

Capítulo 1

Introducción

Para un observador casual, las estrellas aparentan ser objetos brillantes fijos e inactivos. Sin embargo, los astrónomos saben desde hace mucho tiempo que numerosas estrellas experimentan una variedad de actividades que involucran, entre otros procesos, cambios en sus brillos que ocurren en escalas de tiempo cortas, medibles a lo largo de la duración de la vida humana. Un ejemplo lo constituyen las *variables cataclísmicas o eruptivas*, tales como las Novas y Supernovas, estrellas explosivas cuyo brillo aumenta repentina e intensamente, y luego disminuye lentamente al cabo de algunas semanas o meses. Otro ejemplo son las denominadas estrellas *variables periódicas*, que cambian su brillo aparente en forma cíclica con períodos que van desde unos pocos segundos hasta algunos años. La clasificación de estrellas variables periódicas es, sin embargo, muy amplia, y abarca fenómenos muy diferentes desde el punto de vista de su origen físico. Algunas variables periódicas deben sus cambios de brillo a efectos puramente geométricos: se trata de sistemas binarios, cuyas dos componentes tienen en general diferentes brillos intrínsecos. En este caso, una de las estrellas es periódicamente eclipsada por la otra componente del sistema, siendo entonces el período de las variaciones de brillo igual al período orbital. Son las llamadas *variables eclipsantes*. Otra importante clase de variables periódicas está conformada por estrellas aisladas, las cuales exhiben variaciones en su brillo debido a cambios periódicos de su volumen. Se dice que tales estrellas pulsan u oscilan, y son conocidas en la literatura como *variables pulsantes*. Se cree que las variables pulsantes son estrellas ordinarias que durante alguna etapa de su evolución alcanzan condiciones físicas adecuadas como para experimentar inestabilidades dinámicas, las cuales se traducen luego en pulsaciones regulares, dando lugar a las variaciones de brillo observadas. Debido a subsecuentes cambios evolutivos, tales estrellas abandonan más tarde su etapa de inestabilidad y retornan a su condición de estrellas ordinarias (no-variables).

El tipo de pulsaciones más general que una estrella puede experimentar es el de las llamadas *pulsaciones (oscilaciones¹) no-radiales*, en las cuales la estrella se aparta periódicamente de su forma en equilibrio y tales movimientos macroscópicos no mantienen la simetría esférica. En el otro extremo, el tipo más simple de pulsaciones estelares es el de las *pulsaciones radiales*, en las cuales la estrella se expande y contrae periódicamente conservando en todo instante su forma esférica.

¹Los términos *pulsaciones* y *oscilaciones* serán usados alternativamente a lo largo de esta Tesis con el mismo significado.

1.1 Breve reseña histórica

1.1.1 Los primeros descubrimientos de estrellas variables

Las distinciones mencionadas entre las distintas clases de estrellas variables y las causas que provocan las variaciones de brillo eran completamente desconocidas por los astrónomos en la época de los primeros descubrimientos de estrellas variables. Dejando de lado algunos registros de supernovas (la del año 1006, por parte de los Arabes, la de 1054, observada por Chinos y Japoneses, la supernova de 1572 observada por Tycho Brahe, y la de 1604 estudiada por Kepler), el registro concreto más antiguo de un objeto celeste mostrando una variación *periódica* de su brillo se remonta al año 1596. En agosto de aquel año un astrónomo llamado Fabricius notó en la constelación de Cetus (Ballena) una estrella no reconocible en ningún catálogo, y que meses más tarde dejó de verse. Recién en 1638 Holwarda reconoció que esta estrella, hoy conocida como α Ceti (Mira, el prototipo de variables pulsantes de gran amplitud), se hacía visible e invisible alternadamente². No fue hasta 1660 que se concluyó que el período con que esta estrella cambiaba su brillo era de unos 11 meses.

Cronológicamente, la siguiente variable detectada fue β Persei en 1667, con un período de ≈ 3 días, la cual es el prototipo de las variables eclipsantes Algol. En los 100 años siguientes sólo otras dos estrellas variables (tipo Mira) fueron descubiertas: χ Cygni en 1686 y R Hydrae en 1704. La siguiente variable descubierta fue otra Mira, R Leonis en 1782. En 1784 Goodricke descubrió tres variables más, una de las cuales era β Lyrae (eclipsante). Las dos restantes, δ Cephei y η Aquilae, eran de una clase nueva: las pulsantes Cefeidas, las cuales tienen períodos más cortos y menores amplitudes que las variables Mira. En 1795 Herschel descubrió la variabilidad de α Herculis, una estrella rojiza con cambios irregulares de brillo de pequeña amplitud, el prototipo de la clase de *variables irregulares*, y en ese mismo año, Pigott descubrió la estrella R Scuti, con periodicidad *semiregular*. Así, antes de fines del siglo XVIII solo un número muy reducido de estrellas variables había sido descubierto³. Esta situación cambió luego de la aparición del catálogo de Argelander en 1844, que contenía unas 18 estrellas variables, y la velocidad de descubrimientos a partir de ahí experimentó un marcado crecimiento. De hecho, en 1912 ya se habían detectado unas 4000 estrellas variables. Gran parte de esta revolución se debió a la aparición de la fotografía estelar, que permitía búsquedas sistemáticas de estrellas variables.

Mientras los descubrimientos de estrellas variables se sucedían, algunos intentos teóricos comenzaron a aparecer tratando de explicar el origen de sus comportamientos. Una extensa lista de las diversas teorías propuestas puede encontrarse en Ledoux & Walraven (1959). En particular, las teorías preponderantes para explicar el comportamiento de las Cefeidas eran aquellas que involucraban estrellas dobles. Sin embargo, era necesario descartar a los eclipses como una explicación a la forma de las curvas de luz (el brillo aparente en función del tiempo). La explicación frecuentemente dada para la variación de la luz era que debía existir alguna clase de medio resistente rodeando el sistema, y a medida que la componente principal se moviera

²Resulta curioso que los antiguos Griegos no hayan detectado ninguna estrella variable mucho antes, teniendo en cuenta que Hiparco y Tolomeo ya habían comenzado la clasificación de cientos de objetos estelares con el fin de detectar nuevas estrellas.

³Sin embargo, la gran mayoría de las variables periódicas conocidas actualmente entran en alguna de las categorías definidas por estas pocas estrellas conocidas en aquella época.

a través de ese medio, su superficie frontal sería calentada por rozamiento. En consecuencia la estrella debería mostrar fases como las de la Luna según el hemisferio más frío o más caliente se enfrentara al observador; en particular la fase brillante se presentaría cuando la estrella tuviera su máxima velocidad hacia el observador, en buen acuerdo, por otra parte, con la relación observada entre brillo y velocidad radial. Estas ideas fueron perdiendo vigencia paulatinamente debido a un número de incongruencias físicas, y más tarde fueron descartadas, aunque algunos importantes astrónomos defenderían la hipótesis binaria hasta casi mediados del siglo XX.

1.1.2 El desarrollo de la teoría de pulsaciones radiales

Quizá el primer intento de explicar las estrellas variables como estrellas aisladas experimentando algún tipo de oscilaciones fue formulado por el físico alemán August Ritter. En el sexto de una larga serie de artículos publicados entre 1878 y 1889, Ritter (1879) consideró por primera vez las pulsaciones radiales adiabáticas de esferas de densidad constante. El encontró la hoy conocida relación período-densidad: $P \propto \rho^{-1/2}$. Ritter concluyó que el origen físico de las estrellas variables podía atribuirse a pulsaciones radiales de esferas de gas. En este contexto, el cambio de temperatura superficial durante un ciclo de pulsación provocaría el cambio en luminosidad. Inexplicablemente estas ideas fueron ignoradas por la comunidad astronómica de la época. Aparentemente sólo fueron citadas y revalorizadas por Emden recién en 1907, en su famosa obra “Esferas de gas” (Gaskugeln). En 1909 Moulton abordó el tema de los posibles cambios en la forma y dimensiones del Sol, proponiendo la idea de que ciertas clases de estrellas variables periódicas podían deber su variabilidad, al menos en parte, a oscilaciones no-radiales⁴. La hipótesis binaria se debilitó fuertemente en 1914, cuando Shapley publicó un importantísimo artículo en el cual analizaba detallada y sistemáticamente la situación observacional de las variables Cefeidas. Ya en aquel entonces los astrónomos comenzaban a aceptar la distinción entre estrellas gigantes y enanas, y Shapley sabía a ciencia cierta que las Cefeidas eran estrellas gigantes. Su objeción más importante a la teoría binaria era que las complicadas órbitas elípticas necesarias para reproducir las observaciones deberían ser por demás pequeñas, más pequeñas aún que el radio de las componentes mismas. Shapley apoyaba la idea de las pulsaciones, en acuerdo con Moulton (1909) y Emden (1907). Su creencia era que las Cefeidas experimentaban algún tipo de oscilaciones no-radiales provocadas por (en las propias palabras de Shapley) “... la colisión con masas de dimensiones planetarias o la aproximación de dos estrellas ...” (Shapley 1914).

Como apuntado por Ledoux & Walraven (1959), es difícil explicar por qué unos pocos años más tarde el énfasis recayó sobre las oscilaciones radiales. Eddington apareció en la escena del problema, y más tarde estableció los cimientos de la teoría radial de pulsaciones estelares. Una detallada descripción cronológica de los trabajos teóricos de Eddington (1917, 1918ab, 1926) en su esfuerzo por darle una base formal a la teoría de pulsaciones puede ser encontrada en el artículo de A. Gautschy (1997).

El desarrollo de la teoría de pulsaciones con simetría radial, luego del trabajo pionero de Eddington, se vió impulsado por el advenimiento de las nuevas capaci-

⁴Los primeros desarrollos de la teoría de oscilaciones no-radiales aparecieron *antes* que la teoría de Ritter sobre pulsaciones puramente radiales, por obra de Lord Kelvin (Thompson 1863). Los primeros intentos de aplicar los conceptos de deformaciones no-radiales a estrellas variables fueron realizados por Emden (1907), Moulton (1909) y Shapley (1914).

dades de cálculo que ofrecían las computadoras electrónicas. Esto condujo a varios investigadores a llevar a cabo experimentos numéricos en los cuales las ecuaciones no-lineales de pulsación eran resueltas, y los resultados confirmaban esencialmente las predicciones hechas a través de cálculos lineales. A mediados de la década de 1960 el problema de la excitación de las oscilaciones en las variables Cefeidas y RR Lira estaba aparentemente resuelto, y los astrónomos podían predecir mediante cálculos teóricos la localización observada de las zonas de inestabilidad en el diagrama Hertzsprung-Russell (HR) (“bandas de inestabilidad”). Algunos de los investigadores responsables de este éxito de la astrofísica moderna fueron Aleshin, Baker, Kippenhahn, Christy, Cox, Eilers, King, Olsen y Zhevakin, entre otros. Una extensa descripción de este tópico puede encontrarse en Cox (1974, 1980) y Gautschy (1997).

1.1.3 El desarrollo de la teoría de pulsaciones no-radiales

En contraste con el éxito alcanzado por la teoría radial, la teoría de oscilaciones no-radiales permaneció durante largo tiempo lejos del alcance de las aplicaciones astronómicas. Por largo tiempo se consideró que la única posibilidad para que una estrella experimentase oscilaciones no-radiales era la acción de fuerzas externas, siendo el escenario imaginado por los astrónomos el de un sistema binario en el cual las interacciones gravitatorias entre sus componentes directamente introducirían una perturbación no-radial, la cual, en el caso de resonancia, conduciría a oscilaciones no-radiales de una de las componentes. Otro escenario plausible era el de encuentros ocasionales entre estrellas aisladas. Sin embargo, era una creencia corriente que una vez establecidas, las pulsaciones no-radiales se amortiguarían rápidamente por efectos de disipación, debido a los complejos movimientos horizontales involucrados (Gautschy 1997).

La teoría de pulsaciones no-radiales había comenzado a ser desarrollada tempranamente por Lord Kelvin en 1863, estudiando las oscilaciones de una esfera de fluido incompresible con densidad constante. Desarrollando una pequeña perturbación en términos de armónicos esféricos, Kelvin (Thompson 1863) derivó una expresión para las autofrecuencias de oscilaciones no-radiales, las únicas posibles para esta clase de estructuras.

Oscilaciones no-radiales en esferas politrópicas fueron estudiadas por Emden (1907). Con el objeto de simplificar el problema, Emden despreció la perturbación del potencial gravitacional en las ecuaciones, pero erróneamente redujo la ecuación de continuidad a una forma apropiada para un fluido homogéneo incompresible. De esta manera fue incapaz de obtener un *espectro* de modos de oscilación, y en cambio sólo obtuvo un único período, el cual era función de la densidad media de la estrella y del valor de ℓ , el grado armónico esférico de la oscilación.

