

# Interpolación polinomial - Superresolución de característicos lineales

Sebastián Hernández<sup>1</sup>   Paula Millado<sup>1</sup>   Claudio Delrieux<sup>2</sup>   Marina Cipolletti<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad Nacional de la Patagonia Austral

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras,  
Universidad Nacional del Sur,  
e Instituto de Investigación en Ingeniería Eléctrica,  
CONICET

## Resumen

El procesamiento inteligente de imágenes ha crecido de manera continua y vertiginosa debido en parte a la creciente sofisticación y accesibilidad a los dispositivos que las generan y también como consecuencia del incremento generalizado de la capacidad de procesamiento. Existe una abundante cantidad de datos en formato de imagen digital, y una relativa escasez de sistemas de procesamiento inteligente que permitan aprovechar y determinar sistemáticamente la información relevante en ellas.

Por otra parte, las aplicaciones de inteligencia artificial y reconocimiento de patrones en imágenes que se desarrollan en distintos campos, se encuentran frente al desafío cada vez más frecuente de vincular conocimiento y experiencia provenientes de áreas dispares y tradicionalmente no relacionadas, de una manera creativa y útil.

El principal objetivo de este proyecto consiste en desarrollar métodos avanzados de procesamiento de imágenes digitales empleando diferentes descriptores, y clasificando por medio de metodologías de la inteligencia artificial y el reconocimiento de patrones. Se pretende encarar el estudio de situaciones específicas de aplicación en las que se requiere el procesamiento inteligente de imágenes, basadas en situaciones específicas y donde los resultados son de aplicación directa en otros ámbitos.

La realización de este proyecto requiere, además, la fusión de datos con otro tipo de sensores para poder cotejar y validar los resultados de

la clasificación automática en imágenes.

**Palabras clave:** Descriptores, Procesamiento Digital de Imágenes, Reconocimiento de Patrones, Superresolución.

## Contexto

Este trabajo se desarrolló dentro del marco del proyecto de investigación 29/A269 denominado *Procesamiento Digital de Imágenes a Través de Herramientas de Inteligencia Artificial*, perteneciente y financiado por la Universidad Nacional de la Patagonia Austral en la Unidad Académica Río Gallegos.

En este proyecto de investigación se pretende desarrollar metodologías propias de la inteligencia artificial y el reconocimiento de patrones a fin de aplicarlas en el procesamiento digital de imágenes, para la segmentación, búsqueda de descriptores e identificación de características en imágenes digitales provenientes de distintos campos de aplicación. Se pretende que, dependiendo del contexto de aplicación, pueda lograrse el reconocimiento de características a fin de contrastarlas con aquellos elementos que constituyan zonas de interés que además son caracterizables a través de modelos físico-matemáticos, cuyas características los hacen mensurables.

En una primera etapa se busca estudiar la segmentación y medición de característicos lineales en imágenes de sensado remoto, especialmente imágenes satelitales, dado que la resolución de las mismas es en general siempre de menor calidad

que lo necesario para realizar estudios geográficos de alta precisión [6]. Al mismo tiempo, los algoritmos usuales de segmentación de características lineales (bordes, fronteras, etc.) incurren en errores sistemáticos independientes de la resolución, que pueden llegar a sobreestimar la medición en un 40 %.

## Introducción

Las imágenes satelitales se pueden definir como la representación visual de la información capturada por un sensor montado en un satélite artificial [2]. Estos sensores recogen información reflejada por la superficie de la tierra que luego es enviada y procesada convenientemente, entregando valiosa información sobre las características de la zona representada. La extracción y detección de bordes es una herramienta fundamental en el procesamiento de imágenes y visualización. Particularmente en la detección y extracción de características en las cuales su objetivo es identificar zonas en una imagen que muestren discontinuidades [3].

En este trabajo buscamos estudiar el impacto de incorporar interpolación de alto orden, y comparar la mejora obtenida respecto de trabajos anteriores donde se utiliza interpolación lineal [1] e interpolación a través de polinomios de Hermite, mediante la utilización del algoritmo de "Marching Squares".

En análisis numérico, la interpolación polinómica es una técnica de representación de un conjunto de datos o de una función matemática a través de una expresión polinómica. Es decir, dado cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento, se pretende encontrar un polinomio que pase por todos los puntos. También es utilizado para conocer, de un modo aproximado, los valores que toma cierta función de la cual sólo se conoce su imagen en un número finito de abscisas. A menudo, ni siquiera se conocerá la expresión de la función y sólo se dispondrá de los valores que toma para dichas abscisas.

