(\eta) + 3 \frac{\eta}{\eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-1} (1 + \omega_{FC}) \rho_{FC}(\eta) &= - \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} \frac{\partial N(\eta; m)}{\partial m} \frac{dm}{d\eta} m c^2 dm, \\ \frac{1}{a_b^2 \eta_b^2} \frac{\eta^2}{\eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-3} - \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_{AN}(\eta) + \rho_{FC}(\eta)) &= 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Tenemos así un sistema de ecuaciones integro-diferenciales acopladas para  $\rho_{AN}$ ,  $\rho_{FC}$  y  $\omega_{FC}$ . Para poder resolverlo, haremos suposiciones sobre la distribución de masas a cierto tiempo  $\eta$ . Además, consideraremos dos casos particulares de la distribución de masa: una distribución monoenergética de agujeros negros, centrada en un valor  $M_{ci}$ , y una distribución extendida sobre un cierto rango, en forma de ley de potencia.

#### 4.4.1. Función de distribución monoenergética

Si la población de agujeros negros presenta agujeros negros de masas similares, podemos considerar la función de distribución monoenergética, tipo delta de Dirac.

$$N(\eta_{ci}; m) = N_0(m) = A \delta(m - M_{ci}), \quad (4.89)$$

donde  $A$  es la constante de normalización. Para hallarla, sabemos que a cierto tiempo  $\eta_{ci}$  se va a cumplir que

$$\rho_{AN}(\eta_{ci}) = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} N(\eta_{ci}; m) m c^2 dm,$$

luego

$$\rho_{AN}(\eta_{ci}) = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} A \delta(m - M_{ci}) m c^2 dm = A M_{ci} c^2,$$

hallando así

$$A = \frac{\rho_{\text{AN}}(\eta_{\text{ci}})}{M_{\text{ci}} c^2}. \quad (4.90)$$

También podemos calcular  $Q$ . A cierto tiempo  $\eta_{\text{ci}}$ ,

$$Q = \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial N(m)}{\partial m} \frac{dm}{d\eta} m c^2 dm, \quad (4.91)$$

donde

$$\frac{\partial N}{\partial m} = \frac{\partial(A\delta(m - M_{\text{ci}}))}{\partial m} = A \frac{\partial(\delta(m - M_{\text{ci}}))}{\partial m}, \quad (4.92)$$

y reemplazando esto junto con la variación de masa (Ec. 4.85),

$$Q = A M_{\text{ci}} c^2 a_b \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1/2} \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial(\delta(m - M_{\text{ci}}))}{\partial m} m dm. \quad (4.93)$$

Usamos la siguiente propiedad de la delta de Dirac

$$\int_I f(x) \delta'(x - x_0) dx = \begin{cases} -f'(x_0) & \text{si } x_0 \in I, \\ 0 & \text{si } x_0 \notin I, \end{cases} \quad (4.94)$$

entonces

$$\int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} \frac{\partial(\delta(m - M_{\text{ci}}))}{\partial m} m dm = -\frac{\partial m}{\partial m} \Big|_{m=M_{\text{ci}}} = -1. \quad (4.95)$$

De esta manera,

$$Q = -A M_{\text{ci}} c^2 a_b \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (4.96)$$

El sistema de ecuaciones resulta

$$\rho'_{\text{AN}}(\eta) + 3 \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1} \rho_{\text{AN}}(\eta) = -A M_{\text{ci}} c^2 a_b \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad (4.97)$$

$$\rho'_{\text{FC}}(\eta) + 3 \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1} (1 + \omega_{\text{FC}}) \rho_{\text{FC}}(\eta) = A M_{\text{ci}} c^2 a_b \frac{\eta}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad (4.98)$$

$$\frac{1}{a_b^2 \eta_b^2} \frac{\eta^2}{\eta_b^2} \left(1 + \left(\frac{\eta}{\eta_b}\right)^2\right)^{-3} - \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_{\text{AN}}(\eta) + \rho_{\text{FC}}(\eta)) = 0. \quad (4.99)$$

### 4.4.2. Función de distribución extendida

Si se tiene un rango de masas mucho mayor, consideramos que la distribución es de tipo ley de potencia

$$N(\eta_{ci}; m) = N_0(m) = Am^{-\gamma}, \quad (4.100)$$

siendo  $\gamma$  el índice espectral, generalmente en el rango  $\gamma \sim 2 - 3$  (Carr *et al.*, 2010).

Al igual que en la sección anterior, la constante de normalización  $A$  se puede encontrar a partir de considerar que para un cierto tiempo  $\eta_{ci}$

$$\rho_{AN}(\eta_{ci}) = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} N(\eta_{ci}; m) mc^2 dm,$$

luego

$$\rho_{AN}(\eta_{ci}) = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} Am^{-\gamma} mc^2 dm = Ac^2 \frac{M_{\max}^{-\gamma+2} - M_{\min}^{-\gamma+2}}{-\gamma + 2} \quad (4.101)$$

hallando así

$$A = \frac{\rho_{AN}(\eta_{ci})(2 - \gamma)}{c^2 (M_{\max}^{-\gamma+2} - M_{\min}^{-\gamma+2})}, \quad (4.102)$$

siempre y cuando  $\gamma \neq 2$ . Si  $\gamma = 2$ ,

$$A = \frac{\rho_{AN}(\eta_{ci})}{c^2 \ln \left( \frac{M_{\max}}{M_{\min}} \right)} \quad (4.103)$$

A diferencia del caso monoenergético, no conocemos una expresión para  $N(\eta; m)$ , por lo que la solución será numérica. Para resolverlo, seguiremos el procedimiento desarrollado por Gutiérrez *et al.* (2017) para el caso de un gas de agujeros negros primordiales (PBH). Dado que tenemos un gran rango de masas, podemos considerar que el gas de agujeros negros está compuesto por  $N$  bloques monoenergéticos, cada uno satisfaciendo separadamente la Ec. (4.100). Esto permite escribir a la distribución en el tiempo  $\eta_{ci}$  como

$$N_i(\eta_{ci}) = N_0(m_i) = Am_i^{-\gamma}, \quad (4.104)$$

donde  $i$  representa cada bloque monoenergético. Lo que hicimos aquí fue considerar que la función de distribución en  $\eta_i$  depende de la masa  $m_i$  en cada bloque  $i$ . Como la masa varía el tiempo, también lo estará haciendo la función de distribución discretizada.

Además, dado que el gas de agujeros negros se comporta como polvo, la dependencia temporal de la función de distribución tendrá la forma

$$N_i(\eta_k) = N_i(\eta_{ci})a(\eta_k)^{-3}, \quad (4.105)$$

donde  $\eta_k$  es la discretización en  $k$  bloques del intervalo temporal que consideremos.

Así,

$$\rho_{\text{AN}}(\eta) = \int_{M_{\text{min}}}^{M_{\text{max}}} N(\eta) m(\eta) c^2 dm \implies \rho_{\text{AN}}(\eta_k) = \sum_{i=1}^N N_i(\eta_k) m_i(\eta_k) c^2 \Delta m, \quad (4.106)$$

donde

$$\Delta m = m_i(h-1), \quad \text{siendo} \quad h = \left( \frac{M_{\text{max}}}{M_{\text{min}}} \right)^{1/(r-1)}, \quad (4.107)$$

con  $r$  el número de pasos.

Una vez obtenida  $\rho_{\text{AN}}(\eta)$ , podemos hallar  $\rho_{\text{FC}}(\eta)$  al igual que en la sección anterior:

$$\rho_{\text{FC}}(\eta) = \frac{3c^2}{8\pi G a_b^2 \eta_b^4} \eta \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-3} - \rho_{\text{AN}}(\eta). \quad (4.108)$$

Finalmente, el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  resulta

$$\omega_{\text{FC}} = \frac{1}{3} \frac{\eta_b^2}{\eta} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right) \frac{1}{\rho_{\text{FC}}(\eta)} \left( -Q - \rho'_{\text{FC}}(\eta) \right) - 1, \quad (4.109)$$

donde  $Q$  también fue discretizado como

$$Q = \sum_i \frac{N(\eta_{ci})}{\eta_k - \eta_{k-1}} [a(\eta_k)^{-3} - a(\eta_{k-1})^{-3}] m_i c^2 \Delta m. \quad (4.110)$$

En el capítulo siguiente se mostrarán los resultados para ambos tipos de poblaciones de agujeros negros, con determinadas condiciones de borde.



# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Parámetros y condiciones de borde

La evolución de las densidades de energía, tanto del gas de agujeros negros como del fluido cosmológico, y del parámetro de la ecuación de estado  $\omega_{\text{FC}}$  está dado por el sistema de ecuaciones (4.88). Sin embargo, para determinar las soluciones completamente debemos imponer condiciones de borde. En particular, elegimos el tiempo  $\eta_{\text{ci}} = 2.96 \times 10^{12}$  s que corresponde al tiempo de transición de la época de radiación a la época de materia que, en tiempo cósmico, equivale a  $t_i = 47.000$  años (Ryden, 2016), tal como mencionamos en el capítulo anterior.

La densidad de energía del gas de agujeros negros en este tiempo la tomamos como una fracción de la densidad de energía de radiación:

$$\rho_{\text{AN}}(\eta_{\text{ci}}) = \beta' \rho_{\text{rad}}(\eta_{\text{ci}}). \quad (5.1)$$

donde  $\beta'$  es un parámetro libre del modelo. Se puede relacionar este parámetro con el parámetro  $\beta$ , que mide las restricciones de las abundancias iniciales de los PBH. Este tipo de agujeros negros podrían haberse creado en el Universo temprano, cuando la densidad de materia era lo suficientemente grande para generar inhomogeneidades de masa  $M_{\text{in}}$  que superaran la densidad crítica  $\rho_{\text{crit}} \sim M_{\text{in}}/r_{\text{Sch}}^3$  para la formación de un agujero negro (Frolov & Zelnikov, 2011).

