

Análisis Multifractal Aplicado a Imágenes Médicas

Andrea Silveti

Claudio Delrieux

Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIE (UNS-CONICET)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras — Universidad Nacional del Sur
Alem 1253 - Bahía Blanca - Argentina — claudio@acm.org (Financiado por la SECyT-UNS)

Resumen: Se presentan diferentes alternativas para estimar exponentes fractales en imágenes digitales, en particular, se trabajó sobre imágenes médicas correspondientes a mamografías y resonancias magnéticas. En base a esos exponentes se calculan los espectros multifractales y se generan nuevas imágenes a partir del mapeo en escala de grises de los valores computados local y globalmente. Se obtienen resultados satisfactorios que prometen ser de gran utilidad en la distinción de tejidos y por lo tanto, adecuados para realizar segmentación automática en este tipo de imágenes.

Palabras Clave: SEGMENTACIÓN EN IMÁGENES — EXPONENTE DE HÖLDER — MULTIFRACTALES

1. Contexto y Formación de Recursos Humanos

Este trabajo de investigación se realiza dentro del contexto del Proyecto de Investigación Acreditado *Procesamiento Inteligente de Imágenes* financiado por la SECyT-UNS, dentro del cual la Mg. Silveti realiza su trabajo de tesis doctoral bajo la dirección del Dr. Delrieux.

Como parte de las actividades asociadas al proyecto, se están dirigiendo otras 2 tesis doctorales, se desarrollan 2 trabajos finales de carrera, y se realizan cursos de grado y postgrado en Procesamiento de Imágenes.

2. Segmentación en Imágenes Médicas

La segmentación en imágenes digitales es un tema de gran relevancia dentro del procesamiento de imágenes. La misma consiste en obtener una descripción concreta en términos

de fronteras o regiones, para lo cual es preciso identificar características descriptivas de contornos que permitan detectar dichos bordes, o de regiones que faciliten su separación de manera precisa. Los métodos tradicionales de segmentación, basados en operadores diferenciales, resultan ser poco satisfactorios, sobre todo cuando son utilizados en el ámbito de la medicina para aplicaciones de asistencia en el diagnóstico. En este sentido, y considerando que el tejido humano se caracteriza por una alto grado de autosimilitud, los descriptores fractales resultan ser más adecuados[4, 7, 6].

La dimensión fractal local es una característica distintiva en los procesos de clasificación de tejidos patológicos [3]. La diferencia de regularidad entre una región, borde o punto aislado en relación al fondo o entorno permite distinguir estructuras por más irregulares que sean. Si dichas estructuras no son identificadas desde el punto de vista anatómico, pueden pensarse como desviaciones de la regularidad global de un tipo de tejido, y por lo tanto, como alguna anomalía interesante de segmentar y estudiar.

La teoría multifractal aplicada a imágenes se basa en analizar el comportamiento local en el límite de la medida local, computada en todos los puntos de la imagen. Luego se examina globalmente la estructura de este comportamiento. Esto permite reconocer, clasificar y extraer distintas características de la imagen ya sea en sentido estadístico como geométrico, ya que es posible segmentar áreas en la imagen por medio de criterios que combinen simultáneamente la distribución local de la medida (textura) junto con la estructura global (forma) del área a segmentar.

3. Análisis multifractal

Muchos objetos o fenómenos naturales exhiben propiedades fractales o de autosimilitud. Esta propiedad se caracteriza por un parámetro denominado dimensión fractal, DF, y es precisamente un exponente que describe la manera en que la estructura del objeto se repite a diferentes escalas [4, 5]. Cuando el objeto se caracteriza por poseer la misma DF en todas las escalas, se lo denomina monofractal. (por ejemplo, el conjunto de Cantor, la curva de Koch, y el triángulo de Sierpinski). Por el contrario, hay objetos para los que el exponente de autosimilitud depende de la escala, por lo que se los denomina multifractales [1].