El objetivo del método será hallar un polinomio que cumpla lo antes mencionado y que permita hallar aproximaciones de otros valores desconocidos para la función con una precisión deseable fijada. Por ello, para cada polinomio interpolador se dis-

pondrá de una fórmula del error de interpolación que permitirá ajustar la precisión del polinomio, de acuerdo a la cantidad de puntos y del grado del polinomio.

Se dispone de varios métodos generales de interpolación polinómica que permiten aproximar una función por un polinomio de grado  $m$ . El primero de éstos es el método de la interpolación lineal, que luego se observa como un caso particular de la Interpolación general de Newton [7]. Otro de los métodos es la interpolación de Lagrange, equivalente a Newton pero más tedioso en su cálculo, y por último, la interpolación de Hermite [7].

Con el polinomio de interpolación de Newton se logra aproximar un valor de la función  $f(x)$  en un valor desconocido de  $x$ . El caso particular, para que una interpolación sea lineal es en el que se utiliza un polinomio de interpolación de grado 1, y se denota de la siguiente manera:

$$f(x|x_1; x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

El Polinomio Interpolador de Hermite de grado  $2m+1$  de la función  $f$  es un polinomio de la forma:

$$P_{2m+1}(x) = \sum_{i=0}^m f_i \Phi_i(x) + \sum_{i=0}^m f'_i \Psi_i(x),$$

con:

$$\Phi_i(x) = (1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i))l_i^2(x)$$

$$\Psi_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x), i = 0, \dots, m.$$

La principal ventaja del polinomio de Hermite es su sencillez de cálculo, mientras que su gran desventaja es que es una interpolación local, teniendo sólo en cuenta los dos puntos adyacentes (derecho e izquierdo) a los extremos de la curva interpolada.

Si se intenta determinar el borde de una imagen, se deben identificar los puntos del contorno. Para ello se debe determinar qué píxel es *foreground* y qué píxel es *background*. Con este fin se utiliza el algoritmo de *Marching Squares*.

Una imagen para ser utilizable en el procesamiento por medio de computadora debe ser digitalizada. A esta digitalización la llamamos muestreo de la imagen. El muestreo digital es una de las partes del proceso de digitalización de las señales. Consiste en tomar muestras de una señal analógica a una frecuencia o tasa de muestreo constante, para cuantificarlas posteriormente. Según el teorema

de muestreo de Nyquist-Shannon, para poder replicar con exactitud (es decir, siendo matemáticamente reversible en su totalidad) la forma de una onda es necesario que la frecuencia de muestreo sea superior al doble de la máxima frecuencia a muestrear. El proceso de muestreo sobre una señal continua que varía en el tiempo (o en el espacio como en una imagen u otra variable independiente en cualquier otra aplicación) es realizado midiendo simplemente los valores de la señal continua cada  $T$  unidades de tiempo (o espacio), llamado intervalo de muestreo. El resultado de este proceso es una secuencia de números, llamadas muestras, y son una representación de la imagen original. La frecuencia de muestreo  $f$  es el recíproco del intervalo de muestreo  $f = 1/T$  y se expresa en Hz (si es tiempo), o en oscilaciones por píxel, si se trata de una imagen digital. El muestreo debe cumplir con dos condiciones:

- Limitar en banda a través de un filtro pasobajas la señal a muestrear.
- Siguiendo el criterio de Nyquist, si conocemos el ancho de banda de la señal, entonces la frecuencia de muestreo  $f$  para lograr una reconstrucción casi perfecta de la señal original deberá ser:  $f_N \leq 2WB$  donde  $WB$  es el ancho de banda de la señal original y la frecuencia de muestreo que sigue esta condición se le llama *frecuencia de Nyquist*.

Si las condiciones de muestreo no se satisfacen, entonces las frecuencias se pueden llegar a traslapar; es decir, las frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo serán reconstruidas y aparecerán ser frecuencias por debajo de la frecuencia de muestreo. El resultado sería una distorsión llamada *aliasing* [5].

