Problemas de máximos y mínimos con Geo-Gebra

Ferreyra, Nora - Scarímbolo, M. Daniela - Rechimont, Estela - Parodi, Carlos
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
noraf@exactas.unlpam.edu.ar danielascarímbolo@hotmail.com

Resumen

El estudio de máximos y mínimos se realizó desde tiempos muy remotos. Tanto los griegos como los romanos se ocuparon de cuestiones de esta naturaleza.
La confrontación de ideas, el hábito de construir argumentaciones y formular conjeturas como paso previo a la demostración, son actividades fundamentales en el aula de matemática, por ello consideramos útil plantear problemas y promover el uso de recursos tecnológicos que puedan contribuir al logro de tales competencias.
En este trabajo se analiza la temática de las líneas de longitud mínima en el plano, presentes en problemas resolubles mediante razonamientos que involucran solamente conocimientos de Geometría Elemental, incorporando un tratamiento didáctico desde la transposición.

Para ello consideramos el Problema de Steiner que consiste en determinar el sistema de caminos de mínima longitud total que une tres ciudades distintas. Proponemos su resolución desde distintos marcos que exigen diversos conocimientos.

Palabras claves: Steiner, GeoGebra, distancias, problemas, matemática.

Introducción

Es sabido que la menor distancia entre dos puntos del plano es el segmento de recta por ellos determinado. También son conocidos resultados referidos a la mayor área encerrada por curvas planas de igual longitud, que corresponde a la circunferencia y al volumen máximo entre todas las superficies cerradas de igual área que corresponde a la esfera.
El estudio de máximos y mínimos se ha realizado desde tiempos muy remotos. Tanto griegos como romanos se ocuparon de problemas de esta naturaleza.
Así, los griegos realizaron un tratamiento acerca de trayectorias mínimas que está involucrado en el estudio sobre la reflexión de la luz. Euclides (330-270 a. C.) en su obra la “Óptica” hace referencia a que la luz atraviesa el espacio en línea recta, y en la obra “Catóptrica” (Teoría de los espejos) da la *ley de la reflexión*. Pasaron alrededor de 400 años del enunciado de Euclides, hasta que Herón (100 d. de C.) vio que a la ley de reflexión subyacía un hecho más importante, afirmando que la ley de reflexión se sigue del principio de que *la luz ha de tomar siempre el camino más corto.*
Los griegos también investigaron la reflexión en espejos curvos o en líneas curvas como las secciones cónicas.
Por su parte, los romanos se interesaron por este problema de máximos y mínimos y ello se manifiesta en la red vial que construyeron para enlazar distintas provincias de su Imperio. Los hermanos Bernoulli en el año 1697 elaboraron la teoría matemática de las líneas de longitud mínima contenidas en una superficie.
En el siglo XVII comienza a considerarse la teoría general de los valores extremos, máximos y mínimos, y ella se ha convertido en uno de los principios sistemáticos de la ciencia. Fermat inicia su trabajo en el cálculo diferencial al comenzar a estudiar las cuestiones de máximos y mínimos a partir de métodos generales. En el siglo siguiente ampliando el campo de aplicación de estos métodos aparece el *cálculo de variaciones*.

Las leyes de la naturaleza y los problemas particulares que planteaban encontraban su expresión y una forma de resolución en el principio del mínimo.
Analizaremos la temática de las líneas de longitud mínima en el plano, presentes en problemas resolubles mediante razonamientos que involucran solamente conocimientos de Geometría Elemental, con el aporte del software GeoGebra para experimentar, conjeturar y proponer enunciados generales.
En el aula de matemática, la formulación de este tipo de problemas, cuyos análisis y solución no son triviales, promueve la discusión y estimula la argumentación, entendiendo ésta como una actividad de naturaleza discursiva, un medio para convencer, a uno mismo o a quienes escuchan, cuyo papel es fundamental en la construcción del conocimiento.

