El aprendizaje de los conceptos matemáticos en entornos virtuales

Milevicich, Liliana y Lois, Alejandro
Facultad Regional General Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional
liliana_milevicich@yahoo.com.ar; alelois@hotmail.com.ar

Resumen

La incorporación de la educación a distancia a la enseñanza superior requiere cambios profundos. En el presente trabajo nos focalizamos en analizar los aspectos distintivos de la enseñanza de la Matemática en entornos virtuales.
Por una parte, las condiciones en las cuales se producen la formación y el afianzamiento de los conceptos matemáticos, y por la otra, las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

Palabras claves: Conceptos matemáticos – representaciones semióticas - propuestas didácticas – uso de CAS

Objetivos de la comunicación

En general:
Analizar los aspectos distintivos de la enseñanza de la Matemática en entornos virtuales.
En particular:
Evaluar las condiciones en las cuales se producen la formación y el afianzamiento de los conceptos matemáticos.
Reflexionar acerca de las características de nuevos modelos adecuados de intervención didáctica y la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

Introducción

Tras el entusiasmo inicial, pareciera que el e-learning no ha respondido a las expectativas que había creado en su inicio. Si bien esta aseveración es públicamente desmentida por muchas instituciones directamente implicadas, probablemente por el volumen de negocios que rodea al e-learning; las expectativas sobre matriculación y sobre porcentajes de alumnos que finalizan sus estudios, no se han cumplido.
Bartolomé Pina (2004), especialista en educación virtual de la Universidad de Barcelona, afirma que las más importantes iniciativas de e-learning en España y en algunos de los más importantes centros de estudio latinoamericanos, sufrió un duro revés. Así lo confirman las empresas agrupadas en la Asociación de Proveedores de e-Learning (APeL), que venden infraestructuras, contenidos y servicios, y suponen el 70% del mercado, explicando que: *"Existe una crisis financiera en Educación Superior que está forzando recortes en los programas y la salida de algunos estudiantes de la educación post-secundaria..."*
Sin embargo, analizando con mayor profundidad la cuestión, Cabero afirma que: *"Para ser precisos no se puede hablar de un fracaso del e-learning sino de algunas de las expectativas que había creado. En realidad el e-learning fracasa también por las aportaciones de los "mesiánicos" de turno, que olvidan, refiriéndose al profesor y a las escuelas, que tales transformaciones de roles no supone que vaya a desaparecer su figura y de la escuela, sino que tendrá que transformar su rol tradicionalmente desempeñado."* (Cabero, 1996).
En ese sentido, Pascual hace referencia a algunos problemas específicos del e-learning: *"El e-learning también comporta unas dificultades e inconvenientes: la ausencia de contacto humano dificulta sentirse parte de una comunidad educativa, el elevado grado de motivación necesaria para seguir un curso on-line, etc..., que deben superarse."* (Pascual, 2003).
Consideramos, en consonancia con Pascual, que el problema se puede estudiar desde dos perspectivas: las dificultades que genera el

modelo subyacente y los defectos generados por un economicismo dominante en muchos proyectos.
Desde el punto de vista educativo, nos preocupa ahondar sobre el modelo subyacente, donde, basados en el análisis de los proyectos de e-learning, nos encontramos ante una formación a distancia potenciada por la tecnología. A pesar de lo que se especula, tanto la teoría como la práctica siempre nos muestran una formación basada en e-Learning que no es sino un curso a distancia con ordenadores e Internet.

Desarrollo

La incorporación de la educación a distancia a la enseñanza superior requiere cambios profundos, una readaptación estructural global a las nuevas condiciones y al nuevo contexto. En esta dinámica de cambio y adaptación hay varios puntos de partida:

a) la estructura organizativa de las unidades académicas, la gestión de carreras y de unidades de servicios a distancia con su correspondiente estructura tecnológica y pedagógico-didáctica,
b) la gestión del conocimiento, tanto conocido como por generar,
c) el desarrollo de las adaptaciones curriculares necesarias,
d) el desarrollo de modelos fundamentados de intervención didáctica,
e) la transformación de la función de los docentes universitarios, y
f) la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

En relación con los ítems d) y e) y f), observamos que los cambios se están operando, aunque lentamente; incluso en aquellas instituciones de educación superior donde el modelo de educación a distancia se ha comenzado a implementar hace algunos años. También es cierto que la adopción del modelo no ha sido acompañada por una reestructuración en las currículas ni en la capacitación de los docentes. En muchos casos, se siguen conservando las propuestas didácticas de las clases presenciales, adaptadas a formato electrónico.