3.1. Exponente de Hölder y Dimensión de Hausdorff

Informalmente, el análisis multifractal, analiza el comportamiento local en el límite de una medida μ en todos los puntos del conjunto, esto es, obtiene el denominado *exponente de Hölder* α que describe localmente la regularidad de dicha medida. Sea E una estructura dividida en celdas disjuntas E_i de lado ϵ , tales que $E = \cup_i E_i$. Cada celda E_i se caracteriza por un valor $\mu(E_i)$ a partir de una medida μ cuyo dominio está dado precisamente por dichas celdas. Desde el punto de vista del análisis multifractal, es conveniente expresar esta medición en relación al tamaño de la celda y por lo tanto, notamos

$$\alpha_i = \frac{\ln(\mu(E_i))}{\ln(\epsilon)}, \quad (1)$$

cuando ϵ tiende a cero, E_i tiende a un punto de la estructura y por lo tanto se define el Exponente de Hölder en un punto observado como

$$\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_i). \quad (2)$$

El exponente α calculado en un punto de la estructura E , caracteriza en forma local la regularidad de la misma. El siguiente paso es describir la regularidad global de la estructura, para lo cual es preciso obtener la distribución de α en E . Se procede del mismo modo que para el exponente del Hölder, es decir, se obtiene un $f(\alpha_i)$ que relaciona la cantidad de

celdas de lado ϵ caracterizadas por α_i con el tamaño de la celda del siguiente modo

$$f_\epsilon(\alpha_i) = -\frac{\ln(N_\epsilon(\alpha_i))}{\ln(\epsilon)}, \quad (3)$$

donde el valor límite cuando ϵ tiende a cero, corresponde precisamente a la dimensión fractal de los subconjuntos de E α -caracterizados –dimensión de Hausdorff de la distribución de α –, a lo que se denomina *espectro multifractal* $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f_\epsilon(\alpha)). \quad (4)$$

3.2. Aplicación del análisis multifractal en Imágenes

Los algoritmos desarrollados trabajan con imágenes digitales 2D en escala de grises de dimensión $n \times n$ con $n = 2^k$ y k positivo. Para obtener el exponente de Hölder (Ec. 2) en un pixel (x,y) de la imagen, se computa la pendiente de la regresión lineal obtenida por cuadrados mínimos sobre un diagrama log–log con valores $\mu(E_i)$ y ϵ , donde $\epsilon = 2^{j+1}$ con $j \geq 0$ y los subconjuntos E_i son entornos de lado $\epsilon X \epsilon$ centrados en el pixel (x,y) . Es posible obtener una α -imagen de la misma dimensión que la imagen original, asignando a cada pixel de la nueva imagen la luminancia resultante de mapear el coeficiente de Hölder α computado en pixel de la imagen original.

Por simplicidad, se utiliza la Dimensión Box [5] para computar la dimensión de Hausdorff definida en la Ec. 4. Computar esta dimensión para un determinado exponente de Hölder α es equivalente a computar la dimensión Box de una imagen binarizada con parámetro α . Sin embargo, dado que el exponente de Hölder es un valor no entero, y en teoría, es posible obtener $n \times n$ valores diferentes en la imagen, es necesario establecer una cantidad C de clases de equivalencia de valores α y computar el espectro multifractal sólo para esos valores.

Sean α_{min} y α_{max} el mínimo y máximo coeficiente de Hölder de la imagen, se obtienen C valores $\alpha_c = \alpha_{min} + (c-1)((\alpha_{max} - \alpha_{min})/C)$ sobre el intervalo $[\alpha_{min}.. \alpha_{max}]$. Luego, α pertenece a la clase de equivalencia de α_c con $c = 1, 2, \dots, C$, si $\alpha_c \leq \alpha < \alpha_{c+1}$. El caso particular $\alpha = \alpha_{max}$ pertenece a la clase de equivalencia de α_C . Finalmente, se obtiene