El caso de una esfera homogénea compresible fue estudiado en detalle por Pekeris (1938). Como modelo estelar, la esfera homogénea compresible resulta poco realista, aunque más apropiada que una esfera de fluido incompresible. Este modelo tiene, por otra parte, la particularidad única de admitir soluciones analíticas para el problema adiabático de oscilaciones no-radiales. En efecto, como fué demostrado por Pekeris, las ecuaciones diferenciales que describen oscilaciones lineales adiabáticas (un sistema diferencial de cuarto orden) pueden reducirse a un problema de segundo orden. Una solución en serie de potencias puede ser obtenida para estas ecuaciones. Por imposición de condiciones de borde, Pekeris obtuvo fórmulas analíticas sencillas

para los autovalores (σ^2 , siendo σ la autofrecuencia de oscilación) para este modelo. Este estudio reveló la existencia de dos espectros de oscilación, uno con autovalores positivos y el otro con autovalores negativos (Ledoux & Walraven 1958).

Un gran progreso en el desarrollo de la teoría de oscilaciones no-radiales tuvo lugar con la aparición del artículo titulado “The Non-Radial Oscillations of Polytropic Stars” por Cowling en 1941. En su artículo, Cowling⁵ consideró como buena aproximación despreciar la variación del potencial gravitatorio⁶, y resolvió numéricamente las ecuaciones de pulsación para modelos de polítropas de baja densidad central. Cowling notó, por medio de consideraciones asintóticas, la presencia de dos espectros de modos de diferentes características físicas. Cuando el autovalor es muy grande, existe un espectro de modos propios caracterizados por movimientos mayormente radiales, a los que Cowling denominó modos p . En el otro límite, cuando $\sigma^2 \rightarrow 0$, Cowling obtuvo un espectro de modos cuyos desplazamientos son principalmente horizontales, a los que denominó modos g . El también obtuvo una solución sin nodos en la dirección radial, con características intermedias entre las otras dos clases, a la que denominó modo f .

El desarrollo de la teoría no-radial adiabática continuó lentamente, impulsado por aislados esfuerzos de algunos investigadores. Importantes trabajos publicados en la literatura posteriormente a los mencionados son aquellos de Pekeris & Ledoux (1941) y Cowling & Newing (1949). Sobre oscilaciones no-radiales en polítropas, los trabajos pioneros de Kopal (1949), Owen (1957), Hurley, Roberts & Wright (1966), Robe (1968), Scuflaire (1974), entre otros, sirvieron para conocer más en profundidad la naturaleza intrincada de esta clase de oscilaciones. Las primeras aplicaciones de esta teoría a estrellas variables se produjeron recién con los trabajos de Schwarzschild & Savedoff (1949) y Ledoux (1951). El primero intentaba explicar las variabilidades magnéticas observadas en ciertas estrellas. El segundo estudio tenía la finalidad de explicar la doble periodicidad y las grandes variaciones temporales en el ensanchamiento de las líneas espectrales observadas en la estrella β Canis Majoris (una pulsante no-radial multiperiodica, prototipo de las β Cephei).

La teoría no-radial no-adiabática comenzó a desarrollarse a fines de la década de 1960 y comienzos de la década de 1970. Los conceptos no-adiabáticos fueron importados desde la teoría radial. El problema matemático de oscilaciones no-radiales no-adiabáticas en la teoría lineal fue resuelto numéricamente y en forma independiente por primera vez por Christensen-Dalsgaard & Gough (1975), Dziembowski (1975) y Ando & Osaki (1975). Pronto los astrónomos llegaron a la conclusión de que el comportamiento exhibido por un gran número de estrellas variables podía explicarse en términos de pulsaciones no-radiales.

En la actualidad es un hecho bien establecido que diferentes tipos de estrellas localizadas en una variedad de lugares del diagrama HR, cubriendo varios estados evolutivos, experimentan oscilaciones no-radiales. Ejemplos de pulsadores no-radiales serán dados mas adelante en este Capítulo (Sección 1.3).

⁵Aparentemente la motivación de su estudio era la exploración del efecto de marea sobre una de las componentes en un sistema binario, más que el estudio de oscilaciones no-radiales en una estrella aislada.

⁶No obstante haber sido empleada por primera vez por Emden en 1907, esta aproximación se conoce actualmente en la literatura como *aproximación de Cowling*.

1.2 Pulsaciones no-radiales

Como mencionamos antes, el tipo más general de oscilaciones estelares son las pulsaciones no-radiales. En esta clase de oscilaciones, el desplazamiento de un elemento de masa de la estrella a partir de su posición de equilibrio puede estar en cualquier dirección, no necesariamente paralela a la dirección radial⁷. Por lo tanto, tales desplazamientos deben ser descritos por vectores en tres dimensiones. Como resultado, la teoría de oscilaciones no-radiales es marcadamente más intrincada que la correspondiente a oscilaciones puramente radiales. En el Apéndice A proporcionamos una derivación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de oscilaciones no-radiales en la aproximación adiabática, siguiendo el tratamiento de Unno et al. (1989). A continuación describiremos brevemente las propiedades básicas de las pulsaciones no-radiales. Remitimos al lector a las monografías de Cox (1980) y Unno et al. (1989) para un tratamiento detallado de la teoría de oscilaciones estelares no-radiales.

Consideremos un estrella esféricamente simétrica como un estado no-perturbado (o estado en equilibrio) sobre el cual son impuestas pequeñas perturbaciones, sin importar el origen de tales perturbaciones. No consideraremos efectos como rotación o campos magnéticos. Si las perturbaciones sobre las variables físicas son muy pequeñas en relación a sus valores en equilibrio, es posible adoptar un tratamiento lineal (ver Apéndice A). En general, cada variable física f será considerada como la suma de su valor en equilibrio f_0 (sólo dependiente de la coordenada radial, dada la simetría esférica), más una perturbación Euleriana o Lagrangiana (f' o δf , respectivamente), la cual dependerá no sólo de la coordenada radial r sino también del ángulo polar θ , el ángulo acimutal ϕ , y del tiempo t :

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + f'(r, \theta, \phi, t),$$

o bien,

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + \delta f(r, \theta, \phi, t),$$

con la condición $f', \delta f \ll f_0$. La relación entre los diferentes tipos de perturbaciones es $\delta f(\vec{r}, t) \approx f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r})$ (ver Lynden-Bell & Ostriker 1967). Una perturbación Euleriana f' es la variación de f medida por un observador ubicado en un punto fijo del espacio, mientras que una perturbación Lagrangiana δf es la variación de f medida por un observador fijo a un dado elemento de fluido en movimiento. La forma que adquieren las ecuaciones diferenciales luego de la linealización permiten describir la dependencia angular de las perturbaciones en términos de los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, con $m = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$. Finalmente, considerando una dependencia temporal sinusoidal del tipo $e^{i\sigma t}$ (con σ la frecuencia de oscilación), podemos realizar la siguiente separación de variables:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t},$$

$$\delta f(r, \theta, \phi, t) = \delta f(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t},$$

⁷De hecho, las oscilaciones radiales pueden considerarse como un caso especial de las no-radiales, cuando $\ell = 0$.

donde la partes dependientes solamente del radio son funciones (denominadas autofunciones del problema) que proporcionan la amplitud *relativa* de las pulsaciones dentro de la estrella, y son obtenidas junto con σ (el autovalor) como solución de las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). Aquí la letra f ha sido empleada para describir indistintamente variables físicas tales como la presión, densidad, temperatura, potencial gravitatorio, etc. El desplazamiento (Lagrangiano) del fluido está especificado por:

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi, t) = \delta\vec{r}(r, \theta, \phi, t) = \left[\xi_r(r)\check{e}_r + \xi_t(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\check{e}_\theta + \xi_t(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\check{e}_\phi \right] Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{i\sigma t},$$

donde $\xi_r(r)$ y $\xi_t(r)$ son las componentes radial y tangencial respectivamente (dependientes sólo de r) asociadas con un modo de oscilación de frecuencia σ .

Para una dada estructura estelar existen infinitos modos propios posibles en los cuales la estrella puede oscilar⁸. Cada modo tiene asociado un conjunto de valores del grado armónico ℓ , el orden acimutal m y el orden radial, al que llamaremos k . Veamos el significado de cada uno de estos números cuánticos. El valor de ℓ corresponde al número de líneas nodales (sobre las cuales el movimiento es nulo) sobre la superficie estelar; si $m = 0$ todas las líneas nodales constituyen paralelos sobre la superficie estelar. Estos son modos *zonales*. El caso $|m| = \ell$ corresponde a líneas nodales meridianas sobre la superficie estelar; son los modos *sectoriales*. En casos intermedios la superficie estelar está dividida por $\ell - |m|$ paralelos y m meridianos, y los modos se denominan *teserales*. La superficie estelar queda dividida por estas líneas nodales en zonas que están en fase opuesta en brillo (temperatura) y velocidad del material estelar. Esto puede apreciarse en la Figura 1.1, adaptada de Christensen-Dalsgaard (1998a). La alternancia en brillo en las diferentes zonas del disco estelar es lo que provoca las variaciones en la curva de luz de una estrella que experimenta pulsaciones no-radiales. Como puede verse, cuanto mas grande es el valor de ℓ mayor es el número de zonas alternadas en que la superficie estelar queda dividida, y menores son los cambios de brillo aparente sobre su curva de luz. Como consecuencia, los modos con bajo grado armónico ℓ son preferencialmente observados⁹. El índice k , por otra parte es (para modelos estelares sencillos) el número de nodos radiales, ubicados en posiciones internas r_i de la estrella tales que $\xi_r(r_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Los nodos radiales son superficies esféricas donde el movimiento radial del fluido es nulo. La correspondencia uno a uno entre el orden radial k y el número de nodos radiales desaparece en algunos modelos estelares en los que la condensación central de masa es alta, como en el caso de polítropas de alto índice politrópico ($n \gtrsim 3.25$), o estrellas en etapas avanzadas de evolución.

Es importante notar que el orden acimutal m no aparece en las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). Esto implica que las frecuencias (autovalores) de oscilaciones no-radiales de estrellas esféricas son degeneradas con respecto a m : por cada

⁸Aquí sólo nos limitaremos a describir modos no-radiales *esferoidales*, para los cuales se cumple que $(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})_r = 0$. Existe otro conjunto de modos no-radiales, llamados *toroidales* para los cuales $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \xi_r = p' = \rho' = \Phi' = 0$. Estos modos poseen $\sigma = 0$ en ausencia de rotación, campos magnéticos o fases sólidas. Cuando la rotación está presente, los modos toroidales adquieren carácter oscilatorio y se denominan modos r (Rossby). En presencia de regiones sólidas los modos toroidales también tienen frecuencias no nulas, y se denominan modos torsionales o modos t .

⁹Por su proximidad, una excepción a la anterior aseveración es el caso del Sol, para el cual es posible distinguir modos con altos valores de ℓ .

