Las simulaciones como herramienta de enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Fernando Lagomarsino , Samira Abdel Masih

Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Lomas de Zamora.
e-mail: fernando.lagomarsino@gmail.com, abdel.masih@hotmail.com

Resumen

Numerosos fenómenos de la vida real se describen en términos de ecuaciones diferenciales. Sus múltiples aplicaciones en diversas ramas de la ciencia las han convertido en uno de los temas más atractivos, especialmente para el estudiante de Ingeniería, Matemática y Física. La motivación al estudio de estos temas se potencia aún más gracias a los recursos de simulación que brindan algunos programas informáticos. En particular, el software Mathematica constituye, por la potencia y sencillez de su manejo, una herramienta fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
El presente trabajo desarrolla, a través de ejemplos provenientes de la Mecánica, modelos matemáticos sencillos que conducen a la resolución de una ecuación diferencial. Luego se ilustra cómo efectuar la correspondiente simulación mediante el software Mathematica, a fin de comparar los resultados teóricos con la realidad. Como objetivo pedagógico se propone que el estudiante aprenda a crear sus propios modelos matemáticos, aprovechando los recursos que brindan las computadoras en nuestros días. Esto le permitirá resolver situaciones reales y analizar la validez de los resultados obtenidos.

Palabras claves: simulaciones – ecuaciones diferenciales – software Mathematica.

Introducción

Si observamos a nuestro alrededor, podemos comprobar que la Mecánica se encuentra presente en numerosas situaciones: la puesta en marcha de un automóvil, el proceso de frenado, la caída de un objeto, el movimiento de una viga o de un péndulo.
En este trabajo expondremos la manera de modelar matemáticamente alguno de estos fenómenos, lo cual permitirá al estudiante plantear y resolver situaciones similares.
Previamente se hará una breve introducción teórica del tema a tratar para luego mostrar, mediante dos ejemplos, el paso a paso que conducirá al planteo y resolución de una ecuación diferencial ordinaria con su correspondiente simulación utilizando el software Mathematica.
Esta propuesta de enseñanza se viene experimentando en la asignatura de Análisis Matemático III con resultados altamente satisfactorios.

Estudio del comportamiento del rozamiento de un neumático.

Para analizar el efecto producido por el rozamiento de un neumático con la superficie de una carretera, haremos primeramente una analogía con el comportamiento de un bloque sobre una superficie rugosa. Para ello necesitaremos los siguientes conceptos.

Rozamiento estático:
Cuando aplicamos una pequeña fuerza a un gran bloque que descansa sobre el suelo, el bloque no se mueve debido a la fuerza de **rozamiento estática** $\vec{f_e}$ que ejerce el piso sobre él, el cual equilibra la fuerza que

estamos aplicando (véase [1] - [3]). Su módulo puede variar desde cero hasta cierto valor máximo $f_{e\,max}$, cuya expresión es la siguiente:

$$f_{e\,max} = \mu_e \; N$$

Donde

μ_e : Coeficiente de rozamiento estático.

N : Módulo de la fuerza normal.

Rozamiento cinético:

Si al empujar un bloque logramos moverlo, éste se deslizará sobre su superficie de apoyo. En este caso el suelo ejerce sobre él una fuerza de **rozamiento cinética** $\vec{f_c}$ que se opone al movimiento. Su módulo se define como:

$$f_c = \mu_c \; N$$

Donde

μ_c : Coeficiente de rozamiento cinético.

Observemos que, para que el bloque se deslice con velocidad constante, se debe ejercer sobre él una fuerza de igual módulo y de sentido opuesto a la fuerza de rozamiento cinética.

Ahora bien, para que un automóvil comience a moverse, su motor debe suministrar una potencia y trasmitirla hacia los neumáticos, haciendo que las ruedas giren. Si el movimiento sobre una carretera fuese sin rozamiento, los neumáticos sólo rodarían sobre sí mismos. En cambio, cuando existe fricción, la carretera ejercerá sobre los neumáticos una fuerza de rozamiento que es la que permitirá acelerar el coche. Si la potencia suministrada por el motor es lo suficientemente pequeña como para que la fuerza ejercida por los neumáticos sobre la carretera no sea grande, las dos superficies no se deslizarán. De este modo, las ruedas girarán y la superficie de los neumáticos en contacto con el suelo permanecerá en reposo respecto a él. En este caso, la magnitud máxima de la fuerza que puede ejercer la carretera sobre los neumáticos es $\mu_e \; N$.

En cambio, si la potencia suministrada por el motor es suficientemente grande, el neumático patinará. En este caso, la fuerza que acelerará el coche es $\mu_c \; N$.