Aspectos distintivos de la enseñanza de la Matemática en entornos virtuales

En la enseñanza de la Matemática, la problemática referida a la transformación de las propuestas didácticas, requiere, a nuestro juicio, un profundo análisis sobre el modo en que se lleva a cabo la conceptualización.
Los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos, sino a través de sus representaciones semióticas, externas a los propios objetos. Para la formación de la representación de un objeto, ya sea gráfica, numérica, algebraica, analítica o verbal, se hace necesario seleccionar un conjunto de símbolos dentro de un sistema semiótico que permita representar de manera adecuada las características principales del objeto. Esta actividad incluye la asignación de nombres, la descripción verbal, la construcción de imágenes o esquemas del objeto, o bien la codificación de relaciones o propiedades pertinentes a una transformación del mismo.
En los términos de la Teoría de Duval es importante analizar el papel que juegan estas representaciones en la construcción del conocimiento matemático (Duval, 1999 y 2000). Para la formación de un concepto se requiere un cierto número de experiencias que compartan elementos comunes, y en ese sentido la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, de al menos dos de ellos: numérico y gráfico, gráfico y algebraico, verbal y analítico, etc.
Los aprendizajes básicos en la Matemática deberían apostar a la coordinación de los diferentes registros de representación organizados acorde al tipo de concepto a aprender. Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los alumnos organizar mejor su conocimiento. Más aún, Robert y Speer (2001) lo consideran una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje.
Cabe observar que, la enseñanza de las Matemáticas, sobre todo en la educación

superior, se organiza habitualmente como si la coordinación de los diferentes registros de representación utilizados, se efectuara rápida y espontáneamente.

La enseñanza de la Matemática en entornos virtuales debiera atender, de modo particular, a las condiciones en las cuales se produce la formación de conceptos. Esto es:

a) El recurso que genera la representación: pizarra interactiva, computadora, videograbadora, cámara fotográfica, calculadora, etc.

b) La relación entre la representación y el objeto representado, de tal modo que posibilite el acceso al objeto representado.

c) Las razones por la que el uso de la representación es necesario.

En cuanto al afianzamiento de los conceptos, fundados sobre la resolución de problemas, cobra gran importancia la noción de *transferencia*, entre la representación internas y sus conexiones a otras representaciones. Este proceso de transferencia se realiza, de manera simultánea, con una serie de etapas, propuestas por Polya, que permite circunscribir más el problema y contribuir al progreso en la solución del mismo (Polya, 1985).

De manera simultánea a las actividades de:

§ rescribir el problema en las propias palabras,
§ tomarse un tiempo para explorar, reflexionar, conjeturar, etc.,
§ abordar el problema con números simples,
§ analizar el problema desde varios ángulos,
§ revisar la propia lista de estrategias para ver si una (o más) pueden servir como punto de partida,
§ cambiar de estrategia, cuando no se logran progresos,
§ revisar lo realizado en más de una oportunidad y analizar, y finalmente,
§ determinar cuál fue el paso clave en la solución
§ explicitar la solución escrita con suficiente claridad de tal modo que sea posible entenderla tiempo después;

se hace necesario guiar la conversión entre distintas representaciones y los procesos de revisión a medida que se avanza en el trabajo de solución. (Milevicich y Lois, 2008a; Milevicich, 2008b).

El trabajo sistemático de afianzamiento de los conceptos deja de tener vigencia en un entorno de educación a distancia. Investigaciones realizadas (Andrés, 2000; Ramsden, 2003) y nuestra propia experiencia (Milevicich y Lois, 2008c), sobre el modo en que los alumnos trabajan sobre el material de aprendizaje, autorregulan y organizan su tiempo de estudio, nos permiten sostener que éstos son capaces de seleccionar una amplia gama de estrategias: algunos trabajan sistemáticamente acorde con la guía dada por sus docentes, otros dejan las actividades de lado e inician la lectura de nuevos capítulos, intentando abordar conceptos sin haber realizado la fijación de los conceptos actuales; otros comienzan con una revisión de lo ya aprendido; algunos se centran en los tópicos que les resultan más complejos, tratando de establecer relaciones con lo conocido y entendido; también en varias oportunidades, buscan material adicional, le envían un mensaje a un compañero por celular o chat; otros saltean todas las secuencias previstas e intentan resolver los test de autocomprobación.

