

# Las Secciones Cónicas en un ambiente computacional

**Nilda Etcheverry - Marisa Reid - Rosana Botta Gioda**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina

[nildaetcheverry@yahoo.com.ar](mailto:nildaetcheverry@yahoo.com.ar), [mareid@exactas.unlpam.edu.ar](mailto:mareid@exactas.unlpam.edu.ar), [rbotta@cpenet.com.ar](mailto:rbotta@cpenet.com.ar)

## Resumen

En este trabajo describimos una propuesta de actividades realizadas con el uso de software, incluidas en el proceso enseñanza aprendizaje, de algunos contenidos del programa vigente de las asignaturas Matemática y Cálculo, correspondientes a las carreras de Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura en Ciencias Biológicas y Licenciatura en Geología de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

El propósito de este trabajo es conocer las características de las representaciones de conceptos geométricos en entornos computacionales de geometría dinámica y analizar las implicaciones de la componente dinámica de la representación en el aprendizaje.

El uso de software nos lleva a una reflexión en torno a algunos aspectos de la enseñanza de las Cónicas y las características del conocimiento que construye el alumno.

**Palabras claves:** Lugar geométrico, sección cónica, software, exploración.

## Introducción

Sin duda, la aparición de la tecnología ha generado cambios en la manera de plantear y desarrollar las clases de Matemática. Hitt (2003) señaló: “el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta, pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Actualmente, con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de

los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado”.

El propósito de este trabajo es conocer las características de las representaciones de conceptos geométricos en entornos computacionales de geometría dinámica y analizar las implicaciones de la componente dinámica de la representación en el aprendizaje.

En la implementación de las actividades planificadas nos planteamos como objetivo principal indagar el proceso de interacción del estudiante con el software matemático, observando aspectos relacionados con su uso, las representaciones que emplea y el tipo de conjeturas o conclusiones que obtiene. Esto nos aportará argumentos para identificar qué tipo de actividades son las que se tienen que plantear para alcanzar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, así como las ventajas y desventajas que se presentan al trabajar de esta forma.

## Descripción de la experiencia

La experiencia se realizó con alumnos de primer año que cursan Matemática y Cálculo, para las carreras Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura en Ciencias Biológicas y Licenciatura en Geología de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

La actividad propuesta es considerar los conocimientos disponibles que tienen los alumnos acerca de las Secciones Cónicas, y observar como los ponen en funcionamiento.

Con respecto a la tarea del profesor, se quiere caracterizar qué teorías educativas y didácticas fundamentan este tipo de enseñanza, cómo se debería conceptualizar desde un punto de vista matemático, qué variables didácticas se ponen en juego a la hora de concretar actividades

matemáticas en el aula, qué dificultades y posibilidades aporta este tipo de desarrollo en entornos de aprendizaje con soporte del uso de software, y de qué manera se realiza la institucionalización del conocimiento.

A partir del año 2007, durante el desarrollo de las cursadas de las asignaturas antes mencionadas, decidimos elegir un tema para profundizar y abordar su estudio desde distintos puntos de vista. El propósito de abordar un concepto con un mismo grupo de alumnos es quedarnos con lo que consideramos “nos fue mejor” en términos de apropiación de los conocimientos, reflejado en la utilización de los mismos como herramienta para resolver problemas.