El hecho de que los PBH no hayan sido detectados todavía impone restricciones al número inicial de PBH formados. Si bien el origen de los agujeros negros aquí considerados es muy diferente a la de los PBH, tomamos estas restricciones porque tampoco se han detectado este clase de objetos en el Universo temprano<sup>1</sup>.

Podemos relacionar  $\beta$  y  $\beta'$  como

$$\beta' = \frac{\beta}{1 - \beta}. \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>En particular, Gutiérrez *et al.* (2017) analizaron la evolución de un gas de PHBs interactuando con radiación en el Universo temprano estándar, siguiendo un desarrollo similar al nuestro.

pues

$$\beta = \frac{\rho_{\text{AN}}}{\rho_{\text{AN}} + \rho_{\text{rad}}}, \quad (5.3)$$

Si los PBH tienen masas  $M_{\text{PBH}} > 10^{15}$  g, sobreviven hasta hoy y podrían detectarse por sus efectos gravitacionales; en particular, los asociados a las ondas gravitacionales de fondo. Esto implica restricciones sobre la población de PBH, pues se espera que PBH masivos generen un fondo de ondas gravitacionales si hubiese fusión hoy de PBH binarios por radiación gravitacional. Para estos escenarios, los datos observacionales de LIGO<sup>2</sup> marcan restricciones débiles. Según las restricciones analizadas por Carr *et al.* (2010),  $\beta < 10^{-7}$  para un rango de masas de agujeros negros de masas estelares. El parámetro que usaremos a lo largo de todo el trabajo y para las dos distribuciones<sup>3</sup> es  $\beta = 10^{-10}$ .

De esta manera, a partir de la Ec. (4.41), la densidad de energía de la radiación en la condición de borde es  $\rho_{\text{rad}}(\eta_{\text{ci}}) = 184.35 \text{ erg cm}^{-3}$  y la condición inicial de la densidad de energía de los agujeros negros resulta

$$\rho_{\text{AN}}(\eta_{\text{ci}}) = 1.84 \times 10^{-8} \text{ erg cm}^{-3}. \quad (5.4)$$

## 5.2. Distribución de masas monoenergética

El sistema de ecuaciones a resolver consiste en las Ecs. (4.97), (4.98) y (4.99). Empezaremos resolviendo la Ec. (4.97).

Pasamos a la variable  $x = \eta/\eta_b$  y encontramos

$$\frac{1}{\eta_b} \frac{d\rho_{\text{AN}}}{dx} + \frac{3}{\eta_b} x (1+x^2)^{-1} \rho_{\text{AN}} = \frac{-AM_{\text{ci}}c^2 a_b}{\eta_b} x (1+x^2)^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Eliminando  $\eta_b$  y llamando  $\alpha = AM_{\text{ci}}c^2 a_b$ , encontramos la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho_{\text{AN}}}{dx} + 3x(1+x^2)^{-1} \rho_{\text{AN}} + \alpha x(1+x^2)^{-1/2} = 0. \quad (5.6)$$

cuyo resultado analítico es

$$\rho_{\text{AN}}(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \left[ -\alpha \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) + \mathcal{C} \right], \quad (5.7)$$

siendo  $\mathcal{C}$  la constante de integración, que puede ser determinada a partir de la condición de borde  $x_{\text{ci}} = \eta_{\text{ci}}/\eta_b = 1.35 \times 10^8$

$$\mathcal{C} = (1+x_{\text{ci}}^2)^{3/2} \rho_{\text{AN}}(x_{\text{ci}}) + \alpha \left( \frac{x_{\text{ci}}^2}{2} + \frac{x_{\text{ci}}^4}{4} \right). \quad (5.8)$$

<sup>2</sup>El Observatorio de Ondas Gravitatorias por Interferometría Láseres (LIGO, por sus siglas en inglés) es un observatorio diseñado para detectar ondas gravitacionales.

<sup>3</sup>Si bien las restricciones están calculadas para distribuciones de masas monoenergéticas, tomamos el mismo parámetro para poder calcular los resultados con una distribución de masas extendida.

Si bien la condición inicial de masa del agujero negro  $M_{\text{ci}}$  se introduce en la densidad de energía  $\rho_{\text{AN}}(x)$ , esta última cantidad es independiente de la masa. Notemos que

$$\alpha = AM_{\text{ci}}c^2 a_b \quad \text{y} \quad A = \frac{\rho_{\text{AN}}(x_{\text{ci}})}{M_{\text{ci}}c^2} \implies \alpha = a_b \rho_{\text{AN}}(x_{\text{ci}}), \quad (5.9)$$

luego,  $\alpha$  solo depende de la condición de borde que consideremos. Reemplazando la Ec. (5.9) en la constante de integración

$$C = \beta'(1 + x_{\text{ci}}^2)^{3/2} \rho_{\text{rad}}(x_{\text{ci}}) + a_b \beta' \rho_{\text{rad}}(x_{\text{ci}}) \left( \frac{x_{\text{ci}}^2}{2} + \frac{x_{\text{ci}}^4}{4} \right), \quad (5.10)$$

la densidad de energía del gas de agujeros negros toma la forma

$$\rho_{\text{AN}}(x) = \frac{\beta' \rho_{\text{rad}}(x_{\text{ci}})}{(1 + x^2)^{3/2}} \left[ -a_b \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) + (1 + x_{\text{ci}}^2)^{3/2} + a_b \left( \frac{x_{\text{ci}}^2}{2} + \frac{x_{\text{ci}}^4}{4} \right) \right], \quad (5.11)$$

que es lineal tanto en  $\beta'$  como en la densidad de radiación evaluada en la condición de borde. Como  $\beta' = \beta/(1 - \beta) \approx \beta$  para valores muy pequeños, también será lineal en  $\beta$ .

En la Fig. 5.1 mostramos la evolución de la densidad de agujeros negros normalizada  $\rho_{\text{AN}}(x)/\rho_{\text{AN}}(x_{\text{ci}})$ . Observamos que la densidad de agujeros negros aumenta hacia el rebote, siendo máxima en  $\eta = 0$  con un valor de  $\rho_{\text{AN}}(x)/\rho_{\text{AN}}(x_{\text{ci}}) = 3.06 \times 10^{24}$  y luego vuelve a disminuir. Este comportamiento es el esperado, dado que el gas de agujeros negros acompaña la evolución dinámica del Universo.

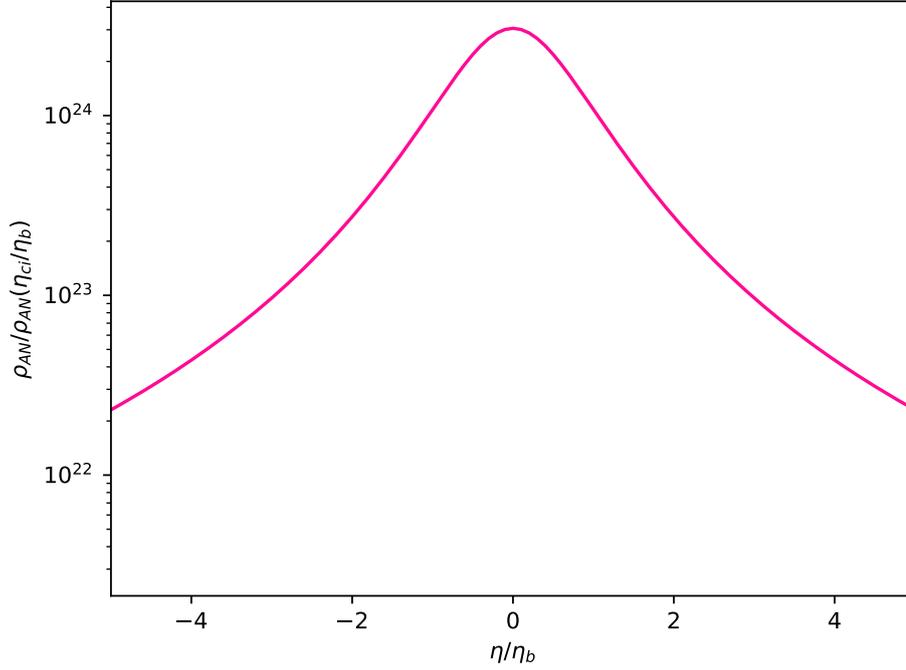
La densidad del fluido cosmológico se obtiene despejando  $\rho_{\text{FC}}$  de la Ec. (4.98)

$$\rho_{\text{FC}}(\eta) = \frac{3c^2}{8\pi G a_b^2 \eta_b^2} \left( 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right)^2 \right)^{-3} - \rho_{\text{AN}}(\eta)$$

y usando la variable  $x = \eta/\eta_b$ :

$$\rho_{\text{FC}}(x) = \frac{3c^2}{8\pi G a_b^2 \eta_b^2} x^2 (1 + x^2)^{-3} - \rho_{\text{AN}}(x). \quad (5.12)$$

En la Fig. 5.2 mostramos la densidad de energía del fluido cosmológico normalizada en dos intervalos temporales diferentes. Notamos que esta cantidad se hace máxima en dos puntos  $\eta = \pm 1.55 \times 10^4$  s, luego disminuye hasta anularse en  $\eta = \pm 2.11 \times 10^{-5}$  s. En este intervalo de tiempo, la densidad del fluido cosmológico se vuelve negativa, violando la CED. La densidad se hace mínima en  $\eta = 0$  y su valor es de  $\rho_{\text{FC}}(0) = -5.63 \times 10^{16}$  erg cm<sup>-3</sup>. A partir de la Ec. (5.12), se observa que, en  $\eta = 0$ ,  $\rho_{\text{FC}} = -\rho_{\text{AN}}$ .