Este breve análisis debiera conducirnos a una reflexión profunda sobre los tres tópicos planteados al comienzo de este trabajo: *el desarrollo de modelos adecuados de intervención didáctica, la transformación del rol del docente, la transformación en los modos de apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.*

Creemos que las plataformas de e-learning, ponen a disposición de los docentes una gran variedad de herramientas: elaboración de ejercicios de autocomprobación con textos explicativos, construcción de actividades auto-verificables en formatos distintos, elaboración de evaluaciones de modalidad interactiva, incorporación de ayuda on line, enlaces WEB, etc.

También el uso de un CAS contribuye, de modo que el alumno se libera al alumno de la realización de cálculos algebraicos, con lo que se ofrece mayores oportunidades para concentrarse en la estrategia de resolución de problemas y en la construcción de conceptos. El alumno puede pensar en el siguiente paso del proceso de resolución de un problema sin preocuparse de la ejecución real, lo que en un entorno de lápiz-papel requiere atención y puede originar errores distractores. La incorporación de un CAS afecta la relación entre conceptos y habilidades y permite resecuenciar los conceptos y las habilidades. Drijvers (2003).

Un error bastante común consiste en creer que la creación de un aula virtual, la secuenciación de contenidos y actividades, la apertura de foros de discusión y la entrega pautada de tareas; es la solución para lograr un buen aprendizaje. A nuestro juicio, la incorporación de la metodología de Educación a distancia en Matemática, requiere de un entorno de aprendizaje que permita interactuar con las representaciones de los objetos matemáticos de manera sencilla, esto es: que el alumno pueda obtener representaciones gráficas interactivas, tablas con datos, identificación de los datos relevantes, a partir de la interacción entre los gráficos y los datos numéricos; que los ejemplos proporcionados ofrezcan una variedad de situaciones, que permitan al alumno distinguir las propiedades, ofrecer ejemplos y contrajemplos, que se acompañen generalizaciones con explicaciones verbales, las cuales pueden ser completadas por los propios alumnos.

Presentamos una situación ejemplificadora del entorno antes descripto, referida a la conceptualización del infinito, en los primeros cursos de Cálculo, habitualmente preuniversitarios o en primer año de la carrera.

Para definir la integral de Riemann de una cierta función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, se necesita que el intervalo de integración sea cerrado y acotado y que la función sea continua y este acotada dentro del intervalo. Cuando una de estas dos condiciones no se cumple, se define la integral impropia como una generalización de la integral de Riemann. Este concepto, de múltiples aplicaciones (probabilidades, normas funcionales, transformadas de Fourier, etc.), desde el punto de vista epistemológico, ofrece una gran resistencia a los alumnos universitarios; habitualmente lo aprenden sin darle significado y restringiéndose a cálculos algebraicos y a la aplicación de criterios de convergencia.

La bibliografía más habitual, utilizada en los cursos universitarios, contribuye a que esto sea así. Los libros sobre Cálculo definen la integral impropia, y se apoyan en la definición para analizar, de manera exclusivamente algebraica, la convergencia de algunas integrales (De Simone y García de Turner, 1996; Sadosky y Guber, 1990; Piskunov y Medkov, 1983). En el mejor de los casos, se hace referencia al problema de la convergencia y se afirma, a partir de algunos gráficos, que la integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ no converge, pero la integral de $f(x) = \frac{1}{x^n}$, con n > 1, converge. (Larson, Hostetler y Edwards, 2003; Stewart, 2000, 2003 y 2005; Thomas y Finney, 2005). Esta afirmación se sustenta luego en la definición; sin embargo, la conceptualización no se lleva a cabo, y la utilización del registro gráfico queda inconexo.

Nuestras investigaciones sobre el tema, realizadas con 342 alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería Mecánica, Civil y Eléctrica, de la Facultad Regional General Pacheco, de la Universidad Tecnológica Nacional, quienes habían concluido con la materia Análisis Matemático en una variable, reflejan que el 78 % no puede explicar cuando una integral es divergente y el 92 % no puede asociar la convergencia con el área bajo la curva (en caso de funciones positivas o nulas en el intervalo considerado).