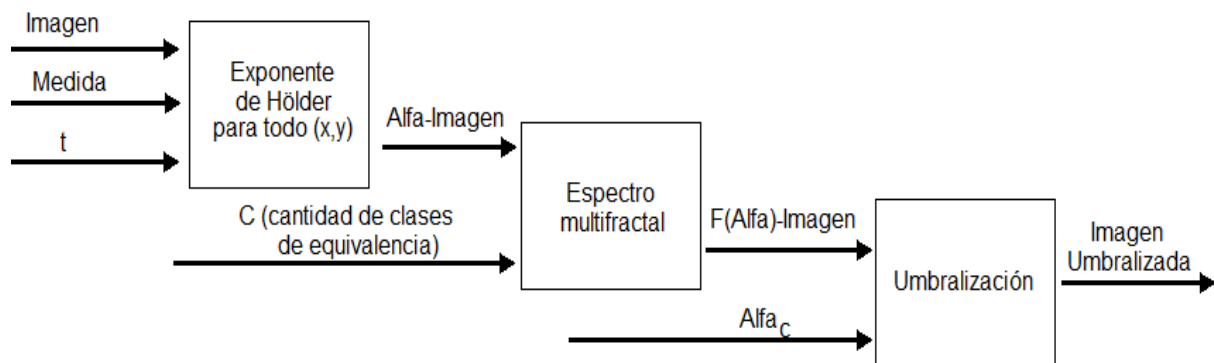


Figura 1: Pipeline de procesamiento.

la pendiente de la correlación en un espacio log—log entre $N_\epsilon(\alpha_c)$ y ϵ , tomando nuevamente $\epsilon = 2^j + 1$ con $j \geq 0$. Dicha pendiente corresponde a $f(\alpha_c)$, y debe computarse para $c = 1, 2, \dots, C$ para poder generar una nueva imagen $f(\alpha)$ -imagen de dimensión $n \times n$ cuantizada con sólo C valores de luminancias—uno por cada $f(\alpha_c)$ —. Esta imagen es tal que todos los pixels de la imagen original con exponentes de Hölder pertenecientes a la clase de equivalencia α_c tomarán el mismo valor de luminancia correspondiente a $f(\alpha_c)$.

3.3. Medidas multifractales

Informalmente se dijo que el análisis multifractal, analiza el comportamiento local en el límite de una medida μ en todos los puntos del conjunto. Diferente medidas, dan lugar a diferentes exponentes de Hölder, y en consecuencia diferentes indicadores de la regularidad del conjunto. Esto quiere decir que dependiendo de la información que se desea obtener o extraer de una imagen, es posible elegir entre distintas alternativas. En este trabajo se implementaron medidas de capacidad—máximo, mínimo, isomedia, sumatoria— (por ser las más utilizadas) [13], y medidas diferenciales de capacidad—Diferencia Absoluta, Diferencia Absoluta Central— que coinciden con los coeficiente de autocorrelación lineal y cuadrático [11, 10, 12]. En todos los casos, las medidas se basan en el nivel de gris de los pixels de su dominio.

Sean (x, y) un pixel de la imagen original, $Imagen(i, j)$ la luminancia del pixel (i, j) , t el tamaño del entorno centrado en (x, y) o dominio de la medida, Ω el conjunto de pixels (i, j) en el dominio de la imagen, Ω^* el con-

junto de pixels (i, j) con luminancia distinta de cero en el dominio de la imagen; se definen las siguiente medidas $\mu_t(x, y)$:

$$Max_t(x, y) = \max_{(i,j) \in \Omega} Imagen(i, j), \quad (5)$$

$$Min_t(x, y) = \min_{(i,j) \in \Omega^*} Imagen(i, j), \quad (6)$$

$$Iso_t(x, y) = card\{(i, j) \mid Imagen(x, y) \equiv Imagen(i, j), (i, j) \in \Omega\}, \quad (7)$$

$$Sum_t(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Omega} Imagen(i, j), \quad (8)$$

$$DifAbs_t(x, y) = \max_{(i,j),(k,l) \in \Omega} | Imagen(i, j) - Imagen(k, l) |, \quad (9)$$

$$DifAbsCentral_t(x, y) = \max_{(i,j) \in \Omega} | Imagen(x, y) - Imagen(i, j) |. \quad (10)$$

Esto da lugar a la posibilidad de explorar un amplio abanico de descriptores característicos en imágenes, adaptando la segmentación multifractal al caso de estudio en particular. En la Fig. 1 se ilustra el pipeline de procesamiento finalmente obtenido con esta metodología de segmentación.