**Figura 5.1:** Evolución de la densidad de energía normalizada del gas de agujeros negros entre los tiempos  $-1.10 \times 10^5 \text{ s} < \eta < 1.10 \times 10^5 \text{ s}$  para una distribución de masas monoenergética.

Finalmente, podemos encontrar  $\omega_{\text{FC}}$  despejándolo de la Ec. (4.99) escrita en términos de la nueva variable  $x$ , tal que

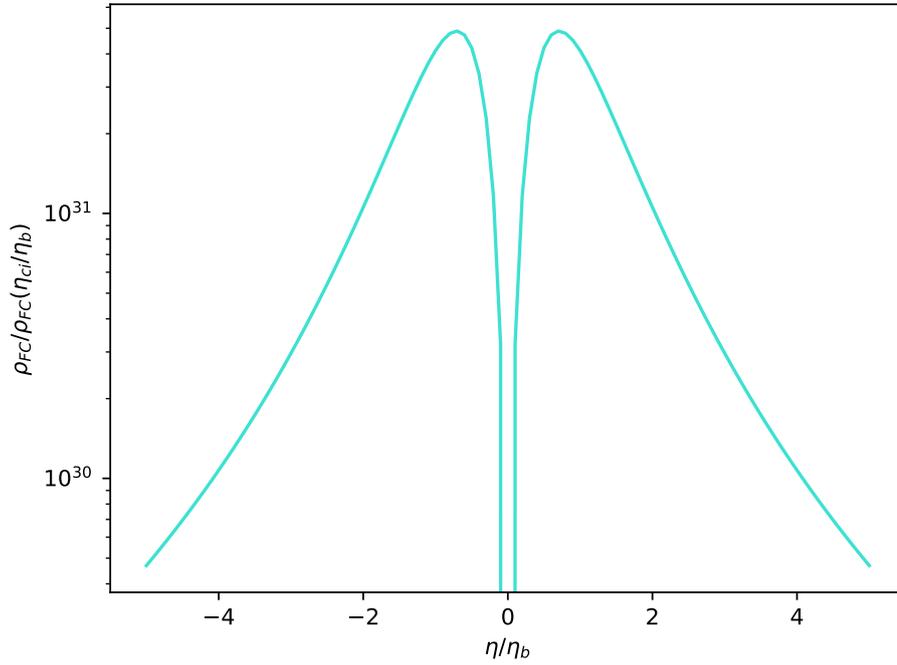
$$\omega_{\text{FC}} = \frac{1}{3} \frac{a_b \eta_b (1+x^2)^{1/2}}{a_b x (1+x^2)^{-1/2}} \frac{1}{\rho_{\text{FC}}} \left( A M_{\text{ci}} c^2 a_b \frac{x}{\eta_b} (1+x^2)^{-1/2} - \frac{1}{\eta_b} \frac{d\rho_{\text{FC}}}{dx} \right) - 1, \quad (5.13)$$

que lo podemos llevar a la forma

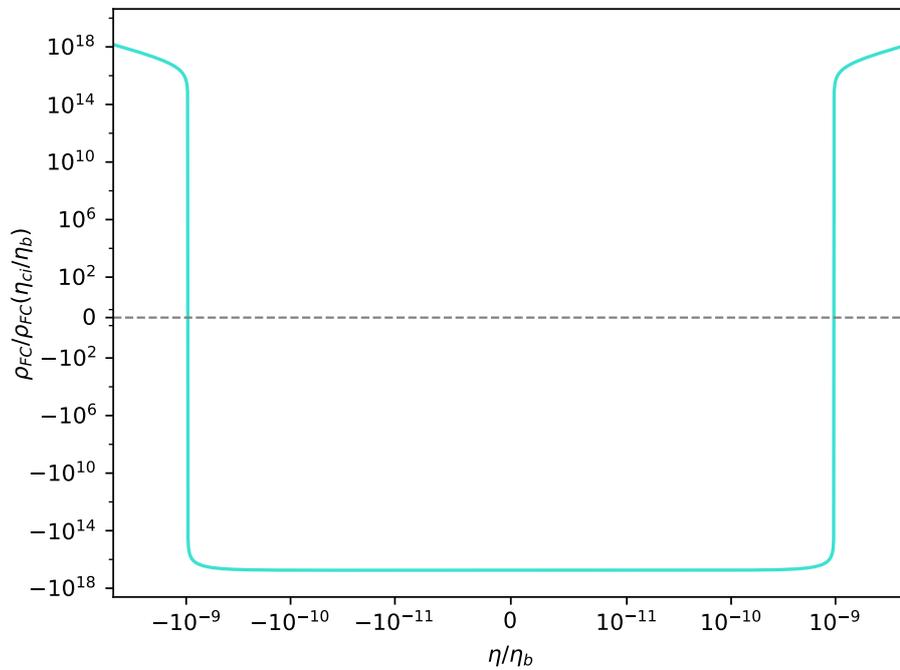
$$\omega_{\text{FC}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\rho_{\text{FC}}} \left( A M_{\text{ci}} c^2 a_b (1+x^2)^{1/2} - \frac{1+x^2}{x} \frac{d\rho_{\text{FC}}}{dx} \right) - 1. \quad (5.14)$$

En la Fig. 5.3 se presenta un gráfico de la evolución del parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  en función de  $\eta/\eta_b$ . Para valores grandes del módulo de  $\eta$ ,  $\omega_{\text{FC}} = 1/3$ , lo que corresponde a que el fluido cosmológico se comporte como radiación. Luego, comienza a disminuir, hasta anularse en los puntos  $\eta = \pm 3.1 \times 10^4 \text{ s}$ , volviéndose negativo. La presión del fluido cosmológico pasa a ser negativa  $P_{\text{FC}} < 0$ ; el fluido se comporta de manera repulsiva.

Además, el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  presenta dos divergencias simétricas, en  $\eta = \pm 2.11 \times 10^5 \text{ s}$ . Esto se corresponde con los ceros de la densidad de energía del fluido cosmológico. Por otro lado, en  $\eta = 0$  la función no presenta divergencias, pues la derivada

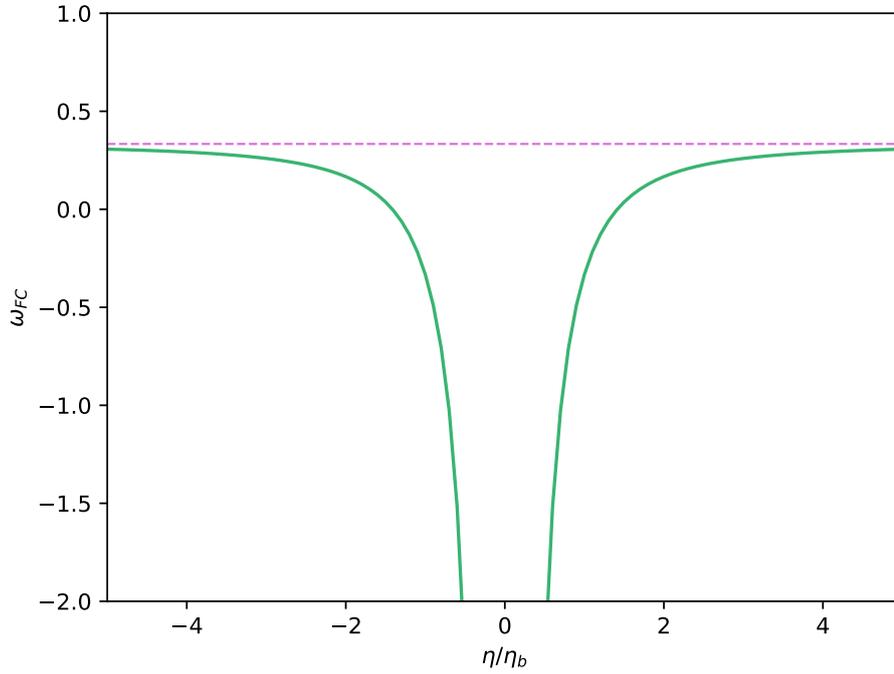


(a) Evolución de la densidad de energía normalizada del fluido cosmológico entre los tiempos  $-1.10 \times 10^5 \text{ s} < \eta < 1.10 \times 10^5 \text{ s}$ .

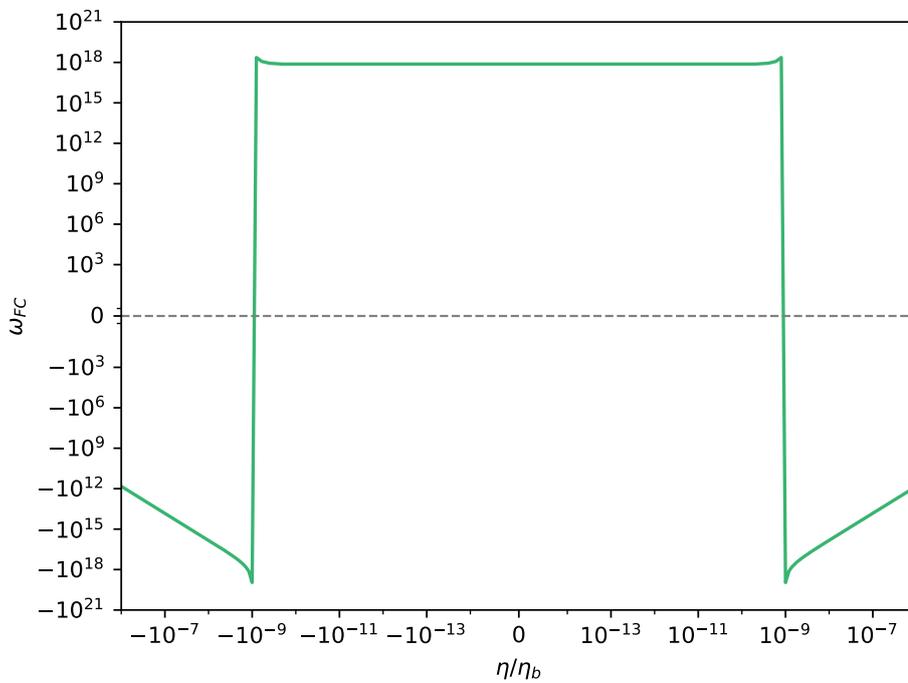


(b) Evolución de la densidad de energía normalizada del fluido cosmológico entre los tiempos  $-1.10 \times 10^{-4} \text{ s} < \eta < 1.10 \times 10^{-4} \text{ s}$ . La línea punteada corresponde al eje  $\rho_{FC} = 0$

**Figura 5.2:** Evolución de la densidad de energía normalizada del fluido cosmológico en función del tiempo conforme normalizado  $\eta/\eta_b$  para una distribución de masas monoenergética.