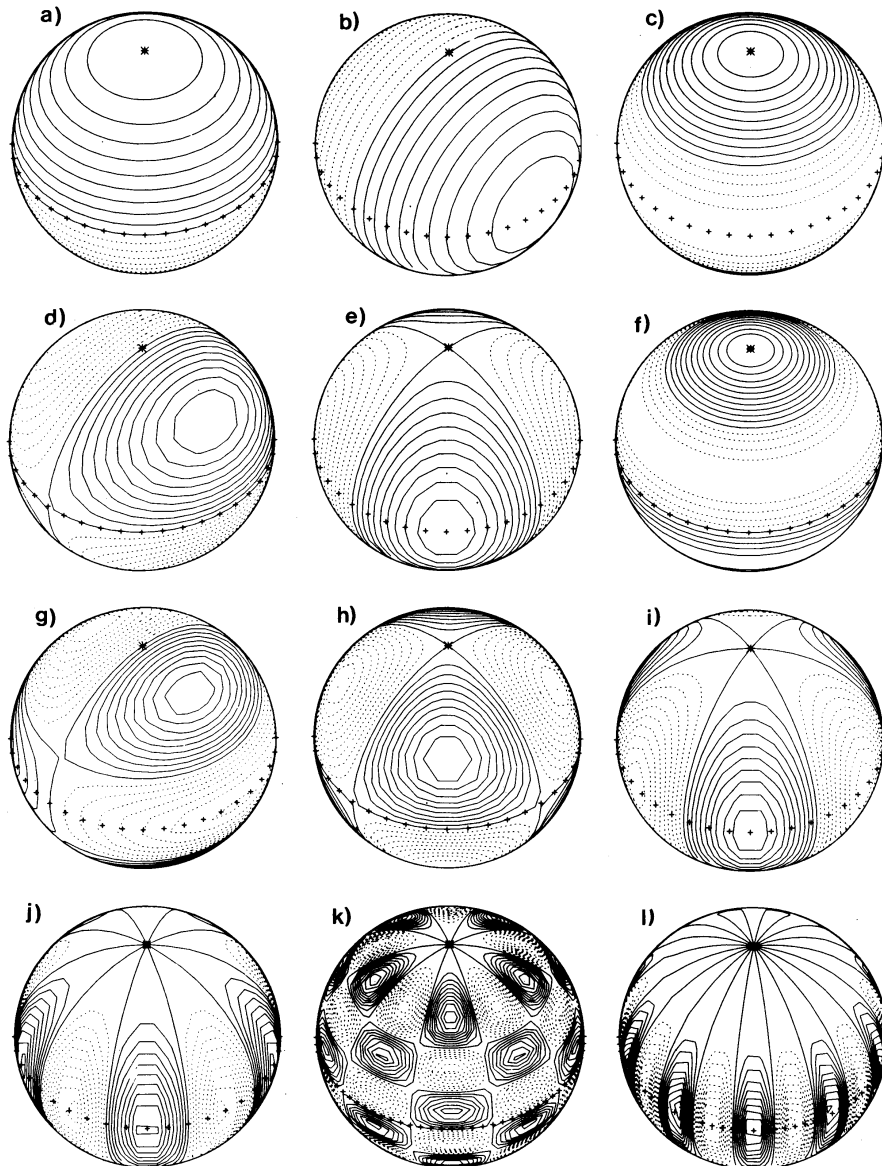


Figura 1.1: Esquema de contornos de la parte real de los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ sobre la superficie de una estrella que pulsa en modos no-radiales. Los contornos positivos son indicados por líneas continuas, y los negativos por líneas punteadas. El eje $\theta = 0$ ha sido inclinado un ángulo de 45° hacia el observador; el ecuador es mostrado con símbolos "+". Los casos ilustrados son: a) $\ell = 1, m = 0$; b) $\ell = 1, m = 1$; c) $\ell = 2, m = 0$; d) $\ell = 2, m = 1$; e) $\ell = 2, m = 2$; f) $\ell = 3, m = 0$; g) $\ell = 3, m = 1$; h) $\ell = 3, m = 2$; i) $\ell = 3, m = 3$; j) $\ell = 5, m = 5$; k) $\ell = 10, m = 5$; l) $\ell = 10, m = 10$. Adaptado de Christensen-Dalsgaard (1998a).

valor de ℓ existen $2\ell + 1$ valores de m , y los modos correspondientes oscilan todos con la misma frecuencia σ . Esta degeneración es destruida en presencia de cualquier agente que implique apartamientos de la simetría esférica del modelo en equilibrio, tales como rotación o campos magnéticos.

1.2.1 Características generales de los modos no-radiales

Podemos examinar las características cualitativas de los modos no-radiales estudiando el caso adiabático, el cual constituye un problema de autovalores de cuarto orden (ver Apéndice A). En la aproximación adiabática se considera que las diferentes regiones de la estrella no intercambian calor durante el curso de las pulsaciones. La solución de este problema (en el cual las autofunciones y autovalores son reales) debe obtenerse en general numéricamente. Para un dado valor de $\ell > 0$ (ver nota al pie de página¹⁰), el espectro de modos no-radiales se divide en las clases de modos p y los modos g . Una tercer clase de modos, los modos f , existe sólo para $\ell > 1$.

Los modos p (o modos de presión) se caracterizan por variaciones Eulerianas de presión relativamente grandes y movimientos principalmente en dirección radial ($\xi_r > \xi_t$), en especial cerca de la superficie estelar. La principal fuerza de restitución actuante sobre los movimientos oscilatorios proviene de los gradientes de presión mismos (en forma similar a las ondas del sonido). Estos modos corresponden a la región de alta frecuencia de oscilación, y tales frecuencias se incrementan con k y ℓ crecientes. La naturaleza de los modos p es la misma que la de los modos radiales.

Los modos g (o modos de gravedad) se distinguen por pequeñas variaciones Eulerianas de la presión y desplazamientos mayormente tangenciales ($\xi_r < \xi_t$). Aquí la principal fuerza de restitución es la flotación (*buoyancy*). Los modos g corresponden al dominio de baja frecuencia de oscilación, y tales frecuencias decrecen con k y ℓ crecientes. Por su naturaleza, los modos g resultan similares a las ondas de gravedad, y no tienen contrapartida en las oscilaciones radiales.

El modo f es único para un dado valor de $\ell (> 1)$. Este modo en general no posee (para modelos estelares sencillos) ningún nodo en la dirección radial, y posee características intermedias entre las familias de modos p y g . Su autofrecuencia, de hecho, tiene un valor intermedio entre los modos g y p de orden radial más bajo ($k = 1$), y en general se incrementa lentamente para valores crecientes de ℓ .

Cuando existe una zona convectiva dentro de la estrella aparece un espectro adicional de modos con $\sigma^2 < 0$ (frecuencias imaginarias). Estos modos son usualmente denominados modos g^- para distinguirlos de los modos g (a veces designados modos g^+). Los modos g^- crecen o decrecen exponencialmente con el tiempo y poseen carácter espacial oscilatorio sólo en regiones convectivas¹¹. Como contrapartida, los modos g^+ son oscilatorios sólo en regiones radiativas, y se tornan evanescentes en zonas convectivas.

¹⁰Por largo tiempo los cálculos de oscilaciones no-radiales se limitaron a valores $\ell > 1$. Entre los investigadores predominaba la creencia errónea de que los modos dipolares ($\ell = 1$) no tenían significado físico ya que corresponderían a un desplazamiento del centro de masa de la estrella en ausencia de fuerzas externas. Smeyers (1966) demostró, en el contexto de pulsaciones adiabáticas, que tratándose de modelos compresibles lo que se desplaza con $\ell = 1$ es el centro geométrico de la estrella, en tanto que el centro de masa permanece fijo. más tarde, la validez física del caso $\ell = 1$ fue extendida al caso no-adiabático por Christensen-Dalsgaard (1976).

¹¹Estos son los únicos modos de gravedad posibles para la esfera homogénea compresible, desde que este es un modelo completamente convectivo.

1.2.2 Análisis local

Consideremos la aproximación de Cowling (Cowling 1941). Bajo esta aproximación, en el Apéndice B obtenemos las ecuaciones diferenciales (B.5) y (B.6) para las autofunciones $\tilde{\xi}$ y $\tilde{\eta}$. Desde un punto de vista local, los coeficientes de tales ecuaciones pueden considerarse como lentamente variables cuando son comparadas con la variación espacial de las perturbaciones $\tilde{\xi}$ y $\tilde{\eta}$ en el caso en que $k \gg 1$. Bajo esta suposición podemos ensayar soluciones del tipo $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \propto \exp(ik_r t)$, donde k_r es el número de ondas local en dirección radial. Aquí, $k_r \gg 1$, ya que las autofunciones en modos de alto orden son rápidamente oscilantes espacialmente. La sustitución de $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ en las Ecuaciones (B.5) y (B.6) proporciona la siguiente relación de dispersión local:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2) \quad (1.1)$$

N y L_ℓ son, respectivamente, las frecuencia de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb (Ecuaciones A.43 y A.44 del Apéndice A). De esta expresión queda claro el papel fundamental de las frecuencias críticas N y L_ℓ : si $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$ ó $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$, entonces $k_r^2 > 0$, y el número de ondas k_r es real. Esto significa que bajo tales condiciones $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ son ondas que se propagan espacialmente en dirección radial. En los otros casos, digamos $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$ ó $L_\ell^2 > \sigma^2 > N^2$, k_r es imaginario puro, y $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ son ondas evanescentes, esto es, decaen exponencialmente. Esto define en el interior de la estrella zonas de propagación y zonas evanescentes. El comportamiento local de los modos queda clarificado cuando graficamos L_ℓ^2 y N^2 en función de la coordenada radial. Tales diagramas se denominan “diagramas de propagación” (ver Cox 1980, Unno et al. 1989).

En Figura 1.2 hemos graficado un tal diagrama, en este caso particular para una polítropa de $n = 3$ para el caso $\ell = 2$. En el diagrama aparecen los cuadrados de la frecuencia de Lamb y la frecuencia de Brunt-Väisälä adimensionales $\hat{L}_\ell^2 = L_\ell^2 / (GM_*/R_*^3)$ y $\hat{N}^2 = N^2 / (GM_*/R_*^3)$, junto con las autofrecuencias adimensionales $\omega^2 = \sigma^2 / (GM_*/R_*^3)$ para los primeros 10 modos p y g y el modo f . Aquí, G es la constante de gravitación, y M_* y R_* son la masa y el radio total del modelo politrópico, respectivamente. En la figura se vé claramente la existencia de las diferentes zonas de propagación (o “cavidades resonantes”): aquella correspondiente a los modos p (denotada por la letra P, donde $\omega^2 > \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$), y la correspondiente a los modos g (denotada por la letra G, donde $\omega^2 < \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$). Para este caso particular (y en general para las estrellas de secuencia principal) los modos p pueden propagarse principalmente en la zona externa de la estrella, mientras que en la zona central tales modos son evanescentes. Lo contrario sucede para los modos g , los cuales se propagan principalmente en la región central¹².

Los modos que se propagan se tornan ondas estacionarias sólo si poseen frecuencias (las autofrecuencias) para las cuales las ondas son reflejadas en los bordes de las cavidades resonantes de tal manera que retornan en fase con ellas mismas. Estos son los modos propios del modelo estelar. De esta forma se vé que los modos están principalmente “atrapados” dentro de las cavidades (la densidad de energía de oscilación adquiere en esas zonas sus valores máximos), aunque los modos se extienden desde el centro hasta la superficie, obedeciendo ciertas condiciones de borde.

¹²En estrellas enanas blancas sucede lo contrario: los modos g son modos principalmente de envoltura, mientras que los modos p se propagan mayormente en la zona del núcleo.

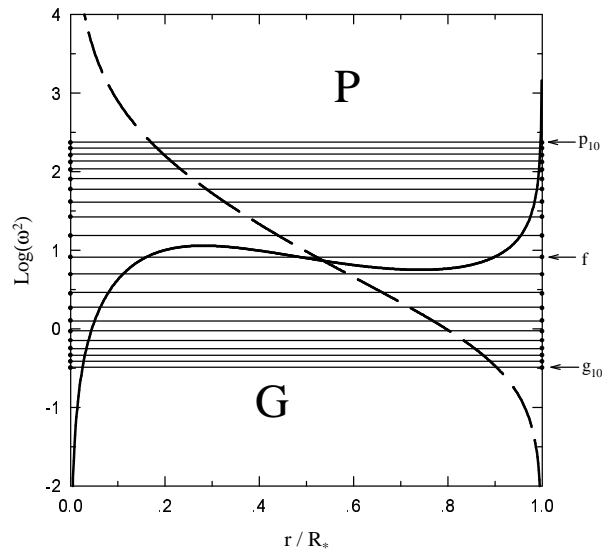


Figura 1.2: El cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä (con línea llena) y la frecuencia de Lamb (con línea de trazos) normalizadas por el factor GM_*/R_*^3 , para una polítropa de índice $n=3$ y un valor de $\ell=2$. En el diagrama también hemos incluido los valores de las autofrecuencias adimensionales $\omega^2 = \sigma^2/(GM_*/R_*^3)$ para los primeros 10 modos p y g y el modo f (el subíndice indica el valor de k).

Normalmente, el modo f tiene un valor de σ^2 próximo al máximo de N^2 , separando las zonas de propagación P y G.

En este punto podemos concluir que la naturaleza física de un modo (su carácter p o g) y su zona de propagación estarán determinados por el valor de su propia autofrecuencia en relación a las frecuencias críticas N y L_ℓ .

Es importante señalar que la distinción entre modos p , g y f , como fue descripta antes, se torna menos clara para modos de bajo orden radial en modelos estelares con alta condensación central de masa. Scuflaire (1974) y Osaki (1975) encontraron que la formación de un núcleo estelar denso y una envoltura extendida durante la evolución modifica las características de propagación de ciertos modos. Modos de bajo orden radial adquieren un carácter dual, comportándose como modos g en las regiones centrales y como modos p en la parte externa de la estrella. En otras palabras, estos modos tienen carácter oscilatorio (no-evanescente) en ambas cavidades P y G en un diagrama de propagación. Los modos de carácter mixto muestran una relación complicada entre k (orden radial) y el número de nodos de la autofunción en dirección radial. Así, por ejemplo, el modo f exhibe 4 nodos, y los modos p_1 , p_2 , p_3 , g_1 , g_2 y g_3 adquieren dos nodos extra cuando uno considera una polítropa de $n=4$ en el caso $\ell=2$ (ver la Tabla D.6 del Apéndice D de esta Tesis).