Los resultados de otras investigaciones realizadas (González Martín, 2002) han señalado la reticencia, que parece ser mayor en el nivel universitario, que tienen los alumnos en matemáticas para utilizar el registro gráfico cuando tienen que resolver problemas. Así, Mundy (1987) ha señalado que los estudiantes normalmente sólo tienen una comprensión mecánica de los conceptos básicos del Análisis porque no han alcanzado una comprensión visual de las nociones básicas subyacentes. También se señala que las preguntas no algorítmicas planteadas en el registro gráfico plantean grandes dificultades para los alumnos, incluso muchos no reconocen el registro gráfico como un registro para el trabajo matemático (González Martín y Camacho, 2004).

En los entornos virtuales, la ausencia del registro verbal, es un escollo adicional. Esto es: la explicación del profesor, una analogía referida al concepto en estudio, o bien la relación con otro tema anterior, contribuye a la conceptualización. En ese sentido, es fundamental un entorno de aprendizaje que permita interactuar con las representaciones de los objetos matemáticos mediante representaciones gráficas interactivas, a partir de la interacción entre los gráficos y la manipulación de los datos numéricos.

Volviendo sobre el problema de la conceptualización de la integral impropia, presentamos una secuencia de enseñanza, que puede contribuir a la adquisición de este concepto coordinando los registros gráfico, numérico y algebraico.

Para secuenciar el estudio del comportamiento de las integrales de $f(x) = \frac{1}{x^n}$, en primer lugar, se compararon las integrales $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ para valores de x ≥ 1. Esto hizo que los alumnos se dieran cuenta que, funciones con gráficas muy similares (en particular, cuando se dibujan a mano), pueden tener un comportamiento muy diferente. A partir de un análisis gráfico más exhaustivo, utilizando un CAS, lograron advertir, que tales gráficas son notablemente diferentes. (ver gráficos 1 y 2).

En segundo lugar, se introdujo la interacción con el registro numérico, a partir de tablas que mostraran la evolución de las sumas parciales de las áreas bajo la curva, en cada caso. (ver figuras 1 y 2).

En una etapa posterior y siguiendo los análisis anteriores, los alumnos tuvieron que conjeturar cuándo diverge la integral. La interacción entre ambos registros (gráfico-numérico) permitió a los alumnos asegurar que, para $f(x)$ positiva, si a partir de un cierto valor de x se tiene que: $f(x) \geq k > 0$, entonces la integral será divergente. Esta conclusión, junto con los dos ejemplos anteriores, permitió a los alumnos ver el potencial de la utilización de diferentes registros de representación para concluir la divergencia de una integral dada, así como sus limitaciones para predecir la convergencia, lo que justifica el desarrollo de herramientas más formales.

De este modo, los alumnos comenzaron a desarrollar algunas intuiciones y experiencias sobre este nuevo concepto antes de institucionalizar la definición formal. Cabe aclarar, la importancia de establecer etapas diferenciadas para el aprendizaje de los conceptos, al momento de configurar el curso virtual. Esto es: hasta que el alumno no conteste adecuadamente la guía de preguntas y actividades referidas a la secuencia anterior, el tutor / profesor no debe habilitarlo para seguir adelante con la definición formal y otras actividades que permitan afianzar el concepto.

Con el propósito de avanzar sobre otros conceptos estrechamente relacionados con el anterior, podemos referirnos a los sólidos de revolución sobre áreas infinitas.

El primer ejemplo tridimensional de lo que llamaríamos actualmente una integral impropia convergente data de alrededor de 1643 y es a menudo llamado *la trompeta de Gabriel*, descubierto por Torricelli. Haciendo rotar una semirrecta ($x \geq 1$) de la hipérbola equilátera $y = k/x$ alrededor del eje x, obtenemos un sólido de revolución infinitamente largo que, a pesar de no estar acotado, encierra un volumen finito[1].