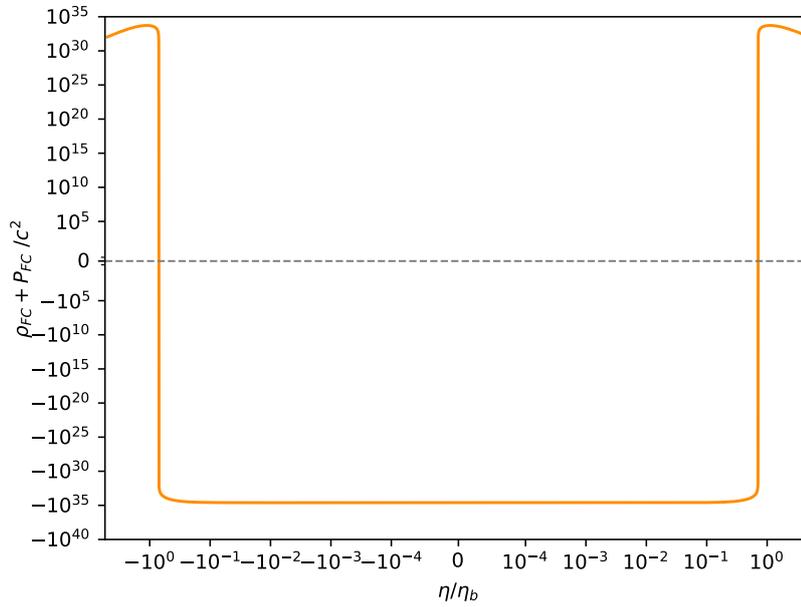


(a) Evolución del parámetro de la ecuación de estado del fluido cosmológico  $\omega_{FC}$  entre los tiempos  $-1.10 \times 10^5$  s  $< \eta < 1.10 \times 10^5$  s. La línea punteada se corresponde con el valor  $\omega_{FC} = 1/3$ .

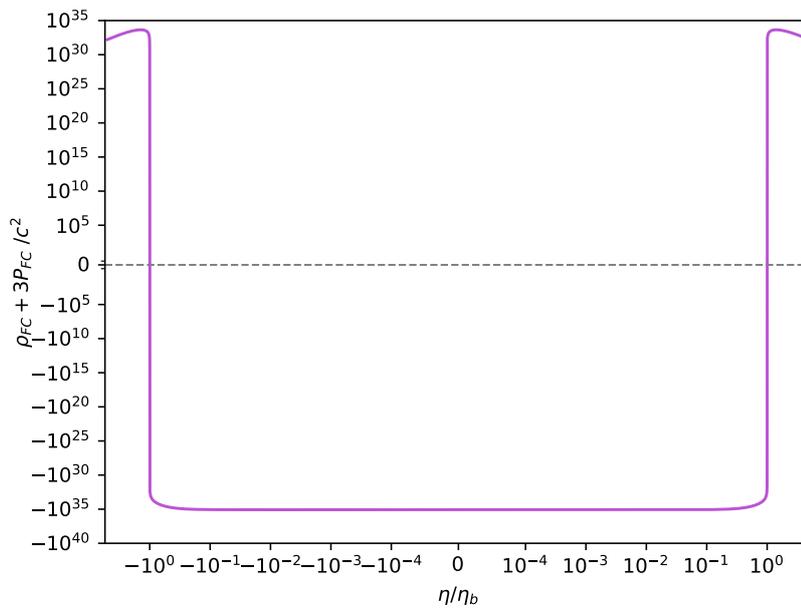


(b) Evolución del parámetro de la ecuación de estado del fluido cosmológico  $\omega_{FC}$  entre los tiempos  $-2.19 \times 10^{-2}$  s  $< \eta < 2.19 \times 10^{-2}$  s. La línea punteada se corresponde con el valor  $\omega_{FC} = 0$ .

**Figura 5.3:** Evolución del parámetro de la ecuación de estado del fluido cosmológico  $\omega_{FC}$  en función del tiempo conforme normalizado  $\eta/\eta_b$  para una distribución de masas monoenergética.



**Figura 5.4:** Condición CEN para el intervalo  $-2.12 \times 10^4 \text{ s} < \eta < 2.12 \times 10^4 \text{ s}$ . La línea punteada corresponde con el eje  $\rho_{FC} + P_{FC}/c^2 = 0$ .



**Figura 5.5:** Condición CEF para el intervalo  $-2.12 \times 10^4 \text{ s} < \eta < 2.12 \times 10^4 \text{ s}$ . La línea punteada corresponde con el eje  $\rho_{FC} + 3P_{FC}/c^2 = 0$ .

$d\rho_{\text{FC}}/dx$  tiene un factor  $x$  multiplicando que se cancela con el denominador. Luego, el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  está definido en todos los puntos excepto en los ceros de la densidad de energía del fluido cosmológico. La divergencia está indicando que, entre esos tiempos, el fluido cosmológico se comporta como un fluido perfectamente rígido, condición asociada a la posibilidad de que ocurra el rebote.

En resumen, la densidad de energía del gas de agujeros negros es siempre positiva, con un máximo en  $\eta = 0$ . Respecto al comportamiento de la densidad del fluido cosmológico, para un dado tiempo se vuelve negativa, violando la CED. Por otro lado, el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  no es una constante, lo que hace que las propiedades del fluido cosmológico se modifiquen a lo largo del tiempo: para tiempos grandes negativos se comporta como radiación, luego se vuelve fluido repulsivo y finalmente, un fluido perfectamente rígido. Una vez finalizado el rebote, el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$  se hace nuevamente positivo y después de un tiempo vuelve a comportarse como radiación.

Graficamos la condición CEN en la Fig. 5.4 y, en la Fig. 5.5, la condición CEF. Notemos que efectivamente estas condiciones se violan en un cierto intervalo temporal. Para el caso de la CEN, este intervalo temporal donde se viola la condición es  $-1.55 \times 10^4 \text{ s} < \eta < 1.55 \times 10^4 \text{ s}$ , que se corresponde con los puntos comprendidos entre los máximos de la densidad del fluido cosmológico. Por otro lado, la CEF se viola entre  $-2.12 \times 10^4 \text{ s} < \eta < 2.12 \times 10^4 \text{ s}$ , que se corresponde con el parámetro  $\eta_b$  del factor de escala (Ec. 3.20).

### 5.3. Distribución de masas extendida

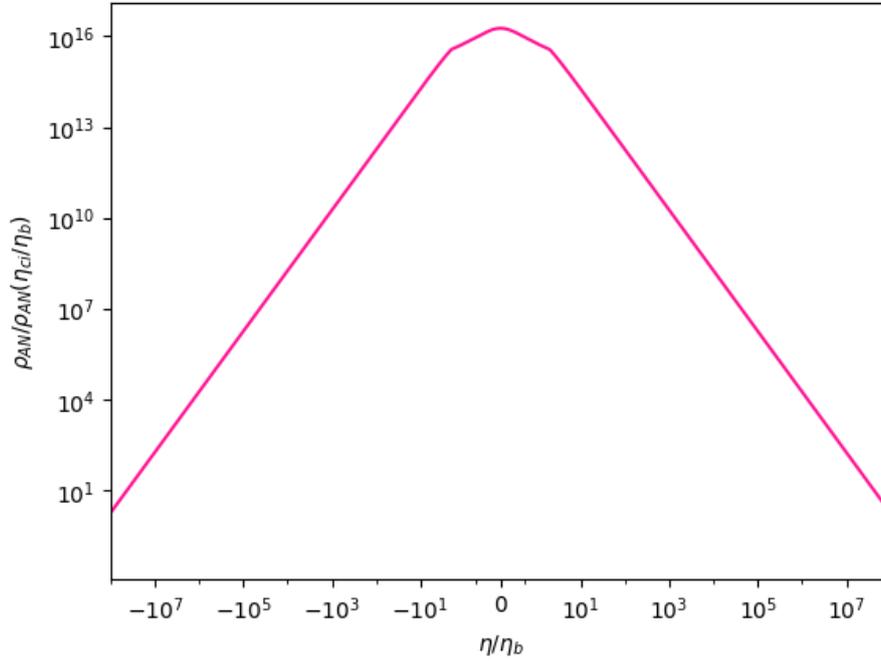
Consideramos un rango de masas lo más extendido posible teniendo en cuenta las restricciones discutidas en la Sección 4.2.4. De esta manera,  $10^{16} \text{ g} < M < 10^6 M_{\odot}$ .