1.2.3 Comportamiento asintótico para alto orden radial

Cuando el orden radial es alto ($k \gg 1$) y para un dado valor pequeño de ℓ , la autofrecuencia de los modos p está dada aproximadamente por (Tassoul 1980):

$$\sigma_{k,\ell} \approx \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1}, \quad (1.2)$$

Aquí n es el índice politrópico que caracteriza la estructura de las capas superficiales del modelo estelar. Por otra parte, en modelos estelares ya sea completamente radiativos o completamente convectivos, la frecuencia de los modos g para $k \gg 1$ está dada por (Tassoul 1980):

$$\frac{1}{\sigma_{k,\ell}} \approx \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}, \quad (1.3)$$

De la Ecuación (1.2) tenemos, para los modos p con ℓ fijo,

$$\Delta\sigma = \sigma_{k+1,\ell} - \sigma_{k,\ell} = \pi \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} = \text{constante}, \quad (1.4)$$

esto es, el espaciado asintótico de frecuencias de los modos p es constante (e independiente de ℓ) en el límite de alto orden radial. Dicho valor constante depende sólo de la marcha de la velocidad del sonido, $c_s(r)$, en el interior del modelo.

De la misma manera, de la Ecuación (1.3) tenemos, para modos g con ℓ fijo,

$$\Delta P_\ell = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = \text{constante}, \quad (1.5)$$

donde $P_{k,\ell} = 2\pi/\sigma_{k,\ell}$ es el período de oscilación. Notemos entonces que el espaciado asintótico de períodos de los modos g es un valor constante (aunque dependiente de ℓ) en el límite de alto orden radial. Este valor es función de la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Las propiedades asintóticas de los modos no-radiales han sido ampliamente utilizadas en recientes años, tanto en el estudio de los modos p en el Sol (Gough & Toomre 1991) como así también en la exploración del espectro de modos g de estrellas enanas blancas variables (Tassoul, Fontaine & Winget 1990).

1.2.4 Influencia de la rotación

Hemos visto antes que, en ausencia de rotación, las $2\ell + 1$ autofrecuencias (correspondientes a cada uno de los $2\ell + 1$ valores del orden acimutal m para un dado ℓ) son iguales. Esta degeneración aparece por la ausencia de un eje preferencial de simetría para las oscilaciones. Si ahora suponemos la presencia de rotación lenta, la teoría de perturbaciones a primer orden predice que cada autofrecuencia es dividida en $2\ell + 1$ componentes igualmente espaciadas en frecuencia, eliminando por completo la degeneración. Si la rotación es uniforme, cada componente estará dada por:

$$\sigma_{k,\ell,m} = \sigma_{k,\ell} + m(1 - C_{k,\ell})\Omega, \quad (1.6)$$

donde $\Omega = \text{constante}$ es la frecuencia angular de rotación de la estrella y $C_{k,\ell}$ son coeficientes que dependen de la estructura estelar y de las autofunciones del modelo no-rotante. Tales coeficientes están dados por (Cowling & Newing 1949, Ledoux 1951):

$$C_{k,\ell} = \frac{\int_0^{R_*} \rho r^2 [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dr}{\int_0^{R_*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dr} \quad (1.7)$$

Notemos que en el caso de modos p , cuando se incrementa el orden radial se cumple que $\xi_r \gg \xi_t$, de manera que $C_{k,\ell} \rightarrow 0$. En el caso de modos g , por otra parte, cuando k es grande se verifica que $\xi_r \ll \xi_t$, de modo que $C_{k,\ell} \rightarrow 1/\ell(\ell+1)$.

1.3 Astrosismología y ejemplos de pulsadores no-radiales

Cuando un conjunto de frecuencias (períodos) de oscilación es conocido para una dada estrella pulsante, dicho conjunto puede ser comparado con las frecuencias calculadas teóricamente para un modelo que represente a dicha estrella. Esta interrelación entre observaciones de oscilaciones estelares y cálculos de modelos teóricos de pulsación dá lugar a la disciplina denominada *astrosismología*. Una de las principales motivaciones para llevar a cabo estudios astrosismológicos reside en que las frecuencias de oscilación son las propiedades que más exactamente pueden medirse para una estrella.

La astrosismología, la cual está relacionada principalmente con pulsadores no-radiales, permite en principio obtener valiosa información (inaccesible mediante otras técnicas) acerca de la estructura interna y evolución de las estrellas (ver los artículos de revisión de, por ejemplo, Brown & Gilliland 1994, Gautschy & Saio 1995, 1996).

Cada modo individual de oscilación se propaga en una región específica de la estrella. Por lo tanto, cada frecuencia proporciona información de una zona particular del interior estelar, la zona en que el modo correspondiente principalmente oscila. Como resultado, cuanto mayor es el número de frecuencias observadas más rica y precisa será la información que pueda extraerse mediante técnicas sismológicas¹³.

La astrosismología como una potente herramienta de la astrofísica ha motivado grandes esfuerzos observacionales que han permitido en recientes años revelar el carácter de pulsadores no-radiales en una creciente variedad de estrellas, y ha permitido al mismo tiempo obtener frecuencias de oscilación cada vez más precisas. Paralelamente, un gran número de estudios teóricos han sido dedicados al modelado estelar con el afán de poder ajustar las frecuencias de los modelos a las frecuencias observadas.

Un ejemplo de astrosismología por excelencia lo constituye la *heliosismología* (Gough & Toomre 1991), que ha posibilitado a los astrónomos inferir el perfil de rotación interna y la marcha de la velocidad del sonido del Sol. El Sol oscila en $\approx 10^7$ modos p simultáneamente, cuyas frecuencias pueden ser medidas con una altísima precisión. En contraste, en la mayoría de las estrellas pulsantes distantes sólo unas pocas decenas de modos con $\ell \lesssim 3$ (debido a efectos de cancelación geométrica; ver Dziembowski 1977a) son detectables. Esto explica porqué la heliosismología está en un estado mucho más avanzado y ha alcanzado un grado de sofisticación mucho mayor comparado con la astrosismología.

Si bien las enanas blancas variables son tal vez la clase de variables no-radiales mejor establecida (Winget 1988, Vauclair 1997), otras varias clases de estrellas localizadas en una variedad de regiones del diagrama HR exhiben este tipo de oscilaciones. La Tabla 1.1 contiene las principales clases de estrellas pulsantes no-radiales, junto con el tipo espectral, el rango de períodos y la clase de modo no-radial en que aparentemente pulsan. Dicha tabla es una adaptación de la proporcionada por Chitre (1998) (ver también Unno et al. 1989).

La localización aproximada en el diagrama HR de algunas de las clases de es-

¹³Como un ejemplo, las Cefeidas (pulsadores radiales) en general pulsan en el modo radial fundamental o en el primer armónico ($k = 1$), y a expensas de estas pulsaciones es posible inferir la densidad media de la estrella. En Cefeidas de doble período es posible obtener la masa estelar, en adición a la densidad media.

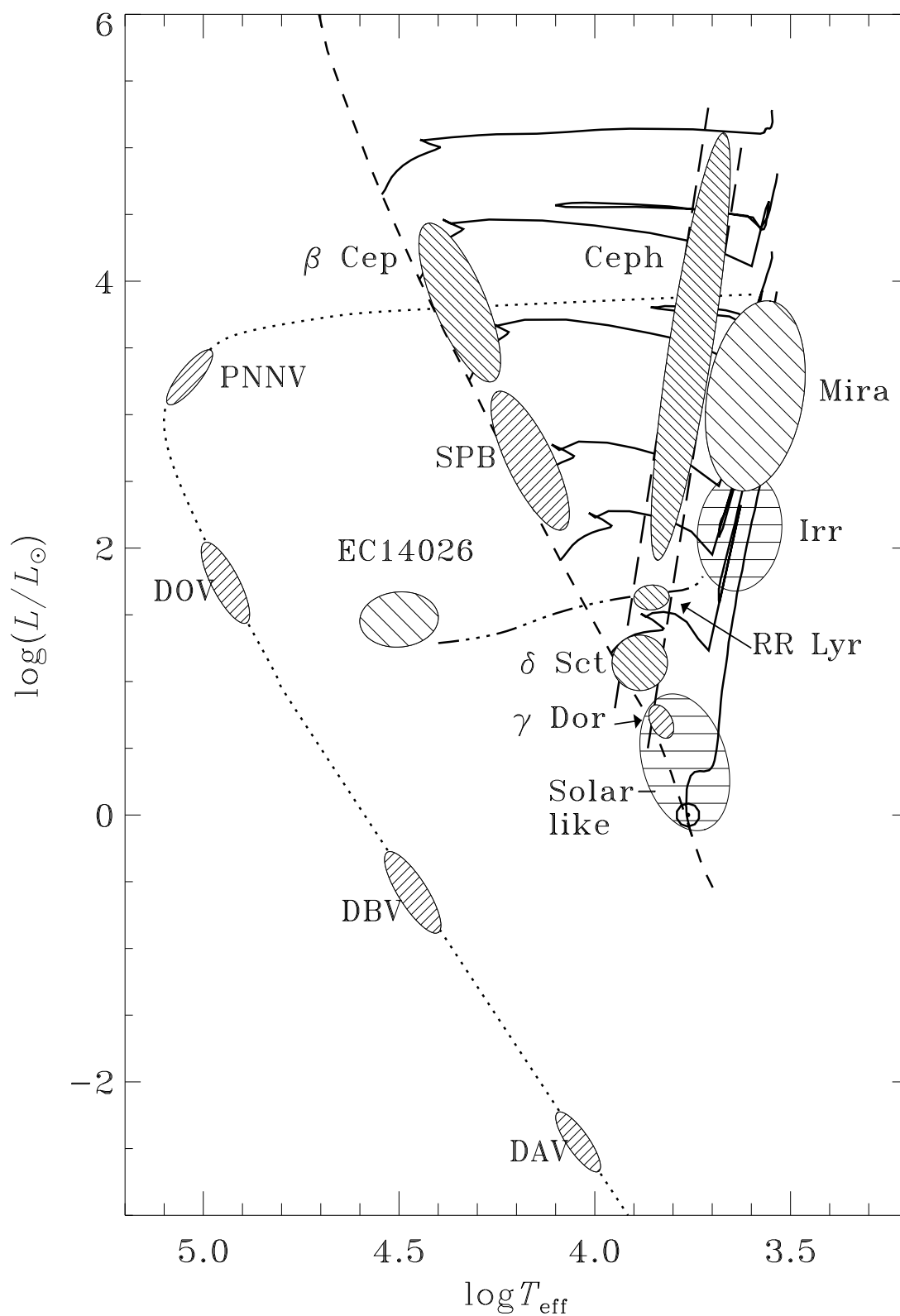


Figura 1.3: Diagrama de Hertzsprung-Russell esquemático ilustrando la localización de varias clases de estrellas pulsantes (ver Tabla 1.1). La línea de trazos muestra la secuencia principal, las curvas continuas representan algunos tracks evolutivos para masas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y 20 M_{\odot} , la línea de trazos y puntos es la rama horizontal y la curva punteada es el track de enfriamiento de las enanas blancas (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998b).

Tabla 1.1: Clases de estrellas pulsantes no-radiales y sus características

Clase de pulsante	Tipo Espectral	Rango de Períodos	Clase de modos (Orden radial)
Sol	G	2–6 min	p
Tipo solar	G	$\gtrsim 10$ min	p ($k \gg 1$)
enanas y pre-enanas blancas DAV, DBV, DOV, PNNV	DA, DB, DO	2–30 min	g ($k \gg 1$)
roAp	F, A	5–15 min	p ($k \gg 1$)
δ Scuti	F5–A2	0.5–7 hs	p, g
β Cephei	B1–B2	2–6 hs	p, g
SPB	B3–B9	1–4 días	g ($k \gg 1$)
γ Doradus	F tempranas	1–2 días	g ($k \gg 1$)
EC14026 (Subenanas B)	B	2–9 min	p, f

estrellas pulsantes no-radiales que figuran en la Tabla 1.1 (junto con las variables pulsantes clásicas) puede verse en la Figura 1.3.

La pulsaciones en enanas blancas es el tema central de esta Tesis, por lo cual la siguiente sección está dedicada a describir las principales características de estos pulsadores compactos.

1.4 Estrellas enanas blancas variables

Las pulsaciones en enanas blancas fueron detectadas por primera vez a fines de la década de 1960, y desde entonces cuatro diferentes clases de variables degeneradas han sido identificadas, en general oscilando en más de un modo no-radial. Pulsaciones en enanas blancas son observadas como fluctuaciones fotométricas con amplitudes de hasta 0.3 magnitudes, con períodos en el rango $100 \lesssim P \lesssim 1200$ segundos. Los siguientes factores se conjugan para que estas estrellas sean un objetivo ideal de la astrosismología (Winget 1988, Brown & Gilliland 1994): 1) oscilan con amplitudes suficientemente grandes como para ser detectables (aunque suficientemente pequeñas de tal forma que permiten un tratamiento lineal); 2) sus períodos son suficientemente cortos, lo cual permite observar en poco tiempo muchos ciclos de oscilación; 3) muchos modos son excitados (típicamente varias decenas); 4) la estructura en equilibrio de estas estrellas es relativamente simple, y esto se traduce en que sus propiedades pulsacionales también lo son.

