Práctica de la Especialidad

Oscilaciones estelares no radiales

Alumno: Alejandro Hugo Córsico

Director: Dr. Omar G. Benvenuto

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Paseo del Bosque S/N, (1900) La Plata, Argentina

Septiembre de 1998

Received ______________________; accepted ______________________

ABSTRACT

Esta Práctica de Especialidad está dedicada al estudio de las pulsaciones no radiales que experimentan ciertas clases de estrellas en alguna etapa de su evolución.

En la Introducción revisamos las características mas importantes de las pulsaciones no radiales. En particular ponemos el énfasis en las consideraciones teóricas y definiciones básicas necesarias para enfrentar el problema de determinar los modos adiabáticos de pulsación no radiales en el marco de una teoría lineal, para modelos estelares en equilibrio altamente idealizados.

En la Parte 2 damos una revisión completa de los aspectos observacionales de las pulsaciones no radiales en estrellas Enanas Blancas. Esta elección está motivada por nuestro deseo de estudiar en el futuro las propiedades oscilatorias de este tipo de estrellas a través de un Código Pulsacional, el cual es el tema central de esta Práctica.

En la Parte 3, presentamos el sistema de ecuaciones diferenciales que debe ser resuelto para obtener las autofrecuencias y autofunciones de las oscilaciones no radiales en la aproximación adiabática. A continuación describimos el método numérico que hemos desarrollado para tal fin, el cual se basa en la técnica de Henyey utilizada ampliamente en cálculos de estructura y evolución estelar. En este punto describimos en detalle el algoritmo empleado, que permite obtener una solución del problema a través de la relajación, en varias iteraciones, de una solución inicial aproximada. Seguidamente presentamos los resultados obtenidos al aplicar el código a un modelo estelar simple, que consiste en una polítropa de índice $n = 3$.

Contents

1. Introducción.

1.1. Qué son las pulsaciones no radiales?

Actualmente se sabe con certeza que las pulsaciones de estrellas variables intrínsecas clásicas, del tipo Cefeidas, RR Lira y Mira, son provocadas por oscilaciones radiales esfericamente simétricas. Para esta clase de oscilaciones, las variaciones en las curvas de luz y velocidad radial son causadas por meras contracciones y expansiones alternadas de la estrella como un todo. Dicho de otra manera, un vector que describa el desplazamiento de un dado elemento de fluído estelar estará siempre orientado en dirección radial.

Por otra parte, hay evidencia observacional que indica variaciones en luminosidad y velocidad radial en ciertas estrellas que no pueden ser satisfactoriamente explicadas por la presunción de oscilaciones puramente radiales, pero sí invocando un tipo mas general de movimientos: las pulsaciones no radiales. En contraste con lo que sucede en las pulsaciones radiales, cuando una estrella pulsa en forma no radial, lo que hace es desviarse en forma periódica de su simetría esférica, habiendo dependencia no solo con el radio estelar, sino también con los ángulos acimutal y polar. El desplazamiento de una porción de fluído a partir de su posición de equilibrio puede estar dirigido en principio en cualquier dirección, y no necesariamente paralelo a un radio vector con origen en el centro estelar. Es evidente que las pulsaciones radiales son un caso particular (altamente especializado) de las pulsaciones no radiales.

1.2. Estrellas que pulsan en forma no radial

Existen ciertos tipos de estrellas de las cuales se tienen fuertes evidencias observacionales que sugieren oscilaciones no radiales. La Tabla 1 (adaptada de Unno et al. 1989) proporciona los principales rasgos de las oscilaciones en estos tipos de estrellas. Su localización sobre el diagrama HR (Hertzprung-Russel) se muestra en la Figura 1.

TABLA 1

Evidencias observacionales de estrellas las cuales se supone que oscilan en forma no radial

Tipo de estrella	Período	Fenómeno
Variables tempranas O-B		
Variables β Cephei	$3 \sim 6$ hs	Variaciones de luz y velocidad radial
Variables 53 Per	$0.5 \sim 2$ días	Variaciones en perfiles de líneas
Variables ζ Oph	algunas horas	Variaciones en perfiles de líneas
Variables A		
Estrellas Ap	$5 \sim 15$ min	Variaciones de luz
Estrellas δ Scuti	$1 \sim 2$ hs	Variaciones de luz y en perfiles
Enanas Blancas Variables		
Enanas Blancas variables DA	$100 \sim 1000$ seg	variaciones de luz
Enanas Blancas variables DB	$100 \sim 1000$ seg	variaciones de luz
Enanas Blancas variables DO	$400 \sim 1600$ seg	variaciones de luz
Sol	$5 \sim 10$ min	Variaciones de luz y velocidad radial
	$1 \sim 3$ hs	Variaciones de luz y velocidad radial
Enanas tardías	$5 \sim 10$ min	Variaciones de luz
Supergigantes tempranas e intermedias	decenas de días	Variaciones de luz y velocidad radial semiregulares

El hecho de que no se encuentren aún pruebas observacionales para otros tipos de estrellas no significa que las oscilaciones no radiales sean un fenómeno exclusivo de las clases que figuran en el cuadro. Mas bién, se cree que tales movimientos oscilatorios generales deben estar presentes en la mayor parte de otras estrellas variables, pero que por distintas causas, son actualmente inobservables. Un ejemplo ilustrativo es el del Sol, el cual ejecuta oscilaciones no radiales con alto grado armonico esférico l (ver subsección siguiente), que pueden ser rigurosamente estudiadas gracias a la extrema cercanía, pero que nunca podrían ser directamente identificadas en estrellas distantes. Por otra parte, y teniendo en cuenta que las oscilaciones no radiales pueden ser excitadas en principio por una gran variedad de perturbaciones, la ocurrencia de tales pulsaciones debe ser mucho mayor de lo que indican las observaciones en la actualidad.

1.3. Tratamiento del problema en la teoría lineal

Las ecuaciones fundamentales que describen las deformaciones y oscilaciones de una estrella son las ecuaciones de la hidrodinámica, esto es, la de conservación de la masa, del momentum y de la energía. Estas deben ser suplementadas por la ecuación de Poisson para el campo gravitatorio y una ecuación que contemple el flujo de radiativo o convectivo.

En lo que sigue, vamos a llamar *modelo estelar en equilibrio* a un estado no perturbado de una estrella aislada (no miembro de un sistema múltiple) esfericamente simétrica, que no oscila ni rota y no tiene campo magnético . El objetivo de la teoría de pulsaciones es estudiar los movimientos oscilatorios que se originan cuando se aplican perturbaciones (variaciones) a las variables físicas de la configuración en equilibrio, las cuales inicialmente dependen únicamente de la coordenada radial r.

Si tales variaciones son pequeñas en relación a los respectivos valores del modelo en equilibrio, entonces lo que usualmente se hace es aplicar una *teoría lineal* (Unno et al. 1989, Cox 1980, Kippenhahn & Weigert 1990). En esta teoría, variaciones Lagrangianas o Eulerianas, digamos δf o f', respectivamente, son sumadas a los valores en equilibrio para dar las variables perturbadas:

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + f^{'}(r, \theta, \phi, t) \tag{1}$$

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + \delta f(r, \theta, \phi, t) \tag{2}$$

con la condición $\delta f,\ f^{'} \ll f_0$.

La perturbación Euleriana $f^{'}$ es la variación de una cantidad física para un dado punto del espacio, mientras que la perturbación Lagrangiana δf es la variación de tal cantidad inherente a un dado elemento de fluído. La operación consistente en reemplazar todas las variables físicas con la formas (**??**) y (**??**) en las ecuaciones diferenciales básicas se denomina linealización. Esta sustitución, teniendo en cuenta que la solución no perturbada (digamos las f_0) es también una solución de las ecuaciones, y despreciando todas las potencias mayores a 1 y productos de las variaciones, conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuya solución da el comportamiento de las variaciones en espacio y tiempo. La gran ventaja de la linealización es que ahora las ecuaciones son lineales, y por lo tanto, mucho mas manejables que las originales.

En la teoría lineal que estamos describiendo, la dependencia angular de las variaciones está dada a través de armónicos esféricos:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\phi} \tag{3}$$

donde θ y ϕ son los ángulos polar y acimutal respectivamente, y $P_l^m(\cos\,\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre, los cuales se generan mediante:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}\ (1-x^2)^{m/2}\ \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \tag{4}$$

con $x = \cos\theta$. El grado armónico está dado por el índice l, el cual es un entero positivo o cero. El valor del entero m, orden acimutal, está determinado por l de la siguiente forma: $m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$. Así, por cada l hay $(2l{+}1)$ valores posibles para m.

Para la dependencia temporal de todas las perturbaciones se asume la forma periódica $e^{i\sigma t}$, donde σ es una cantidad en principio compleja, y t es el tiempo.

La dependencia con el radio es a través de una función de la distancia al centro, digamos $\delta f(r)$ ó $f^{'}(r)$. De esta manera las variaciones pueden ser escritas en la forma:

$$f^{'}(r,\theta,\phi,t) = f^{'}(r)\ Y_l^m(\theta,\phi)\ e^{i\sigma t} \tag{5}$$

$$\delta f(r,\theta,\phi,t) = \delta f(r)\ Y_l^m(\theta,\phi)\ e^{i\sigma t} \tag{6}$$

La correspondiente expresión para el vector desplazamiento $\vec{\xi}$ ($\equiv\ \vec{\delta r}$, perturbación Lagrangiana de la distancia radial) es:

$$\vec{\xi}(r,\theta,\phi,t) = \left(\breve{r}\ \xi_r(r) + \breve{\theta}\ \xi_t(r)\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ + \breve{\phi}\ \xi_t(r)\ \frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\ Y_l^m(\theta,\phi)\ e^{i\sigma t} \tag{7}$$

donde ξ_r es la componente radial del desplazamiento y ξ_t es la componente horizontal (dependiente de r solamente).

Para ilustrar como se ven los modos oscilatorios sobre la superficie estelar (en el caso en que el disco estelar pudiera resolverse) examinemos la Figura 2. Para un dado instante fijo de tiempo, el patrón consiste de regiones de la superficie que tienen alternadamente signos opuestos; por ejemplo zonas con material estelar que se mueven hacia el observador alternando con zonas que receden; zonas con temperatura elevada alternando con zonas mas frías, etc. Estas zonas opuestas se distinguen en la figura con tonos oscuros y claros. El caso que se ilustra corresponde a $l = 3$, $m = 0, 1, 2, 3$. Los modos con $m = 0$ se denominan *modos zonales*, como por ejemplo $l = 3$ $m = 0$. En estos modos las oscilaciones tienen l nodos, los cuales son planos donde no hay variaciones, que al intersectar la superficie estelar dan líneas de movimiento nulo; en los modos zonales son líneas de latitud constante (paralelos). Los modos con $l = |m|$ se denominan *modos sectoriales*, y los planos nodales pasan todos por el centro de la estrella; al intersectar la superficie estelar dan lugar a m líneas nodales de longitud constante (meridianos), como por ejemplo sucede en $l = 3$ $m = 3$ del dibujo. El resto de los posibles casos para m con l fijo dan los *modos teserales*, cuyas líneas de movimiento cero son de los dos tipos, de longitud y latitud constantes.

1.4. El problema de autovalores

Una vez que se han sustituído las variaciones escritas en la forma (**??**) y (**??**) en las ecuaciones linealizadas, el resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas cuyas incógnitas son las variaciones δf ó f', esto es, las funciones que dan la marcha de las variaciones desde el centro hasta la superficie del modelo en equlibrio. En el caso general este sistema está conformado por seis ecuaciones de primer orden en variable compleja (doce ecuaciones en variable real)[1] las cuales, junto con las condiciones de borde adecuadas conforman un problema de autovalores. La naturaleza del problema de autovalores determina que el sistema de ecuaciones tiene soluciones únicamente para ciertos valores, en general discretos, de la cantidad σ^2, la cual es por lo tanto el autovalor del problema. La parte real de σ, σ_R, representa la frecuencia angular de las oscilaciones, y la parte imaginaria σ_I proporciona la tasa de crecimiento de la amplitud de las oscilaciones. Por cada autovalor σ^2 que se obtiene al resolver el sistema, se determinan también las

[1]Ver discusión en Cox 1980, página 224.

variaciones δf ó f', llamadas autofunciones.

1.5. La aproximación adiabática

Si se elimina en el tratamiento teórico la posibilidad de ganancias y pérdidas de calor por parte del fluído al oscilar, lo que se hace es utilizar la *aproximación adiabática*. Matemáticamente esto implica dejar de lado las ecuaciones del flujo y la energía, y suponer oscilaciones adiabáticas, caracterizadas por la relación:

$$\frac{\delta p}{p_0} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho_0} \tag{8}$$

que vincula las variaciones Lagrangianas de la presión y la densidad. Los subíndices cero indican cantidades del modelo en equilibrio y Γ_1 es el primer exponente adiabático

$$\Gamma_1 = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right|_S \tag{9}$$

El sistema resultante es entonces uno de cuatro ecuaciones lineales de primer orden en variables reales[2], el cual con las condiciones de borde en el centro y la superficie constituye un problema de autovalores σ^2. Ahora el autovalor σ^2 es real, con σ la frecuencia angular de la oscilación. La solución de este problema proporciona los infinitos modos posibles de oscilación, que se ordenan usualmente a través de un número entero k, llamado orden radial. Si tratamos con un modelo en equilibrio "suficientemente simple", es decir, químicamente homogéneo, que carece de zonas convectivas y radiativas alternadas, de concentración de masa no muy pronunciada, entonces el orden radial k es exactamente igual (sin contar el

[2]Ver Cox 1980, página 224.

nodo en $r = 0$) al número de nodos de $\xi_r(r)$[3]. Los nodos en dirección radial son superficies esféricas concéntricas sobre las cuales el movimiento es nulo; los radios de tales superficies satisfacen la ecuación:

$$\xi_r(r_i) = 0 \tag{10}$$

con $i = 1, 2, 3, ..., k$.

Una característica para destacar es la degeneración de los modos. En efecto, el orden acimutal m no aparece en las ecuaciones diferenciales (a diferencia de l), lo que implica que ni la autofrecuencia σ ni las autofunciones dependerán de m. De esta forma habrá $(2l+1)$ modos degenerados por cada valor de l. La rotación (u otros apartamientos de la simetría esférica, como el que induce la presencia de un campo magnético) ocasiona una dependencia de las autofrecuencias y autofunciones con el orden acimutal, con lo cual la degeneración es removida.

La utilización de la teoría lineal permite tratar cada modo de oscilación con dados valores de (l,k,m) en forma individual, ya que se supone que los modos no interactúan entre sí[4].

---

[3]Se ha comprobado que por ejemplo, para modelos en equilibrio con alta condensación central de masa (como en una polítropa de índice $n = 4$) esta correspondencia entre el número k y el número de nodos desaparece.