## Líneas de Investigación y Desarrollo

El plan de actividades previsto para la primera etapa se centra fundamentalmente en la formación intensiva en los aspectos teóricos necesarios. Para la segunda etapa, se espera estar en condiciones de abordar problemáticas de aplicación, fundamentalmente seleccionadas de entre los objetos de es-

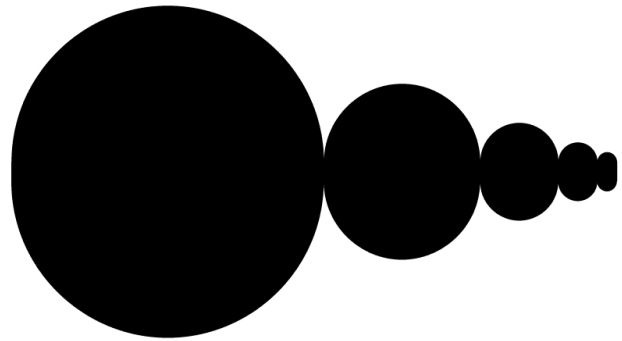


Figura 1: Imagen binaria sintética

tudio de otros grupos de investigación, principalmente se espera trabajar con imágenes satélites. Finalmente, la tercera etapa constituye el período de integración y selección de temas que puedan constituir una definición sobre el crecimiento del grupo.

Dentro de las actividades propuestas, se incluye la formación de recursos humanos atravesada por el cursado de los programas de posgrado de los integrantes, fuertemente relacionados con este proyecto.

## Resultados y Objetivos

Como ejemplo de aplicación de lo antes mencionado, se trabajó con imágenes binarias sintéticas. El principal resultado se obtuvo de una imagen de  $3300 \times 2100px$  en la que se observan cinco círculos, de diámetros  $1600px$ ,  $800px$ ,  $400px$ ,  $200px$  y  $100px$  (Figura 1). A cada círculo se lo dividió por su diámetro horizontal y ambas partes fueron separadas entre sí por una franja de  $3100 \times 100px$  para que la imagen resultante tuviera sectores verticales en ambos extremos y se pudiera analizar la convergencia del algoritmo a pesar de los cambios de curvatura. En el lado izquierdo de la imagen es casi imperceptible este efecto, pero en el derecho es claramente visible.

Además, la figura presentada posee gran riqueza geométrica, y fue seleccionada con el fin de verificar la robustez del algoritmo de detección, ya que sus cambios de orientación de la curvatura así como el radio de curvatura varían a lo largo de toda la imagen. Otra característica distintiva es que se

puede calcular el valor exacto del perímetro aplicando matemática básica, en este caso de  $9939px$ . La imagen fue remuestreada a un tamaño de píxel mucho mayor (simulando el efecto del sensor satelital), con lo que se obtuvieron imágenes de mucho menor resolución. La idea del método consiste en mostrar que pese a este deterioro, es posible recuperar la información del perímetro original a través de una reconstrucción de alto orden.

Para la reconstrucción del perímetro, se utilizó el método de *marching squares* con interpolación lineal presentado en [1]. También se utilizaron los puntos encontrados por dicho método como puntos de control para generar una curva de Hermite. En la figura 2 es posible observar el resultado de reducir la resolución de la figura 1 a  $1/50$  (es decir, la cantidad final de píxels es 2500 veces menor), los puntos de control encontrados, y la curva de Hermite computada.

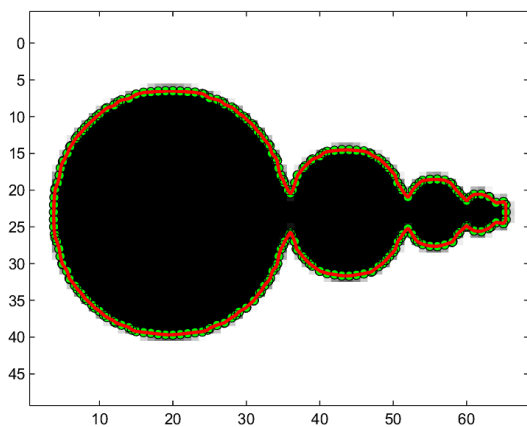


Figura 2: Reconstrucción del perímetro por medio de polinomios de Hermite

En el Cuadro 1 se puede observar el resultado de ambos métodos para diferentes disminuciones de la resolución.