Con el objeto de entender las pulsaciones en enanas blancas, es necesario revisar antes las características básicas de estas estrellas, lo cual haremos a continuación, basándonos en el artículo de revisión de Fontaine, Brassard & Bergeron (2001). Para más detalles sobre las propiedades físicas y observacionales de enanas blancas recomendamos ver, por ejemplo, Hansen & Kawaler (1989), Koester & Chanmugam (1990), Tassoul, Fontaine & Winget (1990), D’Antona & Mazzitelli (1990) y Kepler & Bradley (1995).

1.4.1 Propiedades generales de las estrellas enanas blancas

A partir del análisis de su distribución de energía, espectros ópticos y ultravioletas, se sabe que la temperatura efectiva (T_{eff}) de las enanas blancas es de $T_{\text{eff}} \sim 150000$ K para los objetos más calientes hasta $T_{\text{eff}} \sim 4000$ K para los más fríos y degenerados. Los análisis espectroscópicos también proporcionan la gravedad superficial ($\log g$), debido a que la intensidad y el ancho de las líneas espectrales son sensibles a la densidad del gas en la atmósfera, la cual es función de la gravedad superficial. Sin embargo, para las enanas blancas más frías toda información deducible a partir de los rasgos espectrales desaparece y no pueden obtenerse determinaciones espectroscópicas de $\log g$. En este caso es necesario, a partir de mediciones de la paralaje, determinar el radio estelar y la masa (por medio de una relación masa-radio), y finalmente deducir la gravedad. El valor promedio para enanas blancas es de $\log g \sim 8$ (nótese que el valor solar es de $\log g \sim 4.4$). El intervalo en luminosidad (L) cubierto por las enanas blancas es muy amplio, reflejando el enorme rango en T_{eff} . Así, las enanas blancas más calientes alcanzan un valor de $L \sim 10^2 - 10^3 L_{\odot}$, mientras que las más frías tienen un valor de $L \sim 10^{-4.7} L_{\odot}$. La magnitud visual aparente (V) de las enanas blancas es, en promedio, de $V \sim 15.5$.

En general las enanas blancas son detectadas a partir de muestras de objetos evidenciando apreciables movimientos propios, esto es, objetos muy próximos al Sol. De estos objetos, los candidatos a ser enanas blancas son aquellas estrellas azules o muy azules, que las distinguen de estrellas de secuencia principal o próximas a ella; la confirmación proviene por medio de análisis espectroscópicos. Es un hecho bien establecido que la distribución de enanas blancas en las vecindades del Sol corresponde a una población de disco (Población I), con una escala de altura de $250 - 300$ pc. La densidad espacial es del orden de 0.005 pc^{-3} para magnitudes bolométricas $M_{\text{bol}} < 15$. El rate de nacimientos de enanas blancas se estima en aproximadamente $(1.5 - 2.3) \times 10^{-12} \text{ pc}^{-3} \text{ año}^{-1}$, incluyendo las enanas blancas en sistemas binarios.

La teoría de evolución estelar indica que los progenitores de la mayor parte de las enanas blancas son núcleos de nebulosas planetarias, formadas estas últimas a partir de estrellas de masa baja e intermedia de la secuencia principal. Se estima que estrellas que comienzan su evolución en la secuencia principal con una masa estelar $\lesssim 8M_{\odot}$ (la vasta mayoría de ellas) terminan su vida como enanas blancas. La mayoría de las enanas blancas ha quemado hidrógeno y helio en su interior en su historia previa, por lo cual gran parte de su estructura interna está conformada por un núcleo de carbono y oxígeno (el cual contiene el 99 % de la masa total de la estrella) en proporciones aún (en cierta medida) desconocidas, principalmente a raíz de las incertezas en los rates de reacciones nucleares de la combustión del helio y de los procesos de mezcla que ocurren hacia el final de la combustión del helio en el núcleo.

La distribución observada de masas de enanas blancas aisladas tiene un pico muy pronunciado alrededor de un valor de $M_* \sim 0.59M_{\odot}$. Si bien el rango observado de masas es de $0.3M_{\odot} \lesssim M_* \lesssim 1.2M_{\odot}$ (donde las colas de la distribución podrían deberse a la formación de enanas blancas producto de la evolución binaria), la mayor parte de las enanas blancas tienen masas muy próximas a la masa promedio, con una dispersión muy pequeña de $\sim 0.13M_{\odot}$. Aparentemente los procesos de pérdida de masa sobre los progenitores (los cuales tienen inicialmente un rango amplio de masas) actúan de tal manera que el resultado final es, en todos los casos, la aparición

Tabla 1.2: Clasificación espectral de estrellas enanas blancas

Tipo Espectral	Características
DA	Líneas de H, sin He I o metales presentes
DB	Líneas de He I solamente, sin H o metales presentes
DC	Espectro continuo sin líneas distinguibles
DO	Intensas líneas He II; He I o H pueden estar presentes
DZ	Líneas de metales solamente, sin H o He
DQ	Rasgos de C

de enanas blancas con masas muy similares. Así, a pesar de sus diversos orígenes y luminosidades, las enanas blancas forman una clase remarcablemente homogénea de estrellas.

Existe evidencia de que pequeñas cantidades de helio e hidrógeno permanecen en la estrella luego de que los procesos de pérdida de masa han actuado. Tomando en cuenta los procesos termonucleares previos y la acción de la sedimentación gravitacional, la estructura de una enana blanca típica debe ser (esperable desde la teoría) un objeto estratificado formado por un núcleo de carbono-oxígeno rodeado por una fina envoltura rica en helio, rodeada a su vez por una capa rica en hidrógeno. La densidad media debe ser del orden de 10^6 g cm^{-3} . El espesor de las envolturas de hidrógeno y helio depende de los detalles de la evolución previa, y no son cantidades conocidas observacionalmente (excepto por determinaciones astrosismológicas; ver al final de este Capítulo). A partir de consideraciones teóricas, sin embargo, se cree que los valores máximos de la masa de helio e hidrógeno que puede sobrevivir a la combustión nuclear en la etapa de nebulosa planetaria son de $\sim 10^{-2} M_*$ y $\sim 10^{-4} M_*$, respectivamente. Si bien estas capas son muy delgadas, ellas son extremadamente opacas a la radiación, y actúan como reguladoras del flujo de energía que escapa al espacio. Por lo tanto el valor preciso del espesor de tales envolturas es de fundamental importancia en la evolución de las enanas blancas.

Observaciones espectrocópicas y fotométricas permiten concluir que la mayoría de las enanas blancas poseen atmósferas de hidrógeno casi puro; usualmente se las denomina enanas blancas DA. Sin embargo, alrededor de un 25 % de las enanas blancas conocidas no poseen tal envoltura de hidrógeno, y exhiben una atmósfera rica en helio; a éstas se las conoce como enanas blancas DB. El resto de las enanas blancas son estrellas con atmósferas híbridas o con abundancias químicas peculiares. El esquema más común de clasificación espectral es reproducido en la Tabla 1.2 (Hansen & Kawaler 1989).

Existen numerosas evidencias observacionales de que alguna clase de evolución espectral tiene lugar a lo largo de la evolución de las enanas blancas, ya que algunas DAs se tornan DBs y viceversa en algunas etapas del enfriamiento. Tal es así que el cociente entre enanas blancas DAs y DBs es diferente para distintas temperaturas efectivas. En particular, es evidente la existencia del llamado gap de las DBs, situado a $45000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 30000 \text{ K}$, en el cual no se han podido encontrar enanas blancas tipo DB. También es conocido otro intervalo en T_{eff} , más estrecho, situado entre los 6000 y los 5000 K, en el cual tampoco se encuentran objetos tipo DB. Si bien no hay explicaciones completamente satisfactorias para estas anomalías en la distribución de enanas blancas con atmósferas ricas en helio, se sospecha que algún tipo de interrelación entre procesos de difusión química y convección debe actuar para que

algunas estrellas cambien su composición química superficial.

La mayoría de las enanas blancas nacen (de acuerdo a su condición previa de núcleo de nebulosa planetaria) como objetos compactos extremadamente calientes los cuales comienzan a enfriarse, con sus fuentes de energía nuclear casi agotadas; la energía gravitacional no puede ser liberada eficientemente debido a que la presión de los electrones degenerados impide cualquier contracción adicional: la estrella está obligada a evolucionar a partir de entonces aproximadamente a radio constante. De hecho, la estructura mecánica de la estrella está principalmente gobernada por los electrones degenerados. En particular la degeneración electrónica es responsable de una curiosa relación entre la masa y el radio estelar: cuanto más masiva la estrella menor es el radio estelar. Los electrones degenerados son también responsables de la existencia de una masa límite por encima de la cual la enana blanca no puede existir como un objeto estable: esta es la masa de Chandrasekhar.

Otra propiedad inherente a los electrones degenerados es su alta conductividad del calor, a raíz de lo cual el núcleo de las enanas blancas es casi isoterma. La temperatura de este núcleo degenerado varía entre $\sim 2 \times 10^7$ K y $\sim 5 \times 10^6$ K para enanas blancas en el rango de T_{eff} de 16000 – 8000 K. La gran caída en la temperatura yendo del centro a la superficie tiene lugar principalmente en la envoltura estelar, que actúa como aislante. Este enorme gradiente de temperatura da lugar a la aparición de zonas convectivas superficiales en las enanas blancas más frías. Estas zonas convectivas, cuando existen, regulan el flujo emergente de energía hacia el exterior. También juegan un papel clave en la tasa de enfriamiento de la estrella cuando la convección alcanza el borde externo del núcleo degenerado, acoplándolo con la superficie y así aumentando el flujo de energía a través de la envoltura (en comparación con el caso en que el transporte es radiativo).

Los responsables de proveer la energía térmica que luego resulta en la luminosidad de la enana blanca son los iones (no degenerados). De hecho, la estrella brilla principalmente a expensas del calor acumulado en los iones durante su historia evolutiva previa (los electrones no contribuyen significativamente). A medida que la energía térmica es gradualmente perdida por la estrella en forma de radiación, la energía cinética de los iones disminuye y el gas de iones pasa de un estado gaseoso a un estado fluido y luego a un estado sólido. El pasaje del estado fluido a sólido (cristalización) trae aparejada una liberación de calor latente, capaz de frenar considerablemente el enfriamiento de la estrella. Finalmente la reserva de energía térmica se agota y la estrella, ahora casi completamente cristalizada, deja de brillar.

Una interesante propiedad de las enanas blancas es que, como mencionamos antes, algunas de ellas experimentan inestabilidades pulsacionales. Las inestabilidades se manifiestan en términos de modos g no-radiales. De esta manera estas estrellas ofrecen la posibilidad de sondear su interior estudiando sus propiedades vibracionales. De hecho, los estudios de pulsaciones de enanas blancas constituyen el mejor ejemplo de aplicación de la astrosismología. A continuación describiremos las características más relevantes de esta clase de pulsadores.

1.4.2 Enanas blancas variables

Gran parte del material histórico que incluimos a continuación fue proporcionado por F. Vuille (2000, comunicación privada). En la década de 1960 era una creencia generalizada entre los astrónomos que las enanas blancas eran muy estables en cuanto a su luminosidad, de forma tal que estas estrellas podrían ser utilizadas como

estrellas de referencia. A fines de esa década, A. Landolt observaba la enana blanca HL Tau 76 con esas intenciones, cuando, para su sorpresa, encontró que esta estrella mostraba variaciones de brillo de 0.3 magnitudes con un período de unos 12 minutos (Landolt 1968). De esta manera Landolt descubrió, accidentalmente, la primer enana blanca variable. Sin embargo este hallazgo no causó un gran impacto en la comunidad astronómica, ya que no se ajustaba a las predicciones teóricas debido a que el período de las variaciones en esta estrella era dos ordenes de magnitud más grande que lo esperado, y no quedaba claro si realmente se debían o no a pulsaciones. Poco tiempo después otras dos enanas blancas variables fueron descubiertas: G44-32, con períodos de 10 y 13.7 minutos (Lasker & Hesser 1969), y R 548 (ZZ Ceti) con períodos de 3.6 y 4.5 minutos (Lasker & Hesser 1971). Warner & Robinson (1972) y Chanmugam (1972) fueron los primeros en reconocer que las variaciones eran debidas a pulsaciones en modos g no-radiales, descartando los modos radiales y los modos p no-radiales los cuales (siguiendo la relación período-densidad) deberían estar caracterizados por períodos mucho más cortos ($\lesssim 10$ segundos) para pulsadores compactos.