[4]Este análisis se denomina *análisis de modos normales.*

1.6. Descripción cualitativa de los modos

Se puede realizar una descripción general de las oscilaciones estelares no radiales restringiéndonos al caso adiabático lineal. Esto es viable debido a que los rasgos cualitativos de las autofunciones y autofrecuencias que se obtienen de esta manera no difieren demasiado de los que surgen al tener en cuenta efectos no adiabáticos no lineales, siempre que éstos sean pequeños[5].

En base al argumento dado, describiremos a continuación las características principales de los modos. En primer lugar, el espectro de autofrecuencias está claramente dividido en cuatro clases de modos diferentes:

- modos p
- modos f (para $l \geq 2$)
- modos g^+
- modos g^-

Los modos p están caracterizados por variaciones Eulerianas de presión $p^{'}$ relativamente grandes, y estas variaciones son las principales responsables de las fuerzas de restitución que actúan durante las oscilaciones. Estos modos, también referidos como *modos acústicos*, corresponden a altas frecuencias de oscilación, y tales frecuencias se incrementan con valores de k y l crecientes. El movimiento del fluído al ejecutar modos p es mayormente radial; tienen gran similitud cualitativamente con las ondas de sonido.

[5]Sin embargo es necesario tener en cuenta los efectos no adiabáticos para hacer estudios sobre la estabilidad de un dado modo de pulsación.

Los modos g, por otra parte, están caracterizados por relativamente pequeñas variaciones Eulerianas de la presión, y la principal fuerza de restitución actuante es debida a la gravedad (flotación). El movimiento del fluído estelar es principalmente horizontal (tangencial). Estos modos, también referidos como *modos gravedad*, corresponden al dominio de baja frecuencia del espectro de oscilación. Tales frecuencias, contrariamente a lo que sucede en los modos acústicos, disminuyen con el aumento de k para un dado l. Entre los modos g se distinguen los g^+ y los g^-. Los modos g^- son dinámicamente inestables, correspondiendo a valores $\sigma^2 < 0$ o sea σ imaginario puro. Esto significa que crecen o decrecen exponencialmente en el tiempo; además se ha encontrado que existen con carácter espacial oscilatorio únicamente en zonas estelares convectivas. Los modos g^+ en cambio son dinámicamente estables y para ellos siempre $\sigma^2 > 0$, con lo que σ es real. Esto implica que son modos oscilatorios en el tiempo; además se encuentra que pueden oscilar espacialmente en regiones radiativas de la estrella. Esta situación es ilustrada en la Figura 3 en forma esquemática, para un modelo estelar que consiste de un núcleo y una envoltura convectivos limitando una region radiativa intermedia. Un resultado adicional que se desprende de la figura es que un modo g^+ puede ser oscilatorio espacialmente aún en una región convectiva si ésta se encuentra en la parte externa de la estrella. La importante cantidad A es definida como:

$$A = \frac{d \ln \rho_0}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p_0}{dr} \tag{11}$$

y está relacionada con el criterio de Schwarzchild para la convección:

$A < 0$ indica una región radiativa,

$A > 0$ indica una zona convectiva.

El único modo f, o *modo Kelvin*, existe sólo para $k = 1$ y $l > 1$ y separa los modos acusticos de los modos g, en el sentido de que su autofrecuencia para un dado l (> 1) cae normalmente entre las autofrecuencias de los modos p y g para cada k. En modelos en equilibrio lo suficientemente simples este modo no posee nodos en $\xi_r(r)$. Es muy instructivo dibujar los valores de l versus el cuadrado de la frecuencia, como en la Figura 4. El esquema muestra la distribución de los autovalores σ^2 contra l para varios modos. Se nota que los modos p, f y g existen únicamente para $l > 0$ y que $\sigma^2 = 0$ para $l = 1$ en el modo f. Las líneas punteadas del dibujo, que llegan hasta el eje de la $(frecuencia)^2$, proporcionan las autofrecuencias correspondientes para $(k-1)$ para los modos modos radiales (con $l = 0$). Se infiere claramente que los modos p pueden considerarse como las analogías no radiales de los modos radiales. Pero el modo f y los modos g no poseen analogías radiales.

Los modos oscilatorios descriptos pertenecen a la clase de *modos esferoidales*, que se distinguen de los llamados *modos toroidales* los cuales son movimientos no oscilatorios ($\sigma^2 = 0$) y para ellos $p^{'} = \rho^{'} = \Phi^{'} = 0$. Los modos toroidales son importantes bajo ciertas circunstancias: se vuelven dependientes del tiempo (oscilatorios) en estrellas rotantes y/o con campo magnético, y se denominan modos r.

1.7. Aproximación de Cowling

Para tornar mas sencillo el tratamiento matemático de las oscilaciones no radiales es apropiado adoptar la aproximación:

$$\Phi^{'} = 0 \tag{12}$$

es decir, despreciar la variación Euleriana del potencial. Este tratamiento simplificado se denomina aproximación de Cowling. Es particularmente válido para modos con grandes valores de l y k, para los cuales las contribuciones a $\Phi^{'}$ debidas a ciertas regiones del medio son canceladas, en promedio, por contribuciones equivalentes y contrarias debidas a otras partes del medio. Esto es, las fluctuaciones locales en el potencial gravitacional tienden a suavizarse. Otra circunstancia en la que la aproximación de Cowling es válida es el caso en que la masa está fuertemente acumulada en la región central de la estrella, de tal forma que las variaciones en densidad no producen grandes cambios en el potencial en los puntos externos de la estrella. Por otra parte, además de simplificar el tratamiento, la aproximación de Cowling no altera la naturaleza matemática básica del problema de autovalores y por lo tanto las características del espectro de frecuencias no son afectadas. Estas cualidades la hacen especialmente útiles para discusiones teóricas y métodos asintóticos para calcular autovalores.

Siguiendo a Ledoux (1974), la imposición de $\Phi^{'} = 0$ reduce el número de ecuaciones a dos, en el problema adiabático lineal, para las incógnitas ξ_r y $p^{'}$:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} \; u = \left[\frac{l(l+1)}{\sigma^2} - \frac{gr^2}{\Gamma_1 p}\right] y \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dr} + yA = \frac{1}{r^2}(\sigma^2 + Ag) \; u \tag{14}$$

con

$$u = r^2 \; \xi_r \tag{15}$$

$$y = \frac{p^{'}}{\rho} \tag{16}$$

siendo g la aceleración de la gravedad local,

$$g(r) = G\ \frac{M(r)}{r^2} \tag{17}$$

con G la constante de gravitación y $M(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r (los subíndices indicando cantidades en equilibrio se omiten por simplicidad).

Eliminando u a partir de las ecuaciones (**??**) y (**??**), y despreciando términos en $\frac{1}{\sigma^2}$, obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{dy}{dr}\left(\frac{2}{r}\ + \frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{dr}\right) + y\ \left[\frac{\sigma^2\rho}{\Gamma_1 p} + \frac{1}{r^2}\ \frac{d}{dr}(r^2\ A) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] = 0 \tag{18}$$

para el caso límite $\sigma^2 \to \infty$. Definimos la velocidad adiabática del sonido a la cantidad c, tal que $c^2 = \Gamma_1 p/\rho$. Debido a que el único término en σ^2 es proporcional a σ^2/c^2, las soluciones deben corresponder a modos acústicos asociados con ondas que se propagan con velocidad c.

Para σ^2 suficientemente pequeño ($\sigma^2 \to 0$), y eliminando y a partir de las ecuaciones (**??**) y (**??**), obtenemos:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{dr} + u\ \left[-\ \frac{Ag}{\sigma^2}\ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\ \frac{dp}{dr}\right)\right] = 0 \tag{19}$$

Aquí el único término conteniendo σ^2 es proporcional a $-A\ g\ l(l+1)\ /\sigma^2 r^2$ y puede demostrarse que esto indica modos gravedad propagándose.

Tanto la ecuación (**??**) como la ecuación (**??**) son del tipo conocido como de Sturm-Liouville, la primera para el autovalor σ^2 y la segunda para el autovalor $1/\sigma^2$. Así, es posible un número infinito de oscilaciones con muy largos períodos, así como también un infinito número de oscilaciones con períodos indefinidamente pequeños.

En definitiva, bajo la aproximación de Cowling nuevamente aparecen los espectros de modos p y g, así como también el modo f, con las características ya vistas en la subsección anterior.

1.8. Frecuencias críticas

Las propiedades detalladas de las oscilaciones no radiales dependen en gran medida de dos frecuencias características, la frecuencia de Brunt-Väisälä, N, y la frecuencia de Lamb, L_l, dadas por:

$$N^2 = -gA = g\left(\frac{1}{\Gamma_1}\,\frac{d\ln p}{dr} - \frac{d\ln \rho}{dr}\right) \tag{20}$$

$$L_l^2 = l(l+1)\,\frac{c^2}{r^2} \tag{21}$$

La frecuencia de Brunt-Väisälä es la frecuencia con la que un elemento aislado de fluído que es desplazado verticalmente oscila adiabáticamente en un medio convectivamente estable ($A < 0$), con la fuerza de empuje (buoyancy) como única fuerza de restitución. La frecuencia de Lamb, por otra parte, es la inversa del tiempo que le toma a una onda acústica viajar una longitud de onda horizontal, $2\pi r/[l(l+1)]^{1/2}$, de la perturbación no radial, a lo largo de una circunferencia de radio r alrededor del centro de la estrella. La frecuencia de Lamb es la analogía no radial de la frecuencia acústica.

Un diagrama de propagación es un medio útil de estudiar y distinguir las regiones de un modelo estelar dentro de las cuales un modo oscilatorio puede propagarse. El diagrama consiste en el ploteo del comportamiento de N^2 y L_l^2 en función de la distancia radial r escaleada con R, radio del modelo. Un diagrama de propagación típico de un modelo estelar simple es mostrado en la Figura 5. Las zonas de *propagación* de modos son indicadas con la letra A (por acústicas) y G (por gravedad). Las zonas blancas son zonas *evanescentes*, en las cuales los modos son ondas que decaen exponencialmente. Estas últimas aseveraciones pueden ser justificadas aplicando al problema un tratamiento local.

1.9. Análisis local

El comportamiento de los modos de oscilación puede ser delineado examinando la propagación de ondas en el interior de la estrella. En lo que sigue vamos a utilizar la aproximación de Cowling. Tomando las ecuaciones (??) y (??), y haciendo el cambio de variables:

$$v = u \, p^{\frac{1}{\Gamma_1}} \tag{22}$$

$$w = y \, \rho \, p^{-\frac{1}{\Gamma_1}} \tag{23}$$

se obtiene el set de ecuaciones:

$$\frac{dv}{dr} = \left[\frac{l(l+1)}{\sigma^2} - \frac{\rho \, r^2}{\Gamma_1 \, p} \right] \frac{p^{\frac{2}{\Gamma_1}}}{\rho} \, w \tag{24}$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(\sigma^2 + A \, g \right) \frac{\rho}{p^{\frac{2}{\Gamma_1}}} \, v \tag{25}$$

las cuales, en términos de L_l^2 y N^2 se tornan en:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r^2}{c^2} \left[\frac{L_l^2}{\sigma^2} - 1 \right] \frac{p^{\frac{2}{\Gamma_1}}}{\rho} \, w \tag{26}$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(\sigma^2 - N^2\right) \frac{\rho}{p^{\frac{2}{\Gamma_1}}} \; v \tag{27}$$

Si ahora suponemos que los coeficientes (tales como L_l^2 y N^2) de las ecuaciones (**??**) y (**??**) son aproximadamente constantes, entonces las ecuaciones tienen soluciones de la forma:

$$w \propto e^{ik_r r} \tag{28}$$

$$v \propto e^{ik_r r} \tag{29}$$

donde k_r es el número de onda radial. Estamos suponiendo que las funciones w y v (las cuales representan a $p^{'}$ y ξ_r respectivamente) tienen variaciones espaciales mucho mas "rápidas" que las otras variables físicas L_l^2, N^2, ρ, p, etc. Insertando w y v en la forma (**??**) y (**??**) en las ecuaciones (**??**) y (**??**) se obtiene una relación de dispersión local:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 \; c^2} \left(\sigma^2 - L_l^2\right) \left(\sigma^2 - N^2\right) \tag{30}$$

Esta ecuación señala bajo qué condiciones un dado modo está propagándose localmente. Si σ^2 es mayor o menor que ambas L_l^2 y N^2, entonces tendremos $k_r^2 > 0$ y el modo será oscilatorio, con lo cual habrá ondas propagándose radialmente (ver Figura 5). El intervalo de la coordenada r para el cual esta condición es satisfecha se denomina *zona de propagación*. Si, por el contrario, σ^2 tiene un valor intermedio entre L_l^2 y N^2, entonces $k_r^2 < 0$, k_r será imaginario y las soluciones decaerán exponencialmente. Estas son ondas evanescentes (oscilación temporal pero no espacial); la región correspondiente en la estrella se llama *zona evanescente*.

Consideremos ahora las zonas de propagación exclusivamente. Si tenemos $\sigma^2 > L_l^2$ y N^2 entonces estamos en el dominio de las altas frecuencias de los modos p, los cuales se propagan en la zona A en la Figura 5. En el otro extremo, para $\sigma^2 < L_l^2$ y N^2 estamos en el dominio de las bajas frecuencias de los modos g, en la zona G de la Figura 5. La ondas (viajeras) propagándose en las zonas A y G producen ondas estacionarias sólo en aquellas frecuencias para las cuales dichas ondas viajeras son reflejadas en los bordes , tal que retroceden en fase con ellas mismas. Estas frecuencias son los autovalores. En consecuencia, los modos de oscilacion están principalmente atrapados dentro de "cavidades" internas de la estrella, aunque tales modos se extiendan desde el centro a la superficie y obedezcan ciertas condiciones en esos extremos (condiciones de borde). La naturaleza física de los modos (es decir, su carácter p o g) estará determinada por su propia frecuencia en relación a las frecuencias críticas L_l^2 y N^2.

Si bien el tratamiento local es muy útil para determinar en forma aproximada las zonas de propagación, hay que mantener en mente que pierde validez cuando cantidades tales como L_l^2 y N^2 tienen variaciones abruptas a través de la estrella.

Finalmente señalemos que los diagramas de propagación pueden ser utilizados para clasificar los modos no radiales obtenidos en cálculos numéricos simplemente examinando en qué región caen las autofrecuencias (A o G). Este procedimiento pierde utilidad cuando se trata de un modelo en equilibrio muy concentrado o con la presencia de un gradiente de composición química (μ-gradiente): en estos casos no es sencillo identificar y clasificar los modos ya que tienen un caracter mixto, comportándose como modos g en ciertas regiones y como modos p (con la misma frecuencia) en otras.