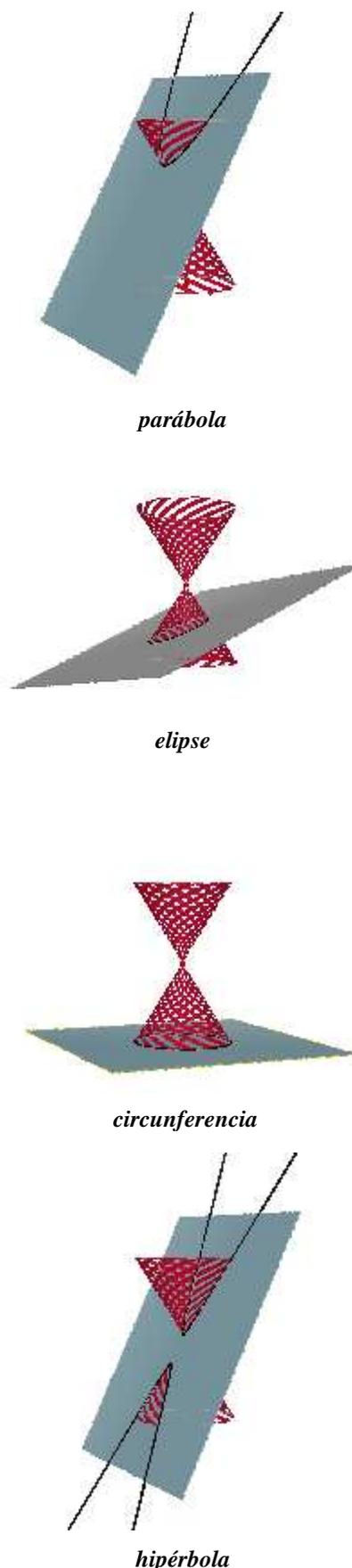
Durante el ciclo lectivo (2009) se eligieron algunos contenidos de las asignaturas para trabajarlos con la ayuda de software y con una asignación de tiempo mayor que años anteriores. En este trabajo mostramos el estudio de las Cónicas centrándonos particularmente en la parábola.

El proceso de enseñanza se basó en la búsqueda de las relaciones relevantes que surgen durante la construcción de una figura, a partir del empleo de un software dinámico.

A continuación relatamos la propuesta de enseñanza-aprendizaje para el acercamiento a las Cónicas:

I) *Abordaje de las Secciones Cónicas, o simplemente Cónicas, como intersección de un plano con un cono circular recto.*

Con el uso del software Cabri 3D se presentan las gráficas de dichas Cónicas (Figura 1) con el objetivo de que las reconozcan, visualicen y analicen las características generales de las mismas. Algunos alumnos ya habían estudiado las Secciones Cónicas en su paso por la escuela secundaria o polimodal definiéndolas, como lo hicieron los griegos, en términos geométricos como intersección de planos y conos.



**Figura 1:** Secciones Cónicas con Cabri 3D

Si se corta una superficie cónica con un plano inclinado, de manera que, por ejemplo, sea paralelo a una generatriz, se obtiene una parábola. La demostración formal de esta y otras afirmaciones permite relacionar parábolas, elipses e hipérbolas como secciones cónicas con sus definiciones como lugar geométrico. Es conocida como teorema de Dandelin.

Al abordarlas de esta manera y que no se queden sólo con la imagen del concepto, es necesario realizar un estudio que permita validar la definición de las Cónicas.

Creíamos que se podía realizar sin demasiadas dificultades, pero no obtuvimos los resultados que esperábamos pues la mayoría de los alumnos no habían trabajado en el espacio y no tenían disponibles los conocimientos a utilizar. Por ejemplo no pudieron ver los elementos de la parábola en el gráfico (Figura 1) por lo que fue muy difícil justificar que la Cónica obtenida era una parábola.

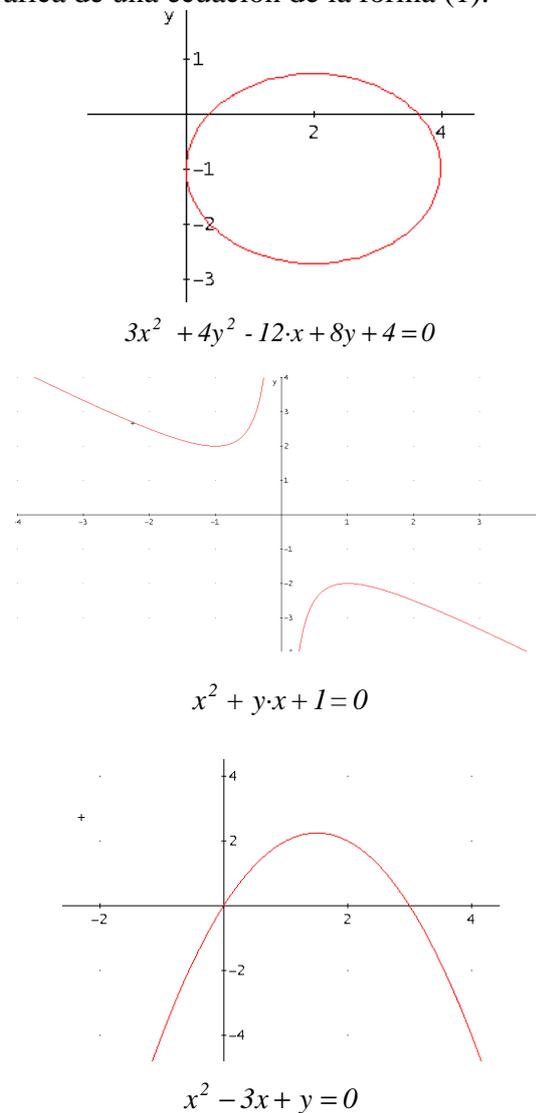
En el caso de los conceptos geométricos la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por diversas representaciones, dibujos o figuras que recuerdan como ejemplos de dicho concepto, junto con el conjunto de propiedades que asocia a ese concepto. Luego una imagen del concepto será correcta cuando el estudiante pueda discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades asociadas sean todas relevantes.