El software GeoGebra constituye un recurso didáctico tecnológico para la enseñanza, de acceso libre, propuesto principalmente para desarrollar la matemática en los niveles previos al universitario. La barra de herramientas facilita el manejo a través de comandos sencillos, también presenta la posibilidad de visualizar simultáneamente los registros gráfico y algebraico de las construcciones efectuadas, como por ejemplo, puntos, segmentos, cónicas, etc. Si fuera necesario efectuar una modificación posterior, o recordar los pasos de una construcción efectuada con anterioridad se puede recurrir al ítem Protocolo de la Construcción para examinar los pasos realizados en dicha construcción o resolución de un problema.
A partir de la exploración dinámica de una situación problemática dada, es posible identificar regularidades, definir parámetros, imponer condiciones y seleccionar tareas con el fin de producir una conjetura, un enunciado y finalmente probarlo o justificar su construcción.
Muchos son los problemas sobre máximos y mínimos que se han resuelto a lo largo de la historia. Presentamos una serie de este tipo de problemas cuyo estudio y resolución pueden efectuarse usando la temática de máximos y mínimos utilizando elementos de Geometría Elemental y apoyándose en el software GeoGebra. Enunciamos los primeros sin presentar su demostración, que no resulta complicada.

1) *Triángulo de área máxima dados dos lados:*

Dados dos segmentos A y B, determinar el triángulo de área máxima que tenga esos segmentos por lados.

2) *Problema de Herón del rayo luminoso*

Dada una recta L y dos puntos p y q en el mismo semiplano respecto de L ¿Para qué punto r de L es $pr + rq$ la trayectoria mínima de p a q tocando a L? Este problema puede usarse para resolver:

- Dados el área A y un lado C de un triángulo determinar éste de modo que la suma de los otros dos lados sea mínima.
- Hallar el triángulo de área máxima conocido un lado y suma de los otros dos.

3) *Generalización incluyendo dos rectas*

Dadas dos rectas L y M y dos puntos p y q situados en uno de los ángulos agudos que ellas determinan, encontrar la trayectoria mínima de p a L, de aquí a M y después a q.

4) *Distancias extremales a una curva dada*

Dada una curva C, determinar las distancias mínima y máxima de un punto p a ella.

5) *Problema del triángulo de Schwarz*

Dado un triángulo acutángulo, hallar un triángulo inscrito en él cuyo perímetro sea el mínimo posible.

6) *Problema de Steiner*

Determinar el sistema de caminos de mínima longitud total que une tres ciudades distintas.

Problema de Steiner

De todos los problemas enunciados presentaremos el trabajo propuesto sobre el Problema de Steiner, el mismo nos ha parecido sumamente interesante, por la variedad de recursos matemáticos y didácticos que su resolución implica.

Jacob Steiner era un notable profesor de la Universidad de Berlín, y fue a principios del siglo XIX cuando estudió este problema. Como fue expresado antes, el mismo consiste en hallar el sistema de caminos de mínima longitud total que une tres ciudades distintas.

Si llamamos A, B, C a las tres ciudades, debemos hallar el punto P tal que la suma de los caminos $AP + BP + CP$ sea mínima, suponiendo que la región es llana y los caminos son rectilíneos.

Matemáticamente se puede suponer que las ciudades son puntos del plano, por lo que el problema se reduce a determinar el punto P tal que la suma de los segmentos que lo unen con los tres puntos dados sea mínima (ver Figura 1).

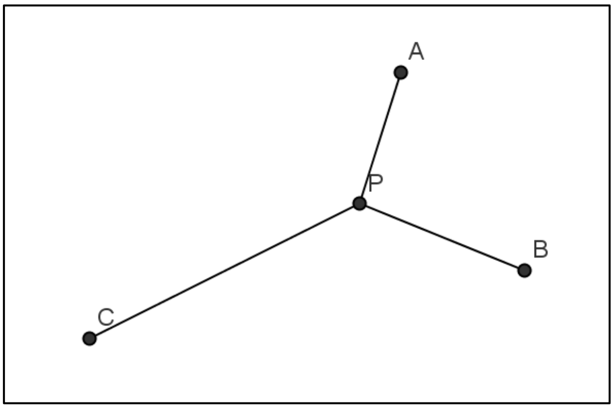

Figura 1

Steiner demostró que si todos los ángulos interiores del triángulo ABC son menores de 120°, P es el punto desde el cual cada uno de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ subtiende un ángulo de 120°. Si algún ángulo del triángulo es mayor de 120°, P coincide con el vértice correspondiente a dicho ángulo.