2. Aspectos observacionales en estrellas Enanas Blancas

Hay, como vimos en la Introducción, varias clases de estrellas que ejecutan oscilaciones no radiales. Entre ellas, los pulsadores compactos del tipo Enanas Blancas y pre-Enanas Blancas son actualmente objeto de numerosos estudios teóricos y observacionales. El interés por estas estrellas y sus propiedades pulsacionales se debe a la combinación de por lo menos cuatro circunstancias afortunadas (Winget 1988):

1. Son objetos con estructuras en equilibrio muy simples, y como consecuencia también lo son sus propiedades pulsacionales. Las fuentes de energía nuclear están sólo presentes probablemente en los tipos mas calientes, y en líneas generales no revisten demasiada importancia en la evolución de estas estrellas. La estructura física es por demás simple: constan de un núcleo de C/O degenerado con capas muy finas de He y de H puros parcialmente degenerados rodeándolo, como consecuencia del asentamiento gravitacional.

2. La información que puede inferirse del estudio del espectro de períodos (Astrosismología) permite obtener límites en forma independiente de otros métodos, a ciertas cantidades de interés, como la masa estelar, la masa de la capa de H y la de He, la composición química del núcleo, etc.

3. Las amplitudes de las pulsaciones son suficientemente grandes como para ser detectables, pero lo bastante pequeñas como para ser tratadas con una teoría lineal.

4. Los períodos son lo bastante cortos, típicamente, como para poder observar muchos ciclos en una noche de observación; varias curvas de luz han sido resueltas completamente, ya sea desde sitios individuales o través de una red de observatorios (WET; ver mas adelante).

Por otra parte, todo parece indicar que la única diferencia entre las Enanas Blancas y pre-Enanas Blancas variables respecto de las no variables es su temperatura efectiva. Esto es importante ya que implica que cualquier información que se obtenga a partir de estudios astrosismológicos acerca de las variables tendrá también validez para las no variables.

2.1. Enanas Blancas Variables DAV y DBV

Se han encontrado cuatro diferentes clases de estrellas variables degeneradas aisladas. En orden de luminosidad decreciente, estas clases son:

a. Estrellas PNNV, o sea Núcleos de Nebulosas Planetarias, también denominadas estrellas K 1-16;

b. Estrellas DOV, también llamadas estrellas PG1159, que son pre-Enanas Blancas muy calientes;

c. Estrellas DBV, las cuales son Enanas Blancas DB (con envoltura rica en He), también denominadas estrellas V 447 Her;

d. Estrellas DAV, que son Enanas Blancas DA (con envoltura puramente de H); se las conoce comunmente como estrellas ZZ Ceti.

Examinando la localización de las cuatro clases de pulsadores compactos en el diagrama HR , se vé que cubren un amplio rango en L y T_{eff} (Figura 6), pero a pesar de ello las propiedades de pulsación de todas ellas son muy similares.

De estas cuatro clases la más estudiada y conocida es la de las estrellas ZZ Ceti. En la actualidad se conocen alrededor de treinta objetos de este tipo; típicamente sus espectros muestran sólo líneas de Balmer del Hidrógeno y están ausentes líneas de He o metales, lo que evidencia una atmósfera rica en H. Esta clase de estrellas define una franja de inestabilidad en el diagrama HR, cuyas temperaturas, calculadas a partir de datos de espectrofotometría óptica ultravioleta y modelos atmosféricos basados en la mixing-lenght theory (MLT) (Bergeron et al. 1995), están en el rango $11160 \leq T_{eff} \leq 12460$ K. Desafortunadamente los bordes de la franja de inestabilidad dependen de qué versión de la MLT se use en los cálculos de atmósferas. Con respecto a la masa de las DAV, Bergeron et al. (1995) obtienen una masa promedio de $M_\star = 0.59\ M_\odot$; para una muestra de estrellas DA, Bergeron et al. (1992) han encontrado $M_\star = 0.56\ M_\odot$. La masa de la envoltura de H es un parámetro que actualmente es materia de disputa. Según cálculos de evolución estelar, debe ser $M_H \approx 10^{-4} M_\odot$, y tal valor está en buen acuerdo con estimaciones de este parámetro hechas a través de estudios astrosismológicos. Por otra parte, se sabe que $M_H \geq 10^{-12} M_\odot$ para que la convección no llegue a mezclar el H superficial con el He que está debajo. Por lo tanto hay un rango posible muy amplio para la masa de la envoltura de H.

La otra clase de estrellas degeneradas variables mas importante luego de las DAV son las estrellas DBV. Se conocen al menos ocho estrellas de esta clase y todas tienen espectros con líneas de HeI, sin líneas de H ni de metales. De acuerdo a Thejll et al. (1991) la franja de inestabilidad para las DBV está definida por el intervalo de temperaturas 22000 $\leq T_{eff} \lesssim 24000$ K, en base a datos obtenidos con el IUE (International Ultraviolet Explorer) y usando modelos atmosféricos de He. Sin embargo Provencal et al. (1996) han reportado una temperatura $T_{eff} = 27000$ K para la estrella DBV GD 358, en base a espectros UV obtenidos con el HST (Hubble Space Telescope), en los cuales hay evidencia de una línea de HeII. Actualmente se acepta entonces un rango de temperaturas de $22000 \lesssim T_{eff} \lesssim 27000$ K para la franja de inestabilidad de las DVB. La masa promedio de estas estrellas es, a partir del trabajo de Oke et al.(1984), de $M_\star = 0.55 M_\odot$. Respecto del espesor de la capa superficial de He, a partir de cálculos evolutivos se estima que $M_{He} \leq 10^{-2} M_\star$ (D'Antona

& Mazzitelli 1991). Desde el punto de vista de la "polución del Carbono"[6], Pelletier (1986) encontró una masa promedio de $M_{He} \approx 10^{-3.5} M_\star$ en base a la abundancia de C en una DB con temperatura efectiva de 9000 K. Por otra parte, empleando métodos astrosismológicos Bradley & Winget (1994) han derivado un valor de $M_{He} = 1.5 \times 10^{-6} M_\star$, mucho mas bajo que el sugerido por los cálculos evolutivos.

La clase de las estrellas DOV, por otra parte, está conformada por no mas de cinco miembros conocidos, y las temperaturas efectivas caen en el rango de $70000 \lesssim T_{eff} \lesssim 160000$ K. Finalmente, el grupo de las PNNV contiene alrededor de diez estrellas, con temperaturas efectivas superiores a los 10^5 K.

Las Tablas 2, 3, 4 y 5 (adaptadas de Bradley 1995) contienen nombres, temperaturas, amplitudes y períodos de oscilación de algunas de las estrellas DAV, DBV, DOV y PNNV conocidas, respectivamente.

[6]Se designa en esta forma a la presencia de trazas de C en una atmósfera pura de He.

TABLA 2

Nombre	$T_{eff}[\times 10^3 K]$	Amp. [mag]	Períodos [seg]
BPM 30551	11.3	0.22	823 y otros
R 548	12.0	0.012	213, 274
BPM 31594	11.5	0.28	402, 618
HL Tau 76	11.4	0.28	494, 625, 746
G 38-29	11.2	0.22	$\sim$ 1000
G 191-16	11.4	0.3	510, 600, 710, 893
GD 66	12.0	0.02	197, 272, 302, 819
GD 99	11.8	0.07	350, 481, 592
G117- B15A	11.6	0.05	215, 271, 304
G255-2	11.4	0.04	685, 830 y otros
BPM 37093	11.7	0.004	$\sim$ 600
GD 154	11.2	0.10	403, 1089, 1186
G 238-53	11.9	0.02	$\sim$ 206
EC 14012-1446	–	0.30	610, 724 y otros
GD 165	12.0	0.10	114, 120, 192, 250
L 19-2	12.1	0.03	113, 118, 143, 192, 350
R 808	11.2	0.15	833
G 226-29	12.5	0.006	109
G 207-9	12.0	0.06	259, 292, 557, 739
G 185-32	12.1	0.02	141, 215
GD 385	11.7	0.05	256
PG 2303+242	11.5	0.2	394, 483, 540, 611, 936
G 29-38	11.8	0.27	284, 615, 820
EC 23487-2424	–	0.24	$\sim$ 800 – 1000 (complejo)

TABLA 3

Nombre	$T_{eff}[\times 10^3 K]$	Amp. [mag]	Períodos [seg]
KUV 0513+2605	–	0.10	400 (complejo)
CBS 114	–	0.30	650 (complejo)
PG 1115+158	22.5 ?	0.06	1000 (complejo)
PG 1351+489	22.0 ?	0.05	489
PG 1456+103	22.5 ?	0.10	420 – 860 (complejo)
GD 385	25.3 ± 0.3	0.10	700 (complejo)
PG 1654+160	21.5 ?	0.10	150 – 850 (complejo)
EC 20058-5234	–	–	134, 195, 204, 257, 281

TABLA 4

Nombre	$T_{eff}[\times 10^3 K]$	Amp. [mag]	Períodos [seg]
PG 0122+200	75	0.10	400 – 600 (complejo)
PG 1159-035	140	0.10	$\sim$ 500 (complejo)
PG 1707+427	100	0.10	$\sim$ 450 (complejo)
PG 2131+066	80	0.10	400 – 600 (complejo)

TABLA 5

Nombre	$T_{eff}[\times 10^3 K]$	Amp. [mag]	Períodos [seg]
118 - 74°1	150	~ 0.002	~ 1500
144 + 6°1	–	> 0.1	~ 1500
189 + 19°1	–	> 0.07	~ 1000
274 + 9°1	120	~ 0.06	1800 – 2000 (complejo)
Sanduleak 3	130	> 0.1	~ 1000
94 + 27°1	140	~ 0.05	1500 – 1700 (complejo)
61 - 9°1	–	> 0.1	710, 875 y otros
RXJ 2117+3412	170	0.05	$\sim$ 800 (complejo)

2.2. Evidencia observacional de oscilaciones no radiales

Es aceptado actualmente que las variaciones de luz de las Enanas Blancas DAV y DBV (junto con las DOV y PNNV) son consecuencia de pulsaciones no radiales en tales estrellas. El soporte a esta idea tiene lugar en la gran complejidad de sus curvas de luz, que evidencia multiperiodicidad de las oscilaciones, y en que los períodos de tales oscilaciones multiperiódicas son al menos un orden de magnitud mas largos que los esperados teóricamente en pulsaciones *radiales* de este tipo de estrellas (Osaki and Hansen 1972). Por otra parte se ha demostrado que las variaciones de luz son debidas exclusivamente a variaciones en la temperatura superficial de la estrella y no a variaciones en su geometría o gravedad (Robinson et al. 1982). Los desplazamientos radiales son muy pequeños, del orden de $10^{-4}R$, con R radio de la estrella. El hecho de que los movimientos del fluído son mayormente horizontales, sumado a que los períodos son excesivamente largos indica que las oscilaciones no radiales que estas estrellas ejecutan son modos g^{+} (ver Introducción). Ya que la amplitud de las oscilaciones es pequeña se asume que el movimiento angular del fluído está descripto por armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$. Si pulsaran en altos ordenes armónicos (grandes valores de l) las variaciones de luz serían muy pequeñas e indetectables[7]. Para $l \geq 3$ se producen efectos de cancelación geométrica y no se detectan los modos de oscilación (Dziembowski 1977). Esto significa que necesariamente deben estar excitados modos g de bajo orden l.

2.3. Rasgos observacionales

Hay un número de rasgos característicos presentes en los espectros de períodos tanto de las DAV como de las DBV. Ellos son descriptos a continuación.

[7]Este no sería un mecanismo muy eficiente para producir variación de luz.

- Modulación de amplitud o batido

  Es un efecto por el cual las amplitudes de pulsación en la curva de luz están moduladas con períodos muy largos respecto de los períodos principales. Este batido se produce cuando dos o mas pulsaciones tienen períodos muy próximos entre sí, conformando dobletes o tripletes. Sean P_1 y P_2 períodos componentes de un doblete. Se define la frecuencia de batido, f_B, como:

  $$f_B = \triangle f = f_1 - f_2 = \left(P_1^{-1} - P_2^{-1}\right) \tag{31}$$

  y el período de batido, P_B, como:

  $$P_B = \triangle P = f_B^{-1} \tag{32}$$

  Entonces, ya que $P_1 \approx P_2$ tendremos un valor f_B muy pequeño para la frecuencia de batido, y un período de batido P_B muy grande. Esto resulta en la imposibilidad de detectarlo en sesiones de como mucho 8 horas de observación continuada (una noche completa) llevadas a cabo desde un único sitio. En consecuencia, la estructura del espectro de Fourier, en presencia de batido, no tiene el mismo aspecto en cada sesión. Este hecho era atribuído en el pasado a efectos no lineales los cuales se creía que provocaban una suerte de "switching" de los modos (Winget 1988). Pero posteriormente se creó una red de trabajo denominada WET (Whole Earth Telescope) con el objetivo de evitar los enormes gaps temporales entre cada sesión de sitios individuales. El WET consiste en un esquema para observar una dada estrella desde un conjunto de telescopios ubicados alrededor de la Tierra. Cuando la estrella a observar desaparece del alcance de uno de los telescopios entra en el campo de otro , el cual inicia su observación. Con un número suficiente de telescopios distribuídos adecuadamente en longitud, la observación de la estrella puede ser contínua. Con la utilización del WET se logró resolver completamente los espectros de pulsación de varias de las estrellas que presentaban indicios de switching de modos, y picos que aparentemente estaban aislados resultaron ser en realidad dobletes y tripletes de períodos. Es importante destacar que en caso de oscilaciones puramente radiales es difícil encontrar dos períodos muy próximos entre sí, por lo cual el fenómeno de modulacón de amplitud descripto parece ser propio de pulsaciones no radiales. La presencia de este fenómeno en los espectros de Enanas Blancas refuerza así la hipótesis de pulsaciones no radiales en las mismas.

Se han dado interpretaciones teóricas para la presencia de multipletes:

a) Splitting rotacional: Los modos no radiales, como se vió en la Introducción, se caracterizan por ternas (l,k,m). Los índices l y m están relacionados con el armónico esférico $Y_l^m(\theta, \phi)$ y el índice k con el orden radial (en estructuras estelares simples como las de las Enanas Blancas, k es el número de nodos de $\xi_r(r)$). Si la estrella es esféricamente simétrica, sin rotación ni campo magnético, las autofrecuencias dependen de k y l pero no de m. Para los ($2l$+1) valores de m, con l fijo, la frecuencia del modo es la misma: hay degeneración en m (ver Introducción). La teoría predice (Unno et al. 1989) que si hay rotación lenta un modo con índice l es dividido en ($2l$+1) modos igualmente espaciados. Para rotación uniforme lenta todos los modos con el mismo l deben mostrar el mismo espaciamiento entre las componente del multiplete. Pero si la estrella tiene rotación diferencial aún modos con igual l deben mostrar distintas separaciones (Winget et al. 1994). La separación en frecuencia entre miembros de un multiplete es, en splitting rotacional, proporcional a $m\Omega$, con Ω la frecuencia angular de rotación de la estrella. Más precisamente:

$$\triangle\sigma_{klm} = -\ m\ \Omega\ C_{kl} \tag{33}$$

donde C_{kl} es una constante que depende sólo de k y l (el modo) y el modelo en equilibrio. Se desprende de todo esto que midiendo las separaciones en frecuencia entre los miembros componentes de un multiplete es posible inferir la velocidad de rotación de la estrella.

b) Splitting magnético: También con la presencia de un campo magnético débil se rompe la degeneración en m (Jones et al. 1989). Un modo con índice l es descompuesto en $(l+1)$ modos diferentes. La separación entre miembros del multiplete debido al splitting magnético es proporcional a m^2B^2, con lo cual puede estimarse el campo magnético B de la estrella midiendo el espaciado entre componentes.