II) *Definiendo algebraicamente las Cónicas mediante la ecuación general de segundo grado en dos variables:*

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  (1)  
donde los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son números reales.

La actividad propuesta tuvo como objetivo estudiar las gráficas de algunas Cónicas, analizando cambios en dichas representaciones a partir de variaciones en los parámetros  $A, B, C, D, E$  y  $F$  en la expresión algebraica. Con el uso del software Derive 6 pudieron visualizar las gráficas (Figura 2) y comprobar que

cualquiera de las Secciones Cónicas es la gráfica de una ecuación de la forma (1).



**Figura 2:** Cónicas con Derive 6

Creemos que faltó otro tipo de trabajo puesto que, si bien los alumnos realizaron un importante trabajo algebraico visualizando distintas gráficas y pudieron deducir propiedades, a la hora de resolver situaciones reales les faltaba relacionarla con la noción geométrica que les permitiera, por ejemplo, ubicar los datos como directriz y foco en un gráfico.

Como docentes de asignaturas de primer año de distintas carreras de la UNLPam cada año, se nos hace más difícil el rastreo de conocimientos previos y detectamos que los conocimientos que se necesitan movilizar no

están disponibles. Por ello fuimos por un tercer abordaje complementario pero que no excluye a los demás, que es la vía por la que cada cónica se define como un conjunto de puntos que satisfacen cierta propiedad geométrica.

### III) Representaciones de la parábola en Cabri Géomètre II Plus a partir de la noción de lugar geométrico.

Entre los conceptos retomados por la geometría dinámica, está el que se refiere al lugar geométrico. Este tema resulta muy interesante y llamativo para los alumnos, pero difícil de trabajar con regla y compás. La geometría dinámica abre nuevas posibilidades de exploración en este campo.

Abordando el tema Secciones Cónicas desde la construcción como lugar geométrico utilizando el software Cabri Géomètre II Plus, intentamos respondernos las siguientes cuestiones:

- ¿Movilizarán los mismos conocimientos que si se aborda sólo algebraicamente?
- ¿Qué impacto tendrá sobre las resoluciones de distintos ejercicios o problemas?

Cada estudiante en el salón de clases hizo sus construcciones geométricas utilizando el programa Cabri Géomètre II Plus.

Aprovechando el potencial del software, nos propusimos trabajar con la noción de lugar geométrico en el plano, como el conjunto de puntos que cumplen con una misma condición o propiedad.

La primera actividad de esta sección fue rastrear los conceptos previos necesarios para llegar a la definición de parábola como lugar geométrico.

El profesor formuló a sus alumnos la siguiente pregunta:

***¿Cuáles son los puntos que están a igual distancia de otros dos dados?***

Es necesario aclarar que en esta actividad el docente utiliza una posibilidad que brinda el software Cabri Géomètre II Plus de ocultar herramientas que por algún motivo no queremos que esté disponible para los alumnos.

a) Se oculta el objeto mediatriz. Usando el software los estudiantes construyeron dos puntos  $A$  y  $B$  y luego midieron la distancia de un punto  $P$ , a cada uno de esos puntos.

Manipulando el punto  $P$  lograron colocarlo en una posición aproximadamente equidistante de  $A$  y  $B$ . Como se pretendía visualizar todos los puntos equidistantes de  $A$  y  $B$ , usando el comando Traza dejaron la huella del punto  $P$  moviéndolo de manera que se cumpliera la condición.