Por otro lado, podemos destacar que existen dos formas de frenado: La primera ocurre cuando lo hacemos tan bruscamente que las ruedas se bloquean, en cuyo caso los neumáticos resbalarán sobre el asfalto y la fuerza que parará el coche será la de rozamiento cinética. La segunda sucede cuando no frenamos violentamente y en consecuencia no se produce deslizamiento entre los neumáticos y la carretera; en este caso la fuerza que detendrá al coche será la de rozamiento estática. El siguiente gráfico ilustra el módulo de la fuerza rozamiento $\vec{f}$ (la ejercida por la carretera sobre los neumáticos) en función de la fuerza de frenado aplicada (es decir, la que se trasmite desde el pedal del freno hacia los neumáticos).

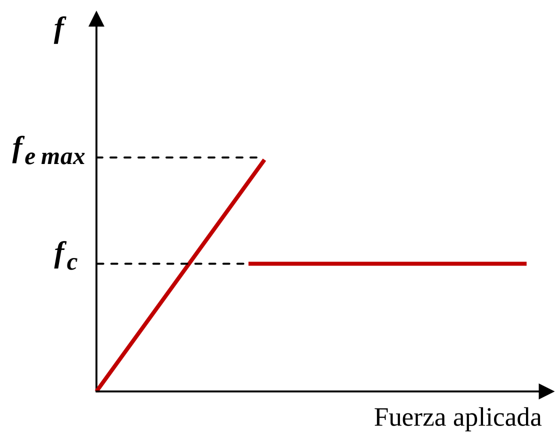


Figura 1: Gráfico de la fuerza de rozamiento en función de la fuerza aplicada.

Se observa que a medida que aumentamos la fuerza aplicada, aumenta también la fuerza de rozamiento. Es decir, se cumple el principio de acción y reacción hasta llegar a un valor máximo y, si es superado, los neumáticos se bloquearán; en este caso la fuerza de rozamiento disminuirá a un valor constante pero de módulo menor a la de la estática máxima.

Sistemas con Abs

Los coches con sistemas de frenado antibloqueo Abs utilizan sensores para medir la velocidad de la rueda. Si el dispositivo de control detecta que la rueda está próxima a bloquearse, el sistema modula una señal que hace que la presión disminuya, a fin de restaurar instantes después la presión sobre la rueda. Este proceso se realiza reiteradamente alrededor de 15 veces por segundo. De este modo se logra el máximo frenado, ya que los neumáticos reciben la fuerza de rozamiento estática máxima. El siguiente gráfico muestra el módulo de la fuerza de rozamiento para este caso.

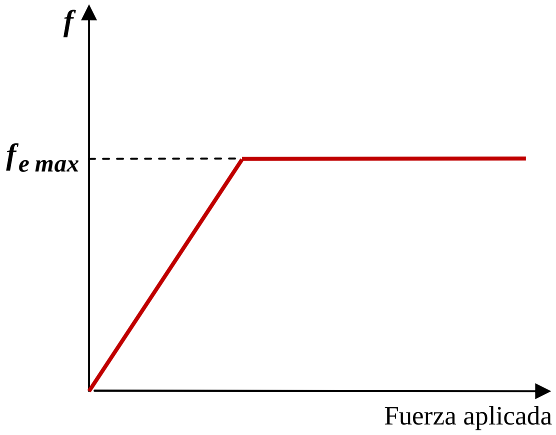


Figura 2: Gráfico de la fuerza de rozamiento en función de la fuerza de frenado, en un sistema con Abs.

Comportamiento del rozamiento.

Dado un bloque como el de la figura 3, analizaremos su comportamiento según sus diferentes superficies de contacto. Si el bloque descansa sobre una base mayor, el área de contacto se incrementa pero la fuerza por unidad de área disminuye. En tanto si el bloque descansa sobre una base menor, disminuirá su superficie de contacto pero aumentará su fuerza por unidad de área. Por lo tanto, si el bloque descansa sobre una u otra base, hay que aplicar la misma fuerza horizontal "F" para mantenerlo en movimiento a velocidad constante. Para nuestro estudio consideraremos las cuatro ruedas como si tuvieran un solo punto de contacto con la carretera, es decir, el frenado será independiente del número de neumáticos y área de contacto. Supondremos, además, que los frenos se aplican por igual a los cuatro neumáticos.

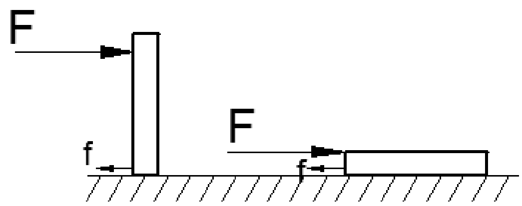


Figura 3: Comportamiento de un bloque según sus diferentes superficies de contacto.

La siguiente tabla muestra los valores aproximados de los coeficientes de rozamiento:

Material	μ_e	μ_c
Acero sobre acero	0,7	0,6
Esquí encerado sobre nieve	0,1	0,05
Caucho sobre hormigón (seco)	1	0,8
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0,3	0,25

Figura 4: Tabla de valores aproximados de coeficientes de rozamiento.

Ilustraremos los conceptos mencionados anteriormente mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.