- Efectos no lineales en el espectro de potencia

  En los espectros de potencia de ciertas estrellas suelen encontrarse picos que tienen como frecuencias a múltiplos de frecuencias de otros modos (llamados "armónicos"), y también combinaciones lineales de los picos dominantes, de la forma $f = a \times f_i + b \times f_j$, siendo f_i, f_j las frecuencias principales y a, b enteros pequeños. Se cree que los armónicos y frecuencias combinadas son el producto de pulsaciones propagándose en un medio que no responde linealmente: la atmósfera estelar. Si el medio responde de una manera lineal las frecuencias (modos) originales retienen toda su potencia total. En el caso contrario, la potencia se distribuye en otras frecuencias que son sumas y diferencias de las originales. El fenómeno se denomina "distorsión armónica" (comentarios en Winget et al. 1994, y en profundidad Brickhill 1992).

- Mode trapping por interfaces de composición química

  El mode trapping es un efecto debido a la resonancia entre la longitud de onda de una pulsación (modo) y la distancia desde la superficie estelar hasta la posición de la interfase de composición química. Este fenómeno observable en los espectros de períodos es extensamente tratado en una investigación de Brassard et al. (1992). De entre todos los modos excitables en la estrella, los modos atrapados son los que tienen menor amplitud en el núcleo. Ya que el núcleo provee la mayor parte del amortiguamiento de las oscilaciones, los modos atrapados son más fácilmente excitados y prevalecen confinados a una región entre el gradiente de composición química y la superficie estelar. En esa zona (zona de trapping), esto modos tienen grandes amplitudes y consecuentemente son fácilmente observables. Los modos cercanos a un modo atrapado (cercanos en período) son arrastrados hacia esa resonancia y el resultado es que los modos adyacentes al atrapado tienen períodos mas "juntos" que el promedio. Globalmente el mode trapping actúa como un potente mecanismo de selección de modos.

- Rate de cambio de períodos, $\dot{P}$

  El rate de cambio de períodos es la variación que experimentan en el tiempo las periodicidades que aparecen en las curvas de luz. De acuerdo a la descripción de Bradley (1996), el valor de $\dot{P}$ es sensible en especial a cambios en la composición del núcleo y a cambios en la masa total $M_\star$. Para una dada estrella DAV o DBV, con $M_\star$ fija, el $\dot{P}$ es mayor que cero, y es exclusivamente el producto del enfriamiento evolutivo de la estrella, que es a su vez función de la composición del núcleo. Esto se denomina *enfriamiento secular*. El valor teórico de $\dot{P}$ debido al enfriamiento secular está en el rango 10^{-14} - 10^{-15} seg seg^{-1}. Puede haber otros mecanismos que contribuyan al $\dot{P}$, como cambios en el rate de rotación, cambios en el campo magnético, acoplamiento no lineal de modos, movimiento orbital binario, etc, pero estos mecanismos actúan en escalas de tiempo mucho mas cortas que las del enfriamiento secular.

  Por otra parte el mode trapping también afecta al $\dot{P}$: su valor para los modos atrapados es menor en un 20 - 30 % respecto de los no atrapados. Esto se debe a que los modos atrapados están restringidos a la superficie de la estrella donde todavía hay cierta contracción gravitacional residual. Esta contracción actúa reduciendo el período P del modo y entonces se opone a la acción del enfriamiento secular, el cual alarga los períodos.

Examinando modelos teóricos se encuentran variaciones de alrededor de un 20 % en el $\dot{P}$ debido a cambios en la composición química del núcleo. Pero la mayor susceptibilidad es a cambios en la masa estelar $M_{\star}$: $\dot{P}$ puede ser mayor en un factor 4 para una estrella de 0.4 $M_{\odot}$ respecto de una de 0.8 $M_{\odot}$. No obstante ser una cantidad tan pequeña, el valor de $\dot{P}$ ha sido medido observacionalmente para ciertos casos.

2.4. Pulsaciones en estrellas DAV

Las estrellas DAV presentan periodicidades de luz entre los 100 y los 1200 seg aproximadamente, y amplitudes entre $0^{m}.004$ y $0^{m}.3$. En general tienen sus espectros de períodos (espectros de Fourier) con pocos modos excitados, entre todos los disponibles para pulsar. Este hecho dificulta el proceso de identificación de modos[8] y se torna casi imposible examinar el espaciamiento medio de períodos (ya que hay pocos excitados) y las desviaciones respecto de su espaciamiento medio, con lo cual las investigaciones astrosismológicas se ven muy afectadas. En contraste, las estrellas DBV y las DOV revelan en general espectros conteniendo gran cantidad de modos excitados.

Hay dos grupos bastante bién definidos entre las estrellas DAV, según las características de sus curvas de luz. Por un lado estrellas como R 548, L 19-2, GD 385, G 117-B15A y G 226-29 entre otras, muestran variaciones de pequeña amplitud en sus curvas de luz, de

[8]O sea, la asignación de l, k, m a un dado modo.

tipo sinusoidal muy regulares; sus espectros de períodos están dominados por uno o dos períodos principales, los períodos son en general cortos y además la estructura del espectro de potencia resulta ser muy estable. Por el contrario, otras ZZ Ceti como HL Tau 76, G 29-38, G 38-29, R 808, GD 154 y G 191-16, tienen sus curvas de luz no sinusoidales, con variaciones de luz de gran amplitud muy complejas; sus espectros contienen varios períodos independientes, junto con muchos armónicos y picos cuyas frecuencias son combinaciones lineales de las de los modos independientes. Los períodos presentes son en general largos y la estructura del espectro de potencia tiene un carácter cambiante, en escalas de tiempo de días, semanas, meses y años.

En general las ZZ Ceti presentan splitting de períodos, consistentes sólo en dobletes y tripletes. Respecto de los dobletes, en general las amplitudes de las componentes son diferentes. Ejemplos de dobletes de períodos se encuentran en los espectros de R 548 (Kepler et al. 1995c), G 117-B15A (Kepler et al. 1995b), L 19-2 (O'Donoghue & Warner 1987), GD 385 (Kepler 1984) y GD 154 (Pfeiffer et al. 1996). La presencia de dobletes (número par de componentes) puede obedecer por lo menos a tres causas: splitting magnético, con $l = 1$, entonces hay $(l{+}1) = 2$ componentes; splitting rotacional con $l = 1$, en el cual alguna componente del multiplete no tiene amplitud susceptible de ser observada por efectos de inclinación que pueden reducirla (Pesnell 1985); splitting rotacional con alguna componente cuya amplitud se vé reducida por efectos no lineales (Buchler et al. 1995).

Utilizando la presencia de dobletes se ha medido un campo magnético B del orden de 10^5 Gauss en R 548 (Jones et al. 1989). Se ha encontrado asimismo una velocidad de rotación de aproximadamente 0.15 Km seg^{-1} en GD 385, interpretando un doblete de su espectro como debido a splitting rotacional (Kepler 1984).

En cuanto a tripletes, que constan de tres componentes muy cercanas, se los ha observado con espaciamientos simétricos y no simétricos de tales componentes, y las amplitudes son en general diferentes (dentro de cada triplete y entre tripletes). Algunos ejemplos de estrellas ZZ Ceti exhibiendo tripletes son G 117-B15A (Kepler et al. 1995b), L 19-2 (O'Donoghue & Warner 1987), G 226-29 (Kepler et al. 1995a), GD 165 (Bergeron et al. 1993) y PG 2303+243 (Vauclair et al. 1987). En base a tripletes se ha calculado un período de rotación de 1.9 horas para PG 2303+243 (Vauclair et al. 1987), 2.4 días para GD 165 (Bergeron et al. 1993), 8.9 horas para G 226-29 (Kepler et al. 1995a), y de 13 horas para L 19-2 (O'Donoghue & Warner 1987).

Las diferencias de amplitudes observadas dentro de un dado triplete podrían ser explicadas por la inclinación del eje de pulsación respecto de la visual (Pesnell 1985).

En lo que respecta a la presencia de armónicos y combinaciones de frecuencias, se pueden citar los casos de GD 154 (Pfeiffer et al. 1996), PG 2303+243 (Vauclair et al. 1987), G 29-38 (Mc Graw & Robinson 1975)[9] y GD 117-B15A (Kepler et al. 1995b) entre otros.

Respecto del mode trapping ya descripto, Pfeiffer et al. (1996) sugieren que este mecanismo de selección estaría actuando en GD 154, para poder explicar su espectro de pulsaciones, el cual muestra llamativamente pocos modos excitados.

Otro rasgo importante que habíamos descripto era el rate de cambio de períodos. Se ha podido estimar esta cantidad para algunas ZZ Ceti: para G 117-B15A se midió un $\dot{P} = (1.2 \pm 2.9) \times 10^{-15}$ seg seg^{-1} (Kepler et al. 1995b); para R 548 se han medido cotas superiores de $\dot{P}$ de cuatro diferentes modos, dando distintos valores, lo que indicaría que además del

[9] Recientemente se han podido obtener las velocidades radiales asociadas con las pulsaciones en G 29-38, en base a técnicas espectroscópicas. El resultado es que los períodos de las variaciones en la velocidad radial son los mismos que los períodos medidos en la curva de luz, con la diferencia de que las combinaciones de los picos en sumas y diferencias de los principales no están presentes (Clemens 1997).

enfriamiento secular hay otros efectos involucrados. En los cuatro casos $\dot{P}$ no supera un valor de 2×10^{-13} seg seg^{-1} (Stover et al. 1980). Para L 19-2 se han obtenido los siguientes valores: $\dot{P}[P= 192$ seg$]= 91.8 \times 10^{-14}$ seg seg^{-1} y $\dot{P}[P= 113$ seg$]= 1.5 \times 10^{-14}$ seg seg^{-1} (O'Donoghue & Warner 1987).

En una investigación de Clemens (1993) se llevó a cabo un estudio de todas las DAV conocidas. El autor no tuvo en cuenta los armónicos y combinaciones de frecuencias de sus espectros, ni tampoco las variaciones temporales en potencia de ciertos modos (especialmente en las DAV de gran amplitud), tomando como mucho la máxima potencia observada para los mismos. En el estudio se define un período medio para cada estrella como el promedio de los períodos presentes pesados con la potencia de cada uno. Los resultados de este importante trabajo, en el cual las DAV se estudian como clase y no individualmente, se dan a continuación:

a. Las DAV mas calientes tienen períodos mas cortos: hay una correlación entre T_{eff} y P.

b. A períodos mas largos corresponden potencias mayores, según una correlación lineal. Esto implica que a grandes períodos corresponden grandes amplitudes.

c. Cuando se comparan todos los espectros de las DAV entre sí, se encuentra una sorprendente similitud global en sus estructuras. Además, se confirma la tendencia a mayores amplitudes con el incremento del período. Se encuentra también que para el rango de períodos entre los 123 y los 400 seg los períodos de todas las DAV calientes caen dentro de seis grupos de modos, espaciados en promedio 55.5 seg[10]. Los períodos medios de cada grupo son: 122.5, 204.6, 263.8, 299.4, 356.4 y 399.8 seg, y

[10]Esto parece estar confirmado por los períodos de las últimas ZZ Ceti descubiertas desde el momento de publicarse el estudio de Clemens (1993) (Clemens 1997).

hay argumentos en favor de la idea de que los seis grupos de modos responden a $l = 1$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

d. No hay estrellas DAV con modos mas cortos en período que el primer grupo, de 123 seg.

e. Ningún modo en ninguna DAV consiste de mas de tres frecuencias cercanas, esto es, sólo hay dobletes y tripletes.

f. Cuanto mas masiva es la DAV mas corta en período es la posición de su modo $k = 1$ para un l fijo dado; el espaciamiento promedio entre modos de k consecutivos es menor en estrellas de alta masa.

De a. y b. se concluye que el período medio y la potencia de las pulsaciones crecen a medida que la T_{eff} decrece (la estrella se enfría). Esto está de acuerdo con lo predicho por la teoría.

El estudio revela además una ausencia de estrellas con períodos dominantes entre 400 y 600 seg. Finalmente, haciendo la identificación $l = 1$ $k = 1$ para el período de 122.5 seg, el autor sugiere un valor para la masa de la capa de Hidrógeno en favor de lo sugerido por los cálculos de evolución estelar: $M_H = 10^{-4} M_\star$. Este resultado es consistente con identificaciones de modos en otras estrellas DAV (Clemens 1997).

2.5. Pulsaciones en estrellas DBV

Las estrellas DBV exhiben todas espectros de potencia complicados, lo que implica que muchos modos de pulsación están presentes. Esto permite hacer un análisis astrosismológico detallado, contrariamente a lo que sucede con las DAV. Las DBV presentan períodos entre los 100 y los 1000 seg, y amplitudes entre $0^m.05$ y $0^m.3$. En cuanto al brillo, estas estrellas se dividen en dos grupos, uno conformado por GD 358 ($m_b = 13.6$) y el otro por el resto de las DBV conocidas ($m_b \approx 16$ y mas débiles aún). GD 358 es la mas estudiada, y junto con PG 1115+158 y PG 1351+489 ha sido observada con el WET.