[1] Dado su carácter paradójico, este sólido tuvo un gran impacto en la comunidad científica del siglo XVII. En Inglaterra, el matemático John Wallis y el filósofo Thomas Hobbes llevaron adelante una larga discusión sobre este tema. Hobbes no podía aceptar un sólido como éste, con área superficial infinita y un volumen finito, que sin embargo, eran aceptadas sin problemas por Wallis. Mancosu (1996) da detalles de esta polémica y muestra

Las controversias históricas generadas por estos conceptos, nos muestran la dificultad existente para comprender y aceptar este tipo de figuras geométricas, por lo que no debería sorprendernos que los alumnos también experimenten problemas para concebir y aceptar estas figuras (especialmente, si tenemos en cuenta el obstáculo de ligación a la compacidad) (González Martín, 2002).

Volviendo sobre la bibliografía habitualmente utilizada en los cursos de Cálculo, observamos que sólo se estudian los sólidos de revolución sobre áreas finitas.

Creemos que este tipo de problemas, se podrían abordar utilizando herramientas informáticas interactivas que permitan visualizar el área, el sólido de revolución y una sección transversal del mismo, tal como se aprecia en la figura 3, y aproximar el valor del volumen mediante un CAS (ver tabla 1). Los alumnos que realizaron la experiencia, conjeturaron, sin mayores dificultades, que el volumen converge a π.

Conclusiones

La interacción con los diferentes registros de representación semióticos mejora la adquisición conceptual por parte de los alumnos. Cuando se trata de conceptos particularmente resistentes, tal es el caso de aquellos asociados al infinito, o más aún, el caso de volúmenes finitos que encierran áreas infinitas; la utilización de herramientas informáticas interactivas facilita su adquisición, permite una aproximación intuitiva a los mismos (guiada por el docente), contribuye en la conjeturación y obtención de conclusiones.

Tal como sostuvimos al principio, ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los alumnos organizar mejor sus conocimientos.

El aprendizaje de los conceptos matemáticos mediante entornos virtuales, requiere la incorporación de simulaciones, modelos y herramientas de visualización cada vez más sofisticadas, los cuales van a contribuir eficazmente a un aprendizaje de contenidos abstractos o complejos. Por otra parte, este proceso se debe apoyar en la elaboración guías didácticas virtuales e interactivas.

El diálogo que ya no es real, sino a través de documentos hipertextuales, debiera permitir al docente conocer los aprendizajes logrados por el alumno y realizar una devolución sobre sus producciones.

En cuanto *al nuevo rol del docente*, coincidimos con García Aretio (2001) en que es necesario incrementar una investigación que ofrezca pistas y argumentos para la toma de decisiones que refuercen los procesos y buenas prácticas de la enseñanza y el aprendizaje a través de Internet.

No existe, al menos para el aprendizaje de los conceptos matemáticos, el adecuado soporte teórico que suponga una base sólida en la que apoyar procedimientos, estrategias y buenas prácticas de enseñanza / aprendizaje a través de Internet. Para ello se hace preciso abordar vastos y urgentes desarrollos en investigación e innovación de programas con estructuras diferentes a los convencionales sobre cuestiones tales como: cuáles son los objetivos, contenidos y a qué ritmos, cómo establecer las relaciones virtuales ideales entre docentes y estudiantes, cómo planificar las diferentes acciones formativas en entornos virtuales, cómo evaluar los aprendizajes.

En cuanto a *los modos de apropiación de conocimientos*, cada vez se hace más imperiosa la necesidad de dirigir la atención del alumnado hacia tareas de resolución de problemas, hacia la reflexión sobre su progreso, más que orientarlos a recibir información para ser asimilada. Uno de los principales propósitos de un curso virtual, debiera ser no sólo proveer información sino, principalmente, guiar en el proceso y estimular al alumno en la autogestión de sus aprendizajes. Su estructura debiera atender, de manera primordial, las interacciones entre docente-alumno, alumno-alumno, utilizando los diversos recursos. Se trata de un *diálogo*

---

fragmentos de la correspondencia entre ambos, en donde Hobbes afirma que para entender este tipo de figuras "*un hombre no debe ser un geómetra o un lógico, sino que debe estar loco*" *didáctico mediado*, en términos de García Aretio, que tiene lugar a través de los materiales, las experiencias, las retroalimentaciones, autorregulaciones y transferencias.

Las herramientas, por su parte, resultan relevantes en todo el proceso ya que viabilizan los aprendizajes del alumno en el marco de esta modalidad, y el alumno, a su vez, debería desarrollar estrategias para un uso eficiente de las mismas.