Experimentación

Se propone el uso de GeoGebra para representar tres puntos cualesquiera en el plano y conjeturar sobre la ubicación del punto buscado P.

Puesto que el software ofrece la posibilidad de calcular la longitud de los segmentos y definir la suma de tales valores, es posible aproximar la posición en la cual se presenta el mínimo. En las Figura 2 y Figura 3 se muestra la pantalla de la computadora con dos ejemplos de producción en la búsqueda de los puntos P y Q, soluciones de caminos mínimos entre los puntos A, B, C y E, F, G respectivamente.

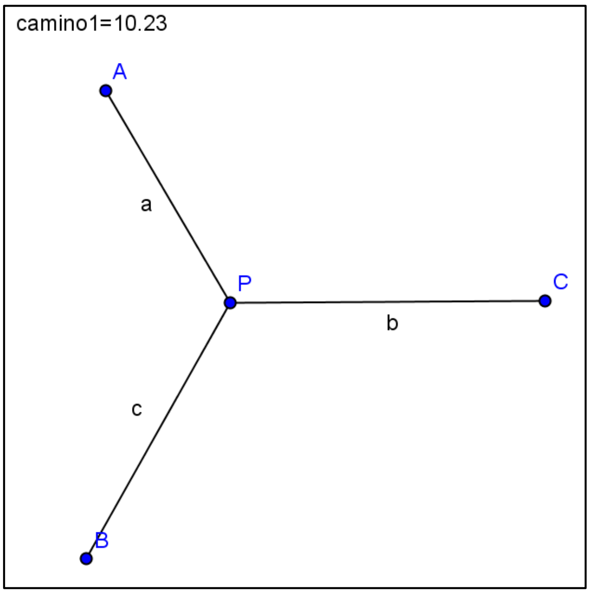

Figura 2

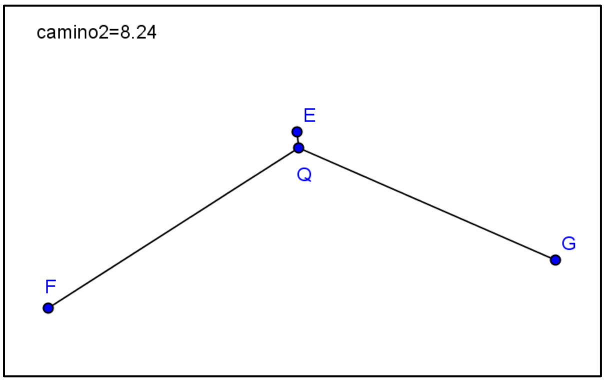

Figura 3

La posibilidad de definir los puntos iniciales facilita hallar la primera conclusión respecto de tres puntos que forman un triángulo con

uno de sus ángulos interiores mayor a 120°. El primer hallazgo respecto de esta ubicación particular abre la discusión sobre las propiedades de tales triángulos y genera una primera prueba del enunciado.
Al analizar la ubicación de los puntos iniciales formando triángulos acutángulos es evidente que el punto buscado está en el interior. En esta situación resulta conveniente modificar el problema y considerar que el punto buscado está a una distancia dada de uno de los puntos iniciales. En ese caso sólo se trata de minimizar la suma $AP+BP$. La formulación de la conjetura se motiva nuevamente mediante el uso del software (ver Figura 4), ya que permite mover libremente el punto P sobre la circunferencia dada y analizar los diferentes valores de la distancia.

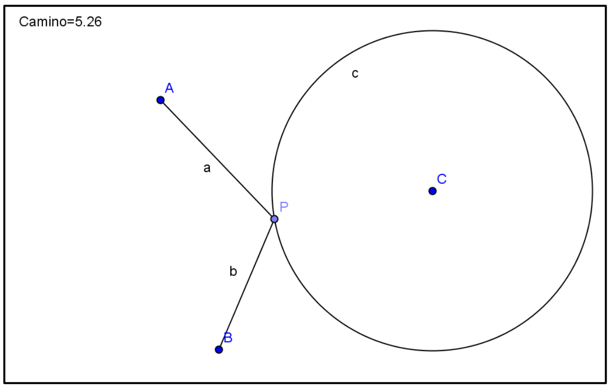

Figura 4

A partir de la consideración de este problema particular, surge la idea del problema inicialmente tratado y el trabajo sobre los ángulos formados.
Creemos que en la resolución presentada, resulta fundamental la característica dinámica del software, puesto que es poco probable que de una figura estática, sobre el papel, surjan las conjeturas que conducen a la solución.