Para GD 358, a partir de los estudios de Winget et al. (1994) y Bradley & Winget (1994), se han encontrado los siguientes resultados:

a. El espectro de potencia muestra pulsaciones con $l = 1$ y $l = 2$ pero no hay evidencias de l mayores.

b. Todos los modos de mayor amplitud son tripletes ($l = 1$) y los quintupletes tienen amplitudes muy bajas y se confunden con el ruido (y algunos se superponen con tripletes y dificultan la tarea de identificación de modos).

c. Las amplitudes varían con el número m dentro y entre multipletes, sin seguir ningún patrón conocido.

d. Los valores de k de cada multiplete son bien distinguibles y se determinan unívocamente. Se observan las esperadas desviaciones de los períodos individuales respecto del período medio, para cada valor de k, lo cual evidencia la presencia de discontinuidades de composición interna de la estrella.

e. Los splitting de frecuencia no son constantes para los tripletes del mismo l, sinó que varían con k y m, y se encuentra un menor splitting para pequeños valores de k (regiones del núcleo) lo que indica que si el splitting es causado por rotación, la envoltura rota 1.8 veces mas rápido que el núcleo (rotación diferencial).

f. Hay una diferencia sistemática entre los splitting de frecuencia de los modos con $m = 1$ y aquellos con $m = -1$ respecto del $m = 0$: los asociados con $m = 1$ son mayores que los de $m = -1$; esto indica la presencia de un campo magnético $B \approx 1300$ Gauss.

g. Se observa un patrón abundante en sumas y diferencias en frecuencias (algunas son combinaciones triples), lo que indicaría importantes efectos no lineales; los modos de pulsación mayores tienen armónicos con amplitudes bastante menores que aquellos de sus sumas (combinaciones), y lo mas probable es que el efecto no lineal presente sea la distorsión armónica.

Con respecto a las otras DBV conocidas podemos decir que: PG 1115+158 muestra una estructura de períodos muy inestable, lo cual puede ser un hecho intrínseco o bién haber una estructura de splitting no resuelta. Hay evidencia de períodos los cuales son los mas largos observados en una Enana Blanca pulsante (Winget et al. 1987). Por otra parte, la DBV PG 1351+489 exhibe un espectro inusualmente estable y simple, dominado por un período aislado de 490 seg (Winget et al. 1987). La última DBV descubierta es EC 20058-5234, la cual tiene la totalidad de sus períodos cortos, de menos de 300 seg. El resto de las DBV, KUV 0513+2605, CBS 114, PG 1456+103 y PG 1654+160 muestran espectros de pulsación complejos.

3. Código de pulsaciones

3.1. Ecuaciones diferenciales

La deducción rigurosa de las ecuaciones diferenciales que gobiernan las pulsaciones no radiales en la aproximación adiabática puede encontrarse en la monografía de Unno et al. (1989). Tales ecuaciones son:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}(r^2\,\xi_r) - \frac{g}{c^2}\,\xi_r + \left(1 - \frac{L_l^2}{\sigma^2}\right)\,\frac{p^{'}}{\rho\,c^2} = \frac{l(l+1)}{\sigma^2\,r^2}\,\Phi^{'} \tag{34}$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{dp^{'}}{dr} + \frac{g}{\rho\,c^2}\,p^{'} + \left(N^2 - \sigma^2\right)\,\xi_r = -\,\frac{d\Phi^{'}}{dr} \tag{35}$$

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\Phi^{'}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\,\Phi^{'} = 4\pi\,G\,\rho\,\left(\frac{p^{'}}{\rho\,c^2} + \frac{N^2}{g}\,\xi_r\right) \tag{36}$$

donde cada cantidad que aparece tiene el significado dado en la Introducción.

Estas ecuaciones junto con las condiciones de borde apropiadas para el centro ($r = 0$) y la superficie ($r = R$, R radio estelar), constituyen el problema de autovalores que debemos resolver para encontrar los modos de pulsación. En este punto se puede comprobar una afirmación hecha en la Introducción: ninguna de las ecuaciones (**??**), (**??**) o (**??**) contiene el orden acimutal m en sus coeficientes, lo que dá origen a la degeneración en los modos. Debido a que las ecuaciones no tienen solución analítica es necesario resolverlas con métodos numéricos, y para tal fin es preferible reformularlas en términos de cantidades adimensionales. Con los siguientes cambios de variables (Unno et al. 1989):

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r} \tag{37}$$

$$y_2 = \frac{1}{g\ r}\ \left(\frac{p^{'}}{\rho} + \Phi^{'}\right) \tag{38}$$

$$y_3 = \frac{1}{g\ r}\ \Phi^{'} \tag{39}$$

$$y_4 = \frac{1}{g}\ \frac{d\Phi^{'}}{dr} \tag{40}$$

y las cantidades definidas como:

$$V_g = -\ \frac{1}{\Gamma_1}\ \frac{d\ln p}{d\ln r} = \frac{g\ r}{c^2} = \frac{g\ r\ \rho}{\Gamma_1\ p} \tag{41}$$

$$U = \frac{d\ln M(r)}{d\ln r} = \frac{4\pi\ \rho\ r^3}{M(r)} \tag{42}$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^3\ \frac{M_\star}{M(r)} \tag{43}$$

$$\omega^2 = \frac{\sigma^2\ R^3}{G\ M_\star} \tag{44}$$

$$A^* = -r\ A = \frac{r}{g}\ N^2 = r\ \left(\frac{1}{\Gamma_1}\ \frac{d\ln p}{dr} - \frac{d\ln\rho}{dr}\right) \tag{45}$$

las ecuaciones (**??**) (**??**) y (**??**) se transforman en:

$$x\ \frac{dy_1}{dx} = \left(V_g - 3\right)\ y_1 + \left[\frac{l(l+1)}{C_1\ \omega^2} - V_g\right]\ y_2 + V_g\ y_3 \tag{46}$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = \Big(C_1 \ \omega^2 - A^*\Big) \ y_1 + \Big(A^* - U + 1\Big) \ y_2 - A^* \ y_3 \tag{47}$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = \Big(1 - U\Big) \ y_3 + y_4 \tag{48}$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = U \ A^* \ y_1 + U \ V_g \ y_2 + \Big[l(l+1) - U \ V_g\Big] \ y_3 - U \ y_4 \tag{49}$$

siendo x la variable independiente adimensional definida como $x = r/R$.

El sistema de ecuaciones (**??**) a (**??**) con las condiciones de borde adecuadas es el que finalmente hay que resolver para hallar los autovalores ω^2 y las autofunciones y_1, y_2, y_3, y_4 que dan la dependencia con x de las amplitudes de pulsación.

3.2. Descripción del método de solución

En esta subsección vamos a describir en detalle el esquema numérico que hemos empleado para resolver las ecuaciones diferenciales (**??**) a (**??**). Cabe destacar que dicho esquema (que emplea la técnica de Henyey descripta por Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para cálculos de estructura estelar), ha sido desarrollado en forma completamente independiente de otros códigos de pulsación estelar, siguiendo los lineamientos del esquema del Código Evolutivo elaborado por el Dr. O.G.Benvenuto (Benvenuto 1988); además, constituye el primer paso que se dá en este campo de investigación en nuestro Observatorio.

3.2.1. Ecuaciones en diferencias

En primer lugar, por conveniencia, cambiamos la notación de las autofunciones $y_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) y el autovalor ω^2 de la siguiente manera[11]:

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & \rightarrow & w(x) \\ y_2(x) & \rightarrow & y(x) \\ y_3(x) & \rightarrow & z(x) \\ y_4(x) & \rightarrow & t(x) \\ \omega^2 & \rightarrow & \lambda \end{array} \tag{50}$$

con lo cual las ecuaciones (**??**) a (**??**) se escriben:

$$\frac{dw}{dx} = \left\{ \Big(V_g - 3\Big)\ w + \left[\frac{l(l+1)}{C_1\ \lambda} - V_g\right]\ y + V_g\ z \right\}\ \frac{1}{x} \tag{51}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left\{ \Big(C_1\ \lambda - A^*\Big)\ w + \Big(A^* - U + 1\Big)\ y - A^*\ z \right\}\ \frac{1}{x} \tag{52}$$

$$\frac{dz}{dx} = \left\{ \Big(1 - U\Big)\ z + t \right\}\ \frac{1}{x} \tag{53}$$

$$\frac{dt}{dx} = \left\{ U\ A^*\ w + U\ V_g\ y + \Big[l(l+1) - U\ V_g\Big]\ z - U\ t \right\}\ \frac{1}{x} \tag{54}$$

donde hemos pasado la variable independiente x al miembro derecho por comodidad.

---

[11]Las variables y y w de la presente notación no deben ser confundidas con aquellas definidas por las ecuaciones (**??**) y (**??**) de la Introducción.

A continuación descomponemos la estrella en un cierto número de capas esféricas concéntricas. Para eso dividimos el intervalo [0,1] de la variable x ($x = 0$ en $r = 0$ y $x = 1$ en $r = R$) por N puntos no necesariamente equiespaciados x_j; $j = 1, 2, \ldots, N$. En total hay N puntos malla y $N - 1$ capas.

El siguiente paso es reemplazar las ecuaciones diferenciales (**??**) a (**??**) por sus correspondientes ecuaciones en diferencias; para ejemplificar de qué manera hacemos esto tomemos la ecuación (**??**) y escribámosla en la forma:

$$\frac{dw}{dx} = f_1(w, y, z, t, V_g, U, C_1, A^*, \lambda, x) \tag{55}$$

La correspondiente ecuación en diferencias, válida para la capa comprendida entre los puntos malla x_j y x_{j+1} es:

$$\frac{w_{j+1} - w_j}{x_{j+1} - x_j} = f_1\left(\ldots j + \frac{1}{2} \ldots ; \lambda\right) \tag{56}$$

donde la notación $j + \frac{1}{2}$ indica reemplazar los argumentos de f_1 (excepto λ) por sus promedios aritméticos para la capa $[j, j+1]$, esto es:

$$\begin{array}{lcll} w & \rightarrow & [w]_{j+\frac{1}{2}} & = (w_j + w_{j+1})/2 \\ y & \rightarrow & [y]_{j+\frac{1}{2}} & = (y_j + y_{j+1})/2 \\ \vdots & & & \\ A^* & \rightarrow & [A^*]_{j+\frac{1}{2}} & = (A^*_j + A^*_{j+1})/2 \\ x & \rightarrow & [x]_{j+\frac{1}{2}} & = (x_j + x_{j+1})/2 \end{array} \tag{57}$$

En forma completamente análoga se escriben las ecuaciones en diferencias para (**??**), (**??**) y (**??**) en la capa $[j, j+1]$:

$$\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j} = f_2\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{58}$$

$$\frac{z_{j+1}-z_j}{x_{j+1}-x_j} = f_3\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{59}$$

$$\frac{t_{j+1}-t_j}{x_{j+1}-x_j} = f_4\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{60}$$

Ya que cada capa dá cuatro ecuaciones de la forma (**??**) y (**??**) a (**??**), tendremos en total $4(N-1)$ ecuaciones en diferencias. Definimos las funciones G_i^j como:

$$G_1^j = \left(w_{j+1}-w_j\right) - \left(x_{j+1}-x_j\right)\ f_1\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{61}$$

$$G_2^j = \left(y_{j+1}-y_j\right) - \left(x_{j+1}-x_j\right)\ f_2\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{62}$$

$$G_3^j = \left(z_{j+1}-z_j\right) - \left(x_{j+1}-x_j\right)\ f_3\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{63}$$

$$G_4^j = \left(t_{j+1}-t_j\right) - \left(x_{j+1}-x_j\right)\ f_4\left(\ldots j+\frac{1}{2}\ldots;\lambda\right) \tag{64}$$

las cuales combinan los valores de $w, y, z, t, V_g, U, C_1, A^*$ y x para los dos límites $j, j+1$ de la capa, y satisfacen:

$$G_i^j(\ldots j\ldots;\ldots j+1\ldots;\lambda) = 0 \tag{65}$$

Por ejemplo, para la ecuación (**??**), la correspondiente función G_1^j es:

$$G_1^j = (w_{j+1} - w_j) - (x_{j+1} - x_j) \left[\left([V_g]_{j+\frac{1}{2}} - 3 \right) [w]_{j+\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{l(l+1)}{[C_1]_{j+\frac{1}{2}}\ \lambda} - [V_g]_{j+\frac{1}{2}} \right) [y]_{j+\frac{1}{2}} + [V_g]_{j+\frac{1}{2}}\ [z]_{j+\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{[x]_{j+\frac{1}{2}}} \tag{66}$$

Notar que, a diferencia de lo que sucede en el caso de las ecuaciones de estructura estelar (Kippenhahn, Weigert & Hofmeister 1967), las ecuaciones en diferencias llegan hasta el centro estelar inclusive, $x_N = 0$.

Además de las ecuaciones en diferencias debemos incluir las condiciones de borde para el centro y la superficie. Estas condiciones son combinaciones lineales de las incógnitas w, y, z, t. Usualmente se toman dos condiciones de borde para el centro y dos para la superficie, mas una condición de normalización en la superficie. La forma explícita de estas condiciones serán dadas mas adelante; por el momento escribámoslas en forma genérica:

$$B_k(w, y, z, t, V_g, U, C_1, A^*, x, \lambda) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{67}$$

para la supeficie, y

$$C_l(w, y, z, t, V_g, U, C_1, A^*, x, \lambda) = 0 \qquad (l = 1, 2) \tag{68}$$

para el centro. En la notación de la ecuación (**??**), se escriben como:

$$\begin{aligned} B_k(\ldots 1 \ldots; \lambda) &= 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \\ C_l(\ldots N \ldots; \lambda) &= 0 \qquad (l = 1, 2) \end{aligned} \tag{69}$$

Ahora supongamos que tenemos una solución aproximada para toda la estrella, digamos

$(w_j)_0$, $(y_j)_0$, $(z_j)_0$, $(t_j)_0$, $(\lambda)_0$, con $j = 1, 2, \ldots, N$. Por ser ésta una solución aproximada, si evaluamos las funciones G_i^j, B_k y C_l obtendremos:

$$\begin{cases} B_k & \neq & 0 & (k = 1, 2, 3) & \\ G_i^j & \neq & 0 & (i = 1, 2, 3, 4) & (j = 1, 2, \ldots, N-1) \\ C_l & \neq & 0 & (l = 1, 2) & \end{cases} \tag{70}$$

Lo que tenemos que hacer es buscar correcciones δw_j, δy_j, δz_j, δt_j y $\delta\lambda$ tales que la segunda aproximación $(w_j)_1$, $(y_j)_1$, $(z_j)_1$, $(t_j)_1$, $(\lambda)_1$, definida como:

$$\begin{array}{ccccc} (w_j)_1 & = & (w_j)_0 & + & \delta w_j \\ (y_j)_1 & = & (y_j)_0 & + & \delta y_j \\ (z_j)_1 & = & (z_j)_0 & + & \delta z_j \\ (t_j)_1 & = & (t_j)_0 & + & \delta t_j \\ (\lambda)_1 & = & (\lambda)_0 & + & \delta\lambda \end{array} \tag{71}$$

anule las funciones G_i^j, B_k y C_l.