El gráfico asociado al Cuadro 1 es el que se presenta como Figura 4, donde se aprecia claramente que el error sigue la misma tendencia independientemente del método de interpolación, aunque con los polinomios de Hermite se consiguen resultados más precisos. Las líneas continuas representan el ajuste de los datos de error a un polinomio de grado 2. Es posible observar que la interpolación de Hermite disminuye el error, de una manera más

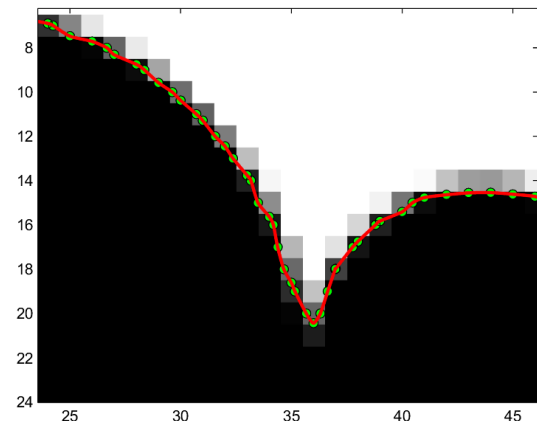


Figura 3: Detalle (ampliación) de la reconstrucción por Hermite

apreciable a medida que la calidad del submuestreo es mayor. Una forma de interpretar estos resultados es que, por ejemplo, para una imagen con una resolución 20 veces menor (400 veces menos píxels) es aún posible medir los perímetros de los objetos con un error menor al 5%. Como se mostrara en trabajos anteriores, los métodos tradicionales de mediciones de perímetro cometen errores de un orden de magnitud mayor, aún en mejores circunstancias.

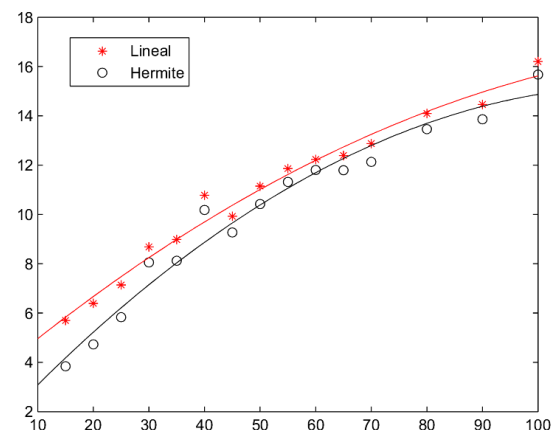


Figura 4: Tamaño de MP vs Error

Es posible mencionar que, con los resultados observados, se puede establecer una regresión del perímetro medido en función del tamaño del píxel, y computar una dimensión fractal [4] que permi-

MP	L	Error (%)	H	Error (%)
15	9373	5.70	9557	3.84
20	9304	6.39	9469	4.73
25	9229	7.14	9360	5.83
30	9076	8.68	9139	8.05
35	9046	8.98	9132	8.12
40	8867	10.78	8928	10.18
45	8953	9.92	9018	9.27
50	8831	11.15	8903	10.42
55	8760	11.86	8814	11.32
60	8723	12.23	8767	11.80
65	8707	12.39	8767	11.79
70	8660	12.87	8733	12.13
80	8539	14.09	8602	13.46
90	8501	14.46	8561	13.86
100	8329	16.20	8381	15.67

- [3] T. Lillesand and R. Kiefer. *Remote Sensing and Image Interpretation (4th. ed.)*. Willey & Sons, New York, 2000.
- [4] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1983.
- [5] J.G. Proakis and D.G. Manolakis. *Digital signal processing*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [6] Robert Schowengerdt. *Remote Sensing Models and Methods for Image Processing (2th. ed.)*. Academic Press, 1997.
- [7] Endre Süli and David Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003.

Cuadro 1: Tabla con el perímetro obtenido y el error relativo en la interpolación lineal (L) y la interpolación polinomial de Hermite (H), para diferentes submuestras (MP).

tiría extrapolar estos resultados con aún mayor precisión. Estos resultados preliminares permiten concluir que la interpolación de Hermite es más estable para este objetivo que la interpolación lineal.

## Formación de Recursos Humanos

El equipo de este proyecto se encuentra formado por un Dr. en Ciencias de la Computación, una Lic. en Sistemas y un Prof. en Matemática. Los dos últimos integrantes son alumnos regulares de la Maestría en Informática y Sistemas de la UNPA, además de docentes ordinarios de la UARG.

## Referencias

- [1] Marina P. Cipolletti, Claudio A. Delrieux, Gerardo M.E. Perillo, and M. Cintia Piccolo. Superresolution border segmentation and measurement in remote sensing images. *Computers y Geosciences*, (0):-, 2011.
- [2] R.C. González and R.E. Woods. *Digital image processing*. Pearson/Prentice Hall, 2008.