Un conductor se encuentra viajando sobre una carretera rectilínea de hormigón, a una velocidad constante de 33 m/s. A lo lejos divisa una vaca parada en el camino, por lo que decide aplicar los frenos con un retardo, entre la advertencia del animal y la aplicación del frenado, de aproximadamente un segundo. El conductor, asustado, oprime una fuerza creciente sobre el pedal del freno durante 4 segundos. En ese instante pudo escuchar que sus neumáticos se bloquearon hasta que aproximadamente a los 14 segundos (contados desde el instante en que aplicó los frenos) dejó de aplicar los frenos. Lamentablemente era un día de lluvia, lo que dificultó aún más el frenado del auto, ya que el hormigón se encontraba húmedo y el automóvil no tenía Abs.
Se sabe que la masa del auto es m_1= 1000 Kg y la del conductor es m_2= 78 Kg.

1) Representar gráficamente la magnitud de la fuerza realizada por los neumáticos en función del tiempo, a partir del instante en que el conductor divisa la vaca hasta que detiene el automóvil.
2) Expresar, en términos de la función salto unidad, el módulo de la fuerza ejercida por los neumáticos.
3) Efectuar el diagrama de cuerpo libre del automóvil, omitiendo la fuerza de resistencia del aire.
4) Si r(t) = (x(t), 0) es la función posición del automóvil en el instante t, plantear y resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales que permita hallar la función posición del automóvil, a partir del instante en que divisa a la vaca.
5) Calcular el tiempo que tarda en detenerse.
6) Si la vaca se encuentra a 145 metros desde que el conductor la divisa, ¿logará no atropellar a la vaca?
7) En caso de no ser suficiente el frenado para evitar atropellar a la vaca, ¿podrá detenerse antes si tuviera Abs?

<u>Resolución:</u>

1) Llamemos f_n a la magnitud de la fuerza ejercida por los neumáticos, a partir del instante en que el conductor divisa la vaca. Observando el gráfico de la Figura 1, podemos comprobar que, cuando el conductor aplica el pedal del freno, la magnitud de dicha fuerza es igual a la de la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera. En consecuencia, su gráfico en función del tiempo es el siguiente:

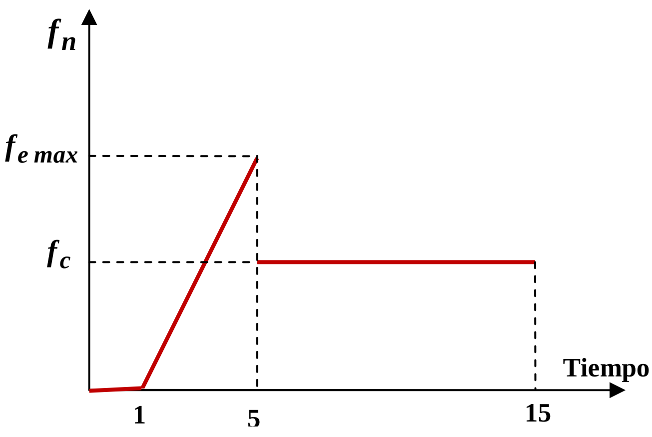


Figura 5: Gráfico de f_n

Donde

$f_{e\,max} = \mu_e\ N\ ,\ f_c = \mu_c\ N$

De la tabla de la Figura 4 se deduce que

$\mu_e = 0.3 \quad \mu_c = 0.25$. Luego,

$$f_{e\,max} = 0.3\ N\ ,\ f_c = 0.25\ N \qquad (1)$$

2) Recordemos que, la función Salto Unidad o función de Heaviside (véase [4]) se define por

$$Ua(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > a \\ 0 & \text{si} \quad t < a \end{cases}$$

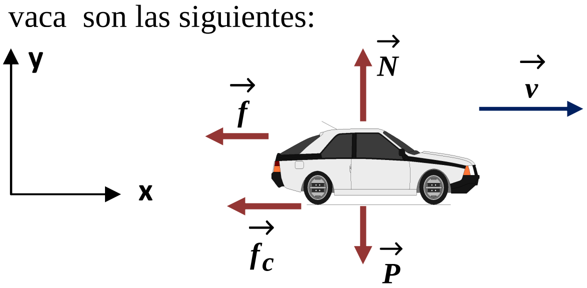
Por lo tanto,

$$f_n(t) = 0.\,(U_0(t) - U_1(t)) + \frac{f_{e\,max}}{4}(t-1)\,(U_1(t) - U_5(t)) + f_c\,(U_5(t) - U_{15}(t))$$

De las ecuaciones (1) resulta

$$f_n(t) = \frac{0.3\,N}{4}(t-1)\,(U_1(t) - U_5(t)) + 0.25\,N\,(U_5(t) - U_{15}(t)) \qquad (2)$$

3) Las fuerzas que actúan sobre el automóvil a partir del instante en que el conductor divisa la vaca son las siguientes:



Donde

$\vec{P}$: Fuerza peso del automóvil y del conductor.

$\vec{N}$: Fuerza normal.

$\vec{f_c}$: Fuerza de fricción cinética entre el pavimento y los neumáticos.