Las correcciones $\delta w_j, \ldots, \delta t_j$, $\delta w_{j+1}, \ldots, \delta t_{j+1}$ y $\delta\lambda$ en los argumentos de las funciones provocan cambios δB_k, δG_i^j, δC_l tales que:

$$\begin{cases} B_k + \delta B_k & = & 0 & (k = 1, 2, 3) & \\ G_i^j + \delta G_i^j & = & 0 & (i = 1, 2, 3, 4) & (j = 1, 2, \ldots, N-1) \\ C_l + \delta C_l & = & 0 & (l = 1, 2) & \end{cases} \tag{72}$$

Si las correcciones son pequeñas, podemos escribir los cambios δB_k, δG_i^j y δC_l como desarrollos en potencias de dichas correcciones incluyendo sólo el término lineal. Así, podemos escribir el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial B_k}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial B_k}{\partial t_1}\ \delta t_1 + \frac{\partial B_k}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = -B_k \qquad (k = 1,2,3) \tag{73}$$

$$\frac{\partial G_i^j}{\partial w_j}\ \delta w_j + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial t_j}\ \delta t_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial w_{j+1}}\ \delta w_{j+1} + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial t_{j+1}}\ \delta t_{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = -G_i^j \qquad (i = 1,2,3,4) \quad (j = 1,2,\ldots,N-1) \tag{74}$$

$$\frac{\partial C_l}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial C_l}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial C_l}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = -C_l \qquad (l = 1,2) \tag{75}$$

Todas las derivadas parciales que aparecen, así como también las inhomogeneidades, son cantidades conocidas. Las incógnitas del sistema son las correcciones δw, δy, δz y δt en j y $j+1$, y $\delta\lambda$. Tenemos en definitiva $4N+1$ incógnitas, y $4(N-1)+5 = 4N+1$ ecuaciones algebraicas lineales en dichas incógnitas; este sistema se puede resolver, encontrandose el valor de todas las correcciones. Con esas correcciones obtenemos una solución mejorada de la forma (**??**), la cual puede ser a su vez usada como solución inicial en una segunda resolución del sistema (**??**)-(**??**)-(**??**). Podemos iterar sucesivamente este procedimiento hasta que todas las correcciones se tornen tan pequeñas como uno desee. Este procedimiento no es mas que la generalización del algoritmo de Newton para hallar la raíz de una función; en nuestro caso son las funciones G_i^j, B_k y C_l a las que les debemos encontrar las raíces (correcciones).

Si uno examina la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales definido por (**??**), (**??**) y (**??**), encuentra que sólo hay coeficientes no nulos en la primer columna y cerca de la diagonal principal. Veamos por ejemplo la forma del vértice superior izquierdo de la matriz, mostrando sólo los elementos no triviales:

$\frac{\partial B_1}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial B_1}{\partial w_1}$	$\frac{\partial B_1}{\partial y_1}$	$\frac{\partial B_1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial B_1}{\partial t_1}$								
$\frac{\partial B_2}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial B_2}{\partial w_1}$	$\frac{\partial B_2}{\partial y_1}$	$\frac{\partial B_2}{\partial z_1}$	$\frac{\partial B_2}{\partial t_1}$								
$\frac{\partial B_3}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial B_3}{\partial w_1}$	$\frac{\partial B_3}{\partial y_1}$	$\frac{\partial B_3}{\partial z_1}$	$\frac{\partial B_3}{\partial t_1}$								
$\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial w_1}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial y_1}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial t_1}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_1^1}{\partial t_2}$				
$\frac{\partial G_2^1}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial w_1}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial y_1}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial t_1}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_2^1}{\partial t_2}$				
$\frac{\partial G_3^1}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial w_1}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial y_1}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial t_1}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_3^1}{\partial t_2}$				
$\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial w_1}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial y_1}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial z_1}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial t_1}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_4^1}{\partial t_2}$				
$\frac{\partial G_1^2}{\partial \lambda}$					$\frac{\partial G_1^2}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial t_2}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial w_3}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial y_3}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial z_3}$	$\frac{\partial G_1^2}{\partial t_3}$
$\frac{\partial G_2^2}{\partial \lambda}$					$\frac{\partial G_2^2}{\partial w_2}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial y_2}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial z_2}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial t_2}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial w_3}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial y_3}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial z_3}$	$\frac{\partial G_2^2}{\partial t_3}$
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Por otra parte hay que notar que muchas de las derivadas que aparecen resultan ser nulas.

La forma de la matriz es adecuada para ser resuelta usando un procedimiento ideado por Henyey en 1964 y decripto (para el caso del cálculo de estructura y evolución estelar) por Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967). A continuación describimos detalladamente tal procedimiento adecuado al caso que nos ocupa.

3.2.2. Solución del sistema lineal

A partir de (**??**) y (**??**), poniendo $j = 1$, tendremos:

$$\frac{\partial B_1}{\partial w_1}\,\delta w_1 + \cdots + \frac{\partial B_1}{\partial t_1}\,\delta t_1 + 0\,\delta w_2 + 0\,\delta y_2 + 0\,\delta z_2 \;=\; -B_1 - 0\,\delta t_2 - \frac{\partial B_1}{\partial \lambda}\,\delta\lambda$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial w_1}\,\delta w_1 + \cdots + \frac{\partial B_2}{\partial t_1}\,\delta t_1 + 0\,\delta w_2 + 0\,\delta y_2 + 0\,\delta z_2 \;=\; -B_2 - 0\,\delta t_2 - \frac{\partial B_2}{\partial \lambda}\,\delta\lambda$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial B_3}{\partial t_1}\ \delta t_1 + 0\ \delta w_2 + 0\ \delta y_2 + 0\ \delta z_2 \quad = \quad -B_3 - 0\ \delta t_2 - \frac{\partial B_3}{\partial \lambda}\ \delta\lambda$$

junto con

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1^1}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial G_1^1}{\partial t_1}\ \delta t_1 + \frac{\partial G_1^1}{\partial w_2}\ \delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_1^1}{\partial z_2}\ \delta z_2 \quad &= \quad -G_1^1 - \frac{\partial G_1^1}{\partial t_2}\ \delta t_2 - \frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda}\ \delta\lambda \\
\frac{\partial G_2^1}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial G_2^1}{\partial t_1}\ \delta t_1 + \frac{\partial G_2^1}{\partial w_2}\ \delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_2^1}{\partial z_2}\ \delta z_2 \quad &= \quad -G_2^1 - \frac{\partial G_2^1}{\partial t_2}\ \delta t_2 - \frac{\partial G_2^1}{\partial \lambda}\ \delta\lambda \\
\frac{\partial G_3^1}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial G_3^1}{\partial t_1}\ \delta t_1 + \frac{\partial G_3^1}{\partial w_2}\ \delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_3^1}{\partial z_2}\ \delta z_2 \quad &= \quad -G_3^1 - \frac{\partial G_3^1}{\partial t_2}\ \delta t_2 - \frac{\partial G_3^1}{\partial \lambda}\ \delta\lambda \\
\frac{\partial G_4^1}{\partial w_1}\ \delta w_1 + \cdots + \frac{\partial G_4^1}{\partial t_1}\ \delta t_1 + \frac{\partial G_4^1}{\partial w_2}\ \delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_4^1}{\partial z_2}\ \delta z_2 \quad &= \quad -G_4^1 - \frac{\partial G_4^1}{\partial t_2}\ \delta t_2 - \frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda}\ \delta\lambda
\end{aligned}$$

y en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{\partial B_1}{\partial w_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial B_1}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial B_2}{\partial w_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial B_2}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial B_3}{\partial w_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial B_3}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial G_1^1}{\partial w_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial G_1^1}{\partial t_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial w_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial z_2} \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial G_4^1}{\partial w_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial G_4^1}{\partial t_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial w_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial y_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial z_2}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^1}
\cdot
\underbrace{\begin{bmatrix}
\delta w_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \\ \delta t_1 \\ \delta w_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2
\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^1}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\
0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\
0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_3 \\
-\frac{\partial G_1^1}{\partial t_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
-\frac{\partial G_4^1}{\partial t_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1
\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^1}
\cdot
\underbrace{\begin{bmatrix}
\delta t_2 \\ \delta\lambda \\ 1
\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^1}
\tag{76}$$

o en forma compacta:

$$\mathbf{A}^1 \;\cdot\; \mathbf{B}^1 \;=\; \mathbf{C}^1 \;\cdot\; \mathbf{D}^1 \tag{77}$$

siendo $\mathbf{B}^1$ y $\mathbf{D}^1$ incógnitas. Escribimos ahora el vector incógnita $\mathbf{B}^1$ como combinación lineal de las correcciones δt_2 y $\delta\lambda$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \\ \delta t_1 \\ \delta w_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_2 \\ \delta\lambda \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^1} \tag{78}$$

es decir:

$$\mathbf{B}^1 = \mathbf{T}^1 \;\cdot\; \mathbf{D}^1 \tag{79}$$

Sustituyendo (**??**) en (**??**):

$$\mathbf{A}^1 \cdot\; \mathbf{T}^1 = \mathbf{C}^1 \tag{80}$$

La ecuación (**??**) permite calcular los coeficientes $U_1, \ldots, W_7$. Explícitamente hay que resolver:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_1^1}{\partial t_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial w_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial z_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_4^1}{\partial t_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial w_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial y_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial z_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial t_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial t_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^1} \quad (81)$$

Ahora evaluemos (**??**) con $j = 2$. Tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1^2}{\partial w_2}\,\delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_1^2}{\partial t_2}\,\delta t_2 + \frac{\partial G_1^2}{\partial w_3}\,\delta w_3 + \cdots + \frac{\partial G_1^2}{\partial z_3}\,\delta z_3 &= -G_1^2 - \frac{\partial G_1^2}{\partial t_3}\,\delta t_3 - \frac{\partial G_1^2}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \\ \frac{\partial G_2^2}{\partial w_2}\,\delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_2^2}{\partial t_2}\,\delta t_2 + \frac{\partial G_2^2}{\partial w_3}\,\delta w_3 + \cdots + \frac{\partial G_2^2}{\partial z_3}\,\delta z_3 &= -G_2^2 - \frac{\partial G_2^2}{\partial t_3}\,\delta t_3 - \frac{\partial G_2^2}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \\ \frac{\partial G_3^2}{\partial w_2}\,\delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_3^2}{\partial t_2}\,\delta t_2 + \frac{\partial G_3^2}{\partial w_3}\,\delta w_3 + \cdots + \frac{\partial G_3^2}{\partial z_3}\,\delta z_3 &= -G_3^2 - \frac{\partial G_3^2}{\partial t_3}\,\delta t_3 - \frac{\partial G_3^2}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \\ \frac{\partial G_4^2}{\partial w_2}\,\delta w_2 + \cdots + \frac{\partial G_4^2}{\partial t_2}\,\delta t_2 + \frac{\partial G_4^2}{\partial w_3}\,\delta w_3 + \cdots + \frac{\partial G_4^2}{\partial z_3}\,\delta z_3 &= -G_4^2 - \frac{\partial G_4^2}{\partial t_3}\,\delta t_3 - \frac{\partial G_4^2}{\partial \lambda}\,\delta\lambda \end{aligned}$$

Reemplazamos ahora δw_2, δy_2 y δz_2 por sus expresiones correspondientes según (**??**),

$$\begin{aligned} \delta w_2 &= U_5\,\delta t_2 + V_5\,\delta\lambda + W_5 \\ \delta y_2 &= U_6\,\delta t_2 + V_6\,\delta\lambda + W_6 \\ \delta z_2 &= U_7\,\delta t_2 + V_7\,\delta\lambda + W_7 \end{aligned} \quad (82)$$

y obtenemos:

$$\frac{\partial G_i^2}{\partial w_2}\ \Big[U_5\ \delta t_2 + V_5\ \delta\lambda + W_5\Big] + \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2}\ \Big[U_6\ \delta t_2 + V_6\ \delta\lambda + W_6\Big] + \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2}\ \Big[U_7\ \delta t_2 + V_7\ \delta\lambda +$$

$$+ W_7\Big] + \frac{\partial G_i^2}{\partial t_2}\ \delta t_2 + \frac{\partial G_i^2}{\partial w_3}\ \delta w_3 + \frac{\partial G_i^2}{\partial y_3}\ \delta y_3 + \frac{\partial G_i^2}{\partial z_3}\ \delta z_3 = -G_i^2 - \frac{\partial G_i^2}{\partial t_3}\ \delta t_3 - \frac{\partial G_i^2}{\partial \lambda}\ \delta\lambda$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

Agrupando en δt_2 y $\delta\lambda$:

$$\delta t_2\ \left[\frac{\partial G_i^2}{\partial t_2} + U_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + U_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2}\ + U_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2}\ \right] + \delta w_3\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_3} + \delta y_3\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_3} + \delta z_3\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_3} = -\Big[G_i^2 +$$

$$+ W_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + W_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2} + W_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2}\Big] - \delta\lambda\ \left[\frac{\partial G_i^2}{\partial \lambda} + V_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + V_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2} + V_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2}\right] - \delta t_3\ \frac{\partial G_i^2}{\partial t_3}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

y definiendo las cantidades

$$\begin{aligned}
\alpha_i^2 &= \frac{\partial G_i^2}{\partial t_2} + U_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + U_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2} + U_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2} \\
\beta_i^2 &= G_i^2 + W_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + W_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2} + W_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2} \\
\gamma_i^2 &= \frac{\partial G_i^2}{\partial \lambda} + V_5\ \frac{\partial G_i^2}{\partial w_2} + V_6\ \frac{\partial G_i^2}{\partial y_2} + V_7\ \frac{\partial G_i^2}{\partial z_2}
\end{aligned} \tag{83}$$

escribimos en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
\alpha_1^2 & \frac{\partial G_1^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial z_3} \\
\alpha_2^2 & \frac{\partial G_2^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial z_3} \\
\alpha_3^2 & \frac{\partial G_3^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial z_3} \\
\alpha_4^2 & \frac{\partial G_4^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial z_3}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_2 \\ \delta w_3 \\ \delta y_3 \\ \delta z_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix}
-\frac{\partial G_1^2}{\partial t_3} & -\gamma_1^2 & -\beta_1^2 \\
-\frac{\partial G_2^2}{\partial t_3} & -\gamma_2^2 & -\beta_2^2 \\
-\frac{\partial G_3^2}{\partial t_3} & -\gamma_3^2 & -\beta_3^2 \\
-\frac{\partial G_4^2}{\partial t_3} & -\gamma_4^2 & -\beta_4^2
\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_3 \\ \delta\lambda \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^2} \tag{84}$$

y en forma compacta

$$\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{D}^2 \tag{85}$$

siendo $\mathbf{B}^2$ y $\mathbf{D}^2$ incógnitas. Escribimos el vector $\mathbf{B}^2$ como combinación lineal de δt_3 y $\delta\lambda$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_2 \\ \delta w_3 \\ \delta y_3 \\ \delta z_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_8 & V_8 & W_8 \\ U_9 & V_9 & W_9 \\ U_{10} & V_{10} & W_{10} \\ U_{11} & V_{11} & W_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_3 \\ \delta\lambda \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^2} \tag{86}$$

o sea

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{D}^2 \tag{87}$$

Sustituyendo (**??**) en (**??**):

$$\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{T}^2 = \mathbf{C}^2 \tag{88}$$

La ecuación (**??**) permite encontrar los coeficientes $U_8, \ldots, W_{11}$, resolviendo el sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \frac{\partial G_1^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial z_3} \\ \alpha_2^2 & \frac{\partial G_2^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial z_3} \\ \alpha_3^2 & \frac{\partial G_3^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial z_3} \\ \alpha_4^2 & \frac{\partial G_4^2}{\partial w_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial y_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial z_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_8 & V_8 & W_8 \\ U_9 & V_9 & W_9 \\ U_{10} & V_{10} & W_{10} \\ U_{11} & V_{11} & W_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1^2}{\partial t_3} & -\gamma_1^2 & -\beta_1^2 \\ -\frac{\partial G_2^2}{\partial t_3} & -\gamma_2^2 & -\beta_2^2 \\ -\frac{\partial G_3^2}{\partial t_3} & -\gamma_3^2 & -\beta_3^2 \\ -\frac{\partial G_4^2}{\partial t_3} & -\gamma_4^2 & -\beta_4^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^2} \tag{89}$$

Ahora ya estamos en condiciones de generalizar las ecuaciones para cualquier $j \geq 2$. La generalización de (**??**) es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_j \\ \delta w_{j+1} \\ \delta y_{j+1} \\ \delta z_{j+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^j} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^j} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta t_{j+1} \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^j} \tag{90}$$

donde $j = 2, 3, \ldots, N-2$.