Referencias bibliográficas

ANDRÉS, J (2000) *La evaluación educativa, su práctica y otras metáforas.* Barcelona: ICE-HORSORI.

BARTOLOMÉ PINA, A (2004) Blended learning. Conceptos básicos. *Pixel-Bit. Revista de medios y educación.* (23) pp.7-20

CABERO, J. (1996) Redes d comunicación, redes de aprendizaje. Palma: Universitat de les Balears, 299-306. Edutec 95.

DE SIMONE I. y GARCÍA DE TURNER, M. (1996) *Matemática 5*. 5º edición. Buenos Aires: A-Z Editora.

DRIJVERS, P. (2003) *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*, Doctoral Thesis, Freudenthal Institute, Utrecht.

DUVAL, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali. Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

DUVAL, R. (2000) Basic Issues for Research in Mathematics Education, Conferencia Plenaria, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Hiroshima (Japón), 1, pp. 55-69.

GARCÍA ARETIO, L. (2001). *La educación a distancia; de la teoría a la práctica*. Barcelona: Ariel.

González Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia*. Tesis de Maestría, Universidad de La Laguna (España) – sin publicar.

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). What is First-Year Mathematics students' actual understanding about improper integration? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (1), 73-89.

LARSON, R., HOSTETLER, R. Y EDWARDS, B. (2003). 8va edición, España: Mc Graw Hill.

MANCOSU, P. (1996). Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century. Oxford University Press, New York and Oxford.

MILEVICICH, L. y LOIS, A. (2008a) La resolución de problemas de cálculo integral en un entorno informático. En: *Workshop, 11th International Congress of Math Education*, Monterrey, Mexico.

MILEVICICH, L. (2008b) La construcción de los objetos matemáticos del Cálculo diferencial e integral a través de las representaciones semióticas. Taller dictado en el Primer Encuentro de Docentes e Investigadores de Estadística en Psicología. Universidad de Buenos Aires, Noviembre 2008. Consultado (10/02/09) en:
http://www.psi.uba.ar/encuentroestadistica/programa_cientifico/resumenestalleres.php?idtaller=4

MILEVICICH, L Y LOIS, A (2008c). E-multimedia test to explore the backgroud of students, *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Recuperado: Enero, 2009 de: *http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/wg7-c.pdf*

MUNDY, R (1987). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. *Theory, Research and Practice in Mathematics Education – Proceedings* ICME5.

PASCUAL, M. P. (2003). El Blended learning reduce el ahorro de la formación on-line pero gana en calidad. Educaweb, 69. Recuperado: enero, 2010 de:
http://www.educaweb.com/esp/servicios/monografico/formacionvirtual/1181108.asp

PISKUNOV, N. y MEDKOV K. (1983) *Cálculo Diferencial e Integral*. Tomo I.

Traductor
Pie de Imprenta Moscú, Moscú: Mir.
POLYA, G. (1995) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
RAMSDEN, P. (2003) *Learning to teach in Higher education.* 2nd edition. London: Routledge.
ROBERT, A. y SPEER, N. (2001) Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 283-299.
SADOSKY, M. y GUBER, R. (1990) *Elementos de Calculo Diferencial* e Integral. Buenos Aires: Alsina
STEWART. J. (2000) Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. 3ra edición. México: Thomson
STEWART, J. (2003) Cálculo. Conceptos y contextos. 3ra edición. México: Thomson
STEWART, J. (2005) Cálculo. Conceptos y contextos. 5ra edición. México: Cengage
THOMAS, G Y FINNEY, R (2005) Cálculo con geometría analítica. 8va edición, Estados Unidos: Addison Wesly Iberoamérica

Gráficos, Figuras y Tablas

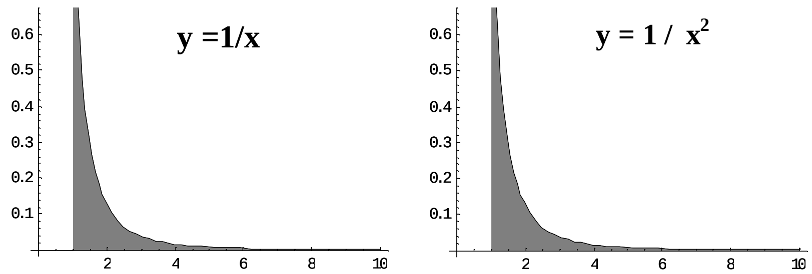


Gráfico1. Corresponde a las funciones $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo [0,10]