En la primer mitad de la década de 1970 aparecieron otros numerosos reportes de variabilidad en enanas blancas. McGraw & Robinson (1976) demostraron que las enanas blancas formaban una clase homogénea de pulsadores, las denominadas variables DAVs (o ZZ Ceti). Una confirmación acerca de la naturaleza no-radial de las oscilaciones en estas estrellas provino de un estudio observacional llevado a cabo por Robinson, Nather & McGraw (1976) en R 548, que mostraba la presencia de “splitting” rotacional de las frecuencias, debido a la ruptura de la degeneración de los modos por la presencia de rotación lenta (ver Sección 1.2.4). Otro importante trabajo confirmó la hipótesis de los modos g : McGraw (1979) mostró que las variaciones en luminosidad eran debidas principalmente a cambios en la temperatura superficial de la estrella, y no a variaciones del radio estelar (típicas de los modos p no-radiales y de las oscilaciones puramente radiales)¹⁴.

El modelado teórico de pulsaciones no-radiales en enanas blancas comenzó quizá con el artículo de Osaki & Hansen (1973), seguido poco tiempo después por el trabajo de Brickhill (1975). En estas investigaciones adiabáticas se demostró que modos g de bajo orden radial, con períodos de alrededor de 200 segundos eran compatibles con modelos de enanas blancas, reforzando (al menos en el rango de cortos períodos) la hipótesis de que modos g podían ser la causa de las periodicidades en las curvas de luz de las variables ZZ Ceti.

Los primeros cálculos no-adiabáticos fueron llevados a cabo por Dziembowski (1977b) y Keeley (1979). El mecanismo exacto que desencadena las pulsaciones no estaba claro aún, aunque se sospechaba que los modos de oscilación podrían ser excitados por acción del denominado mecanismo $\kappa - \gamma$ (ver Cox 1980) en zonas de ionización parcial. Esto fue finalmente confirmado por tres grupos en forma independiente y simultánea (Dziembowski & Koester 1981, Dolez & Vauclair 1981, y Winget et al. 1982a), quienes encontraron que modelos estratificados de enanas blancas con composiciones químicas más realistas que en las consideradas en estudios previos eran inestables a modos g no-radiales, con períodos en buen acuerdo con los observados, debido a la acción del mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en zonas de ionización parcial, principalmente de hidrógeno. Debido al papel crucial de las zonas

¹⁴La confirmación teórica a esta conclusión provino más tarde a través de un importante estudio por Robinson, Kepler & Nather (1982) sobre la DAV R 548.

de ionización parcial de hidrógeno, los modelos inestables estaban confinados a un angosto dominio en T_{eff} aproximadamente consistente con la banda de inestabilidad observada.

El éxito alcanzado con las enanas blancas DA impulsó a Winget (1981) y Winget et al. 1982a) a postular que también las enanas blancas DB deberían pulsar a causa del mismo mecanismo, pero operando esta vez sobre zonas de ionización parcial de helio. Esta predicción teórica se vió confirmada por el descubrimiento de la primer enana blanca DB pulsante, GD 358, por Winget et al (1982b). Este subgrupo de enanas blancas pulsantes se conoce como estrellas DBV. Pronto un mecanismo de excitación relacionado con zonas de ionización parcial se encontró para las pre-enanas blancas pulsantes, las estrellas PG 1159, primero observadas por McGraw et al. (1979) y Bond et al. (1984), y las variables PNNV, descubiertas por Grauer & Bond (1984). En efecto, los estudios de Starrfield et al. (1983, 1984, 1985) demostraron que la ionización parcial de carbono y oxígeno podría excitar las pulsaciones en esas estrellas.

Si bien la naturaleza de las oscilaciones había sido dilucidada al menos en sus aspectos fundamentales en el comienzo de la década de 1980, algunos problemas quedaban aún por resolver, y de hecho han permanecido en el mismo estado hasta la actualidad. Una de tales cuestiones está relacionada al problema de selección de modos. En efecto, de todos los modos propios posibles predichos por cálculos numéricos en modelos realistas de enanas blancas, sólo unos pocos son observados en estrellas reales. El mecanismo de filtro que excitaría solo algunos modos hasta amplitudes observables ha sido históricamente asociado al fenómeno de *mode trapping* (ver Sección 1.4.4), provocado por la naturaleza estratificada de las enanas blancas (Winget, van Horn & Hansen 1981). Esta explicación ha sido ampliamente aceptada, aunque su validez no ha sido aún completamente demostrada (ver Capítulo 6 de esta Tesis). Otro problema que ha perdurado a través del tiempo, es de una naturaleza mas básica aún: todos los cálculos de pulsación de enanas blancas llevados a cabo hasta la fecha consideran linealidad de las pulsaciones, y sus resultados son, en rigor, sólo aplicables a los pulsadores de baja amplitud. Sin embargo, como lo demuestran las observaciones, existen dos tendencias entre las enanas blancas variables: algunas son pulsadores de baja amplitud, con curvas de luz sinusoidales, modos estables en frecuencia y amplitud (Stover et al. 1980, Kepler et al. 1982); otras muestran un comportamiento mas complejo, con curvas de luz no-sinusoidales y mayores amplitudes, y la presencia de armónicos y combinaciones lineales de frecuencias (McGraw & Robinson 1975), con modos que frecuentemente cambian sus amplitudes en escalas de tiempo cortas. Estos problemas permanecen no resueltos en la actualidad.

1.4.3 Bandas de inestabilidad

Existen varias clases de enanas blancas pulsantes, las cuales definen bandas de inestabilidad bien localizadas en el diagrama HR (ver Figura 1.3). Una lista completa conteniendo las propiedades de las distintas clases de enanas blancas pulsantes puede encontrarse en Bradley (2000).

Estrellas pre-enanas blancas variables: Están ubicadas en la región del diagrama HR donde el track de las estrellas post-AGB se une a las secuencias de enfriamiento de las enanas blancas. Estas estrellas tienen muy altas temperaturas efectivas, con $7 \times 10^4 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 1.7 \times 10^5$ K. Espectroscópicamente muestran fuertes

deficiencias de hidrógeno y rasgos pronunciados de carbono, helio y oxígeno (Werner 1992, Dreizler et al. 1995). Estas estrellas muestran periodicidades fotométricas con períodos entre 7 y 30 minutos, y se cree que son debidas a modos g de bajo grado ℓ y alto orden k . Aquellas pre-enanas blancas variables las cuales están rodeadas por nebulosas planetarias se denominan en la literatura como núcleos de nebulosas planetarias variables (PNNV), y las que carecen de cualquier rastro de nebulosa son llamadas variables PG 1159 (GW Vir)¹⁵. Los períodos de pulsación de las PNNVs son más largos que los correspondientes a las PG 1159, indicando que las PNNVs tienen mayores radios. Desde el punto de vista evolutivo, las PG 1159 son consideradas como objetos que están entrando en las primeras etapas de enfriamiento del track de enanas blancas, mientras que, en contraste, las PNNVs están todavía desplazándose hacia altas temperaturas a luminosidad constante. Se conocen nueve miembros de la categoría PNNV. Por otra parte sólo cinco miembros de la clase PG 1159 son conocidos hasta el momento. Entre ellas hay una PG 1159 “híbrida”, denominada HS 2324+3944, la cual muestra hidrógeno en su espectro (Silvotti et al. 1994). Es notable que, si bien la región del diagrama HR donde las PG1159 pulsan está bien determinada, existen entre las variables objetos no-variables: la banda de inestabilidad no es “pura” (Werner 1993). En el caso de las PG 1159, las que pulsan se pueden distinguir de las no variables por el hecho de que muestran nitrógeno en sus espectros (Dreizler 1998).

Como mencionamos, la excitación de las pulsaciones en estas estrellas parece provenir de la acción del mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en zonas de ionización parcial de carbono y oxígeno (Starrfield et al. 1984, 1985). Aparentemente para obtener modos inestables son requeridas envolturas conteniendo una mezcla homogénea de carbono y oxígeno, y la localización y extensión de la región de inestabilidad en el diagrama HR es fuertemente dependiente del contenido exacto de helio en dicha mezcla (Stanghellini et al. 1991). Por otra parte, también el mecanismo ϵ de excitación ha sido examinado (Kawaler et al. 1986, Kawaler 1988), estudiando el efecto desestabilizante de la combustión de hidrógeno en el núcleo de nebulosas planetarias ricas en hidrógeno, y la combustión del helio en capas, en núcleos deficientes de hidrógeno. Los resultados indican la existencia de modos g inestables pero con períodos demasiado cortos respecto de aquellos observados en estrellas pre-enanas blancas variables (Hine & Nather 1987).

Estrellas variables DBVs (o V4777 Her): Estas enanas blancas variables están confinadas a un rango de T_{eff} entre los 21500 y 24000 K, con luminosidades $\sim 10^{-1.3} L_{\odot}$. Esta clase de estrellas variables es la única cuya existencia fue predicha (Winget et al. 1982a) antes de su descubrimiento, por Winget et al. (1982b). Los períodos encontrados están en el rango de 140 a 1000 segundos. Actualmente se conocen unas ocho estrellas miembros de esta clase, la mayoría de las cuales muestran espectros de pulsación complejos, con muchas frecuencias presentes. La DBV más estudiada (la primera en descubrirse) es GD358, la cual es al mismo tiempo la más brillante del grupo. La banda de inestabilidad de las DBVs tampoco es pura: existe entre un 25 % y un 50 % de estrellas DBs no pulsantes en el dominio de inestabilidad, dependiendo de que sus parámetros atmosféricos sean derivados a partir de atmósferas con helio puro o conteniendo pequeñas cantidades de hidrógeno (Beauchamp et al. 1999).

Las pulsaciones en las DBVs son excitadas por el mecanismo $\kappa - \gamma$ operando en la

¹⁵En la literatura es también muy común denominarlas DOVs.

base de la zona de convección de helio (Bradley & Winget 1994, Winget et al. 1983). También se ha examinado la posibilidad de que las DBVs pulsen en modos radiales, encontrándose que los modelos son inestables a estas pulsaciones (Kawaler 1993). Sin embargo su búsqueda observacional ha dado resultados negativos (Kawaler et al. 1994).

Estrellas variables DAVs (o ZZ Ceti): Se conocen 31 miembros de esta clase. En contraste con el caso de las pre-enanas blancas y las DBVs, la banda de inestabilidad de las DAVs es pura: no hay estrellas DA no-variables en el dominio del diagrama HR donde las DAVs están localizadas, en el rango de temperaturas efectivas $12500 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 10700$ K. Estudios espectroscópicos de DAVs muestran un continuo de cuerpo negro con líneas de absorción de hidrógeno superpuestas, sin señales de helio o metales presentes (Koester & Chanmugam 1990). Las variabilidades fotométricas de las DAVs son multiperiodicas, con períodos entre los 100 y 1200 segundos y amplitudes hasta de 0.3 magnitudes. En muchos casos las frecuencias están divididas en multipletes, debido a rotación lenta (ver Sección 1.2.4).

Las observaciones de DAVs sugieren que ellas tienden a acumularse en dos grupos principales (Unno et al. 1989): un grupo de estrellas calientes que exhiben un pequeño número de períodos cortos y estables (cambios de amplitud muy pequeños), y otro grupo de estrellas más frías con muchos más períodos presentes pero mostrando fuertes efectos no-lineales y variaciones de amplitud. Claramente, las DAVs calientes, con tan pocos períodos presentes son difíciles de estudiar desde el punto de vista astrosismológico, por dos razones. Primero, con tan pocos modos es problemática su identificación, esto es, la asignación de valores k y ℓ a cada período observado. Segundo, la escasez de modos presentes proporciona en principio poca información y dificulta imponer restricciones sobre su estructura interna. Las DAVs más frías tienen muchos más períodos presentes, pero esta ventaja es aparente. El espectro de Fourier en este caso contiene varias frecuencias (ν_i) con gran amplitud, correspondientes a modos propios “auténticos”, junto con armónicos ($n\nu_i$), sumas de frecuencias ($\nu_i + \nu_j$) y diferencias de frecuencias ($\nu_i - \nu_j$), las cuales no son modos propios de la estrella sino que corresponden a la respuesta no-lineal de la atmósfera estelar al flujo de radiación proveniente del interior (Vuille & Brassard 2000). Así, la primer dificultad para estudiar estas estrellas es extraer primero los modos reales.

La excitación de pulsaciones en las DAVs, como mencionamos antes, es el mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en la zona de ionización parcial de hidrógeno (Dolez & Vauclair 1981, Winget et al. 1982a). La cuestión del espesor de la capa superficial de hidrógeno en estrellas DAVs y su influencia sobre la inestabilidad de modos g fue extensivamente estudiada en la década de 1980. Los primeros resultados (Winget et al. 1982a) admitían solo envolturas finas de hidrógeno ($M_{\text{H}} \lesssim 10^{-8} M_{\star}$). Sin embargo nuevos estudios no-adiabáticos demostraron que las inestabilidades pueden ocurrir aún con envolturas tan masivas como $M_{\text{H}} \sim 10^{-4} M_{\star}$ (Cox et al. 1987, Bradley & Winget 1994, Fontaine et al. 1994). Actualmente se cree que la excitación de modos g en DAVs es insensible a la masa de la envoltura de hidrógeno.