$\vec{f}$: Fuerza que la carretera ejerce sobre los neumáticos, al aplicar los frenos.

En este caso,

$\vec{P} = (0, -(m_1 + m_2)\,g)$ con $g = 9.81$ m/seg^2.

$\vec{N} = (0,\ N)$.

$\vec{f_c} = (-\mu_c\ N\ , 0)$ con $\mu_c = 0.25$

$\vec{f} = (-\ f_n\ , 0)$

4) Al aplicar al automóvil la Segunda Ley de Newton resulta:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f_c} + \vec{f} = (m_1 + m_2)\ \vec{a(t)}$$

Donde

$\vec{a(t)} = (x''(t), 0)$ es la aceleración del coche.

Por lo tanto,

$(0, -(m_1 + m_2)\ g) + (0,\ N) + (-\mu_c\ N\ , 0) +$

$(-\ f_n\ , 0) = (m_1 + m_2)\ (x''(t), 0)$

Al igualar componente a componente se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -\mu_c\ N - f_n = (m_1 + m_2)\, x''(t) & (3) \\ -(m_1 + m_2)g + N = 0 & (4) \end{cases}$$

De la ecuación (4) resulta

$$N = (m_1 + m_2)\ g$$

Reemplazando esta expresión en las ecuaciones (2) y (3) se obtiene

$$f_n(t) = \frac{0.3(m_1 + m_2)\, g}{4}\ (t-1)\ (U_1(t) - U_5(t)) + 0.25(m_1 + m_2)g\ (U_5(t) - U_{15}(t)) \qquad (5)$$

$$-\mu_c\, (m_1 + m_2)\, g - f_n = (m_1 + m_2)\, x''(t) \qquad (6)$$

Finalmente, sustituyendo (5) en (6), resulta la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales, que permitirá hallar la función posición del auto:

$$-0.25\,(m_1 + m_2)\, g\ -\ \frac{0.3(m_1 + m_2)\, g}{4}\ (t-1)\ (U_1(t) - U_5(t))\ -\ 0.25(m_1 + m_2)g\ (U_5(t) - U_{15}(t)) = (m_1 + m_2)\, x''(t)$$

Condiciones iniciales:

$x(0) = 0$, $x'(0) = v_0 = 33$ m/seg

Si aplicamos el Método de Laplace para resolver esta ecuación diferencial (véase [4]), se obtiene la siguiente solución:

$$\boldsymbol{x(t) = -\ 0.0009\ (\ 1321.89\ t^2 - 1078\ t\ v_0 - 1321.89\ (t - 15)^2\ U_{15}(t) - 132.18\ (t - 5)^3\ U_5(t) + 132.18\ \ (t - 1)^3\ U_1(t)\ )}$$

5) Cuando el automóvil se detiene, su velocidad es cero. Valiéndonos del Mathematica, graficaremos la velocidad del auto, es decir, x'(t) en el intervalo [0, 15]. Para ello ejecutaremos los siguientes comandos (Véase [5]):

```
v0= 33;
x[ t_ ] = - 0.0009 ( 1321.89 t^2 - 1078 t v0 –
1321.89 ( t - 15 )^2 UnitStep [t - 15] - 132.18
( t - 5 )^3 UnitStep[ t - 5] + 132.18   (t - 1)^3
UnitStep[ t - 1] ) ;

Plot [ x ’ [t] , { t , 0 , 15 } ]
```

El gráfico obtenido es el siguiente:

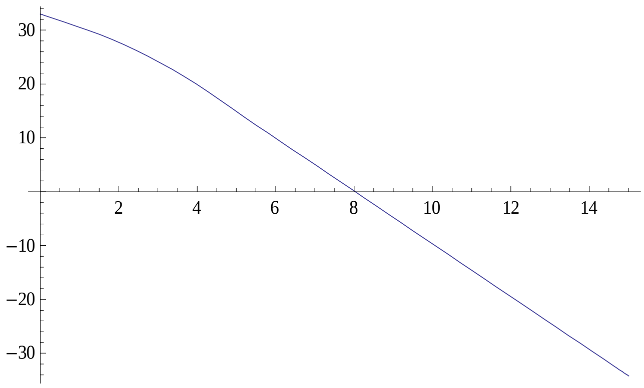


Figura 6: Gráfico de la velocidad del automóvil.

Observamos que a los 8 segundos el automóvil se detiene.

6) Calcularemos a qué distancia se detiene valuando x(8). Ejecutamos entonces el siguiente comando:

x [8]

El resultado nos da 148.978 m. Esto significa que lamentablemente el conductor atropellará a la vaca.