Consideramos también diferentes índices espectrales para la distribución de agujeros negros:  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 3$  y  $\gamma = 2.36$ , que se corresponde con el índice espectral de Salpeter, que se relaciona con la distribución inicial de masas para una población de estrellas. Sin embargo, la variación de  $\gamma$  no induce cambios significativos en las densidades de energía y el parámetro  $\omega_{\text{FC}}$ . Es por esto que solo mostraremos los resultados considerando  $\gamma = 2.36$ .

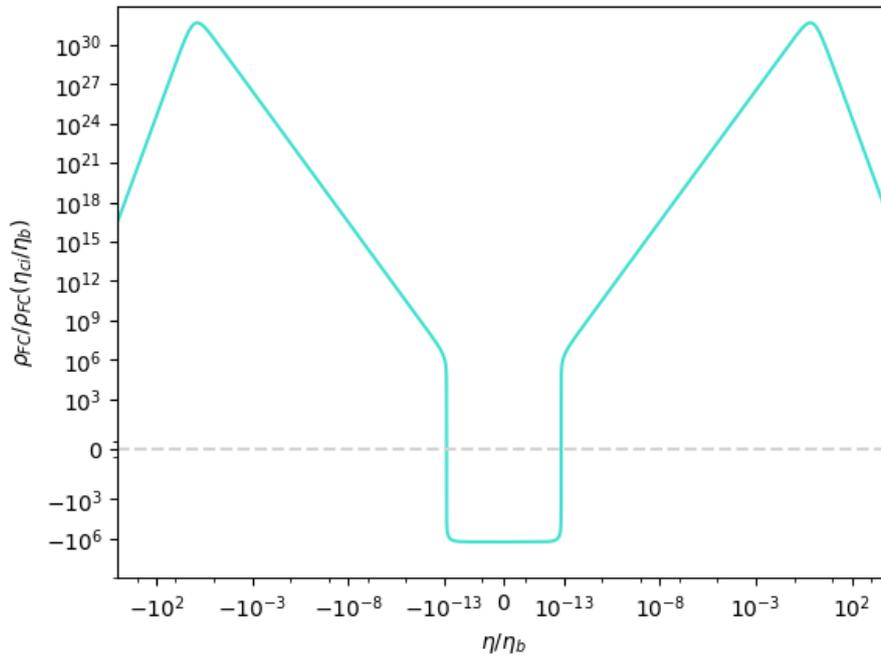
Primero obtenemos la densidad de energía normalizada para el gas de agujeros negros, como se muestra en la Fig. 5.6. Si bien la forma es similar a la distribución estrecha, con un pico hacia los  $\eta$  cercanos al cero, con un máximo de  $\rho_{\text{AN}}(0)/\rho_{\text{AN}}(\eta_{\text{ci}}) = 1.97 \times 10^{16}$ , es 8 órdenes de magnitud menor a la distribución monoenergética.

Por otro lado, la densidad de energía normalizada del fluido cosmológico también mantiene una forma similar al caso monoenergético, como podemos ver en la Fig. 5.7. Sin embargo,  $\rho_{\text{FC}}(x_{\text{max}})/\rho_{\text{FC}}(\eta_{\text{ci}}) = 4.88 \times 10^{31}$ , siendo el máximo un orden de magnitud menor.

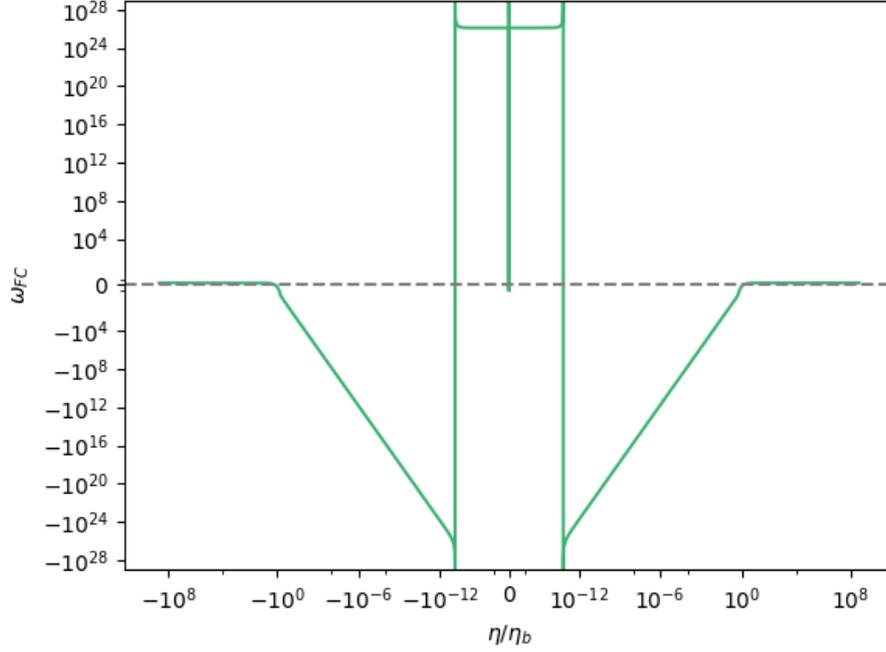
Además, la densidad de energía del fluido cosmológico se anula para los tiempos



**Figura 5.6:** Evolución de la densidad de energía del gas de agujeros negros en función del tiempo conforme normalizado entre los tiempos  $-2.19 \times 10^{12} \text{ s} < \eta < 2.19 \times 10^{12} \text{ s}$  considerando un índice espectral  $\gamma = 2.36$ .



**Figura 5.7:** Evolución de la densidad de energía del fluido cosmológico en función del tiempo conforme normalizado entre los tiempos  $-2.19 \times 10^8 \text{ s} < \eta < 2.19 \times 10^8 \text{ s}$  considerando un índice espectral  $\gamma = 2.36$ . En la línea punteada marcamos el eje  $\rho_{\text{FC}} = 0$



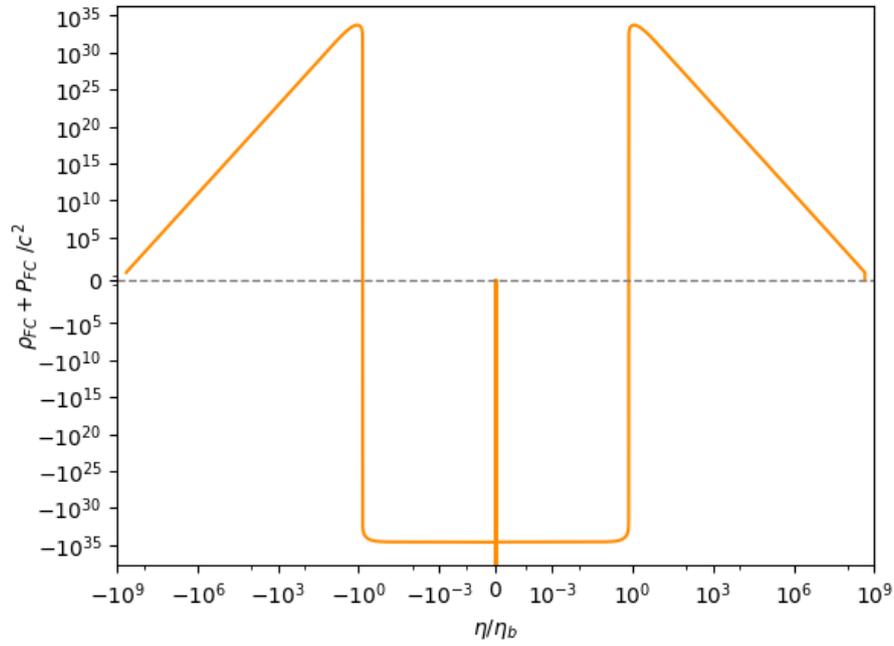
**Figura 5.8:** Evolución del parámetro  $\omega_{FC}$  en función del tiempo conforme normalizado considerando un índice espectral  $\gamma = 2.36$ . En la línea punteada gris marcamos el valor  $\omega_{FC} = 0$ .

$\eta = \pm 5.26 \times 10^{-12}$  s. Este valor es mucho menor que para el caso monoenergético. Entre ese intervalo de tiempo, la densidad es negativa, violando la condición CED. El valor normalizado en el mínimo es  $\rho_{FC}/\rho_{FC}(\eta_{ci}) = -1.19 \times 10^6$ . Es importante notar que el mínimo de la densidad del fluido cosmológico se corresponde, con un signo opuesto, con la densidad de energía máxima del gas de agujeros negros, al igual que en la distribución de masas monoenergética.