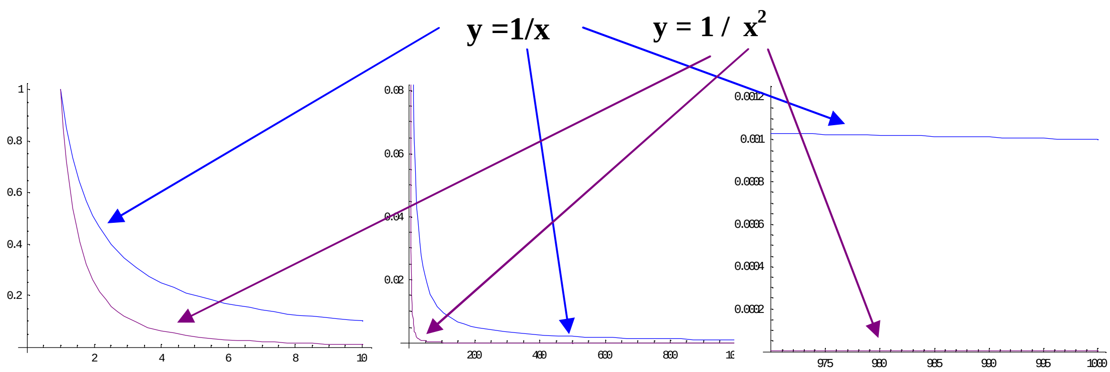
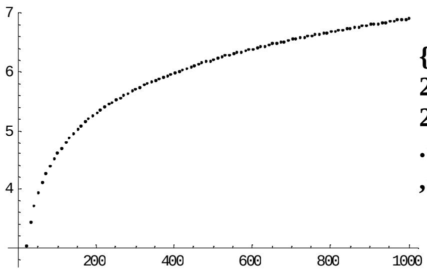
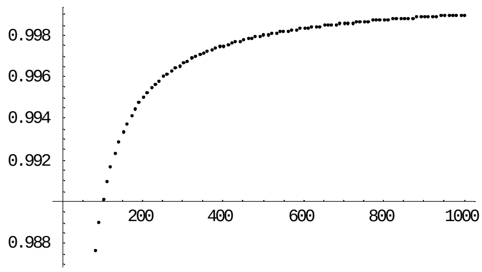


Gráfico 2. Corresponde a las funciones $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo [0,10], [0, 1000] y [700,1000]



{{1.,0.},{51.,3.93183},{101.,4.61512},{151.,5.01728},{201.,5.3033},{251.,5.52545},{301.,5.70711},{351.,5.86079},{401.,5.99396},{451.,6.11147},{501.,6.21661},{551.,6.31173},{601.,6.39859},{651.,6.47851},{701.,6.55251},{751.,6.62141},{801.,6.68586},{851.,6.74641},{901.,6.80351},{951.,6.85751},{1001.,6.90875}}

Figura 1. Análisis gráfico y numérico sobre las sumas parciales correspondiente a la función 1/x entre 1 y 1001 con intervalos de a 50.



{{1.,0.},{51.,0.980392},{101.,0.990099},{151.,0.993377},{201.,0.995025},{251.,0.996016},{301.,0.996678},{351.,0.997151},{401.,0.997506},{451.,0.997783},{501.,0.998004},{551.,0.998185},{601.,0.998336},{651.,0.998464},{701.,0.998573},{751.,0.998668},{801.,0.998752},{851.,0.998825},{901.,0.99889},{951.,0.998948},{1001.,0.999901}}

Figura 2. Análisis gráfico y numérico sobre las sumas parciales correspondiente a la función $1/x^2$ entre 1 y 1001 con intervalos de a 50.