7) Si el automóvil tuviera Abs, el gráfico de la fuerza ejercida por los neumáticos sería la siguiente:

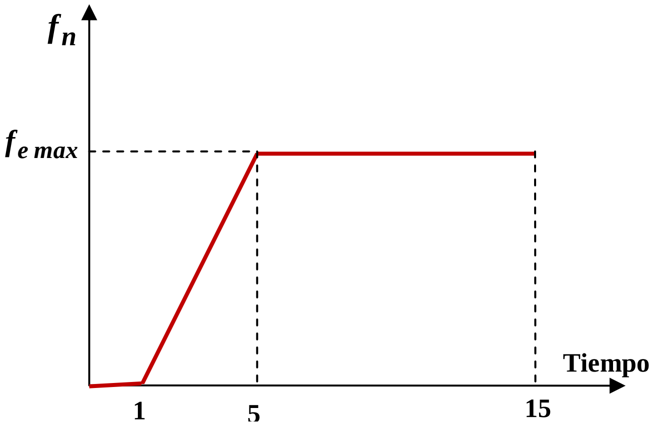


Figura 7: Gráfico de f_n en un sistema con Ab.s

Es decir,

$$f_n(t) = \frac{0.3\,N}{4}(t-1)\ (U_1(t) - U_5(t)) + $$
$$+\,0.3\,N\,(U_5(t) - U_{15}(t))$$

En este caso, la ecuación diferencial a resolver es

$$-0.25\,(m_1+m_2)\,g\ -\ \frac{0.3(m_1+m_2)\,g}{4}(t-1)\ (U_1(t) - U_5(t))\ -\ 0.3(m_1+m_2)g\ (U_5(t) - U_{15}(t)) = (m_1+m_2)\,x''(t)$$

Nuevamente, al aplicar el Método de Laplace para resolver esta ecuación, resulta

$$x(t) = -\ 0.00092\ (\ -35574\ t + 1321.\ 89\ t^2 - 1586.27\ (-15+t)^2\ U_{15}(t) - 132.18\ (t-5)^3\ U_5(t) + 132.18\ (t-1)^3\ U_1(t)\ )$$

La gráfica de la velocidad se muestra a continuación:

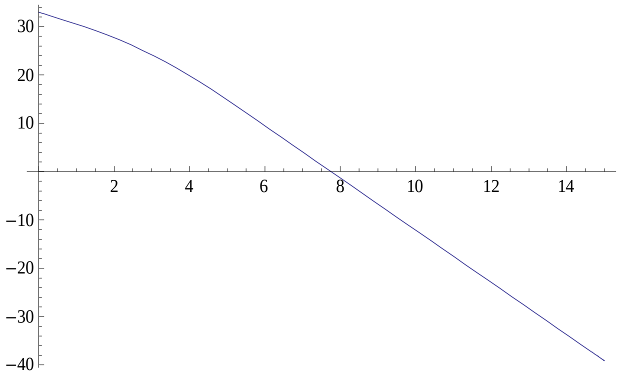


Figura 8: Gráfico de la velocidad del auto con Abs.

Se observa que el automóvil se detiene aproximadamente a los 7.75 segundos. Al valuar la posición en dicho instante se obtiene

$x(7.75) = 146.93$ m.

En consecuencia, yendo a una velocidad inicial v_0= 33 m/seg., aunque el móvil tuviera Abs, el conductor atropellará a la vaca.

Observación

Mathematica dispone del comando Manipulate para efectuar simulaciones. Esto nos permitirá, por ejemplo, determinar la máxima velocidad inicial a la que podrá ir el conductor para no atropellar a la vaca. Para ello se calcula y expresa la función solución x(t) en términos de la velocidad inicial v_0. De este modo, si representamos x(t) en el intervalo [0, 15], para valores de v_0 en el intervalo [10, 50], lograremos visualizar la velocidad inicial límite.

Los detalles del comando Manipulate se muestran a continuación.

```
Manipulate
[Show[Graphics[{EdgeForm[Black],
RGBColor[0.501961, 0, 0],  Rectangle[{145, 0},
{159, 7}]}], Graphics[{EdgeForm[Black],
RGBColor[0.25098, 0, 0.501961], Rectangle[{-
0.0009 (1321.89 t^2 - 1078 t v0 - 1321.89 (-15 + t)^2
UnitStep[-15 + t] -  264.37 (-5 + t)^2 UnitStep[-5 +
t] - 132.18 (-5 + t)^3 UnitStep[-5 + t] + 132.18 (-1
+ t)^3 UnitStep[-1 + t]), 0}, {-0.0009 (1321.89 t^2 -
1078 t v0 - 1321.89 (-15 + t)^2 UnitStep[-15 + t] -
264.37 (-5 + t)^2 UnitStep[-5 + t] - 132.18 (-5 + t)^3
UnitStep[-5 + t] + 132.18 (-1 + t)^3 UnitStep[-1 +
t]) + 10, 5}]}],  Axes -> True, PlotRange -> {{0,
200}, {0, 15}}, AxesOrigin -> {0, 0}, AspectRatio
-> 1/3], {t, 0, 15}, {v0, 10, 50}]
```

Para este caso, hemos representado al automóvil y a la vaca mediante dos rectángulos: el azul simboliza el auto mientras que el marrón representa la vaca.

La figura siguiente muestra el panel de control que aparece una vez ejecutado el comando Manipulate.