A continuación, ya conociendo la característica del punto se plantea un nuevo problema, que es determinar el punto, esto es, precisar sus coordenadas o efectuar la construcción con regla y compás (recordemos que las soluciones halladas en la búsqueda anterior se produjeron a partir de arrastrar el punto con la herramienta “Elige y Mueve” del GeoGebra).

Determinación del punto

Este trabajo puede realizarse a través de distintos marcos, con el empleo de distintas técnicas que permitan, en su aplicación, relacionar diversos contenidos.

Problema:
Dados tres puntos A, B y C tales que ninguno de los ángulos del triángulo ABC es mayor de 120º, se desea determinar el punto P en el interior de ABC de manera que los ángulos APB, BPC y CPA resulten todos de amplitud igual a 120º.

Resolución Geométrica
Utilizando la propiedad del ángulo inscrito en una circunferencia podemos afirmar que el lugar geométrico de los puntos *P* tales que el ángulo *APB* mide 120º es un arco de circunferencia cuyos extremos son *A* y *B*, análogamente el lugar geométrico de los puntos *P* tales que el ángulo *APC* mide 120º es un arco de circunferencia cuyos extremos son *A* y *C*. La determinación con regla y compás de tales arcos y posteriormente su intersección es una tarea sencilla y que sólo requiere conocimientos elementales:
Trazamos por el punto A una semirrecta *R* cualquiera que intercepte al segmento *BC*. En el semiplano de borde *R* que contiene a *B*, trazamos la semirrecta *OZ* de manera que el ángulo *AOZ* mida 120º. Construimos una semirrecta paralela a *OZ* que pase por *B*, y obtenemos de esta forma el ángulo *ATB* que mide 120º.
A través del trazado de la mediatrices de los respectivos segmentos, construimos la circunferencia que pasa por los tres puntos. Como todos los puntos ubicados en el mismo arco son vértices de ángulos de igual amplitud cuyos lados pasan por los extremos del arco, el punto P buscado, estará en ese arco de circunferencia.

Análogamente determinamos el arco de circunferencia que pasa por *A* y *C* y subtiende un ángulo de 120º.
El punto *P* buscado es la intersección de ambas circunferencias (distinto del punto *A*).
Efectuar esta construcción con GeoGebra implica la revisión y uso de técnicas y propiedades. Mostramos la pantalla solución (Figura 5), donde sólo se muestran los tres puntos iniciales y el punto solución y también la pantalla sin objetos ocultos (Figura 6), donde se aprecia el trabajo previo.