Ahora los coeficientes $U_{4j}, \ldots, W_{4j+3}$ se calculan resolviendo el sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1^j & \frac{\partial G_1^j}{\partial w_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial y_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial z_{j+1}} \\ \alpha_2^j & \frac{\partial G_2^j}{\partial w_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial y_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial z_{j+1}} \\ \alpha_3^j & \frac{\partial G_3^j}{\partial w_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial y_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial z_{j+1}} \\ \alpha_4^j & \frac{\partial G_4^j}{\partial w_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial y_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial z_{j+1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^j} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^j} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1^j}{\partial t_{j+1}} & -\gamma_1^j & -\beta_1^j \\ -\frac{\partial G_2^j}{\partial t_{j+1}} & -\gamma_2^j & -\beta_2^j \\ -\frac{\partial G_3^j}{\partial t_{j+1}} & -\gamma_3^j & -\beta_3^j \\ -\frac{\partial G_4^j}{\partial t_{j+1}} & -\gamma_4^j & -\beta_4^j \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^j} \tag{91}$$

donde $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$ están definidos como:

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial t_j} + U_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial w_j} + U_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_j} + U_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial z_j} \\ \beta_i^j &= G_i^j + W_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial w_j} + W_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_j} + W_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial z_j} \\ \gamma_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} + V_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial w_j} + V_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_j} + V_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial z_j} \end{aligned} \tag{92}$$

Finalmente, en la región central de la estrella, $j = N-1$. De nuevo, usando (**??**) y (**??**) para ese valor de j tendremos:

$$\frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial w_{N-1}}\ \delta w_{N-1} + \cdots + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial t_{N-1}}\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = \\ = -G_1^{N-1}$$

$$\frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial w_{N-1}}\ \delta w_{N-1} + \cdots + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial t_{N-1}}\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = \\ = -G_2^{N-1}$$

$$\frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial w_{N-1}}\ \delta w_{N-1} + \cdots + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial t_{N-1}}\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = \\ = -G_3^{N-1}$$

$$\frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial w_{N-1}}\ \delta w_{N-1} + \cdots + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial t_{N-1}}\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = \\ = -G_4^{N-1}$$

$$(93)$$

y también

$$0\ \delta w_{N-1} + \cdots + 0\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial C_1}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial C_1}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial C_1}{\partial \lambda}\ \delta\lambda \ = \ -C_1$$

$$0\ \delta w_{N-1} + \cdots + 0\ \delta t_{N-1} + \frac{\partial C_2}{\partial w_N}\ \delta w_N + \cdots + \frac{\partial C_2}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial C_2}{\partial \lambda}\ \delta\lambda \ = \ -C_2$$

Sustituyendo δw_{N-1}, δy_{N-1} y δz_{N-1} por las expresiones que se pueden obtener a partir del planteo para $j = N - 2$,

$$\begin{array}{lcl} \delta w_{N-1} & = & U_{4N-7}\,\delta t_{N-1} \quad + \quad V_{4N-7}\,\delta\lambda \quad + \quad W_{4N-7} \\ \delta y_{N-1} & = & U_{4N-6}\,\delta t_{N-1} \quad + \quad V_{4N-6}\,\delta\lambda \quad + \quad W_{4N-6} \\ \delta z_{N-1} & = & U_{4N-5}\,\delta t_{N-1} \quad + \quad V_{4N-5}\,\delta\lambda \quad + \quad W_{4N-5} \end{array} \qquad (94)$$

obtenemos:

$$\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} \left[U_{4N-7}\ \delta t_{N-1} + V_{4N-7}\ \delta\lambda + W_{4N-7}\right] + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} \left[U_{4N-6}\ \delta t_{N-1} + V_{4N-6}\ \delta\lambda + \right.$$

$$\left. + W_{4N-6}\right] + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}} \left[U_{4N-5}\ \delta t_{N-1} + V_{4N-5}\ \delta\lambda\ +\ W_{4N-5}\right] + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial t_{N-1}}\ \delta t_{N-1} +$$

$$\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_N}\ \delta y_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_N}\ \delta z_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial t_N}\ \delta t_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial \lambda}\ \delta\lambda = -\ G_i^{N-1}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

Agrupando en δt_{N-1} y $\delta\lambda$:

$$\delta t_{N-1} \left[\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial t_{N-1}} + U_{4N-7}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + U_{4N-6}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}}\ + U_{4N-5}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}}\ \right] + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_N}\ \delta w_N +$$

$$+ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_N}\ \delta y_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_N}\ \delta z_N + \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial t_N} \delta t_N\ + \delta\lambda \left[\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial \lambda} + V_{4N-7}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + V_{4N-6}\right.$$

$$\left.\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} + V_{4N-5}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}}\right] = -\left[G_i^{N-1} + W_{4N-7}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + W_{4N-6}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} + \right.$$

$$\left. + W_{4N-5}\ \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}}\right]$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

Definiendo las cantidades α_i^{N-1}, β_i^{N-1}, γ_i^{N-1} como:

$$\begin{aligned}
\alpha_i^{N-1} &= \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial t_{N-1}} + U_{4N-7}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + U_{4N-6}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} + U_{4N-5}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}} \\
\beta_i^{N-1} &= \frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial \lambda} + V_{4N-7}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + V_{4N-6}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} + V_{4N-5}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}} \\
\gamma_i^{N-1} &= G_i^{N-1} + W_{4N-7}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial w_{N-1}} + W_{4N-6}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial y_{N-1}} + W_{4N-5}\,\frac{\partial G_i^{N-1}}{\partial z_{N-1}}
\end{aligned} \tag{95}$$

Con estas definiciones, las ecuaciones (**??**) se pueden escribir ahora:

$$\alpha_1^{N-1}\delta t_{N-1} + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial w_N}\,\delta w_N + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial y_N}\,\delta y_N + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial z_N}\,\delta z_N + \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial t_N}\,\delta t_N + \beta_1^{N-1}\,\delta\lambda = \\ = -\gamma_1^{N-1}$$

$$\alpha_2^{N-1}\delta t_{N-1} + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial w_N}\,\delta w_N + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial y_N}\,\delta y_N + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial z_N}\,\delta z_N + \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial t_N}\,\delta t_N + \beta_2^{N-1}\,\delta\lambda = \\ = -\gamma_2^{N-1}$$

$$\alpha_3^{N-1}\,\delta t_{N-1} + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial w_N}\,\delta w_N + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial y_N}\,\delta y_N + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial z_N}\,\delta z_N + \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial t_N}\,\delta t_N + \beta_3^{N-1}\,\delta\lambda = \\ = -\gamma_3^{N-1}$$

$$\alpha_4^{N-1}\delta t_{N-1} + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial w_N}\,\delta w_N + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial y_N}\,\delta y_N + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial z_N}\,\delta z_N + \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial t_N}\,\delta t_N + \beta_4^{N-1}\,\delta\lambda = \\ = -\gamma_4^{N-1}$$

Finalmente, en forma matricial, las ecuaciones (**??**) junto con las dos ecuaciones en C_l se escriben como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{N-1} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial w_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial y_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial z_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial t_N} & \beta_1^{N-1} \\ \alpha_2^{N-1} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial w_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial y_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial z_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial t_N} & \beta_2^{N-1} \\ \alpha_3^{N-1} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial w_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial y_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial z_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial t_N} & \beta_3^{N-1} \\ \alpha_4^{N-1} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial w_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial y_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial z_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial t_N} & \beta_4^{N-1} \\ 0 & \frac{\partial C_1}{\partial w_N} & \frac{\partial C_1}{\partial y_N} & \frac{\partial C_1}{\partial z_N} & \frac{\partial C_1}{\partial t_N} & \frac{\partial C_1}{\partial \lambda} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial w_N} & \frac{\partial C_2}{\partial y_N} & \frac{\partial C_2}{\partial z_N} & \frac{\partial C_2}{\partial t_N} & \frac{\partial C_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta t_{N-1} \\ \delta w_N \\ \delta y_N \\ \delta z_N \\ \delta t_N \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1^{N-1} \\ -\gamma_2^{N-1} \\ -\gamma_3^{N-1} \\ -\gamma_4^{N-1} \\ -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix} \tag{96}$$

Todas las inhomogeneidades y los coeficientes del sistema (**??**) se conocen, por lo que puede ser resuelto de inmediato para dar las cuatro correcciones para el centro δw_N, δy_N, δz_N, δt_N, la corrección al autovalor $\delta\lambda$ y la corrección "de enganche" δt_{N-1}. A continuación, usando la ecuación (**??**) con $j = N - 2$ y conociendo $\delta\lambda$ y δt_{N-1} obtenemos las correcciones para la primer interfase δw_{N-1}, δy_{N-1}, δz_{N-1} y la corrección de enganche δt_{N-2} para la siguiente interfase. Procediendo de igual forma para los siguientes valores de j llegamos al caso $j = 2$ y obtenemos δt_2, δw_3, δy_3, δz_3. Finalmente, el proceso se cierra calculando las correcciones restantes δw_1, δy_1, δz_1, δt_1, δw_2 δy_2, δz_2 mediante la ecuación (**??**). De esta forma hemos resuelto completamente el sistema de ecuaciones definido por (**??**), (**??**) y (**??**).

Tanto el esquema de Henyey descripto para encontrar las correcciones, así como el proceso iterativo que permite hallar la solución a partir de la relajación de una solución inicial aproximada, han sido codificados en lenguaje FORTRAN en un programa en doble precisión, que contiene cerca de 1000 líneas.

3.3. Aplicación del código a una polítropa

Como una primer prueba para el código de pulsaciones descripto, lo aplicamos a un modelo estelar en equilibrio consistente en una polítropa.

La ecuación de estado politrópica es (Kippenhahn & Weigert, 1990)

$$p = K\ \rho^{1+\frac{1}{n}}, \tag{97}$$

siendo n el índice politrópico y K una constante, donde la densidad está dada por

$$\rho = \rho_c\ \phi^n, \tag{98}$$

siendo ρ_c la densidad central. La función $\phi(\eta)$ satisface la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{\eta^2}\ \frac{d}{d\eta}\left(\eta^2\ \frac{d\phi}{d\eta}\right) = -\phi^n, \tag{99}$$

y cumple, en el centro de la configuración, las siguientes condiciones de borde

$$\phi(0) = 1; \qquad \frac{d\phi}{d\eta}(0) = 0. \tag{100}$$

El borde externo de la configuración está definido por el valor $\eta = \eta_1$ tal que

$$\phi(\eta_1) = 0. \tag{101}$$

Para la construcción de un modelo estelar politrópico, si la constante K no está fijada por la ecuación de estado, alcanza con dar los valores de n, R y $M_\star$ y resolver la ecuación de Lane-Emden para encontrar $\phi(\eta)$ y $\phi^{'}(\eta)$ para η en el intervalo [0,η_1]. En nuestro caso hemos elegido el índice $n = 3$ y obtenido numéricamente $\phi(\eta)$, $\phi^{'}(\eta)$ y η_1 con un programa FORTRAN que integra la ecuación diferencial con el método Runge-Kutta.

La elección $n = 3$ implica que la ecuación de estado se torna en

$$p = K\ \rho^{\frac{4}{3}}. \tag{102}$$

Esta corresponde al límite relativista de la ecuación de estado de Chandrasekhar para una estrella Enana Blanca de gran masa y alta densidad (Kippenhahn & Weigert, 1990).

Con $M_\star$ y R dados se puede calcular la densidad media $\bar{\rho}$ como

$$\bar{\rho} = \frac{M_\star}{\frac{4}{3}\ \pi\ R^3}. \tag{103}$$

La densidad central puede calcularse como

$$\rho_c = -\left[\frac{\eta}{3}\ \frac{1}{\frac{d\phi}{d\eta}}\right]_{\eta_1}\ \bar{\rho}. \tag{104}$$

La coordenada radial r es

$$r = \alpha\ \eta, \tag{105}$$

donde la constante α vale

$$\alpha = \frac{R}{\eta_1}. \tag{106}$$

De esta forma, la distribución en densidad está dada por

$$\rho(r) = \rho_c\ \phi^n(\eta). \tag{107}$$

La constante K puede determinarse a través de

$$K = \frac{4\pi G}{(n+1)}\ \rho_c^{1-\frac{1}{n}}\ \alpha^2, \tag{108}$$

y así podemos encontrar la distribución en la presión, como

$$p(r) = K\ \rho_c^{1+\frac{1}{n}}\ \phi^{n+1} = p_c\ \phi^{n+1}. \tag{109}$$

Finalmente, la variable masa $M(r)$ estará dada por

$$M(r) = -4\pi\ \alpha^3\ \rho_c \left[\eta^2\ \frac{d\phi}{d\eta}\right]. \tag{110}$$

Los valores que hemos adoptado son los siguientes:

$n = 3, \quad M_\star = 1M_\odot = 1.989 \times 10^{33} gr, \quad R = 10^{-2} R_\odot = 6.96 \times 10^8 cm$

y hemos obtenido:

$\bar{\rho} = 1.408 \times 10^6 gr\ cm^{-3}, \qquad \rho_c = 7.63 \times 10^7 gr\ cm^{-3}, \qquad \alpha = 1.009 \times 10^8 cm,$

$K = 3.84 \times 10^{14} dyn\ cm^2\ gr^{-4/3}, \quad p_c = 1.24 \times 10^{25} dyn\ cm^{-2}$

Con las cantidades estructurales $r, M(r), \rho(r)$ y $p(r)$, junto con las derivadas $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r$ y $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$, se calculan las cantidades adimensionales definidas por (**??**), (**??**), (**??**) y (**??**). En las Figuras 7, 8, 9 y 10 mostramos la marcha de $V_g(r), U(r), C_1(r)$ y $A^*(r)$ a lo largo de la polítropa. En la Figura 11 vemos la forma de la frecuencia de Brunt-Väisälä y la de Lamb con $l = 2$ (ver también Figura 5). Para Γ_1 hemos adoptado el valor 5/3.