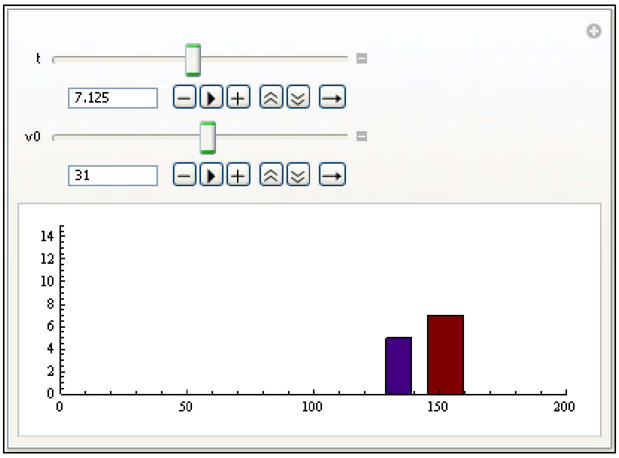


Figura 9: Panel de control para ejecutar la simulación del auto yendo a una determinada velocidad..

Al ensayar las distintas distancias a las que puede llegar el automóvil hasta detenerse, se puede comprobar que el límite máximo de velocidad inicial es $v_0 = 31$ m/seg. para el caso en que el auto no posea Abs.

En el siguiente apartado mostraremos una situación de encuentro de dos móviles, sometidos a la resistencia del aire.

Comportamiento de dos móviles bajo la acción de la fuerza de rozamiento del aire.

Si sacamos la mano por la ventanilla de un coche que viaja con cierta rapidez, comprobaremos la resistencia que ofrece el aire. En general, la resistencia de un fluido (gas o líquido) es la fuerza que éste ejerce sobre otro cuerpo que se mueve a través de él. La dirección de dicha fuerza es siempre opuesta a la velocidad del cuerpo, y su magnitud suele aumentar al aumentar la rapidez del cuerpo en el fluido. Si el objeto se mueve a una rapidez moderada, la fuerza de rozamiento del aire es proporcional a su vector velocidad. Es decir,

$$\vec{F_r}(t) = -c\,\vec{v}(t)$$

Donde

$\vec{v}(t)$ = velocidad del cuerpo en el instante "t".

c = constante de rozamiento del cuerpo. Tiene la siguiente fórmula:

$$c = \frac{\rho A \delta}{2}$$

En este caso,

ρ = Densidad del aire. Aunque varía con la altura, se utilizará su valor a nivel del mar de 1.29 kg/ m^3.

A = Área del cuerpo expuesta al aire.

δ = Coeficiente de arrastre, que depende de la forma del objeto.

El coeficiente de arrastre δ es un número adimensional que mide cuánta resistencia ofrece el cuerpo cuando éste se mueve dentro del aire. Cuanto menor sea δ, el objeto será más aerodinámico, es decir, se moverá más rápido por el aire. En la siguiente tabla se proporcionan los coeficientes de arrastre de algunos objetos:

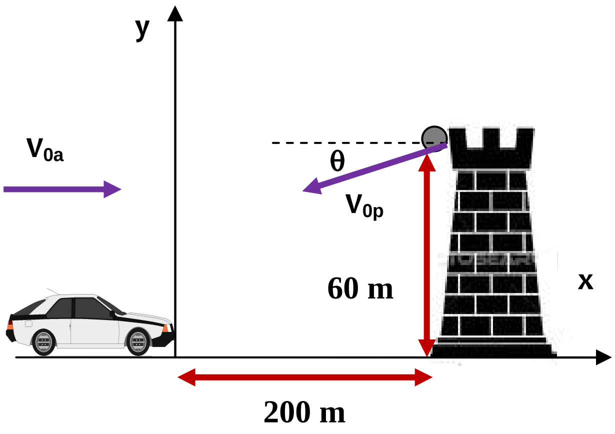
Forma del objeto	Valor aproximado de δ
Disco circular	1.2
Esfera	0.4
Avión	0.06
Caja rectangular	0.9
Cuerpo humano	0.8

Figura 10: Tabla con los coeficientes de arrastre de algunos objetos

En el ejemplo que presentamos a continuación, comprobaremos cómo afecta la resistencia del aire cuando los cuerpos se mueven con cierta rapidez.

Ejemplo 2.

En el instante t = 0 una piedra esférica de masa $m_p = 5$ kg. y 1 m. de radio cae accidentalmente del techo de una torre a una rapidez inicial $v_{0p} = 5$ m/seg. y formando un ángulo $\theta = \pi/9$ con la horizontal.
En ese mismo instante un automovilista que iba sobre una carretera rectilínea a una rapidez $v_{0a} = 50$ m/seg. ve caer la piedra y aplica los frenos para evitar chocar contra ella.



El automóvil mide 3m. de largo, 1.70 m. de ancho y 1.60 m. de alto. Su masa, junto con la del conductor, es de 850 kg. Además x coeficiente de fricción entre las ruedas del auto y el pavimento es $\mu = 0.4$.