¿Qué forma tiene la huella de  $P$ ? ¿Podría describir exactamente su posición?

b) Se ocultan las herramientas distancia y mediatriz. Los alumnos trazaron dos circunferencias centradas en los dos puntos  $A$  y  $B$  utilizando la herramienta compás y luego trazaron la recta que pasa por los puntos de intersección de ambas circunferencias. Sobre esa recta marco  $P$  y al desplazarlo sobre la recta observaron que cumple con la condición pedida.

El profesor institucionaliza el lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos puntos dados, se llama mediatriz, y es la recta perpendicular al segmento definido por los dos puntos dados y que pasa por su punto medio.

En las construcciones geométricas básicas, aparecen *lugares geométricos* elementales. La idea es trabajar directamente sobre las construcciones y reconocer conjuntos de puntos que cumplan ciertas propiedades y también, a partir de ciertos conjuntos encontrar cuáles son las propiedades que cumplen sus puntos.

Como es usual en los problemas de lugar geométrico necesitamos ubicar gráficamente algunos puntos con el propósito de identificar la forma de la curva solución.

A través de dispositivos tecnológicos es posible seguir el proceso de construcción de muchas áreas de la matemática, a través de algunas de sus representaciones, y acercarnos, dentro de lo que plantea un objetivo didáctico, al concepto matemático. Se puede ver la diferencia entre el trabajo manual (lápiz, papel, regla, compás y transportador) con que se explicaban las clases de geometría, y la rapidez y exposición visual con que responden

las computadoras usando software adecuados para tal finalidad. Se puede considerar que el uso de los software permiten alternativas, de tal manera que la experiencia de aprendizaje sea una de tipo conceptual y no sólo procedimental, esto si se proponen estrategias que conduzcan al fin de tipo conceptual.

La actividad continúa de la siguiente manera:

**Profesor:** *¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de un punto dado y de una recta dada?*

Se propone realizar con Cabri Géomètre II Plus las siguientes construcciones.

✓ *1º Construcción:*

- Traza un punto  $F$  y una recta  $d$ , que no contenga a  $F$ .
- Marca un punto  $A$ , sobre la recta  $d$ .
- Traza una recta  $r$ , perpendicular a la recta  $d$ , que pase por el punto  $A$ .
- Traza el segmento  $FA$  y luego traza su mediatriz,  $m$ .
- Marca el punto de intersección,  $P$ , entre  $r$  y  $m$ .
- Grafica los distintos puntos  $P$  que quedan determinados cuando  $A$  recorre la recta  $d$  (Figura 3).

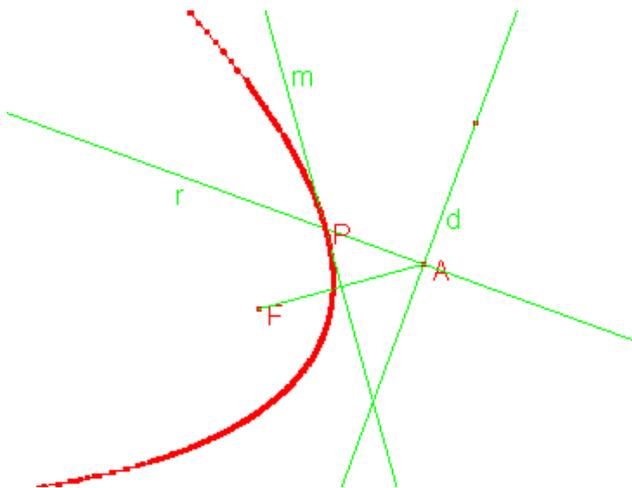


Figura 3

✓ *2º Construcción*

- Traza un punto  $F$  y una recta  $d$ , que no contenga a  $F$ .
- Por  $F$ , traza una recta,  $s$ , perpendicular a  $d$ .

- Llama  $B$  al punto de intersección entre  $s$  y  $d$ .
- Marca  $V$ , punto medio de  $BF$ .
- Marca un punto  $A$ , sobre la semirrecta con origen  $V$  y que pasa por  $F$ , y luego traza la recta  $r$  perpendicular a  $s$  que pase por  $A$ .
- Traza una circunferencia con centro en  $F$  y radio  $AB$ .
- Llama  $P$  y  $P'$  a los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta  $r$ .
- Grafica los distintos puntos  $P$  y  $P'$  que quedarían cuando  $A$  recorre la semirrecta con origen en  $V$  y que pasa por  $F$  (Figura 4).