4. Resultados

En la Fig. 2 se observa la interfase con el usuario de la herramienta desarrollada para testear esta metodología. En la misma se aprecia la imagen original a ser procesada, la imagen resultante de aplicar el exponente local de Hölder, la imagen $f(\alpha)$, y una imagen binaria obtenida por umbralización de un intervalo de valores elegido de entre el espectro multifractal. En la parte inferior de la interfase de

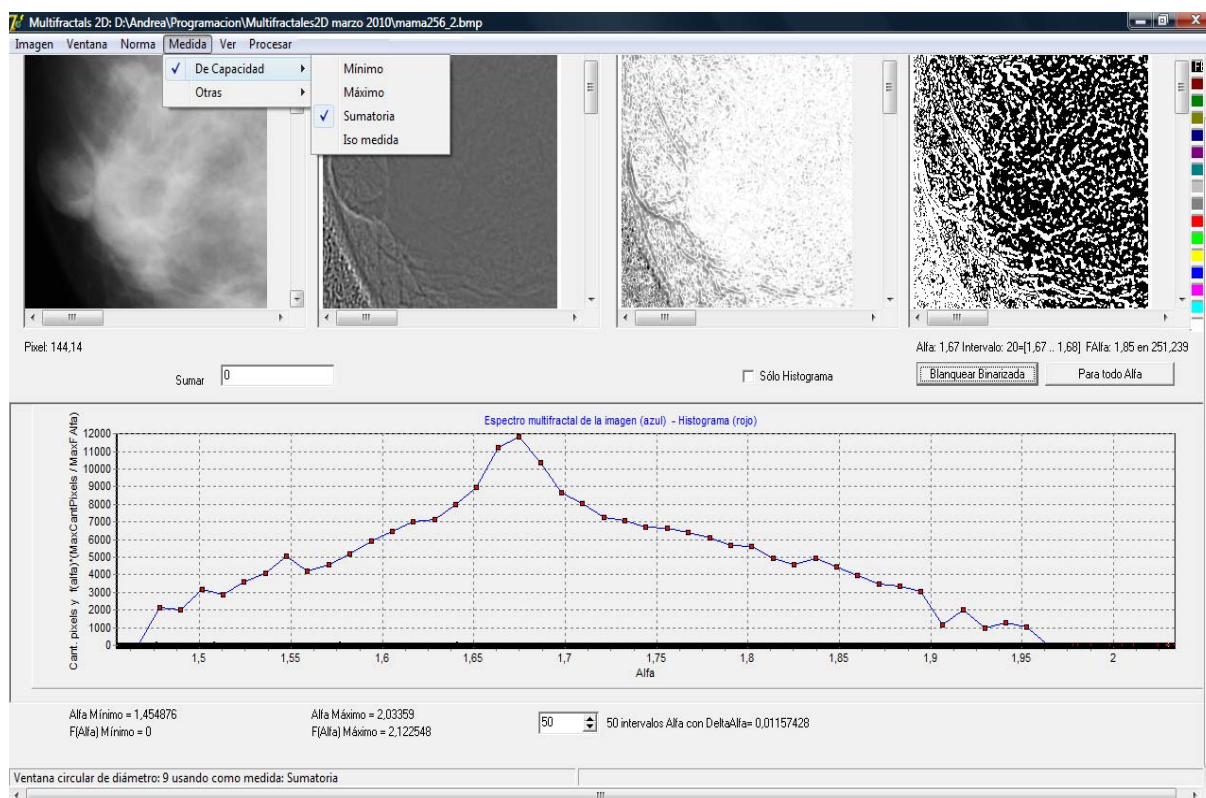


Figura 2: Interfase del usuario de la herramienta desarrollada.

la herramienta, se observa precisamente dicho espectro, lo cual permite al usuario elegir el intervalo de valores que estadísticamente parezca ser más significativo. La imagen mostrada proviene de una mamografía digital, y su procesamiento puede derivar en la detección temprana de microcalcificaciones, así como en la comparación y seguimiento de la evolución de tejidos patológicos. La herramienta tiene implementados todos los métodos y sus variaciones descritos en la Sección anterior, tal como se puede apreciar parcialmente en los menús descolgables.

En la Fig. 3 se puede observar como ejemplo el procesamiento de una sección o tajada de una imagen tomográfica. Este procesamiento, aplicado por secciones, podría derivar en métodos de segmentación automática de tejidos.