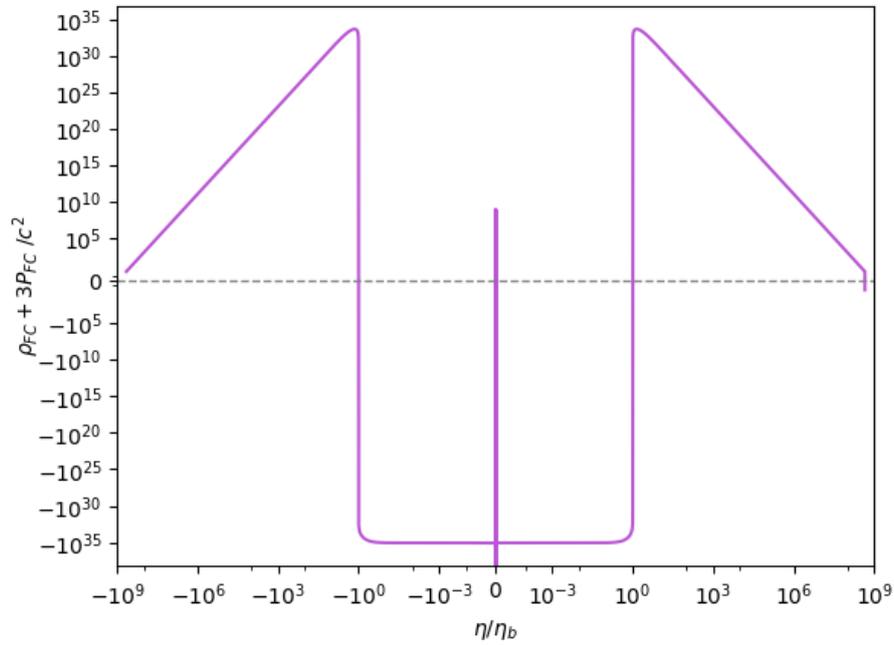
En la Fig. 5.8 se presenta el parámetro  $\omega_{FC}$  en función del tiempo conforme normalizado. Para tiempos grandes el valor es  $\omega_{FC} = 1/3$ . También podemos ver que se anula para  $\eta = \pm 3.1 \times 10^5$  s, se vuelve negativa en este intervalo temporal y diverge en  $\eta = \pm 5.26 \times 10^{-12}$  s, valores correspondientes a los ceros de la densidad de energía del fluido cosmológico. La divergencia que se observa en  $\eta = 0$  es un problema numérico y no refleja el comportamiento del fluido.

Finalmente, verificamos que las condiciones CEN (Fig. 5.9) y CEF (Fig. 5.10) no se cumplen en el intervalo de tiempo  $-1.55 \times 10^4$  s  $< \eta < 1.55 \times 10^4$  s y de  $-2.12 \times 10^4$  s  $< \eta < 2.12 \times 10^4$  s, respectivamente. Nuevamente, la divergencia en  $\eta = 0$  corresponde a un error numérico en el cálculo de  $\omega_{FC}$ .

Comparando con el caso de la distribución monoenergética, el intervalo temporal en donde hay violación de las condiciones de energía es el mismo. Luego, la violación de la CEF y la CEN es independiente de las distribuciones elegidas.



**Figura 5.9:** Condición de energía CEN en función del tiempo conforme  $\eta/\eta_b$ . La línea punteada corresponde con el eje  $\rho_{FC} + P_{FC}/c^2 = 0$ .



**Figura 5.10:** Condición de energía CEF en función del tiempo conforme  $\eta/\eta_b$ . La línea punteada corresponde con el eje  $\rho_{FC} + 3P_{FC}/c^2 = 0$ .

## 5.4. Evolución del fluido cosmológico en ausencia de agujeros negros

Para cerrar el capítulo, nos interesa conocer cómo es la evolución del fluido cosmológico en un universo con rebote sin considerar al gas de agujeros negros. Esto nos permitirá determinar el efecto que genera al gas de agujeros negros a la evolución del fluido cosmológico. Entonces, a partir de la ecuación de Friedmann (4.99) escrita en términos de la variable  $x = \eta/\eta_b$  podemos despejar

$$\rho_{\text{FC}}(x) = \frac{3c^2}{8\pi G a_b^2 \eta_b^2} x^2 (1 + x^2)^{-3}. \quad (5.15)$$

Por otro lado, usando la Ec. (4.98) también escrita en términos de la variable  $x = \eta/\eta_b$ , el parámetro de la ecuación de estado  $\omega_{\text{FC}}$  resulta

$$\omega_{\text{FC}} = -\frac{1}{3} \frac{1+x^2}{x} \frac{1}{\rho_{\text{FC}}(x)} \rho'_{\text{FC}}(x) - 1 \quad (5.16)$$

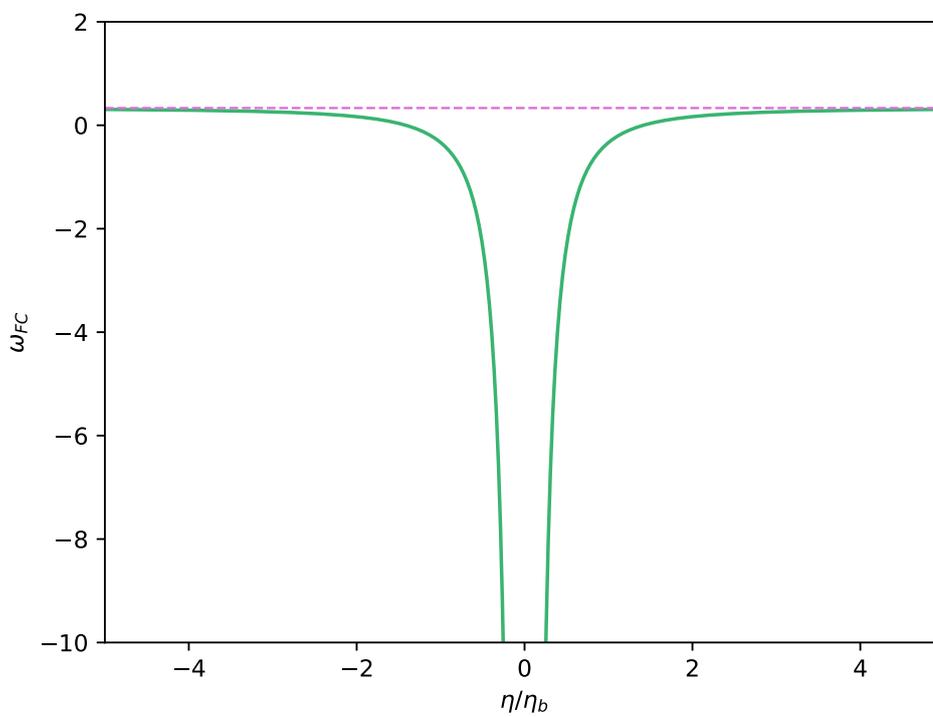
pues, como no hay interacción entre fluidos,  $Q = 0$ .

Reemplazando explícitamente por los valores de  $\rho_{\text{FC}}$  y su derivada, encontramos que

$$\omega_{\text{FC}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3x^2}, \quad (5.17)$$

cuyo gráfico se ve en la Fig. 5.11. Para valores grandes de  $\eta$ , tanto positivos como negativos, esta cantidad tiende al valor  $\omega_{\text{FC}} = 1/3$ , correspondiente a radiación. Para tiempos cercanos al rebote, se anula y se vuelve negativa, divergiendo en  $\eta = 0$ .

En conclusión, considerar el gas de agujeros negros en interacción con el fluido cosmológico resulta en un desdoblamiento de la divergencia respecto al rebote, tal que el estado de infinita rigidez tiene una duración mayor.



**Figura 5.11:** Evolución del parámetro  $\omega_{FC}$  sin considerar la población de agujeros negros entre los tiempos  $-1.10 \times 10^5 \text{ s} < \eta < 1.10 \times 10^5 \text{ s}$ . La línea punteada representa el eje  $\omega_{FC} = 1/3$ .



# Capítulo 6

## Conclusiones

El objetivo general de este trabajo ha sido investigar la evolución de una población de agujeros negros en un universo con rebote, en interacción con el fluido cosmológico de fondo. Para ello, consideramos un modelo cosmológico de rebote y supusimos a cada uno de los componentes del sistema como dos fluidos en interacción. Esto nos permitió encontrar un sistema de ecuaciones que determinan su evolución.

En una primera parte, analizamos si los agujeros negros podrían llegar a fusionarse. Con este fin, analizamos dos efectos posibles. Por un lado calculamos el factor de llenado, que es el cociente entre el área de un agujero negro y el área de una hipersuperficie radial tipo espacio en la geometría FLRW. Por otro lado, estimamos si el tiempo de fusión de un sistema binario de agujeros negros por radiación gravitacional es menor que el tiempo que dura la fase de contracción.

Para calcular el factor de llenado, determinamos el área del horizonte de eventos en función del tiempo, la cual es proporcional al cuadrado de la masa del agujero negro. Consideramos tres posibles contribuciones a la variación de la masa: acreción de radiación, radiación de Hawking y la propia dinámica del espacio-tiempo. Encontramos que, para el rango de masas considerado, la única contribución relevante es la de la dinámica del espacio-tiempo. Por lo tanto, el factor de llenado resulta constante en el tiempo. Bajo estas suposiciones, concluimos que no hay fusión entre agujeros negros.

Respecto a la radiación gravitacional, consideramos un modelo de masas puntuales para los agujeros negros. Esto permitió encontrar el tiempo de fusión. Considerando distancias del orden de la separación entre la Vía Láctea y Andrómeda y masas de agujeros negros supermasivos, hallamos que el tiempo de fusión es mucho mayor que el tiempo en que sucede la etapa de contracción. Concluimos, luego, que no hay fusión de agujeros negros por radiación gravitacional.

El hecho de que, bajo las suposiciones ya analizadas, los agujeros negros no se fusionen permitió modelar a esta población como un fluido tipo polvo.

A partir de la conservación del tensor de energía-momento total y de las ecuaciones cosmológicas en RG, se obtuvo un sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales

para la densidad de agujeros negros, el fluido cosmológico y el parámetro asociado a la ecuación de estado del fluido cosmológico. Resolvimos el sistema de ecuaciones para dos distribuciones de masas. Tuvimos en cuenta una distribución de masas estrecha, tipo monoenergética, centrada en un valor particular, y una extendida, tipo ley de potencia. Para ambos casos consideramos la misma restricción  $\beta$  a la densidad de energía del gas de agujeros negros en el tiempo de transición entre la época de radiación y de materia. Sin embargo, las diferentes distribuciones no generan grandes cambios en las densidades de energía y en el parámetro  $\omega_{\text{CF}}$ : los comportamientos generales son los mismos. Solamente en el caso de la densidad de energía de los agujeros negros hay una diferencia de ocho órdenes de magnitud en el máximo. Además, para el caso monoenergético, esta densidad de energía es lineal en  $\beta$  e independiente del valor de masa donde centramos la distribución.