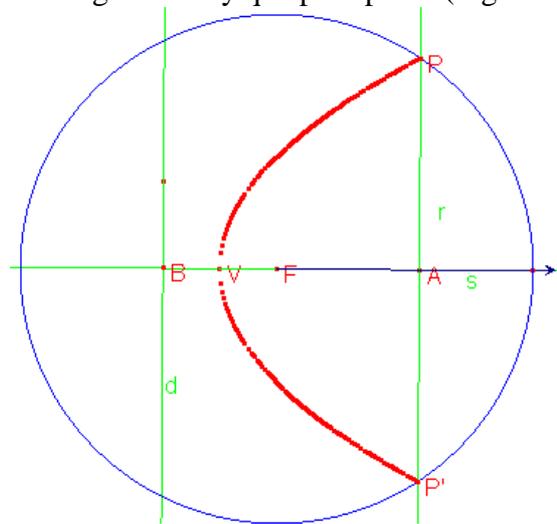


Figura 4

✓ *3º Construcción*

- Se traza un cuadrado  $ABCD$  y se llama  $F$  al centro del mismo.
- Se traza el punto  $H$ , simétrico de  $F$  con respecto al punto  $D$ .
- Se construye dos circunferencias congruentes de radio igual a  $FH$ , una con centro en  $F$  y la otra en  $H$ .
- Se llama  $E$  y  $E'$  a la intersección de las dos circunferencias.
- Se marca  $V$ , punto medio de  $FB$ .
- Grafica la Cónica que pasa por los puntos  $E, C, V, A$  y  $E'$  (Figura 5).

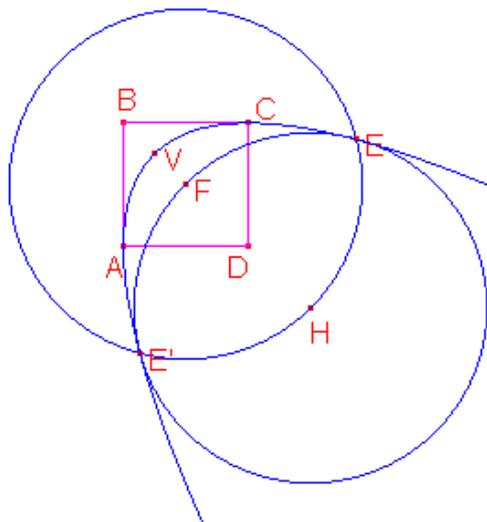


Figura 5

Después de realizar las construcciones se comentaron en forma oral las propiedades o características de  $P$ ; al mover  $A$  a lo largo de  $d$  (Figura 3).

El punto  $P$  describe un camino o trayectoria que los estudiantes pudieron analizar en términos de recursos matemáticos. Por ejemplo, algunos asociaron, inicialmente, el camino que deja  $P$  con una parábola, y otros indicaron que dicho recorrido describía parte de una hipérbola.

En estas circunstancias es necesario que los estudiantes sustenten sus conjeturas; es decir, es necesario propiciar un ambiente en el que ellos justifiquen sus observaciones, ya que, de esta manera, pueden buscar evidencia que les convenza y que convengan a los demás de sus resultados, factor importante de la argumentación en el quehacer matemático (Godino y Recio, 2001).

En la Figura 3 se muestra el rastro que deja  $P$  al mover el punto  $A$  sobre la recta  $d$ . Con el lugar geométrico construido, los estudiantes pueden buscar evidencia que les permita argumentar si el desplazamiento de  $P$  coincide con alguna cónica o si, por el contrario, es una trayectoria que no representa alguna cónica conocida.

Usando el comando que permite generar Cónicas por cinco puntos arbitrarios, se puede determinar, al menos visualmente, si la cónica

que pasa por esos cinco puntos coincide con el lugar geométrico que genera  $P$ .

El hecho de que los trazos de la Cónica de los cinco puntos y del lugar geométrico de  $P$  no queden encimados, presentará a los estudiantes evidencia suficiente que les permitirá tomar la decisión de no buscar argumentos que justifiquen que el lugar geométrico de  $P$  corresponde a alguna Cónica.