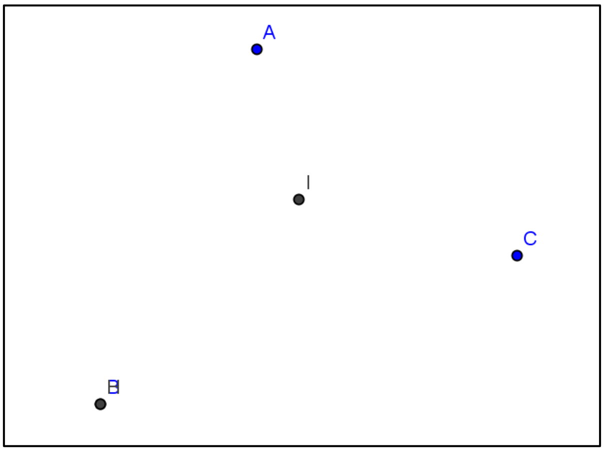

Figura 5

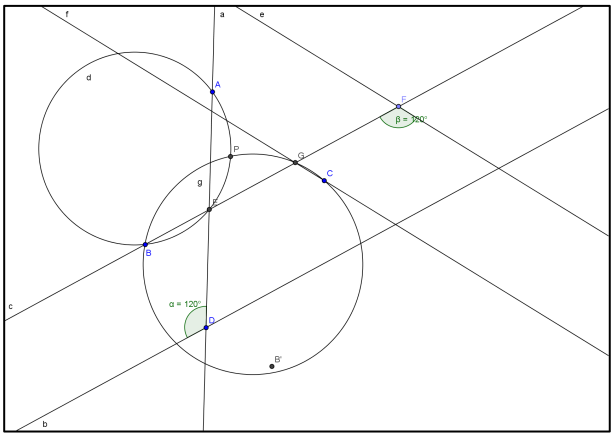
Figura 6

Resolución Analítica
Ubicamos los puntos A, B, C en un sistema de ejes coordenados con origen en A y de manera que B pertenezca al eje de las abscisas. Tendremos entonces $A = (0,0)$, $B = (a,0)$ y $C = (b,c)$. Considerando el punto buscado P de coordenadas (x, y), tomamos las rectas *AP*, *PB* y *PC* y analizamos sus pendientes de forma tal que los ángulos que ellas determinan dos a dos resulten de 120º.
Utilizando la fórmula de la tangente del ángulo determinado por dos rectas que se cortan y aplicándola a los ángulos *APB* y *APC* obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\sqrt{3} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{c-y}{b-x}}{1 + \frac{y(c-y)}{x(b-x)}}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\frac{-y}{a-x} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x(a-x)}}$$

Luego de operar convenientemente obtenemos el siguiente sistema que nos permitirá determinar efectivamente el punto *P*.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x(b-x) + \sqrt{3}y(c-y) = xc - yb \\ \sqrt{3}(ax - x^2 - y^2) = ay \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones de este sistema representa la circunferencia mencionada en la resolución geométrica.
Es interesante observar que un problema de sencilla resolución geométrica puede resultar algebraicamente dificultoso por los numerosos cálculos que se presentan en su desarrollo. En este momento, para simplificar el trabajo recurrimos al software Matemática que nos permitió resolver el sistema y obtener así las coordenadas del punto *P* buscado, por una cuestión de espacio, sólo indicamos la primera de las coordenadas:

$$x = \frac{a\,(3ab + 3b^2 + \sqrt{3}ac + 4\sqrt{3}bc + 3c^2)}{6(a^2 - ab + b^2 + \sqrt{3}ac + c^2)}$$

Consideraciones Didácticas

El saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones para convertirlo en apto como objeto de enseñanza. Este conjunto de transformaciones constituye la *Transposición Didáctica*.

- La noción de *máximos y mínimos*, en cuanto a distancias, se utilizó desde la antigüedad para resolver problemas variados (caso de griegos y romanos, como fuera expresado en la introducción de este trabajo).
- El concepto matemático de *máximos y mínimos* se pone ya de manifiesto en los trabajos de Herón de Alejandría, sobre la reflexión de la luz continuando los estudios al respecto y en el siglo XVII se considera la teoría general de estos valores extremos, con Fermat -entre otros- con el Cálculo Diferencial, apareciendo luego el Cálculo de Variaciones.
- El tratamiento didáctico del tema en el aula variará según: la institución, el grupo de alumnos y el docente encargado de impartir los saberes correspondientes.

En general, el Cálculo es la herramienta a la que habitualmente se apela, para resolver matemáticamente problemas de este tipo, sin embargo, al tratarse de situaciones que pueden plantearse en diversos niveles no siempre se cuenta con el apoyo de la noción de derivada para la determinación de máximos y mínimos.

Nuestra propuesta de tratamiento de este problema particular, es con herramientas de Geometría Elemental, de Álgebra y el apoyo de un software adecuado.

Bibliografía

[1] COURANT, R., ROBBINS, H., 1964, *¿Qué es la matemática?*, Madrid, Aguilar S.A. de Ediciones.

[2] HILDEBRANDT, S., TROMBA, A., 1990, *Matemática y Formas Optimas*, Barcelona, Prensa Científica S.A.

[3] LEHMANN, CH., 2000, *Geometría Analítica*, México, D.F., Editorial Limusa S.A.

[4] CHEVALLARD, Y., 1991, *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Bs. As., Aique Grupo Editor S. A.