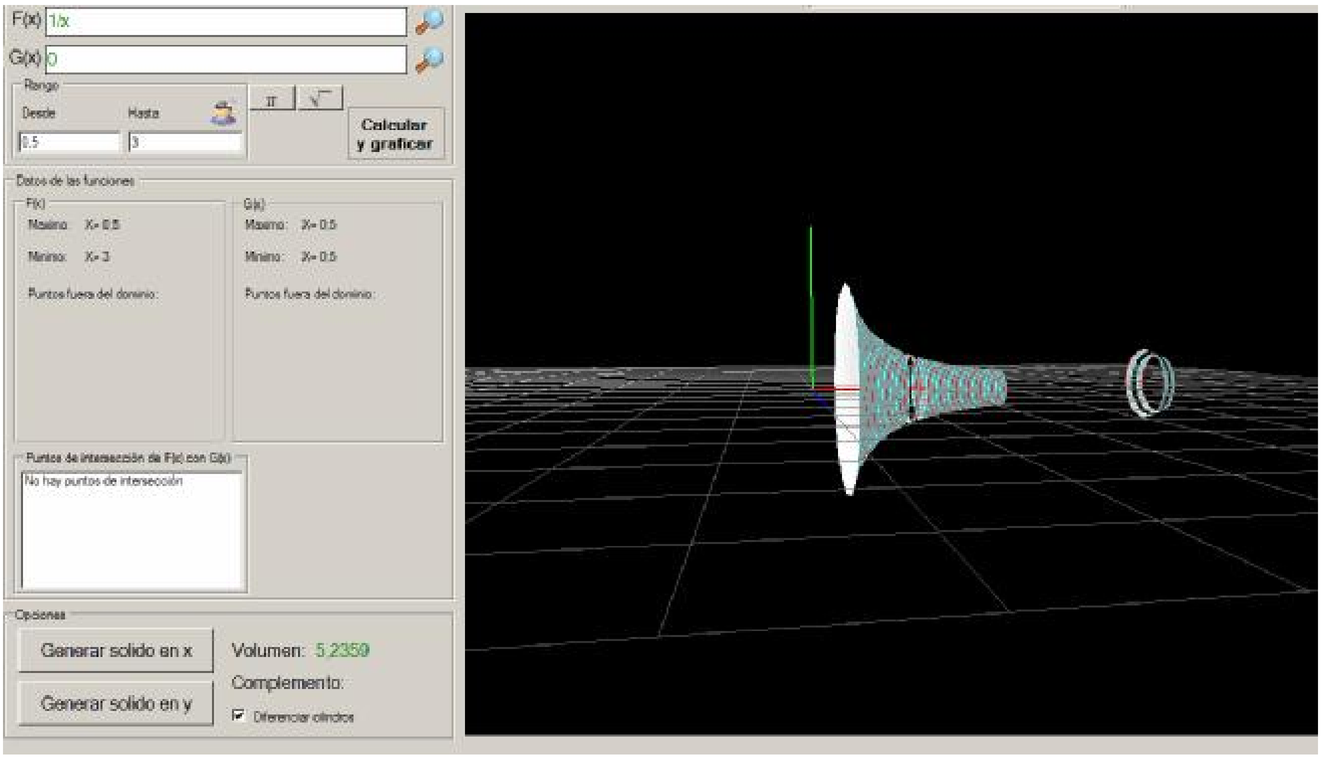


Figura 3. Sólido de revolución para f(x) = $\frac{1}{x}$, conocido como *Trompeta de Gabriel* y sección transversal del mismo.

$$\left\{\{1,0\},\left\{2,\frac{\pi}{2}\right\},\left\{3,\frac{2\pi}{3}\right\},\left\{4,\frac{3\pi}{4}\right\},\left\{5,\frac{4\pi}{5}\right\},\left\{6,\frac{5\pi}{6}\right\},\left\{7,\frac{6\pi}{7}\right\},\left\{8,\frac{7\pi}{8}\right\},\left\{9,\frac{8\pi}{9}\right\},\left\{10,\frac{9\pi}{10}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{11,\frac{10\pi}{11}\right\},\left\{12,\frac{11\pi}{12}\right\},\left\{13,\frac{12\pi}{13}\right\},\left\{14,\frac{13\pi}{14}\right\},\left\{15,\frac{14\pi}{15}\right\},\left\{16,\frac{15\pi}{16}\right\},\left\{17,\frac{16\pi}{17}\right\},\left\{18,\frac{17\pi}{18}\right\},\left\{19,\frac{18\pi}{19}\right\},\left\{20,\frac{19\pi}{20}\right\}\right\}$$

Tabla 1. Tabla de valores que aproximan el volumen del sólido Trompeta de Gabriel, tomando valores sobre la abscisa desde x = 1 hasta x = 20.