Las condiciones de borde adoptadas para las ecuaciones de pulsación (ecuaciones (**??**)) son las siguientes: para el centro de la estrella, imponiendo que las soluciones sean finitas, tenemos

$$w_N \; \frac{[C_1]_N \; \lambda}{l} - y_N = 0|_{centro}, \qquad l \; z_N - t_N = 0|_{centro}, \tag{111}$$

y para la superficie adoptamos

$$w_1 - y_1 + z_1 = 0|_{superficie}, \qquad (l+1) \; z_1 + t_1 = 0|_{superficie}, \qquad w_1 = 1|_{superficie}, \tag{112}$$

donde la primera de estas responde al hecho de que la variación Lagrangiana en la presión, δp, debe ser nula en la superficie estelar, y la segunda expresa que la variación Euleriana del potencial, $\Phi^{'}$, debe ser contínua ($\Phi^{'}_{R_-} = \Phi^{'}_{R_+}$). La condición de normalización es usada debido a que estamos tratando con un sistema homogéneo de ecuaciones (ver ecuaciones (**??**) a (**??**)).

Una vez que disponemos del modelo en equilibrio, para aplicar el código de pulsaciones es imprescindible disponer de una solución inicial aproximada. Es decir, necesitamos cuatro funciones y un número que aproximen lo mejor posible a las cuatro autofunciones y el autovalor verdaderos de la polítropa para un dado valor de l. Este es un punto delicado del problema, ya que la convergencia del método depende muy sensiblemente de la solución inicial que se adopte. A continuación describimos de qué manera hemos obtenido una solución inicial de las ecuaciones y cómo el programa ejecuta el cálculo de la solución final para la polítropa.

3.3.1. Obtención de la solución inicial y resolución del problema

El programa inicialmente lee los parámetros ya calculados $V_g(r), U(r), C_1(r)$ y $A^*(r)$ correspondientes a la polítropa. Inmediatamente después calcula $V_g(r), U(r), C_1(r)$ y $A^*(r)$

para un modelo mas simple aún: la esfera homogénea compresible. A continuación se calcula la solución analítica para la esfera homogénea, a través de las expresiones formales que dan los autovalores y autofunciones. Tales expresiones son las que aparecen en Ledoux & Walraven (1958). Luego se hace una interpolación lineal de la forma $f = (f_p + f_{eh})/2$, donde f_p y f_{eh} representan una cualquiera de las cantidades adimensionales $V_g(r), U(r), C_1(r)$ y $A^*(r)$, para la polítropa y para la esfera homogénea respectivamente. La variable f entonces representa tal cantidad adimensional para un modelo híbrido entre la esfera homogénea y la polítropa. Para este modelo interpolado el programa calcula la solución utilizando como solución inicial las autofunciones y el autovalor hallados para la esfera homogénea. En el paso siguiente se toma $f = f_p$, es decir, el modelo en equilibrio de la polítropa, y se calcula la solución usando como solución inicial las autofunciones y el autovalor ya calculados para el modelo interpolado. El resultado es la solución final deseada para la polítropa. En bloques, el proceso automático descripto se puede resumir así:

donde las líneas llenas están indicando el ingreso de modelos en equilibrio y las líneas quebradas la entrada de soluciones iniciales.

3.3.2. Resultados obtenidos

Algunos de los modos de pulsación que hemos calculado (para $k \leq 20$) se muestran en las Tablas 6, con los respectivos autovalores para $l = 2,\ 3$ y 4[12]. Con el Código hemos sido capaces de encontrar el modo f sólo para $l = 2$, algunos modos g, y un número mayor de modos p para los tres valores de l. Claramente se vé que hay modos que no hemos podido encontrar (en el caso de modos p, por ejemplo, los correspondientes a k par). Creemos que esto se debe a que el procedimiento usado para generar la solución inicial no es el mas adecuado, en el sentido de que posibilita la omisión de modos p y g del espectro de pulsaciones (en el caso de los modos g el comportamiento empeora).

Sin embargo, los modos que hemos encontrado son desde todo punto de vista acertados. Para estar seguros de que nuestros resultados son correctos hemos comparado los autovalores calculados con aquellos dados en Cox (1976, 1980) para $l = 2$ (ver Tabla 7).

En las Figuras 12 a 19 hemos graficado las autofunciones de algunos modos calculados, para $l = 2$. Se nota claramente que en los modos p la amplitud relativa de oscilación, dada por $y_1(x)$, es significativa sólo en las regiones externas de la polítropa, siendo despreciable hacia el centro (este es un comportamiento esperado). También, como se pone de manifiesto en la Figura 19a, para ordenes radiales k crecientes los nodos de la autofunción $y_1(x)$ se van acumulando gradualmente hacia la superficie. Por otra parte, no obstante disponer de pocos modos g, se puede inferir de los gráficos que ellos tienen un comportamiento opuesto

---

[12]El subíndice indica el valor de k, el cual, para un modelo en equilibrio simple como el que estamos utilizando es el número de nodos de la autofunción $y_1(x)$.

al de los p: muy grandes amplitudes y acumulación de nodos cerca del centro. Finalmente, la inspección de $y_1(x)$ para el modo f revela la ausencia de nodos en dicha autofunción (como es de esperar).

Una comparación de nuestras autofunciones $y_1(x)$ para los modos p_1, g_2 y f en $l = 2$ con aquellas graficadas en la Figura 14.2 de Unno et al. (1989) demuestra el alto grado de concordancia entre nuestros resultados y los de dichos autores. Lo mismo puede concluirse comparando nuestro modo p_3 con el graficado en la Figura 6 de Ledoux (1974) para $l = 2$.

En el caso de las autofunciones y_2, y_3 e y_4, no hemos podido comparar nuestros resultados con los de otros autores debido a la inexistencia de tablas o gráficos publicados que muestren tales autofunciones. Sin embargo podemos apreciar que tienen un comportamiento cualitativo correcto; por ejemplo, en lo que respecta a la variación Euleriana del potencial (a través de $y_3(x)$) vemos que tiene amplitudes cada vez mas pequeñas a medida que vamos hacia ordenes radiales (k) crecientes, como se observa en la Figura 19b. Esto es esperable, ya que es uno de lo argumentos que justifican el uso de la aproximación de Cowling (ver Introducción). Finalmente, en la Figura 20 graficamos la autofunción $y_1(x)$ para tres valores de l, en el modo p_3, con el objeto de visualizar en que forma varía la amplitud radial de las oscilaciones al cambiar el grado armónico del modo. Esta dependencia con l, pero de los autovalores, puede apreciarse en las Tablas 6, comparando modos del mismo k para los diferentes l.

TABLA 6a. Autovalores (ω^2) de modos g y f para $l = 2, 3$ y 4

Modo	$l = 2$	Modo	$l = 3$	Modo	$l = 4$
f ...	8.2030757	g_5 ...	1.5913848	g_1 ...	8.0271857
g_2 ...	2.8363491	g_7 ...	1.0056638	g_2 ...	5.3969807
g_7 ...	0.5709958	g_{11} ...	0.50655141	g_4 ...	2.9011475
g_{11} ...	0.27593871	g_{17} ...	0.24615743	g_5 ...	2.2581665
				g_{18} ...	0.35228908

TABLA 6b. Autovalores (ω^2) de modos p para $l = 2, 3$ y 4

Modo	$l = 2$	Modo	$l = 3$	Modo	$l = 4$
p_1 ...	15.305488	p_1 ...	18.496374	p_1 ...	20.810900
p_3 ...	41.566556	p_2 ...	31.337484	p_3 ...	52.356689
p_5 ...	80.737002	p_3 ...	47.424567	p_4 ...	72.923245
p_7 ...	132.63293	p_4 ...	66.712251	p_6 ...	123.62351
p_9 ...	197.19784	p_5 ...	89.189897	p_7 ...	153.75148
p_{11} ...	274.42813	p_7 ...	143.69087	p_9 ...	223.55915
p_{13} ...	364.41737	p_9 ...	210.89571	p_{11} ...	306.14164
p_{15} ...	467.42320	p_{10} ...	249.26434	p_{12} ...	352.26464
p_{17} ...	583.94648	p_{11} ...	290.82211	p_{14} ...	454.35244
p_{19} ...	714.91282	p_{13} ...	383.59210	p_{15} ...	510.43361
		p_{14} ...	434.87801	p_{17} ...	633.12106
		p_{15} ...	489.50527	p_{20} ...	846.74666
		p_{19} ...	743.53651		

TABLA 7*

Modo	Esta Práctica	Cox
g_7 ...	0.5709958	0.5691
g_2 ...	2.8363491	2.828
f ...	8.2030757	8.175
p_1 ...	15.305488	15.26
p_3 ...	41.566556	41.47
p_5 ...	80.737002	80.55
p_7 ...	132.63293	132.4
p_9 ...	197.19784	196

*Ver explicación en el texto

3.4. Aspectos a mejorar en el Código

A partir de los resultados que hemos obtenido podemos afirmar que el Código de pulsaciones funciona correctamente. Sin embargo hay algunos aspectos que deben ser optimizados. Uno de ellos se refiere a la forma en que generamos las soluciones iniciales. En el futuro tendremos que utilizar un procedimiento que proporcione valores aproximados para los autovalores y autofunciones para *todos* los modos que contiene un dado intervalo del espectro de pulsaciones, que nos asegure no estar omitiendo ninguno de ellos. Una manera de lograr esto es descripta en Unno et al. (1989). Si se deja de lado una de las condiciones de borde (manteniendo la condición de normalización), se puede resolver el sistema de ecuaciones con un ω^2 arbitrario; luego se evalúa la condición de borde excluída. Esta condición se anulará sólo si ω^2 es uno de los autovalores. Evaluando la condición con distintos ω^2 pertenecientes a un dado intervalo del espectro, se pueden usar los valores de ω^2 próximos a los puntos donde la condición se anula, como valores iniciales de prueba de los autovalores.

Otro aspecto a ser mejorado se refiere a la distribución de las capas en que dividimos el modelo (grilla). Es necesario introducir un algoritmo que permita variar el número de capas según la región del modelo: en aquellos lugares donde las autofunciones oscilen rápidamente o presenten pendientes muy pronunciadas, será necesario tener una gran resolución en la grilla de capas para poder resolver los nodos[13]; en las zonas donde las autofunciones se comportan en forma monótona y suave alcanzará con pocas capas.

Estas mejoras a introducir posibilitarán en el futuro la aplicación del Código a modelos mas realistas.

[13]Por ejemplo, en estrellas Enanas Blancas, los modos g^+ observados tienen relevancia sólo en la zona superficial de la estructura.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. O. G. Benvenuto por proponerme para esta Práctica un tema por demás interesante, como es el de las pulsaciones estelares no radiales, y por haberme guiado para poder desarrollar este trabajo y finalmente llegar a buen término.

También quiero agradecerles al Lic. J. Panei y al Dr. L. Althaus la ayuda y comentarios que me brindaron con tanta cordialidad.

Finalmente, deseo hacer llegar mi enorme gratitud a mi familia, por haberme apoyado en forma constante y haber soportado tantas horas de ausencia de mi parte.

REFERENCES

Benvenuto, O. G., 1988, Tesis Doctoral, Observatorio Astronómico de La Plata.

Bergeron, P., et al. 1995, ApJ 449, 258

Bergeron, P., et al. 1993, AJ 106, 1987

Bergeron, P., et al. 1992, ApJ 394, 228

Bradley, P. A. 1996, ApJ 468, 350

Bradley, P. A. 1995, Balt. Astron. 4, 536

Bradley, P. A. & Winget, D. E. 1994, ApJ 430, 850

Brassard, P., et al. 1992, ApJS 80, 369

Brickhill, A. J. 1992, MNRAS 259, 529

Buchler, J. R., et al. 1995, A&A 296, 405

Clemens, J. C. 1997, in IAU Symp. 185, 253

Clemens, J. C. 1993, Balt. Astron. 2, 407

Cox, J. P. 1980, Theory of Stellar Pulsation, Princeton University Press

Cox, J. P. 1976, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 14, 247

D'Antona, F., & Mazzitelli, I. 1991, in IAU Symp. 145, 399

Dziembowski, W. 1977, Acta Astron 27, 203

Jones, P. W., et al. 1989, ApJ 336, 403

Kepler, S. O., et al. 1995a, ApJ 447, 874

Kepler, S. O., et al. 1995b, Balt. Astron. 4, 221

Kepler, S. O., et al. 1995c, Balt. Astron. 4, 238

Kepler, S. O. 1984, ApJ 278, 754

Kippenhahn, R., & Weigert, A. 1990, Stellar Structure and Evolution, Springer-Verlag

Kippenhahn, R., Weigert, A., & Hofmeister, E. 1967, in Methods in Computational Physics, Academic Press, 129

Ledoux, P. 1974, IAU Symp. 59, 135

Ledoux, P., & Walraven, Th. 1958, Variable Stars, in Handbuch der Physik, Springer-Verlag, 51, 514

Mc Graw, J. T., & Robinson, E. L. 1975, ApJ 200, L85

O'Donoghue, D., & Warner, B. 1987, MNRAS 228, 949

Oke, J. B., et al. 1984, ApJ 281, 276

Osaki, Y., & Hansen, C. J. 1973, ApJ 185, 277

Pelletier, C. 1986, ApJ 307, 242

Pesnell, W. D. 1985, ApJ 292, 238

Pfeiffer, B., et al. 1996, A&A 314, 182

Provencal, J. L., et al. 1996, ApJ 466, 1011

Robinson, E. L., et al. 1982, ApJ 259, 219

Stover, R. J., et al. 1980, ApJ 240, 870

Thejll, P., et al. 1991, ApJ 370, 355

Unno, W., et al. 1989, Nonradial Oscillations of Stars, University of Tokio Press

Vauclair, G., et al. 1987, A&A 175, L1

Winget, D. E., et al. 1994, ApJ 430, 839

Winget, D. E. 1988, IAU Symp. 123, 305

Winget, D. E. et al. 1987, ApJ 316, 305

This manuscript was prepared with the AAS LaTeX macros v4.0.