Así, el empleo del software permite que se tomen decisiones relevantes antes de intentar probar algún resultado.

Después de realizar las construcciones y comentarlas se solicita a los estudiantes que respondan las siguientes preguntas por escrito: ¿Reconoces las gráficas obtenidas? ¿Con qué nombre las conoces?

¿En las Figuras 3 y 4 el punto  $F$  y la recta  $d$  pertenecen a la gráfica obtenida?

De los puntos de la gráfica, ¿cuál de ellos se encuentra más cerca de la recta  $d$ ?

¿Qué relación hay entre la longitud del lado recto y la distancia de  $F$  a la recta  $d$ ?

Los puntos  $E$  y  $E'$ ;  $A$  y  $C$  en la tercera construcción ¿cumplen con alguna condición? ¿cuál? ¿por qué? ¿Y el punto  $V$ ?

¿Te animas a intentar definir al conjunto de los puntos  $P$  como un lugar geométrico?

En este momento se hizo una puesta en común con las respuestas de los alumnos y se cerró la clase con la institucionalización de parte del profesor que incluye definición y equivalencia entre los distintos abordajes.

En la segunda parte se resolvieron problemas que involucran el concepto del lugar geométrico, tales como:

El señor quiere construir su casa de tal manera que se encuentre a la misma distancia de su oficina y de la ruta que va a la ciudad. Dado el siguiente plano ¿dónde deberá construirla?



Comenzaron dibujando un punto  $F$ , que representa la oficina y una recta  $d$ , representando la ruta y un punto  $P$ , donde ubicaría la casa tal que  $P$  quede a la misma distancia de  $F$  y  $d$ . Con paciencia encontraron algunas posiciones en las que  $P$  es equidistante de  $F$  y  $d$ . En un principio notaron que no era tarea fácil mover el punto  $P$  de manera que se mantuviera a igual distancia de  $F$  y  $d$ . Pero analizando la situación, encontraron que  $P$  es equidistante de dos puntos de  $F$  y de un punto sobre la recta  $d$ . Si llamamos  $Q$  al punto de intersección de  $d$  y la recta perpendicular a  $d$  que pasa por  $P$ , puede verse que  $P$  es la intersección de la mediatriz del segmento  $FQ$  con la recta perpendicular a  $d$  que pasa por  $Q$ . Encontraron varios puntos donde podría edificarse la casa. El docente planteo las siguientes preguntas:

- Los puntos que encontraste, ¿forman alguna figura?
- ¿Qué propiedad tienen los puntos que encontraste?

En el estudio de las Cónicas, el proceso de enseñanza se basó, primeramente, en el desarrollo y construcción algebraica de los problemas y como complementación, la construcción de los lugares geométricos utilizando el programa Cabri Géomètre II Plus. Es un proceso opuesto al enfoque tradicional, en el que el docente impone una definición sin un análisis previo.

Se dejó para las clases prácticas las construcciones de las otras Cónicas con la guía necesaria para construir las definiciones como lugar geométrico.

Cada estudiante en el salón de clases hizo sus construcciones geométricas. En algunos casos se les proveyeron las instrucciones para construir como lugar geométrico, figuras geométricas, tales como la parábola, la elipse y la hipérbola.

Otra de las situaciones presentada para analizar o ejemplificar como estas curvas se utilizan como modelos de situaciones de la realidad es:

### Faro de un automóvil

Un esquema del corte transversal del fero de un automóvil puede ser el de la Figura 6. En la misma se observa que en el interior del fero hay una lámpara; todos los rayos que parten de ella se reflejan al llegar a la superficie curva, y salen formando un haz luminoso de rayos paralelos.

¿Qué características tiene la forma de este fero, que le permite tener esta importante propiedad de reflexión?



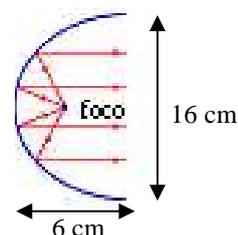
Figura 6

A partir de esta pregunta analizaron que el fero tiene la forma de una superficie parabólica. Este tipo de superficie se genera al rotar una parábola alrededor de su eje. Por lo tanto, el corte transversal del fero puede representarse como una parábola (Figura 6).