5. Conclusiones y Trabajos Futuros

Se presentó el desarrollo de un sistema de análisis de imágenes digitales basado en la teoría multifractal, y cuya aplicación está pen-

sada fundamentalmente para el procesamiento de imágenes médicas. Se introdujeron los conceptos matemáticos subyacentes, así como las diferentes metodologías asociadas. Se desarrolló una herramienta que implementa dichos conceptos, y se mostraron algunos resultados preliminares en imágenes de tomografía computada y de mamografías digitales.

En este momento estamos trabajando en validar los resultados de las mediciones que realiza la herramienta, con imágenes y conjuntos cuyo espectro puede conocerse teóricamente. Al mismo tiempo, se está avanzando en la integración de un equipo multidisciplinario que incluya profesionales radiólogos y especialistas afines, para permitir una mejor interpretación de las imágenes y evaluación de la calidad de los resultados.

Referencias

- [1] C. Evertsz and B. Mandelbrot. Multifractal Measures. In P. Andrews H. Peitgen, H. Jurgens, editor, *Chaos and Fractals*. Springer, Amsterdam, 1992.
- [2] A. Fournier, D. Fussell, and L. Carpen-

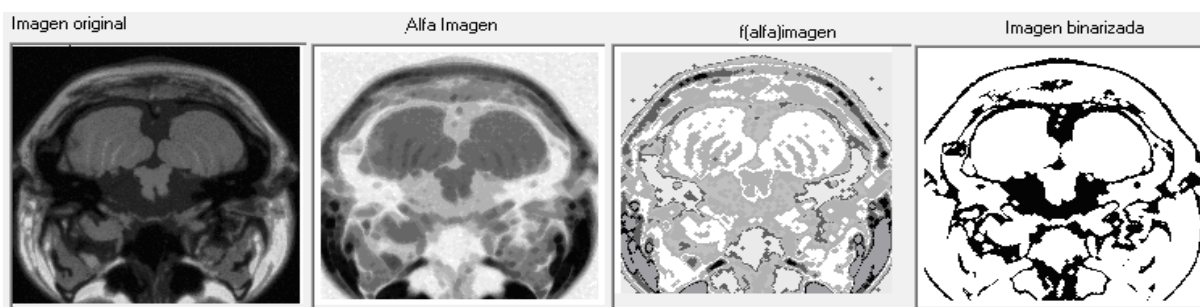


Figura 3: Ejemplo de procesamiento de una imagen tomográfica.

- ter. Computer Rendering of Stochastic Models. *Communications of the ACM*, 25(6):371–384, 1982.
- [3] Pascal Mignot Jacques Levy-Vehl and Jean-Paul Berror. Multifractal, texture, and Image analysis. *CVPR*, pages 661–664, 1992.
- [4] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1983.
- [5] H.-O. Peitgen and D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [6] Irine S. Reljin and Branimir D. Reljin. Fractal geometry and Multifractals in analyzing and rocessing medical data and images. *Archive of Oncology*, 10(4):283–293, 2002.
- [7] Irine S. Reljin, Branimir D. Reljin, Ivan Pavlovic, and Ivana Rakocevic. Multifractal analysis of gray-scale images. *MEleCon*, pages 490–493, 2000.
- [8] J. C. Russ. *Fractal Surfaces*. Plenum Press, New York, 1994.
- [9] J. C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, Boca Raton, FL, third edition, 1999.
- [10] A. Silvetti and C. Delrieux. Dimensión Fractal de Autocorrelación Cuadrática en Imágenes Digitales. In *XII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, Corrietes y Resistencia, Argentina, 2007. CACIC, .
- [11] A. Silvetti and C. Delrieux. Medición de la Dimensión Fractal en Superficies. In *Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*, pages 81–85, Trelew, Argentina, 2007. WICC, .
- [12] A. Silvetti and C. Delrieux. Un Método Robusto para Evaluar Dimensión Fractal Local en Imágenes. In *XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control*, Río Gallegos, Argentina, 2007. RPIC, .
- [13] J. Lévy Véhel and P. Mignot. Multifractal Segmentation of Images. *Fractals*, 2(3):379–382, 1994.