Un aspecto importante relacionado con la localización del borde azul de la banda de inestabilidad de las DAVs es el de la influencia de la eficiencia convectiva utilizada en la construcción de los modelos en equilibrio. Aparentemente sólo zonas de convección muy extendidas, tratadas con la Mixing Length Theory (MLT), dan lugar a bordes azules compatibles con los datos observacionales (Bradley & Winget). Las prescripciones ML2 o ML3 (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990) de la MLT son las que proporcionan el mejor acuerdo con la observación.

Otro mecanismo posible para la excitación de modos g en DAVs es el llamado *convective driving*, debido a la acción de la convección superficial en estas estrellas (Goldreich and Wu 1999, Brickhill 1991). Aunque actualmente este mecanismo es aparentemente físicamente más plausible que el mecanismo $\kappa - \gamma$, ambos predicen en forma igualmente aceptable el borde azul de la banda de inestabilidad observada, pero ninguno de los dos es capaz de predecir el borde rojo, donde las pulsaciones aparentemente se detienen abruptamente (Kanaan 1996).

Finalmente mencionaremos aquí que también la posible existencia de modos radiales fue investigada para modelos de DAVs (Saio et al. 1983). Al igual que en el caso de las DBVs, sin embargo, no se han detectado hasta ahora este tipo de oscilaciones de corto período en ninguna DAV (Robinson 1984). No está claro si esto se debe a que estas oscilaciones realmente existen en DAVs pero con amplitudes por debajo del umbral de detectabilidad, o bien la ausencia se debe a una falla en la teoría empleada en el modelado de las pulsaciones (Gautschy & Saio 1996).

1.4.4 Herramientas astrosismológicas

El principal atractivo para llevar a cabo astrosismología en enanas blancas es que permite a los astrónomos determinar la estructura del estado final más común de la evolución estelar. Esto, a su vez, posibilita poner restricciones a los procesos experimentados por los progenitores de enanas blancas antes de que estas se formaran. También, un mejor conocimiento de la estructura interna de las enanas blancas a través de la astrosismología proporciona valiosa información acerca de las propiedades de la materia bajo condiciones extremas de temperatura y densidad, no reproducibles en los laboratorios terrestres. Adicionalmente, un mejor conocimiento del enfriamiento de enanas blancas puede brindar potencial información acerca de la historia de formación estelar en el disco galáctico y permite obtener la edad de la Galaxia (*cosmocronología*; ver, por ejemplo, Winget et al. 1987 y Wood 1992). Otro beneficio de la astrosismología de enanas blancas es la obtención de la luminosidad de la estrella y posteriormente la distancia empleando la magnitud aparente y la corrección bolométrica. De esta forma es posible obtener una “distancia astrosismológica”, independiente de la distancia inferida por las técnicas de paralaje tradicionales.

A continuación describimos algunos métodos astrosismológicos empleados hasta el presente en enanas blancas pulsantes.

Espaciamiento medio de períodos. El análisis asintótico (ver Sección 1.2.3) predice que el espaciamiento de períodos consecutivos de modos g para un dado ℓ está dado por (para valores elevados de k):

$$\Delta P_\ell^A = \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \quad (1.8)$$

y P_0 está definido como

$$P_0 = 2\pi^2 \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}. \quad (1.9)$$

Si para una estrella podemos observar suficientes modos consecutivos en k y con el mismo valor ℓ , podemos calcular el espaciamiento de períodos ($\Delta P_{k,\ell} = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell}$)

y promediarlo; designamos a este espaciamento medio como $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$. Resulta que, en general, se cumple que

$$\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle \approx \Delta P_\ell^A \propto \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}. \quad (1.10)$$

aún para enanas blancas estratificadas y con zonas convectivas externas (Tassoul et al. 1990).

Ahora bién, si consideramos masas estelares cada vez mayores para una T_{eff} fija, la frecuencia de Brunt-Väisälä crece (dada su dependencia con la gravedad), lo cual provoca que la integral en la Ecuación (1.10) adopte un mayor valor y en consecuencia el espaciamento medio de períodos decrezca. Si ahora consideramos una masa estelar fija, pero valores decrecientes de T_{eff} , debido al aumento de la degeneración en el núcleo de la enana blanca la frecuencia de Brunt-Väisälä decrecerá, provocando un incremento en el espaciamento medio de períodos. Así, la dependencia de $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$ con la temperatura efectiva es opuesta a la dependencia con la masa estelar. Sin embargo, las bandas de inestabilidad en enanas blancas son (afortunadamente) suficientemente angostas en T_{eff} , de modo que la sensibilidad de $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$ sobre la masa estelar es mayor; esto tiene como consecuencia que el espaciamento medio de períodos resulta ser una cantidad extremadamente útil para obtener el valor de la masa de enanas blancas. Notemos, sin embargo, que la mayoría de las DAVs exhiben pocos períodos consecutivos del mismo ℓ , por lo cual esta técnica para obtener la masa estelar es particularmente útil sólo para las DBVs y las pre-enanas blancas, las cuales presentan un número suficiente de períodos en sus curvas de luz.

Mode trapping. Las enanas blancas tienen una estructura estratificada la cual provoca que algunos modos g experimenten una resonancia mecánica, y esto afecta la estructura global del espectro de períodos. Como mencionamos antes, este fenómeno fue primero explorado por Winget, Van Horn & Hansen (1981) y luego estudiado en profundidad por Brassard et al. (1992a). Físicamente el *mode trapping* es un fenómeno de resonancia que se produce cuando la longitud de onda local de las autofunciones de un dado modo coincide aproximadamente con el espesor de la capa de hidrógeno (o la de helio) en el interior de una enana blanca. Esto sucede entonces cuando un nodo de las autofunciones está ubicado en proximidades de una zona de transición de composición química (por ejemplo, helio \rightarrow hidrógeno, carbono \rightarrow helio). Cuando este tipo de resonancia se produce, la amplitud de oscilación de las autofunciones es grande principalmente en una región limitada por una de las transiciones químicas y la superficie estelar, o entre dos interfases químicas¹⁶. El principal efecto (el cual es observable en estrellas reales cuando oscilan en varios modos consecutivos) es que los modos atrapados y los de orden radial adyacentes tienen espaciamentos de períodos mucho más cortos que el espaciamento medio. Otra consecuencia de este fenómeno es el efecto (no observable) sobre la distribución de energía cinética de oscilación de los modos, $(E_{\text{kin}})_{k,\ell}$. Dependiendo de la región interna de la estrella en la que el modo tiene sus máximas amplitudes de oscilación, la energía cinética adopta valores máximos (si el modo es confinado al interior denso de la enana blanca) o mínimos (cuando el modo queda atrapado en la envoltura estelar), respecto de los modos adyacentes que no sufren la resonancia mecánica.

¹⁶También puede producirse un confinamiento de las autofunciones entre una interfase química y el centro estelar; en ese caso el fenómeno se denomina *mode confining*.

Un aspecto de crucial importancia relacionado con este fenómeno es la forma y el ancho de las zonas de transición química, especialmente la de helio-hidrógeno en las DAVs. La efectividad de las zonas de transición química (las cuales constituyen saltos en densidad) para provocar resonancias sobre ciertos modos, esto es, la efectividad de *mode trapping* de un modelo, depende fuertemente de los detalles de tales interfases. Usualmente en el modelado teórico de estas regiones se consideran condiciones de equilibrio difusivo (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990, Brassard et al. 1992ab) o aún discontinuidades puras en composición (Winget, Van Horn & Hansen 1981). Sin embargo, un tratamiento autoconsistente en el cual los procesos de difusión de elementos dependientes del tiempo son tomados en cuenta es necesario para obtener la forma y el ancho correctos de las interfases químicas. Dado que este es uno de los puntos más relevantes en esta Tesis, posponemos una discusión detallada de este tópico a Capítulos posteriores.

La principal utilidad del *mode trapping* reside en la potencial capacidad de medir el espesor de la capa de trapping. Brassard et al. 1992a desarrollaron una relación entre los períodos de los modos atrapados y la localización de la interfase helio-hidrógeno en el modelo. Dicha relación es la siguiente:

$$P_{i,\ell}^2 = 4\pi^2 \lambda_i^2 \left[\left(1 - \frac{r_t}{R_*} \right) \ell(\ell + 1) \frac{GM_*}{R_*^3} \right]^{-1},$$

donde $P_{i,\ell}$ es el período del i -ésimo modo atrapado (i es el número de nodos de las autofunciones entre la superficie estelar y la interfase helio-hidrógeno; $i = 1, 2, 3, \dots$), λ_i son coeficientes de trapping obtenibles de los modelos (ver Kawaler & Weiss 1990, Brassard et al. 1992a), y r_t es el valor del radio donde la transición en composición está localizada. Utilizando esta expresión es posible, en principio, obtener r_t a partir de los períodos de modos atrapados, y encontrar así la masa fraccional de la envoltura de hidrógeno en DAVs. Esta técnica también es aplicable a modelos de DBVs para medir la masa de la envoltura de helio. Hay que aclarar que la relación descrita supone la existencia de una *única* interfase química en el modelo, la de helio-hidrógeno en las DAVs y la de carbono-helio en las DBVs, ignorando la presencia de las otras interfases.

Otra manera de inferir información acerca de la estructura de las capas externas es graficar las diferencias de períodos entre sucesivos modos en función del período para modos de un dado ℓ . Estos son los diagramas $\Delta P_{k,\ell}$ vs $P_{k,\ell}$, donde $\Delta P_{k,\ell} = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell}$ es la diferencia hacia adelante entre períodos de orden radial consecutivo y ℓ fijo. En estos diagramas el *mode trapping* se manifiesta como mínimos de $\Delta P_{k,\ell}$ regularmente espaciados, correspondientes a modos atrapados sucesivos. La diferencia de período entre modos atrapados sucesivos (“ciclo de trapping”) proporciona información acerca de la profundidad a la que se encuentra la zona de transición de composición química: el ciclo de trapping permite en principio estimar la masa de hidrógeno en las DAVs (o helio en las DBVs). Por otra parte la amplitud de la variación de $\Delta P_{k,\ell}$ en torno de $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$ (“amplitud de trapping”) es sensible al espesor de la zona de transición química. Transiciones abruptas dan lugar a mayores valores de los apartamientos: mayor amplitud de trapping. De esta forma la amplitud de trapping permitiría dilucidar la forma de las interfases químicas (Brassard et al. 1992ab, Bradley 1996).

Rates de cambio de períodos. La evolución de enanas blancas involucra enfriamiento y (en menor medida) contracción, y la frecuencia de Brunt-Väisälä cambia en respuesta a esos cambios evolutivos. En particular, como respuesta al

enfriamiento la frecuencia de Brunt-Väisälä decrece en las regiones del núcleo, debido al aumento en la degeneración. Una disminución de esta frecuencia provoca el corrimiento gradual del espectro de períodos de oscilación hacia valores mayores¹⁷.

Para enanas blancas, el cambio secular en los períodos puede escribirse como (Winget, Hansen & van Horn 1983):

$$\frac{\dot{P}}{P} = -a\frac{\dot{T}}{T} + b\frac{\dot{R}_*}{R_*},$$

donde T es la temperatura del núcleo, y $a, b > 0$ son constantes del orden de la unidad determinadas por las propiedades del modelo. Notemos que en este tratamiento analítico simplificado, el enfriamiento ($\dot{T}/T < 0$) produce un incremento en el período, mientras que la contracción ($\dot{R}_*/R_* < 0$) provoca un decrecimiento. En estrellas PG 1159 aún en su etapa de contracción hacia la secuencia de enanas blancas, tanto el enfriamiento como la contracción están actuando sobre \dot{P} . Dado que los modos atrapados tienen sus autofunciones confinadas principalmente a la envoltura, son más sensibles a la contracción que al enfriamiento, por lo cual muestran valores de \dot{P} más bajos (o incluso negativos) respecto de los no-atrapados (Kawaler & Bradley 1994). Como contrapartida, los modos confinados son susceptibles al enfriamiento del núcleo, y el valor de \dot{P} está especificado casi exclusivamente por el enfriamiento (principalmente por emisión de neutrinos), con lo cual sus valores son siempre positivos. En las DAVs y DBVs la influencia de la contracción es despreciable, y los valores de \dot{P} están determinados por el enfriamiento y son positivos para todos los modos (aunque más pequeños en el caso de modos atrapados). A partir de modelos teóricos, los valores esperables de \dot{P} son los siguientes: $10^{-15} \text{ s s}^{-1}$ para las DAVs, $10^{-14} \text{ s s}^{-1}$ para las DBVs y $10^{-11} - 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$ para las pre-enanas blancas.