Suponga que la fuerza aplicada por los frenos es $\vec{F}(t) = (-F, 0)$, con $F > 0$. Por otro lado, la fuerza de rozamiento entre el aire y la piedra es $\vec{F}_r(t) = -c_p \, \vec{v}_p(t)$, mientras que entre el aire y el automóvil es $\vec{F}_r(t) = -c_a \, \vec{v}_a(t)$. En este caso, c_p y c_a representan las constantes de rozamiento de la piedra y del automóvil respectivamente, $\vec{v}_p(t)$ y $\vec{v}_a(t)$ sus correspondientes velocidades.

a) Calcule el valor de las constantes c_a y c_p.

b) Si fp(t) = (xp(t),yp(t)) es la función posición de la piedra en el instante t, plantear y resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales que permita hallar la función posición de la piedra, a partir del instante en que abandona la torre.

c) Si fa(t) = (xa(t),ya(t)) es la función posición del auto en el instante t, plantear y resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales que permita hallar la función posición del auto, a partir del instante en que la piedra abandona la torre.

d) Hallar el tiempo en que tarda la piedra en caer al suelo.

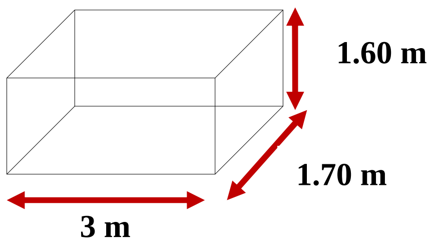
e) Aplicar el comando Manipulate para representar las trayectorias del coche y de la piedra en el intervalo $[0, t_0]$ donde t_0 es el tiempo que tarda en caer la piedra al piso. Probar para el auto distintas trayectorias posibles, dando valores de **F** en el intervalo [0, 5000]. Determinar qué magnitud mínima debe tener la fuerza de frenado para que el automóvil se detenga antes de la posición donde caerá la piedra.

Resolución:

1) Cálculo de c_a

$$c_a = \frac{\rho A \delta}{2}$$

Al coche lo consideraremos como si fuese una caja y, para calcular su área, no tendremos en cuenta su piso, pues éste no está expuesto al aire. De este modo, sus medidas son las siguientes:



Luego,

A = (1.60 m) (3 m) (2) + (1.70 m) (1.60 m) (2) + (3 m) (1.70 m) = 20.14 m^2

Por otro lado, de la tabla de la Figura 10 podemos deducir que $\delta = 0.9$. En consecuencia,

$$c_a = \frac{\rho A \delta}{2} = 11.69 \, kg/m$$

Cálculo de c_p

En este caso el coeficiente de arrastre es 0.4 y su área es 4 π. Entonces

$$c_p = \frac{\rho A \delta}{2} = 3.24 \, kg/m$$

b) Al aplicar la Segunda ley de Newton a las fuerzas que actúan sobre la piedra resulta

$$\vec{P} + \vec{F}_r(t) = m_p \vec{a}_p(t) \qquad (6)$$

Donde

$\vec{P} = (0, -m_p\, g)$

$\vec{F}_r(t) = -c_p\, \vec{v}_p(t) = -c_p\,(x'_p(t), y'_p(t))$

$\vec{a}_p(t) = (xp''(t), y''p(t))$ es la aceleración de la piedra.

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (6) se obtiene

$(0, -m_p\, g) \;\; - c_p\,(x'_p(t), y'_p(t)) =$

$= m_p\,(xp''(t), y''p(t))$

Al igualar componente a componente resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$-c_p\; x'_p(t) \;=\; m_p\; x_p''(t)$

$-m_p\; g - c_p\; y'_p(t) = m_p\; y_p''(t)$

Con condiciones iniciales

$x_p(0) = 200 \qquad\qquad y_p(0) = 60$

$x'_p(0) = -v_{0p}\;\cos(\theta) \qquad y'_p(0) = \; -v_{0p}\; sen(\theta)$

Para resolver este sistema ejecutamos los siguientes comandos del Mathematica:

vop= 5 ; θ = π/9 ; cp = 3.24; mp = 5 ; g= 9.81

DSolve [{ - cp x’p [t] = = mp x’’p[t] , {- mp g - cp y’p [t] = = mp y’’p[t] , xp[0] = = 200, yp[0] = = 60, x’p[0] = = - v0p Cos[θ] , y’p[0] = = - v0p Sin[θ] }, { xp[t] , yp[t] } , t]

La solución obtenida es

$\boldsymbol{xp(t) = e^{-0.648\, t}\,(7.25+192.74\; e^{\,0.648\, t})}$

$\boldsymbol{yp(t) = e^{-0.648\, t}\,(-20.69 + 80.69\; e^{0.648\, t} - \;\; 15.12\; e^{-0.648\, t}\,)}$

c) Nuevamente aplicamos la Segunda Ley de Newton a las fuerzas que actúan sobre el automóvil:

$\vec{F}(t) + \vec{P} \;+ \vec{N} + \;\vec{f}_c + \vec{F}_r(t) = \; m_a\, \vec{a}_a(t) \qquad (7)$

Donde

$\vec{F}(t) = \;(-F, 0)$

$\vec{P} = (0, -m_a\, g)$

$\vec{N} = (0, \;\; N)$

$\vec{f}_c = (\quad \mu\, N, 0)$ con $\mu \; = 0.4$

$\vec{F}_r(t) = -c_a\;\; \vec{v}_a(t) = -c_a\,(x'_a(t), y'_a(t)) =$

$= -c_a\,(x'_a(t), 0)$

$\vec{a}_a(t) = (xa''(t), 0)$ es la aceleración del auto.