Una superficie parabólica se caracteriza por la siguiente propiedad: si ubicamos una fuente luminosa en un punto “especial” llamado foco, los rayos provenientes de la fuente se reflejan paralelamente al eje de simetría. Recíprocamente, todos los rayos que inciden paralelos al eje se concentran en el foco.

El docente entonces decide plantear la siguiente situación para que apliquen la propiedad formulada:

El fero delantero de un automóvil es diseñado con las dimensiones que aparecen en el esquema, ¿dónde deberá colocarse el foco?



A partir de las características ya analizadas del faro, los alumnos propusieron hacer un corte transversal al faro, colocar la parábola resultante sobre un sistema de coordenadas y el vértice en el origen de coordenadas, para posteriormente encontrar la ubicación del foco. Este procedimiento les facilitó las operaciones y la visualización de los elementos.

## Las barreras y las tareas pendientes

Finalmente presentamos una reflexión acerca de las barreras que encuentra la tecnología en la clase de matemática y las cuestiones en las que, a juicio de las autoras y de cara a la experiencia, parecen importantes desarrollar acciones.

El poder de convicción de una construcción dinámica es mucho más efectivo que el de una figura estática realizada sobre una hoja de papel, es suficiente manipularla para verificar la conjetura en un gran número de casos.

Para lograr la definición de parábola como lugar geométrico, fue necesaria la intervención del docente. La actividad en este momento se transforma en una actividad guiada a través de preguntas.

Los alumnos mostraron al principio cierto temor a realizar y organizar el trabajo habitual de clase con el software.

En general podemos decir que el aspecto empírico favorecido por el uso del software permitió, por medio de las gráficas, que los estudiantes revalidaran constantemente sus formulaciones, y llegasen a resultados consistentes.

El enfoque propuesto permitió justificaciones visuales dando nuevas opciones para responder el “para qué me sirve” en el estudio de estos temas.

Con esta experiencia las autoras, se proponen incentivar a la comunidad de docentes y estudiantes del área de Matemática a conformar grupos de estudio comprometidos en la profundización de contenidos matemáticos con apoyo de la tecnología.

¿Qué muestra la experiencia?

La realización de esta experiencia nos lleva a destacar la importancia de las interacciones

entre los aspectos visuales y los aspectos geométricos.

Percibir las innovaciones que este tipo de representaciones aportan sobre las herramientas clásicas (lápiz y papel).

La experiencia muestra una cantidad interesante de conocimientos de geometría y sus aplicaciones puestas en juego para resolver un problema de la vida real.

Es importante destacar que los estudiantes, bajo la supervisión de los docentes fueron quienes experimentaron, realizaron construcciones, midieron, buscaron relaciones, plantearon conjeturas y buscaron evidencias para verificar resultados. En este contexto, resulta relevante promover un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes mismos construyan su propia imagen del concepto.

Sin embargo pensamos que los futuros trabajos deberían realizarse con otras herramientas informáticas para que los alumnos conozcan otros programas y evitar que la reiteración de las herramientas didácticas puedan desmotivarlos.

Del mismo modo pensamos que la utilización de las herramientas multimedia debe combinarse con el trabajo habitual de clase de pizarrón, lápiz y papel y en ese entorno respondernos:

¿Qué le falta a una construcción dinámica correcta para ser una demostración?

¿Cuál es la forma más económica de abordar el tema teniendo en cuenta tiempo, profundidad del abordaje, conocimientos adquiridos?

## Bibliografía

Díaz Barriga Arcero, E. (2007). Geometría Dinámica con Cabri-Géomètre. Editorial Kali. México.

Etcheverry, N., Evangelista, N., Reid, M., Torroba, E. & Villarreal, M. (2004) Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización. Zetetiké, Vol.12, No 21. S.P. Brasil.

Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración.

Implicaciones para la Educación Matemática.  
Enseñanza de las Ciencias, 19(3), 405-414.

Hitt F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 213.

Larson R., Hostetler R. y Bruce E. (1995). Cálculo y geometría analítica, Vol 2, McGraw Hill. quinta edición Madrid. España.

Sobel M., y Lerner N. (1996) Algebra. Ed. Prentice-Hall. Hispanoamericana, S.A. México.