La medición del \dot{P} en enanas blancas implica la medición de la escala de enfriamiento de estas estrellas, y esto brinda información acerca de la composición química del núcleo. De esta manera la medición de \dot{P} constituye, en principio, una prueba directa de la validez de las predicciones de la teoría de evolución estelar. Entre las DAVs, la mejor medición de \dot{P} ha sido obtenida para la estrella G117-B15A, con un valor de $(2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ s s}^{-1}$ (Kepler et al. 2000a). En el caso de las PG 1159, un valor $(13 \pm 1.6) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$ para PG 1159-035 ha sido obtenido (Costa et al. 1999). No existe aún un valor medido de \dot{P} para ninguna estrella DBV.

Splitting por rotación y por campos magnéticos. Si la enana blanca está rotando y/o posee un campo magnético la frecuencia de cada modo de oscilación es dividida en multipletes.

La rotación lenta ($P_{\text{rot}} \ll P_{k,\ell}$) dá lugar, suponiendo rotación de cuerpo rígido, a multipletes de $2\ell + 1$ componentes igualmente espaciadas, aunque la observación de todas las componentes o no depende del ángulo de inclinación de la estrella. Existe evidencia de splitting rotacional en varias enanas blancas variables. Utilizando la expresión vista en la Sección 1.2.4 es posible obtener la frecuencia de rotación Ω midiendo la diferencia $\sigma_{k,\ell,m} - \sigma_{k,\ell}$ en los multipletes observados y utilizando los coeficientes a primer orden $C_{k,\ell}$ calculados a partir de modelos teóricos. Las separaciones encontradas entre las componentes de los multipletes son del orden de $3 - 7 \mu\text{Hertz}$, implicando períodos de rotación comprendidos entre algunas horas y unos pocos días.

¹⁷Esto puede apreciarse examinando la Figura 1.2 para el caso de la polítropa: si N^2 disminuye las frecuencias posibles decrecen, aumentando los períodos.

Si un campo magnético está presente (sin rotación), cada frecuencia es dividida en $\ell + 1$ componentes. La magnitud de la separación entre las componentes se incrementa para períodos crecientes. Cuando un campo magnético débil está presente junto con la rotación, su efecto es el de correr cada frecuencia (respecto a los valores en ausencia del campo magnético) una cantidad proporcional a $m^2 B^2$, donde B es la intensidad del campo magnético. Las dos componentes $m = \pm 1$ (si $\ell = 1$) son igualmente desplazadas hacia mas altas frecuencias, mientras que la componente con $m = 0$ es también corrida pero en una cantidad menor (Unno et al. 1989, Jones et al. 1989). Esto en principio permite obtener un valor para B . Por ejemplo, para la DBV GD 358 Winget et al. (1994) han obtenido un valor de $B \sim 1300$ Gauss.

1.4.5 Resultados astrosismológicos en DAVs

Muchas de las observaciones de enanas blancas pulsantes son corrientemente realizadas a través del denominado Whole Earth Telescope (WET) (Nather et al. 1990). El WET no es un telescopio sino más bien una red de telescopios terrestres distribuidos de tal manera de poder obtener observaciones continuadas de un mismo objeto, sin las interrupciones de la luz diurna de las que adolecen las observaciones desde sitios individuales. Los datos obtenidos con el WET son de una calidad sin precedentes que permiten análisis muy detallados de los espectros de Fourier de las estrellas observadas.

A pesar de esta importante ventaja, existe aún una seria dificultad para realizar estudios astrosismológicos en enanas blancas. Este problema es la identificación de los modos. En particular, en las DAVs, el pequeño número de períodos presentes en las mas calientes, o la presencia de numerosos armónicos y combinaciones lineales de modos reales en las más frías, dificulta extremadamente la asignación sin ambigüedades de un valor de ℓ y un valor de k a cada período observado. El procedimiento usual para identificar los índices de los modos es, en primer lugar, calcular períodos teóricos de pulsación en modelos de enanas blancas, luego comparar el patrón de períodos teóricos con el patrón observado, y finalmente ajustar los modelos de manera tal que los patrones de períodos teóricos y observados coincidan¹⁸.

Un estudio de gran importancia en lo que se refiere a la astrosismología de enanas blancas DAVs fue llevado a cabo por Clemens (1993). Este autor estudió todas las DAVs conocidas como una clase. En su análisis no se consideraron los armónicos y combinaciones de frecuencias, ni tampoco las variaciones temporales de amplitud en el espectro de Fourier. Al considerar las propiedades de las DAVs como un ensamble el autor encontró un interesante resultado (ver también Clemens 1997): cuando se comparan todos los patrones de períodos de las DAVs calientes entre sí, se encuentra una sorprendente similitud entre ellos, lo cual refleja que la estructura de todas las estrellas examinadas debe ser aproximadamente la misma. Clemens llegó a la conclusión de que los períodos de todas las DAVs examinadas caen dentro de seis grupos de períodos los cuales él identificó como correspondientes

¹⁸El problema con este procedimiento es que no funciona con enanas blancas que exhiben muy pocos períodos excitados. Otro método, más reciente, es el de identificación de modos usando espectroscopía UV (Kepler et al. 2000b, Robinson et al. 1995). Este método hace uso del hecho de que las amplitudes de los modos g dependen fuertemente del valor de ℓ para longitudes de onda más cortas que 3000 Å. Las amplitudes se incrementan hacia el ultravioleta, pero este incremento es mayor para modos con $\ell = 2$ que para $\ell = 1$, y mayor para $\ell = 3$ que para $\ell = 2$ (ver figura 1 de Kepler et al. 2000). Esta diferencia en las amplitudes de modos con diferentes grados armónicos provee un método independiente para determinar el valor de ℓ en enanas blancas variables.

a $\ell = 1$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5$, y 6. En base a esta identificación, y haciendo uso de las predicciones de modelos teóricos de pulsación, él concluyó que la masa de la envoltura de hidrógeno de *todas* las DAVs (y por ende las DAs) debería ser de $\approx 10^{-4}M_*$.

Por otra parte, en los últimos años se han realizado estudios astrosismológicos en un número de estrellas individuales. A continuación resumimos los principales resultados acerca de la estructura de DAVs provenientes de estudios astrosismológicos recientes.

G226-29: Esta estrella tiene un triplete de modos con períodos cercanos a ≈ 109 segundos. Kepler et al. (1995) identificaron este triplete como un modo con $\ell = 1, k = 1$ afectado por rotación. El análisis de estos autores indica una masa de la envoltura de hidrógeno de $M_H \approx 10^{-4}M_*$, una masa estelar de $M_* \approx 0.80M_\odot$ y un período de rotación de 9 horas. Bradley (1998a) encuentra valores similares para los anteriores parámetros, y en adición, un valor para la paralaje de 95.7 mas^{19} , comparable a la paralaje trigonométrica, de 91.1 mas .

R 548: Esta estrella oscila principalmente en dos períodos: ≈ 213 y ≈ 274 segundos. Cada uno de ellos muestra dos componentes, probablemente miembros de tripletes debido a rotación (una componente de cada triplete no se observa). Bradley (1998b) identifica estos períodos como $\ell = 1, k = 2, 3$, y haciendo uso de la información del splitting rotacional, deriva un valor para la masa de la envoltura de hidrógeno de $M_H \approx 1.5 \times 10^{-4}M_*$, una masa estelar de $M_* \approx 0.54M_\odot$ y un período de rotación de 21 horas. En adición, Bradley encuentra una paralaje de 29 mas , la cual está en fuerte conflicto con la paralaje trigonométrica, de $\approx 14.5 \text{ mas}$ (Van Altena et al. 1994).

G117-B15A: Esta estrella oscila en tres períodos de ≈ 215 , ≈ 274 y ≈ 304 segundos, correspondientes a modos con $\ell = 1$. Bradley (1998b) encuentra una ambigüedad en el valor de k para los períodos: las dos posibles identificaciones son $215 (k = 1)$, $274 (k = 2)$, $304 (k = 3)$ o bien $215 (k = 2)$, $274 (k = 3)$, $304 (k = 4)$. En consecuencia, la masa de la envoltura de hidrógeno resulta ser de $M_H \approx 1.5 \times 10^{-4}M_*$, si el período de 215 segundos es $k = 2$ o $M_H \approx 1.5 \times 10^{-7}$, si el período de 215 segundos es $k = 1$. En ambos casos, la masa estelar resulta ser de $M_* \approx 0.60M_\odot$. Finalmente, Bradley encuentra una gran discrepancia en cuanto a la paralaje: el valor derivado por él es de 17.5 mas , frente al valor de la paralaje trigonométrica de $\approx 14.5 \text{ mas}$ (Van Altena et al. 1994).

L19-2: Esta estrella es una de las pocas DAVs que tiene modos observados con $\ell = 2$ además de modos con $\ell = 1$. Sus períodos (multipletes rotacionales) de oscilación junto con las identificaciones empleadas por Bradley (2001) son: $\approx 118 (\ell = 1, k = 1)$, $\approx 192 (\ell = 1, k = 2)$, $\approx 350 (\ell = 1, k = 6)$, $\approx 114 (\ell = 2, k = 2)$ y $\approx 143 (\ell = 2, k = 4)$. Bradley (2001) encuentra que la masa de hidrógeno debe ser de $M_H \approx 1 \times 10^{-4}M_*$ y la masa estelar de $M_* \approx 0.72M_\odot$. El período de rotación de la estrella resulta ser de unas 13 horas. El valor de la paralaje astrosismológica derivada, de 44 mas , está en perfecto acuerdo con la trigonométrica, de $(44 \pm 5) \text{ mas}$.

GD 165: Bradley (2001) considera la siguiente identificación para los períodos en que pulsa esta estrella: $\approx 120 (\ell = 1, k = 1)$, $\approx 192 (\ell = 1, k = 2)$, $\approx 250 (\ell = 1, k = 4)$ y $\approx 114 (\ell = 2, k = 2)$. De acuerdo al análisis de Bradley (2001), la masa estelar es de $M_* \approx 0.65M_\odot$ y la masa de la envoltura de hidrógeno de

¹⁹mili-segundos de arco.

$M_{\text{H}} \approx 2 \times 10^{-4} M_*$. El período de rotación está en el rango 55 – 60 horas; la paralaje astrosismológica es de 28 mas, en muy buen acuerdo con la paralaje trigonométrica, de (27.8 ± 3.4) mas.

G29-38: Los períodos de oscilación identificados en esta estrella son numerosos; Bradley & Kleinman (1997) muestran que un modelo que ajusta 14 de los 16 períodos presentes (sin considerar numerosas combinaciones lineales de modos) debe tener una masa de $M_* \approx 0.75 M_{\odot}$ con $M_{\text{H}} \approx 5 \times 10^{-7} M_*$. Sin embargo hay que recalcar que estos valores corresponden a la identificación (no del todo confirmada) de que el período a 110 segundos es un modo con $\ell = 2, k = 1$; si este modo es en realidad $\ell = 1, k = 1$, entonces la masa estelar y la masa de la envoltura de hidrógeno de esta estrella deberían ser muy similares a las correspondientes a G 226-29. La paralaje obtenida es de 66 mas, frente a la trigonométrica, de (73.4 ± 4) mas.

GD 154: Esta estrella ha sido estudiada a través de métodos astrosismológicos por Pfeiffer et al. (1996). Los autores obtienen, utilizando los períodos observados de ≈ 402 , ≈ 1088 y ≈ 1186 segundos una masa estelar de $M_* \approx 0.70 M_{\odot}$ y una masa de la envoltura de hidrógeno de $M_{\text{H}} \approx 2 \times 10^{-10} M_*$. El período de rotación derivado es de ≈ 55 horas.

Notemos que las primeras 5 estrellas (las cuales caen en el grupo de las DAVs calientes en relación a su posición en la banda de inestabilidad), tienen masas de hidrógeno con valores próximos a $10^{-4} M_*$, lo cual confirmaría los resultados de Clemens (1993, 1997). Por otra parte, las dos últimas (G29-38 y GD 154), las cuales pertenecen al grupo de las DAVs frías, parecen tener envolturas de hidrógeno mucho más finas. Bradley (2001) señala que existen evidencias de otras fuentes en favor de un *rango* de masas para la envoltura de hidrógeno. En efecto, Vennes et al. (1997) encuentran que el valor de M_{H} de las DAs calientes debe ser de $\approx 10^{-6} M_*$ o menor, como para que la masa media de las enanas blancas estudiadas por ellos esté de acuerdo con la correspondiente a la muestra de DAs frías de Bergeron, Saffer & Liebert (1992).