Los resultados principales son: la densidad de energía de los agujeros negros aumenta significativamente en tiempos cercanos al rebote, siendo máxima en este punto. En cuanto a la evolución de la densidad de energía del fluido cosmológico, encontramos que presenta dos máximos, dos puntos temporales donde la densidad se anula, ambos simétricos respecto al rebote, y un período donde se vuelve negativa. Por último, el parámetro de la ecuación de estado del fluido cosmológico varía en el tiempo. Para tiempos grandes toma el valor  $\omega_{\text{CF}} = 1/3$ , que corresponde con un fluido tipo radiación, lo cual está en acuerdo con las condiciones de borde impuestas en el modelo. Para tiempos muy cercados al rebote, el parámetro se anula y se vuelve negativo, hasta diverger en puntos simétricos respecto al rebote. En el intervalo de tiempo donde esto sucede, el fluido se vuelve infinitamente rígido.

Finalmente, verificamos que el fluido cosmológico viola las condiciones de energía CEN, CED y CEF en un entorno del tiempo donde se produce el rebote.

El principal resultado de esta tesis es que la presencia de la población de agujeros negros modifica las propiedades del fluido cosmológico, el cual es descrito por una ecuación de estado más dura. En otras palabras, la escala del rebote es mucho mayor que en un universo sin una componente de agujeros negros.

Entre las posibilidades a trabajo a futuro mencionamos las siguientes:

- Recalcular el factor de llenado y el sistema de ecuaciones considerando también acreción de radiación. La acreción rompería con la simetría extrema del problema. Además, habría que incorporar la fusión de los agujeros negros en las distintas etapas cosmológicas.
- La interacción de agujeros negros en la etapa de contracción producen un fondo de ondas gravitacionales, que tendrían una signatura específica en el fondo cósmico de radiación. Este es un tema de investigación abierto que hasta el momento no ha sido explorado.



# Apéndice A

## A.1. Obtención de los parámetros del modelo

Los parámetros que debemos ajustar para el modelo son

- $a_b$ : el parámetro de normalización del factor de escala,
- $\eta_b$ : el tiempo conforme de la escala del rebote y
- $\eta_i$ : el tiempo conforme de transición entre la época de radiación y la época de materia.

Normalizamos el factor de escala (Ec. 3.20) tal que en la transición radiación - materia

$$a(\eta_i) = a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta_i}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2} = 1. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, los valores de los máximos de densidad se encuentran en  $\rho_{\max} = \pm \eta_b / \sqrt{2}$  tal que

$$\rho_{\max} = \rho \left( \frac{\eta_b}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{\eta_b^4 a_b^2} \left( \frac{\eta_b}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\eta_b}{\sqrt{2} \eta_b} \right)^2 \right]^{-3} \quad (\text{A.2})$$

que se reduce a

$$\rho_{\max} = \frac{1}{18 \pi G} \frac{1}{\eta_b^2 a_b^2} \implies \eta_b = \sqrt{\frac{1}{18 \pi G a_b^2 \rho_{\max}}}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\rho_{\max} = 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$ .

Por último, a partir de la relación entre el tiempo cósmico y el tiempo conforme

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a(\eta)}, \quad (\text{A.4})$$

e integrando la Ec. (A.4)

$$t = \frac{a_b}{2} \left[ \eta_b \operatorname{arcsenh} \left( \frac{\eta}{\eta_b} \right) + \eta \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta_b^2} + 1} \right]. \quad (\text{A.5})$$

El tiempo cósmico de transición es  $t_i = 47000$  años (Ryden, 2016). Entonces,

$$t_i = \frac{a_b}{2} \left[ \eta_b \operatorname{arcsenh} \left( \frac{\eta_i}{\eta_b} \right) + \eta_i \sqrt{\frac{\eta_i^2}{\eta_b^2} + 1} \right]. \quad (\text{A.6})$$

De esta manera, las Ecs. (A.1), (A.3) y (A.6) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo, llamamos  $x = \eta_i/\eta_b$  de manera que las Ecs. (A.1) y (A.6) se reducen a

$$a_b \left[ 1 + \left( \frac{\eta_i}{\eta_b} \right)^2 \right]^{1/2} = 1 \implies a_b [1 + x^2]^{1/2} = 1, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{a_b}{2} \left[ \eta_b \operatorname{arcsenh} \left( \frac{\eta_i}{\eta_b} \right) + \eta_i \sqrt{\frac{\eta_i^2}{\eta_b^2} + 1} \right] = t_i \implies \frac{a_b \eta_b}{2} \left[ \operatorname{arcsenh}(x) + x \sqrt{x^2 + 1} \right] = t_i. \quad (\text{A.8})$$

Trabajaremos con la Ec. (A.8). Para esto, reemplazamos los valores de  $a_b$  y  $\eta_b$  como

$$a_b = [1 + x^2]^{-1/2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\eta_b = \sqrt{\frac{1}{18\pi G a_b^2 \rho_{\max}}} = \sqrt{\frac{1 + x^2}{18\pi G \rho_{\max}}}, \quad (\text{A.10})$$

de manera que la Ec. (A.8) resulta

$$\frac{1}{2} (1 + x^2)^{-1/2} \sqrt{\frac{1 + x^2}{18\pi G \rho_{\max}}} \left[ \operatorname{arcsenh}(x) + x \sqrt{x^2 + 1} \right] = t_i \quad (\text{A.11})$$

y se reduce a, con  $\alpha^2 = 72\pi G \rho_{\max}$ ,

$$\frac{1}{\alpha} \left[ \operatorname{arcsenh}(x) + x \sqrt{x^2 + 1} \right] = t_i. \quad (\text{A.12})$$

Hallando la única raíz,  $x = 7.47 \times 10^9$ , de manera que

$$\eta_b = \sqrt{\frac{1 + x^2}{18\pi G \rho_{\max}}} = 2.19 \times 10^4 \text{ s}, \quad (\text{A.13})$$

$$a_b = (1 + x^2)^{-1/2} = 7.41 \times 10^{-9} \quad (\text{A.14})$$

$$\eta_i = x \eta_b = 2.96 \times 10^{12} \text{ s}. \quad (\text{A.15})$$



# Apéndice B

## B.1. Distancia media entre agujeros negros

En la Sección 4.3 calculamos el tiempo de de fusión entre dos agujeros negros de masas  $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot$ . La distancia inicial que consideramos fue la distancia entre los agujeros negros supermasivos de la Vía Láctea y la galaxia de Andrómeda hoy, que es  $\zeta_0 = 2.36 \times 10^{24}$  cm. En este Apéndice calcularemos la distancia promedio entre la población de agujeros negros y su consecuente tiempo de fusión.

La distancia promedio  $d$  entre las partículas que componen un gas es

$$d \sim N^{-1/3}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $N$  es la densidad numérica. Conociendo la densidad de energía del gas de agujeros negros  $\rho_{\text{BH}}$ , podemos hallar  $N$  según

$$N = \frac{\rho_{\text{BH}}}{Mc^2}, \quad (\text{B.2})$$

siendo  $M$  la masa de los agujeros negros. Al igual que en la Sección 4.3, consideramos  $M = 10^6 M_\odot$ . Dado que incluimos una única masa, solo calcularemos la distancia promedio para la distribución monocromática. De esta manera, la distancia promedio inicial en  $\eta = -\eta_i$  resulta de  $d_0 = 4.52 \times 10^{22}$  cm. La evolución de la distancia media para la época de contracción se muestra en la Fig. B.1.

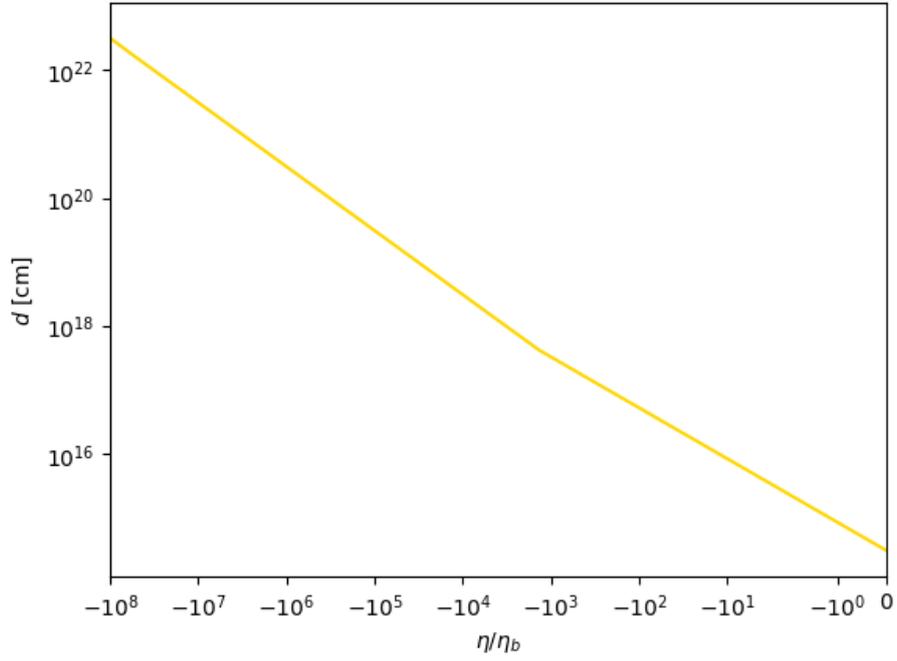
A partir de la distancia media podemos calcular el tiempo de fusión, dado por la Ec. (4.71):

$$t_{\text{fus}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3 \mu M^2} d^4, \quad (\text{B.3})$$