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación (7) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$-F - \mu\, m_a\; g - c_p\; x'_a(t) \;=\; m_a\; x_a''(t)$

Con condiciones iniciales

$x_a(0) = 0 \qquad\quad x'_a(0) = v_{0a}$

La solución que resulta, al ejecutar el comando DSolve es

$\boldsymbol{xa(t) = e^{-0.013\, t}\,(-24360 \;+ 24360\; e^{0.013\, t} - 6.21\; F + 6.21\; e^{0.013\, t} + F - \;285.02\;\; e^{0.013\, t}\, t - \;0.085\; e^{0.013\, t}\, F\, t)}$

d) Para hallar el instante en que la piedra cae al piso graficamos la función altura de la piedra. Ejecutamos entonces los siguientes comandos:

yp[t_] = e$^{-0.648\, t}$ (-20.69 + 80.69 e$^{0.648\, t}$ - 15.12 e$^{-0.648\, t}$) ;

Plot [y[t] , { t , 0 , 6 }]

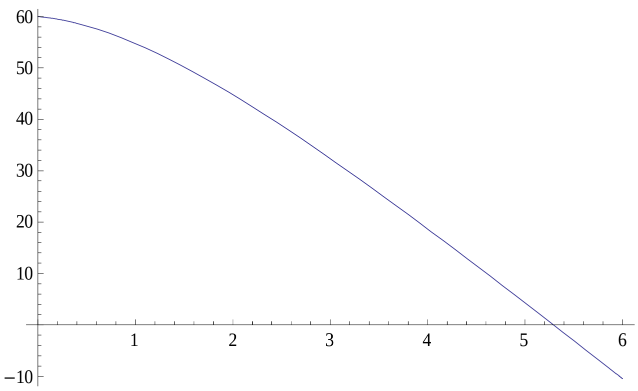


Figura 11: Gráfica de la función altura de la piedra.

Se observa que la piedra cae al piso aproximadamente a los 5.25 segundos.

e) La figura siguiente muestra el panel de control que aparece una vez ejecutado el comando Manipulate.

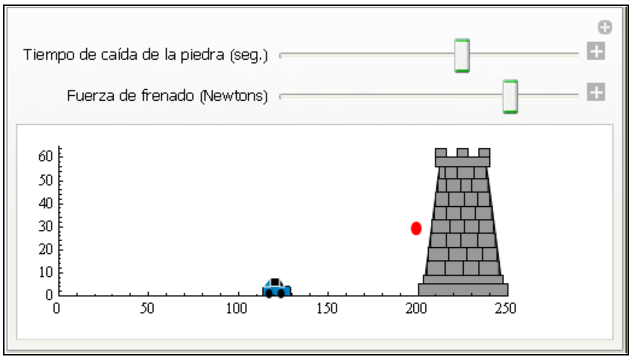


Figura 12: Panel de control para ejecutar la simulación del recorrido del auto y de la piedra, variando la magnitud de la fuerza de frenado del coche.

Al experimentar distintas fuerzas de frenado, se puede comprobar que F = 1380 Newtons es la magnitud mínima que debe tener la fuerza de frenado para que el automóvil se detenga antes de la posición donde caerá la piedra.

Conclusiones

La tecnología de las computadoras brinda una valiosa herramienta para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y Física. El software Mathematica, por la potencia y simplicidad de su manejo constituye, tanto para el docente como para el estudiante, una poderosa herramienta gráfica y de cálculo que producirá un marcado interés en el estudio y comprensión de los temas. Más aún, gracias las posibilidades de simulación que brinda, permite visualizar situaciones del mundo real, comprender mejor el fenómeno que se estudia y elaborar conclusiones de una manera más sencilla y rápida.

Referencias bibliográficas

[1] Raymond A. Serway; "Física para ciencias e ingenierías".Thomson. 2007.

[2] Francis Sears, Roger Zemansky. "Física Universitaria". Pearson Educación. 2006.

[3] David Halliday, Robert Resnick. " Fundamentos de Física".Cecsa.2006

[4] Dennis Zill , Michael Cullen. " Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera". Thomson. 2002.

[5] Samira Abdel Masih. " Aplicaciones del Mathematica a ecuaciones diferenciales, series y transformadas de Laplace". U.N.L.Z. 2007.