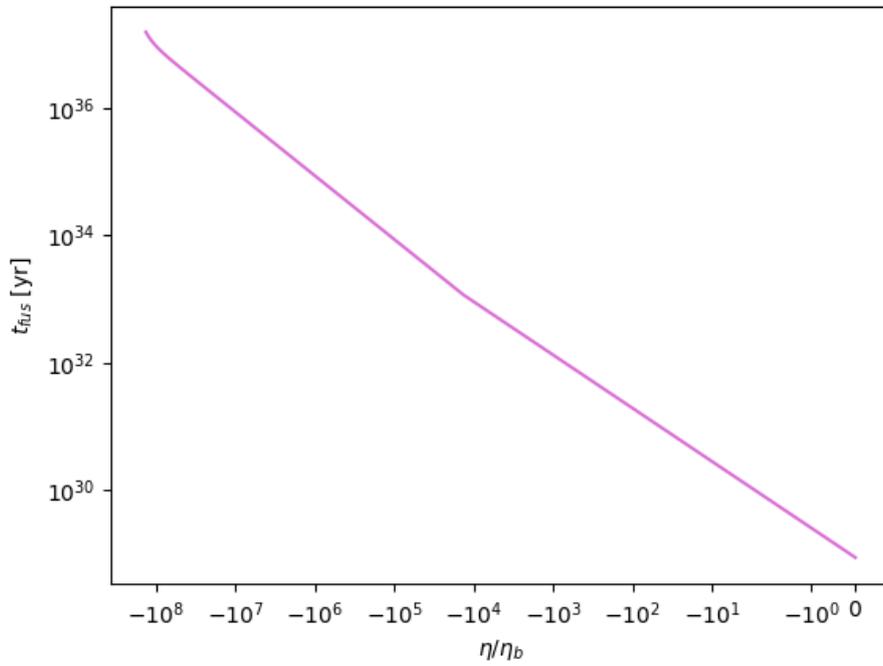
donde volvimos a tomar que las masas de los agujeros negros son iguales  $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot$ .

En la Fig. B.2 se muestra el tiempo de fusión en años, que, como puede verse, es mucho mayor que el tiempo que dura la época de radiación. Sin embargo, a pesar de que nuestra consideración inicial de la distancia es dos órdenes de magnitud mayor que la media entre los agujeros negros de una población monoenergética, los tiempos de fusión son bastante menores, ya que  $t_{\text{fus}} \propto d^4$ .

De esta manera, corroboramos que nuestra suposición inicial es una aproximación razonable dentro del modelo y que, bajo las suposiciones ya mencionadas, no habrá fusión de agujeros negros por pérdida de energía gravitacional.



**Figura B.1:** Evolución de la distancia media  $d$  en función del tiempo conforme normalizado  $\eta/\eta_b$  en la época de contracción.



**Figura B.2:** Tiempo de fusión en años en función del tiempo conforme normalizado  $\eta/\eta_b$  en la época de contracción, para dos agujeros negros de masas iniciales  $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot$  y una distancia inicial de  $d_0 = 4.52 \times 10^{22}$ .



# Bibliografía

- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., & Acernese, et al. 2016. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**(Feb), 061102.
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Acernese, F., & Ackley, K. et al. 2017. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, **551**(7678), 85–88.
- Agnese, R., Anderson, A.J., Asai, M., Balakishiyeva, D., & Basu Thakur, et al. 2014. Search for Low-Mass Weakly Interacting Massive Particles with SuperCDMS. *Physical Review Letters*, **112**(24).
- Akerib, D.S., Araújo, H.M., Bai, X., Bailey, A.J., & Balajthy, J. et al. 2014. First Results from the LUX Dark Matter Experiment at the Sanford Underground Research Facility. *Physical Review Letters*, **112**(9).
- Alpher, R. A., Bethe, H., & Gamow, G. 1948. The Origin of Chemical Elements. *Physical Review*, **73**(7), 803–804.
- Aprile, E., Alfonsi, M., Arisaka, K., Arneodo, F., & Balan, C., et al. 2012. Dark Matter Results from 225 Live Days of XENON100 Data. *Physical Review Letters*, **109**(18).
- Barrow, John D., Copeland, Edmund J., & Liddle, Andrew R. 1991. The evolution of black holes in an expanding universe. *MNRAS*, **253**(Dec.), 675–682.
- Borunda, Mónica, & Masip, Manuel. 2010. Black hole gas in the early universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2010**(01), 027–027.
- Carr, B. J., Kohri, Kazunori, Sendouda, Yuuiti, & Yokoyama, Jun'ichi. 2010. New cosmological constraints on primordial black holes. *Phys. Rev. D*, **81**(May), 104019.
- Carr, Bernard, & Kühnel, Florian. 2020. Primordial Black Holes as Dark Matter: Recent Developments. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **70**(1), annurev.

- Carr, Bernard, & Silk, Joseph. 2018. Primordial black holes as generators of cosmic structures. *MNRAS*, **478**(3), 3756–3775.
- Carrera, Matteo, & Giulini, Domenico. 2010. Generalization of McVittie’s model for an inhomogeneity in a cosmological spacetime. *Phys. Rev. D*, **81**(Feb), 043521.
- Carroll, Sean M. 2019. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Celani, Diogo C. F., Pinto-Neto, Nelson, & Vitenti, Sandro D. P. 2017. Particle creation in bouncing cosmologies. *Phys. Rev. D*, **95**(Jan), 023523.
- Di Valentino, Eleonora, Mena, Olga, Pan, Supriya, Visinelli, Luca, Yang, Weiqiang, Melchiorri, Alessandro, Mota, David F, Riess, Adam G, & Silk, Joseph. 2021. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, **38**(15), 153001.
- Event Horizon Telescope Collaboration. 2019. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *ApJL*, **875**(1), L1.
- Faraoni, Valerio, & Jacques, Audrey. 2007. Cosmological expansion and local physics. *Phys. Rev. D*, **76**(Sep), 063510.
- Friedmann, A. 1922. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, **10**(Jan.), 377–386.
- Frion, E., Pinto-Neto, N., Vitenti, S. D. P., & Perez Bergliaffa, S. E. 2020. Primordial magnetogenesis in a bouncing universe. *Phys. Rev. D*, **101**(May), 103503.
- Frolov, Valeri P., & Zelnikov, Andrei. 2011. *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford: Oxford University Press.
- Gutiérrez, E. M., Vieyro, F. L., & Romero, G. E. 2017. Primordial black hole evolution in two-fluid cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **473**(4), 5385–5392.
- Hawking, S. W. 1967. The Occurrence of Singularities in Cosmology. III. Causality and Singularities. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **300**(1461), 187–201.
- Hawking, S. W. 1974. Black hole explosions? *Nature*, **248**(5443), 30–31.
- Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., & Lasenby, A. N. 2006. *General relativity: An introduction for physicists*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hubble, E. 1929a. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, **15**(Mar.), 168–173.

- Hubble, Edwin. 1929b. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, **15**(3), 168–173.
- Lemaître, G. 1927. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **47**(Jan.), 49–59.
- Linde, Andrei. 2005. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. London: CRC Press.
- Longair, Malcolm S. 2008. *Galaxy Formation*. Astronomy and Astrophysics Library. Heidelberg, Germany: Springer.
- MacGibbon, Jane H., & Carr, B. J. 1991. Cosmic Rays from Primordial Black Holes. *ApJ*, **371**(Apr.), 447.
- Misner, Charles W., & Sharp, David H. 1964. Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse. *Phys. Rev.*, **136**(Oct), B571–B576.
- Novello, M., & Bergliaffa, S. E. Perez. 2008. Bouncing Cosmologies. *Phys. Rept.*, **463**, 127–213.
- Peter, Patrick, & Pinto-Neto, Nelson. 2008. Cosmology without inflation. *Physical Review D*, **78**, 063506.
- Peter, Patrick, Pinho, Emanuel J. C., & Pinto-Neto, Nelson. 2007. Noninflationary model with scale invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, **75**(2).
- Planck Collaboration. 2020. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *A&A*, **641**(Sept.), A6.
- Pérez, Daniela. 2023. Dark matter and dark energy vs modified gravity. An appraisal. *Pages 147–198 of: Vasconcellos, César Augusto Zen, Hess, Peter Otto, & Boller, Thomas (eds), New phenomena and new states of matter in the Universe: from quarks to Cosmos*. Singapur: World Scientific Co.
- Pérez, Daniela, & Romero, Gustavo E. 2022. Survival of black holes through a cosmological bounce. *Physical Review D*, **105**(10).
- Romero, G. E. 2013. Adversus singularitates: The ontology of space-time singularities. *Foundations of Science*, **18**, 297–306.
- Romero, Gustavo. 2018. *Scientific Philosophy*. Cham: Springer.
- Romero, Gustavo E., & Vila, Gabriela S. 2014. *Introduction to Black Hole Astrophysics*. Vol. 876. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Ryden, Barbara. 2016. *Introduction to Cosmology*. 2 edn. Cambridge: Cambridge University Press.

- 
- Schutz, Bernard. 2022. *A First Course in General Relativity*. 3 edn. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schwarzschild, Karl. 1916. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Jan., 189–196.
- Shapiro, Stuart L., & Teukolsky, Saul A. 1983. *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. Hoboken: John Wiley Sons, Ltd.
- Weinberg, Steven. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons.
- Zel'dovich, Ya. B., & Novikov, I. D. 1967. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model. *Sov. Astron.*, **10**(Feb.), 602.